

DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2015.05.026

图像正则化扩散行为及统一处理框架

苏伯超, 张晓华, 刘宛予, 李莉

(哈尔滨工业大学 电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

摘要: PDE 的图像正则化是一种基于扩散思想的非线性滤波方法, 是解决降噪、伪影去除、结构增强等底层视觉问题的最有效方法之一, 目前针对此类算法的统一分析框架还较为少见。基于 3 种典型 PDE 正则化算法的扩散行为, 提出了一种基于扩散张量的图像正则化算法分析框架, 对于此类算法的分析、开发和拓展具有重要意义, 最后通过实验验证了框架的有效性。

关键词: 偏微分方程; 正则化; 扩散张量; 图像处理

中图分类号: TP394.1; TH691.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-7011(2015)05-0673-08

Diffusion behavior of regularization and a unified framework

SU Bochao, ZHANG Xiaohua, LIU Wanyu, LI Li

(College of Mechanical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: PDE-based image regularization is a nonlinear filter based on the diffusion principle, and also is one of the most efficient solutions for low-level vision consisting of denoising, artifact elimination and structure enhancement. Nevertheless, the unified frameworks for analyzing the PDE-based regularizations are relatively rare. This paper reviews three typical PDE-based methods by analyzing their diffusion behavior, then, proposes a unified analysis framework based on diffusion tensor. It exhibits the fundamental significance for analysis and development, also extends the PDE-based regularization methods. The feasibility of our proposed framework is verified via the experiments.

Keywords: PDE; regularization; diffusion tensor; image processing

0 引言

在计算机视觉和图像处理领域, 图像正则化属于底层的基础算法, 大量应用于图像降噪、伪影去除、结构增强等应用场合, 其处理结果直接影响到图像后续处理如特征提取、分类等应用的成败。基于偏微分方程 (PDE) 正则化在图像处理领域的应用源于 Perona 和 Malik 的开创性论文^[1]中提出的 PM 方程, 其核心是将图像先验知识嵌入图像扩散过程, 在降噪的同时保持图像的几何结构。在这一思想的影响下, 基于 PDE 的正则化算法不仅被广泛用于灰度图像的降噪、纹理增强、图形修复等应用场合^[2-5], 而且已经拓展至向量图

收稿日期: 2014-12-05

基金项目: 科技部国际合作专项基金资助项目(2007DFB30320); 国家自然科学基金资助项目(61271092); 国家自然科学基金青年基金资助项目(61307023)

作者简介: 苏伯超(1976-), 男, 博士, 博士后, 主要研究方向: 图像处理及分析, E-mail: subc97@gmail.com

通讯作者: 张晓华(1960-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向: 智能机器人与运动控制欠驱动系统建模与非线性控制, E-mail: xh_zhang@dlut.edu.cn

引文格式: 苏伯超, 张晓华, 刘宛予, 等. 图像正则化扩散行为及统一处理框架[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2015, 32(5): 673-680.

像,如 RGB 图像^[6-7]。近年来,随着医学成像技术尤以磁共振成像为发展,对张量图像降噪、分割、增强等也成为图像处理领域的热点。基于 PDE 的正则化方法也由此拓展到了张量场^[8-14],其特点类似于灰度图像的处理:将局部几何结构作为先验知识嵌入张量域的扩散过程,从而实现在张量域的降噪等底层处理。

上述正则化方法分别较好解决了标量、向量和张量图像降噪和几何结构保留等问题。但到目前为止,这些算法的模式基本上是针对某一具体问题使用 PDE 理论加以解决。它们在先验知识利用、算法开发流程等方面或多或少具有共同的特点,这些特点是基于 PDE 正则化算法最基本、最重要的特性,构成了此类算法的基本框架不仅可用于 PDE 正则化算法的分析,而且对于经典算法的拓展、新算法的开发,都具有重要的指导意义。

到目前为止,专门、明确的探讨基于 PDE 的算法分析框架和算法开发流程的文章还相对少见,已有的工作^[15]提及正则化算法设计的一些要求,如保留图像的几何结构等等,但都没有明确提出一个普遍适用的算法分析框架用于指导正则化算法的设计,因此当利用 PDE 开发相关的正则化算法时,缺乏规律性的、一般意义上的算法设计流程和指导原则。

本文回顾了两种典型的 PDE 正则化算法,即边缘增强算法(EED)和相干增强算法(CED),并提出一种基于 PDE 的图像正则化算法框架,为图像处理领域的研究人员提供一个具有普遍意义的基于 PDE 的算法分析和开发框架。

1 边缘增强算法的扩散行为

边缘增强算法使用局部正交坐标系描述几何特征,其正交坐标系的建立始于高斯平滑后的图像

$$I_{\sigma} = I * G_{\sigma} \quad (1)$$

其中, σ 为高斯核 G_{σ} 的标准差,利用 I_{σ} 的梯度可建立起局部正交坐标系:

$$v_1 \parallel \nabla I_{\sigma}, \quad v_2 \perp \nabla I_{\sigma} \quad (2)$$

结构张量 J_0 给出了局部几何结构,

$$J_0 = \nabla I_{\sigma} * \nabla I_{\sigma}^T \quad (3)$$

其中,结构张量 J_0 为对称的正定矩阵,将其分解获得的特征值及特征向量如下所示:

$$v_1 \parallel \nabla I_{\sigma}, \quad v_2 \perp \nabla I_{\sigma}$$

对应的特征值为:

$$\mu_1 = |\nabla I_{\sigma}|^2, \quad \mu_2 = 0 \quad (4)$$

由公式(5)和公式(6)可见,结构张量 J_0 的特征向量 v_1, v_2 定义的局部正交坐标系,给出了 2 个可供选择的扩散方向。这一特点非常有利于保留图像边缘。

EED 算法的扩散过程是通过构造扩散张量增强边缘的同时降低噪声的过程。扩散张量 D 的构建使用了结构张量的特征向量信息。如公式(3)所示, v_1, v_2 为结构张量 J_0 的特征向量,设扩散张量 D 的特征向量为 v_1, v_2 ,二者的关系为 $v_1 \parallel v_1, v_2 \parallel v_2$;同时,扩散张量 D 的特征值为 λ_1, λ_2 ,用于表示扩散强度。因此,在扩散过程中为了保持边缘,可以通过调节扩散张量的特征值 λ_1 ,降低在梯度方向 v_1 的扩散强度;而增强边缘方向 v_2 的扩散强度 λ_2 以实现对噪声的去除。为此,将梯度方向 v_1 扩散率 λ_1 设为梯度的减函数,扩散率函数 c ^[16]定义如下:

$$\begin{cases} \lambda_1(\mu_1) = g(\mu_1) \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$g(\mu_1) = \exp\left(\frac{-\mu_1^5}{5\lambda^5}\right)$$

函数 $g(\mu_1)$ 为减函数,扩散张量 D 构建如下:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T \quad (6)$$

因此,边缘增强算法散度算子中的扩散通量表示为

$$(\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T) \cdot \nabla I_{\sigma} \quad (7)$$

其扩散方向不是沿梯度方向 ∇I_{σ} ,而是沿局部坐标系 v_1, v_2 指示的方向。同时,扩散张量特征值 λ_1 与 λ_2 决

定了扩散的强度,因此,相比于经典的 PM 方程,EED 算法的扩散过程更为精确,因而具有更好的边缘增强效果。

2 相干增强算法的扩散行为

存在一类其基本几何结构为平行曲线,如图 1 所示。

为实现降噪及结构增强,此类图像的扩散应主要沿相干方向进行,才能在降低噪声的同时,实现相干增强。为此需要检测其局部几何结构,通过矩阵 J_ρ 与高斯核 K_ρ 卷积,引入局部邻域梯度信息,

$$J_\rho = K_\rho * (\nabla I_\sigma \nabla I_\sigma^T) \quad (8)$$

J_ρ 为半正定的对称矩阵, ρ 为高斯核 K_ρ 的标准差,同时表示像素 I_σ 的局部邻域范围。结构张量 J_ρ 的特征向量 v_1 与 v_2 用于表示邻域 ρ 内梯度分布的主要方向,特征值 λ_1 与 λ_2 则分别表示 v_1, v_2 方向灰度值的变化。最小特征值 λ_2 表示了最小的灰度变化率,因此其对应的特征向量 v_2 指向的即为局部相干方向,这是结构张量 J_ρ 包含的最重要的结构信息。

为实现沿相干方向扩散的目标,需要构建扩散张量 D 将扩散限制在图像局部相干方向上。因此,扩散张量 D 应与结构张量 J_ρ 拥有相同的特征向量;同时,其特征值 λ_2 与 λ_1 则相应表示特征向量 v_2 与 v_1 方向上的扩散强度。此时扩散张量 D 的特征值也可称为扩散率函数,其扩散张量见公式(7)。在与相干方向正交的 v_1 方向, λ_1 的取值为 α (一般取 0.001);而相干方向的扩散率函数 λ_2 则与该点相干性度量 k 相关,其计算公式^[17]如下:

$$k = (\mu_1 - \mu_2)^2 \quad (9)$$

k 值越大,该点相干度越强。因此相干方向 v_2 的扩散率函数 λ_2 如下:

$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha, & \text{if } k = 0 \\ \alpha + (1 + \alpha) \exp\left(\frac{-c}{k}\right) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $c > 0$ 为阈值:当 $k \gg c$ 时, $\lambda_2 \approx 1$; $k \ll c$ 时, $\lambda_2 \approx \alpha$ 。由公式可见, λ_2 是相干测度 k 的增函数,由此获得的扩散张量 D 实现了在相干方向的增强扩散,在降噪的同时,能很好地保持平行线结构的几何特征。

3 算法特点归纳

EED 算法与 CED 算法分别引入了结构张量 J_0 与 J_ρ 描述图像局部几何特征,其特征值与特征向量不仅给出了邻域灰度变化的大小,还给出灰度变化主要方向,这些信息可用于规划扩散过程,以达到正则化的效果。

在总结以上 2 种算法特点基础上,提出了基于 PDE 正则化算法的分析框架。为避免歧义,将 PDE 算法限定为散度形式 $\partial I / \partial t = \text{div}(\cdot)$ 。

1) 确定正则化的目标。正则化算法一般都有降噪、去伪影等作用,更重要的是降噪同时保留重要几何结构。

2) 通过结构张量 J 描述图像的局部几何结构。利用张量的“特征值-特征向量”信息,可辨别多种几何特征,有助于更加细致描述扩散过程,从而获得更好的正则化效果。

3) 构建扩散张量 D 用于规划扩散过程。一般将扩散率设为结构张量特征值 μ 的函数 $\lambda = f(\mu)$ 。

综上所述,提出的一个普遍适用的基于扩散张量的算法分析、处理框架,如图 2 所示。

4 实验验证

基于图 2 的框架,通过分析图像正则化目标和局部几何结构,构建适当的扩散张量用于驱动扩散过程,

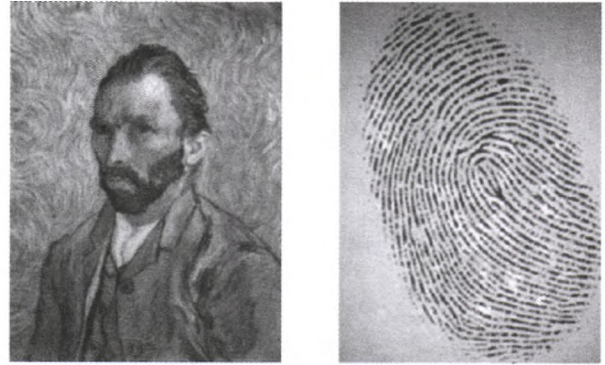


图 1 平行曲线结构图像

Fig. 1 The images with flow-like structure

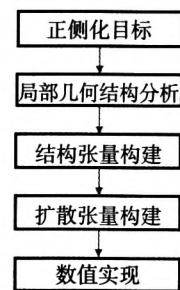


图 2 基于 PDE 正则化算法的分析框架

Fig. 2 The framework for analyzing PDE-based regularization algorithm

从而实现对不同图像的正则化处理。以下结合图 2 的算法分析框架,利用 3 组实验分别对图像进行降噪、边缘增强、相干增强等正则化处理。其中 PSNR 为峰值信噪比。

4.1 图像降噪

在本实验中,基于图 2 的分析框架处理了一幅噪声图像,通过正则化图像实现降噪。示例图像如下:

1) 噪声图像的正则化要求

原图像添加了方差为 0.1,均值为 0 的高斯噪声,图像正则化的目标除了降低噪声的同时,还须保持图像几何结构不被改变。为此首先需要分析图像的局部几何结构。

2) 局部几何结构分析

按照提出的分析框架,构建结构张量用于描述图像的局部几何结构。在构建结构张量之前,首先对图像做卷积,去除微小噪声及伪影的影响。



图 3 原始噪声图像
Fig. 3 Original noisy image



图 4 卷积处理图像
Fig. 4 Image after convolution

3) 结构张量构建

由于正则化要求不仅仅是降噪,还要求保护其几何结构如边缘不被破坏。为此基于 PDE 的扩散正则化过程需要沿边缘进行,才能在保护边缘的同时降低噪声。因此,需要将结构张量用于刻画图像局部几何结构,其特征向量如下:

$$v_1 \parallel \nabla I_\sigma, \quad v_2 \perp \nabla I_\sigma$$

其中, v_1 和 v_2 分别为图像边缘的法向及切向方向。

4) 扩散张量构建

在结构张量描述局部几何结构的基础上,可以构建扩散张量用于驱动扩散过程,公式如下:

$$v_1 \parallel v_1, v_2 \parallel v_2$$

其中, v_1 与 v_2 是扩散张量的特征向量;

$$\lambda_1, \lambda_2 = \exp\left(-\frac{\|\nabla I_\sigma\|^2}{k^2}\right)$$

其中, λ_1, λ_2 是扩散张量的特征值, k 为阈值;由此获得如下的扩散张量:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

据此在图 5 绘出扩散张量的示意图。图中扩散张量以椭圆表示,平坦区域的椭圆形状近似于圆形,因其特征值 $\mu_1 \approx \mu_2$, 相差甚小;边缘区域椭圆形状几乎为线状,因其特征值 $\mu_1 \gg \mu_2$, 因此从扩散张量形状即可分辨边缘或平坦区域。扩散过程将沿张量特征向量方向扩散。

5) 基于扩散张量的边缘增强

通过扩散张量 D 与梯度场相乘,可实现对扩散通量的重新规划,扩散将沿着扩散张量 D 的特征向量方向进行,扩散强度由 D 的特征值调节,见以下公式:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

$$(\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T) \cdot \nabla I_\sigma$$

由此可见,扩散张量实现了对扩散过程的控制,扩散在每个像素按照扩散张量的特征向量指示的方向,

有效地降低了噪声。图 6 为处于不同迭代次数获得的正则化图像。

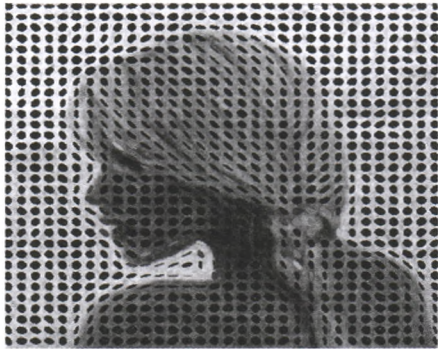


图 5 扩散张量示意图
Fig.5 Demonstration of the diffusion tensor

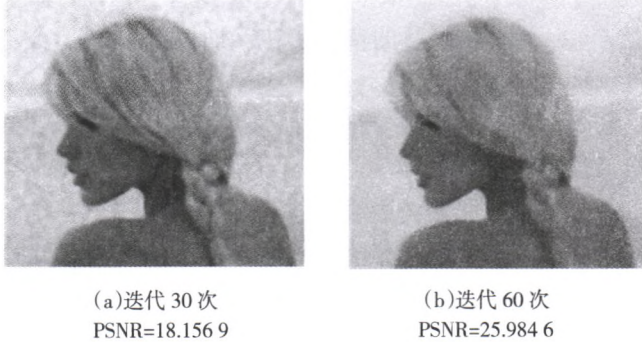


图 6 经过正则化处理的图像
Fig.6 Regularized images

从处理结果与 PSNR 可见,算法实现了图像的降噪处理,并保护了图像的几何结构。

4.2 图像降噪并实现边缘增强

以下的实验中,基于算法分析框架分析、处理一幅噪声图像,在降噪的同时实现其边缘的增强,获得正则化结果,示例图像如图 7 所示。

1)对噪声图像的正则化要求

原测试图像添加了方差为 0.4,均值为 0 的高斯噪声,图像中存在明显的边缘结构,因此正则化的目标除了降低噪声、保持图像几何结构之外,还应该增强图像边缘,为此需要分析图像的局部几何结构。

2)局部几何结构分析

按照提出的算法分析框架,将构建结构张量用于描述图像的局部几何结构。在构建结构张量之前,首先对图像做卷积,以去除微小噪声及伪影的影响,卷积图像如图 8 所示。



图 7 原始噪声图像
Fig.7 Original noisy image

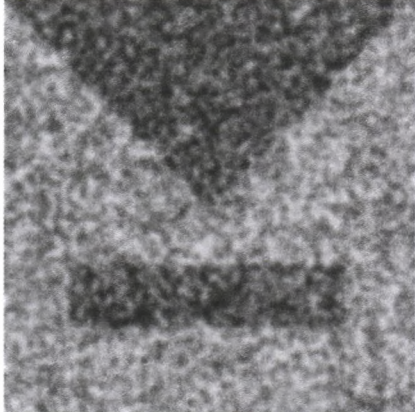


图 8 卷积处理图像
Fig.8 Image after convolution

3)结构张量构建

由于正则化要求不仅仅降噪,还要求增强边缘,因此,扩散正则化过程需要沿边缘进行,而且,在边缘的扩散强度应显著小于在平坦区域,才能在增强边缘的同时降低噪声。因此,需要构建结构张量刻画图像边缘结构。结构张量的特征向量如下:

$$v_1 \parallel \nabla I_\sigma, \quad v_2 \perp \nabla I_\sigma$$

其中 v_1 和 v_2 分别为局部边缘的法向及切向方向。

4)扩散张量构建

在结构张量描述局部几何结构的基础上,可以构建扩散张量用于驱动扩散过程,公式如下:

$$v_1 // v_1, v_2 // v_2$$

其中 v_1 与 v_2 是扩散张量的特征向量;

$$\begin{cases} \lambda_1(\mu_1) = g(\mu_1) \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

其中 λ_1, λ_2 为扩散张量的特征值;获得如下的扩散张量:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

据此在图 11 绘出扩散张量的示意图如图 9 所示,图中扩散张量以椭圆表示,扩散过程将沿张量特征向量指示方向扩散。

5) 基于扩散张量的边缘增强

通过扩散张量 D 与梯度场相乘,可实现对扩散通量的重新规划,扩散将沿着扩散张量 D 的特征向量方向进行,扩散强度通过 D 的特征值进行调节,见以下公式:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

$$(\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T) \cdot \nabla I_\sigma$$

由此可见,扩散张量实现了对扩散过程的控制,使得扩散沿着图像的边缘进行,既降低了噪声,又实现了对边缘的增强。图 10 为不同迭代次数的正则化图像。

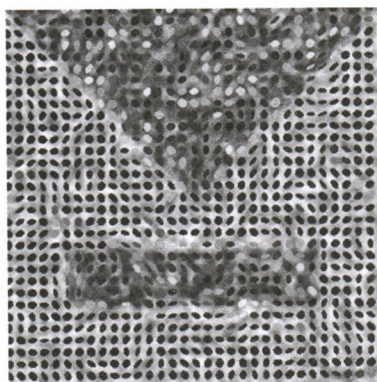
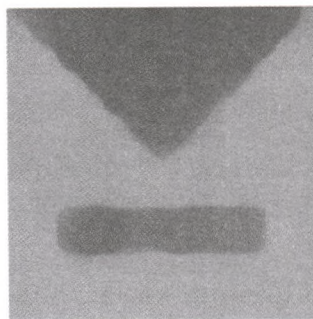
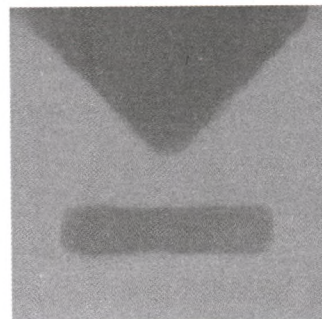


图 9 扩散张量示意图

Fig. 9 Demonstration of the diffusion tensor



(a) 迭代 30 次
PSNR=20.265 8



(b) 迭代 80 次
PSNR=27.364 7

图 10 经过正则化处理的图像

Fig. 10 Regularized images

从处理结果与 PSNR 数值可见,算法实现对图像的降噪处理、保护图像的几何结构的同时,增强了图像的边缘结构。

4.3 相干增强

除了降噪、边缘增强等处理,算法分析框架还可用于分析、处理另一类图像获得正则化结果。示例图像如图 11。

1) 相干增强要求

图 11 为梵高自画像。其特点在于除了噪声,还存在大量一维平行曲线结构,因此其正则化的目标除了降低噪声、保持图像几何结构外,还应增强图像中平行线结构,即实现相干方向的增强。为此,首先需要对图像的局部几何结构进行分析。

2) 局部几何结构分析

根据正则化要求,需要构建结构张量用于描述图像中的局部相干结构(即灰度连续的曲线)。在构建结构张量之前,首先对图像做卷积,去除微小噪声及伪影的影响,卷积图像见图 12。

3) 结构张量构建

由于正则化的目标是降噪的同时增强相干方向,因此扩散应主要沿相干方向(曲线灰度连续方向)进行。构建的结构张量需要刻画图像的相干方向,为此需要引入下面的张量构建公式:

$$J_\rho = K_\rho * (\nabla I_\sigma \nabla I_\sigma^T)$$

结构张量 J_ρ 分解如下:

$$J_\rho = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

其中, v_1 和 v_2 分别最大、最小特征值对应方向, v_2 对应图像中的相干方向(及灰度连续方向)。



图 11 原始图像
Fig. 11 Original image

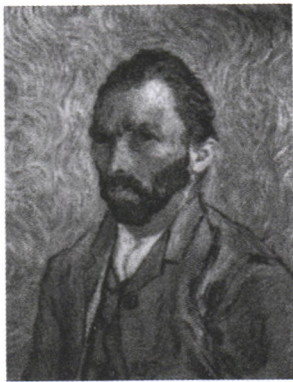


图 12 卷积处理后图像
Fig. 12 Image after convolution

4) 扩散张量构建

在结构张量 J_p 描述局部相干方向的基础上, 构建扩散张量用于驱动扩散过程, 公式如下:

$$v_1/v_1, v_2/v_2$$

其中, v_1 与 v_2 是扩散张量的特征向量;

$$\lambda_1 = 0.001$$
$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha, & \text{if } k = 0 \\ \alpha + (1 + \alpha) \exp\left(\frac{-c}{k}\right) \end{cases}$$

其中, λ_1, λ_2 为扩散张量的特征值; $\alpha = 0.001$ 为常数。扩散张量的构建如下:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$

扩散张量的张量示意图如图 13 所示, 扩散过程将沿扩散张量的特征向量方向扩散。

5) 基于扩散张量的边缘增强

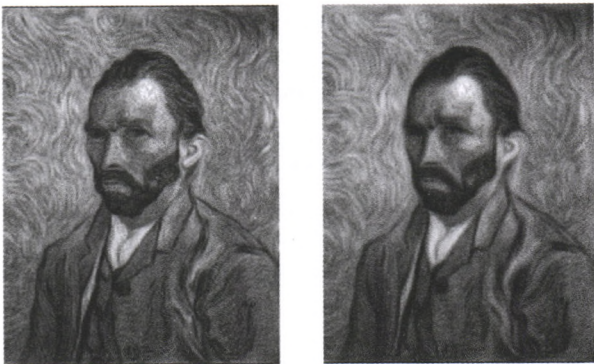
扩散张量 D 指示扩散的方向, 因此扩散将沿着扩散张量 D 的特征向量指示的方向进行, 扩散强度由 D 的特征值调节, 参见以下公式:

$$D = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T$$
$$(\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T) \cdot \nabla I_\sigma$$

由此可见, 利用扩散张量实现了对扩散过程的控制, 使得扩散主要沿着图像的相干方向进行, 既降低了图像的噪声, 又实现了在相干方向上的增强。图 14 为不同迭代次数获得的正则化图像。



图 13 扩散张量示意图
Fig. 13 Demonstration of the diffusion tensor



(a) 迭代 20 次
PSNR=19.469 8

(b) 迭代 50 次
PSNR=22.159 6

图 14 经过正则化处理的图像
Fig. 14 Regularized images

从图像处理结果与 PSNR 可见, 相干增强算法不仅实现对图像的降噪, 也实现了图像的相干增强, 获得较好的正则化效果。

由以上 3 组实验可见,尽管测试图像的几何结构不同,其处理目标也不尽相同。依照提出的正则化算法分析框架,将图像正则化目标与图像局部几何结构分析统一在扩散张量 D 中,利用扩散张量驱动扩散过程,实现了对图像的正则化处理,从而验证了提出算法框架的有效性。

5 结 论

本文详细分析了 2 种典型的基于 PDE 的正则化算法。其基本思想都是基于扩散,但在局部几何结构的检测和扩散行为方面区别较大,这些区别导致了适用图像的不同和算法效果的差异。通过归纳 2 种算法的扩散行为,将算法的差异统一于扩散张量 D 这一概念之下。底层图像处理如降噪、边缘保持、分割、相干增强等,都可以通过设计相应的扩散张量 D 并利用 PDE 迭代得以实现。基于以上想法,提出一个具有普遍意义基于 PDE 的正则化算法框架,可用于相关算法的开发、分析等,最后结合实验验证了算法分析框架的有效性。

参考文献

- [1] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12: 629–639.
- [2] 任文琦, 王元全. 基于梯度矢量卷积场的四阶各向异性扩散及图像去噪[J]. *光学精密工程*, 2013, 21(10): 2713–2717.
- [3] 韩希珍, 赵建. 结合偏微分方程增强图像纹理及对比度[J]. *光学精密工程*, 2012, 20(6): 1382–1388.
- [4] 金伟, 王文龙, 符冉迪, 等. 联合块匹配与稀疏表示的卫星云图修复[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(7): 1886–1895.
- [5] 孙剑明. 应用正则化影响函数扩散模型的星图噪声滤波[J]. *光学精密工程*, 2014, 22(6): 1655–1660.
- [6] TIAN H, CAI H, LAI J. A novel diffusion system for impulse noise removal based on a robust diffusion tensor[J]. *Neurocomputing*, 2014, 133: 222–230.
- [7] CHATTERJEE S. Anisotropic diffusion and segmentation of colored flowers[C]. *Computer Vision, Graphics & Image Processing*, 2008. ICVGIP 08. Sixth Indian Conference. Bhubaneswar: IEEE, 2008, 37: 599–605.
- [8] TSCHUMPERLÉ D. Fast anisotropic smoothing of multi-valued images using curvature-preserving PDE's[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2006, 68(1): 65–82.
- [9] PETER P, WEICKERT J, MUNK A, et al. Justifying Tensor-driven diffusion from structure-adaptive statistics of natural images[C]. *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Berlin: Springer International Publishing, 2015: 263–277.
- [10] WELK M, BECKER F, SCHNÖRR C, et al. Matrix-valued filters as convex programs[M]. *Scale Space and PDE Methods in Computer Vision*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 204–216.
- [11] BROX T, VAN DEN BOOMGAARD R, LAUZE F. Adaptive structure tensors and their applications[M]. *Visualization and processing of tensor fields*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 17–47.
- [12] SCHULTZ T, BURGETH B, WEICKERT J. Flexible segmentation and smoothing of DT-MRI fields through a customizable structure tensor[M]. *Advances in Visual Computing*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 455–464.
- [13] CHEFD' HOTEL C, TSCHUMPERLÉ D, DERICHE R, et al. Constrained flows of matrix-valued functions: application to diffusion tensor regularization[M]. *Computer Vision-ECCV 2002*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2002: 251–265.
- [14] BURGETH B, DIDAS S, FLORACK L, et al. A generic approach to diffusion filtering of matrix-fields[J]. *Computing*, 2007, 81(2–3): 179–197.
- [15] TSCHUMPERLÉ D. Curvature-preserving regularization of multi-valued images using PDE's[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 295–307.
- [16] WEICKERT J. Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing [M]. Vienna: Springer Vienna, 1996.
- [17] WEICKERT J. Coherence-Enhancing diffusion filtering[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1999, 31(3): 111–127.