非线性问题数值解

内容：期末复习

姓名： 甄继伟

学院： 麻省理工大学

专业： 计算数学

学号： 2001312001

2024 年 6 月 14 日

目录

1 范数

1.1 范数公理

映射 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ 被称为 **范数** ,
若其满足如下公理:

1) 正定性:$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$

$\|\boldsymbol{x}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$

2) 正齐性:$\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R};$

3) 三角不等式:$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in\mathbb{R}^n.$

1.2 范数公理简化

范数公理可以简化为

$$\|x\|=0\Rightarrow x=0,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

推导

1) 由正齐性,

$\|0\cdot x\|=|0|\|x\|\Rightarrow\|0\|=0$, 即 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$.

进一步，我们有 $\|-x\|=|-1|\|x\|=\|x\|$.

2) 由三角不等式,

$0=\|-x+x\|\leq\|x\|+\|-x\|=2\|x\|\Rightarrow\|x\|\geq 0.$

2 仿射集合

2.1 仿射集合定义

2.1.1 二点仿射集合定义

如果通过集合 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ 中任意两个不同点的直线仍然在集合 $\mathbb{D}$ 中那么称集合 $\mathbb{D}$ 是**仿射**的. 也就是说，$\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ 是仿射的等价于：

对于任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{D}$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有 $\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{D}$.

换而言之，$\mathbb{D}$ 包含了 $\mathbb{D}$ 中任意两点的系数之和为 1 的线性组合

2.1.2 多点仿射集合定义

如果 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, 我们称具有 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ 形式的点为 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的 **仿射组合** .

一个仿射集合包含其中任意点的仿射组合, 即如果 $\mathbb{D}$ 是一个仿射集合, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{D}$, 并且 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, 那么 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ 仍然在 $\mathbb{D}$ 中

2.1.3 子空间

如果 $\mathbb{D}$ 是一个仿射集合并且 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D}$, 则集合

$$\mathbb{V} = \mathbb{D} - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in \mathbb{D}\}$$

是一个 **子空间** ，即关于加法和数乘是封闭的.

推导

设 $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{V}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$, 则有 $\boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D}, \boldsymbol{\nu}_2 + \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D}$.

因为 $\mathbb{D}$ 是仿射的，且 $\alpha + \beta + (1-\alpha-\beta) = 1$, 所以

$$\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_0 = \alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{x}_0) + \beta(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_0) + (1-\alpha-\beta)\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D},$$

由 $\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{D}$, 我们可知 $\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{V}$.

因此，仿射集合 $\mathbb{D}$ 可以表示为

$$\mathbb{D} = \mathbb{V} + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in \mathbb{V}\},$$

即仿射集合 =一个子空间加上一个偏移.

与仿射集合 $\mathbb{D}$ 相关联的子空间 $\mathbb{V}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 的选取无关，所以 $\boldsymbol{x}_0$ 可以是 $\mathbb{D}$ 中的任意一点.

我们定义仿射集合 $\mathbb{D}$ 的维数为子空间 $\mathbb{V} = \mathbb{D} - \boldsymbol{x}_0$ 的维数，其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{D}$ 中的任意元素.

2.2 线性方程组的解集

线性方程组的解集 $\mathbb{D}=\{x \mid Ax=b\}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ 是一个仿射集合,

推导

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{D}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}$。则对于任意 λ, 我们有

$$\boldsymbol{A}\left(\lambda \boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\right)=\lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}.$$

这表明任意的仿射组合 $\lambda \boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 也在 $\mathbb{D}$ 中，并且与仿射集合 $\mathbb{D}$ 相关联的子空间就是 $\boldsymbol{A}$ 的 零空间.

反之任意仿射集合可以表示为一个线性方程组的解集。

这也解释了为什么线性方程组的解可以表示为 通解 + 特解 的形式.

3 凸包与凸锥

1) **凸包** : 对 $\forall \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{D}$ 中元素**一切**凸组合所构成的集合, 记为 $Co(\mathbb{D})$
2) **锥**: 对于任意 $x \in \mathbb{D}$ 和 $\lambda \geqslant 0$ 都有 $\lambda x \subseteq \mathbb{D}$, 我们称集合 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ 是 **锥** .
3) **凸锥**: 如果集合 $\mathbb{D}$ 是锥，并且是凸的，则称 $\mathbb{D}$ 为**凸锥**,

   即对于任意 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in \mathbb{D}$ 和 $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, 都有

$$\lambda_1 x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)} \in \mathbb{D}.$$

4 G 可微与 F 可微

4.1 Gateaux 可导 (弱可导)

设映射 $F: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \in \operatorname{int}(\mathbb{D})$. 如果存在线性映射 $\boldsymbol{A} \in L\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$, 使对任何 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h} \in \mathbb{D}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}\|F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})-t\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|=0 \tag{4.1}$$

则称 F 在 $\boldsymbol{x}$ 处 **G-可导** (Gateaux-可导), 并称 $\boldsymbol{A}$ 为 F 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的**G-导数**，记为 $F'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$.

我们称 $F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$ 为 F 在 $\boldsymbol{x}$ 点沿 $\boldsymbol{h}$ 的 G-微分. 不难发现，由式 (4.1) 有

$$F'(x)\boldsymbol{h}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[F(x+t\boldsymbol{h})-F(x)].$$

4.2 Freschet 可导 (强可导)

设映射 $F:\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, \boldsymbol{x}\in$int$(\mathbb{D})$. 如果存在映射 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, 使对任何 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in\mathbb{D}$, 有

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{\|F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0, \tag{4.2}$$

则称 F 在 $\boldsymbol{x}$ 处 **F-可导** (Fréchet-可导), 并称 $\boldsymbol{A}$ 为 F 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的**F-导数**，仍记为 $F'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$. 与上类似，称 $F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$ 为 F 在 $\boldsymbol{x}$ 点沿 $\boldsymbol{h}$ 的**F-微分**。

4.3 F-可微与连续

若映射 $F:\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在点 x 处 F-可导，则 F 在 $\boldsymbol{x}$ 处连续.

确切地，$\exists x$ 的闭球 $\overline{\mathbb{S}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta})\subset\mathbb{D}$ 及常数 $C>0$, 使当 $\|\boldsymbol{h}\|\leqslant\delta$ 时，有

$$\|F(x+h)-F(x)\|\leqslant C\|h\|. \tag{4.3}$$

推导

我们只是在 $\mathbb{D}$ 的内点定义了可导性，故 $x\in$int$(\mathbb{D})$, 从而存在 $\delta_1>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{h}\|\leqslant\delta_1$ 时，有 $x+\boldsymbol{h}\in\mathbb{D}$.

于是对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 由式 (4.2), 存在正数 $\delta\leqslant\delta_1$, 使得当 $\|\boldsymbol{h}\|\leqslant\delta$ 时，有

$$\|F(x+h)-F(x)-F'(x)h\|\leqslant\varepsilon\|h\|.$$

故

$$\|F(x+h)-F(x)\|\leqslant\|F'(x)\|\|h\|+\varepsilon\|h\|=(\|F'(x)\|+\varepsilon)\|h\|.$$

取 $C=\|F'(\boldsymbol{x})\|+\boldsymbol{\varepsilon}$, 立即得到式 (4.3).

连续性是 F-可导的必要条件。

4.4 复合映射的求导法则 (链锁规则)

设映射 $F:\mathbb{D}_F\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 x 处存在 G-导数，而映射 $G:\mathbb{D}_G\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^q$ 在 $F(\boldsymbol{x})$ 处存在 F-导数，则复合映射 $H=G\circ F$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处一定存在 G-导数，且

$$H'(x)=G'(F(x))F'(x).$$

如果 $F'(x)$ 是 F-导数，则 $H'(x)$ 也是 F-导数

推导

取定 h. 由定义，$x\in\operatorname{int}(\mathbb{D}_F)$ 且 $F(\boldsymbol{x})\in\operatorname{int}(\mathbb{D}_G)$.

而由 F 在 $\boldsymbol{x}$ 处有 G-导数可知，F 在 x 处半连续.

因 x ∈int($\mathbb{D}_F$), 故存在 $\delta>0$, 使得当 $|t|<\delta$ 时, $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}\in\mathbb{D}_F$, 同时 $F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\in\mathbb{D}_G$. 因此，对于 $0<|t|<\delta$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left\|H(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-H(\boldsymbol{x})-tG'(F(\boldsymbol{x}))F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\right\|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{t}\left\|G(F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}))-G(F(\boldsymbol{x}))-G'(F(\boldsymbol{x}))[F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})]\right\|+\\
&\quad\ \ \frac{1}{t}\left\|G'(F(\boldsymbol{x}))\left[F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})-tF'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\right]\right\|\\
&\quad=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2.
\end{aligned}$$

当 $t\to0$ 时，显然 $\boldsymbol{I}_2\to0$.

由于 F 是 G-可导的，故 $\frac{1}{t}\|F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})|$ 有界. 从而对于 $0<|t|<\delta$ 中使得 $F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\neq F(\boldsymbol{x})$ 的任一 t 值，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_1=&\frac{\|F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})\|}{t}\times\\
&\frac{\|G(F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}))-G(F(\boldsymbol{x}))-G'(F(\boldsymbol{x}))[F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})]\|}{\|F(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{x})\|}\\
&\to\|F'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\|\times0=0.
\end{aligned}$$

5 中值定理

5.1 中值定理不等式

若 $F:\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在凸集 $\mathbb{D}_0\subset\mathbb{D}$ 上 G-可导，则对任意 $x,y,z\in\mathbb{D}_0$, 有

1) $\|F(y)-F(x)\| \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}\|F'(x+t(y-x))\|\|y-x\|$;

2) $\|F(\mathrm{y})-F(\mathrm{z})-F'(\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mathrm{z})\| \leqslant \sup\limits_{0 \leq t \leq 1}\|F'(\mathrm{z}+t(\mathrm{y}-\boldsymbol{z}))-F'(\mathrm{x})\|\|\mathrm{y}-\boldsymbol{z}\|$.

5.2 积分中值定理

若 $F: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在凸集 $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ 上 G-可导，且 F' 在 $\mathbb{D}_0$ 上半连续，则对任何 $x, y \in \mathbb{D}_0$, 有

$$F(\mathrm{y})-F(\mathrm{x})=\int_0^1 F'(\mathrm{x}+t(\mathrm{y}-\mathrm{x}))(\mathrm{y}-\mathrm{x}) \mathrm{d} t. \tag{5.1}$$

6 Holder 连续

设 $F: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在凸集 $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ 上连续可导，且 F'
满足

$$\left\|F'(\boldsymbol{x})-F'(\boldsymbol{y})\right\| \leqslant \alpha\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^p, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{D}_0, \tag{6.1}$$

其中 $\alpha \geqslant 0, p \geqslant 0$ 为常数，则对任何 $x, y \in \mathbb{D}_0$, 有

$$\|F(\mathrm{y})-F(\mathrm{x})-F'(\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mathrm{x})\| \leqslant \frac{\alpha}{1+p}\|\mathrm{y}-\mathrm{x}\|^{1+p}$$

推导

证：由式 (5.1) 和式 (6.1), 有

$$\begin{aligned}
\|F(\mathrm{y})-F(\mathrm{x})-F'(\mathrm{x})(\mathrm{y}-\mathrm{x})\| & =\left\|\int_0^1\left[F'(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-F'(\boldsymbol{x})\right](\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \mathrm{d} t\right\| \\
& \leqslant \int_0^1\left\|F'(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-F'(\boldsymbol{x})\right\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| \mathrm{d} t \\
& \leqslant \alpha\|\mathrm{y}-\boldsymbol{x}\|^{1+p} \int_0^1 t^p \mathrm{~d} t \\
& =\frac{\alpha}{1+p}\|\mathrm{y}-\boldsymbol{x}\|^{1+p} .
\end{aligned}$$

当映射 $F: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在开集 $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ 上 G-可导时其 G-导数显然属于 $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$。

这样就得到一个映射 $F': \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 称为 F 的 **导映射** . 因此可以研究导映射 F' 的可微性.

7 凸泛函

泛函 $f(\boldsymbol{x})$ 强凸的 充要条件 是存在 $c>0$ 使得

$$f(x)-c\|x\|_2^2$$

为凸泛函

推导

凸泛函定义

若对 $\forall x\neq y\in\mathbb{D}_0$ 和 $\forall\lambda\in(0,1)$, **有**

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \tag{7.1}$$

则称 f 为 $\mathbb{D}_0$ 上的凸泛函;

充分性: 设 x,y,λ 如凸函数定义中所定义. 设存在 $c>0$ 使得 $f(\boldsymbol{x})-c\|\boldsymbol{x}\|_2^2$ 为凸泛函，则由 (7.1) 有

$$\begin{aligned}
&f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\\
&\qquad\leq\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})+c\|\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\|_2^2-\lambda c\|\boldsymbol{x}\|_2^2-(1-\lambda)c\|\boldsymbol{y}\|_2^2\\
&\qquad=\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})+c(2\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}-\lambda(1-\lambda)(\|\boldsymbol{x}\|_2^2+\|\boldsymbol{y}\|_2^2))\\
&\qquad=\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-c\lambda(1-\lambda)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2,
\end{aligned}$$

即 $f(\boldsymbol{x})$ 强凸.

强凸定义

若存在常数 $c>0$, 使对上述 x,y,λ 有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})+c\lambda(1-\lambda)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}), \tag{7.2}$$

则称 f 在 $\mathbb{D}_0$ 上是强凸的

必要性: 设 $f(x)$ 强凸，则由 (7.2) 可知存在 $c>0$ 使得

$$f(\boldsymbol{\lambda x}+(1-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{x})+(1-\boldsymbol{\lambda}) f(\boldsymbol{y})-c \boldsymbol{\lambda}(1-\boldsymbol{\lambda})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2$$

成立. 由于充分性证明中不等式右端皆为等式, 因此得证.

8 同胚映射——向量值扰动定理

设 $A \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 非奇异 , $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在闭球 $\overline{\mathbb{S}}_0=\overline{\mathbb{S}}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{\delta}\right) \subset \mathbb{D}$ 上满足

$$\|G(x)-G(y)\| \leqslant \alpha\|x-y\|, \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{S}}_0,$$

其中 $0<\alpha<\beta^{-1}, \beta=\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|$,

则由 $F(x)=\boldsymbol{A} x-G(x)$ 定义的映射 $F: \overline{\mathbb{S}}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 与 $F\left(\overline{\mathbb{S}}_0\right)$ 之间的一个同胚映射.

此外，对 $\forall \boldsymbol{y} \in \overline{\mathbb{S}}_1=\mathbb{S}\left(F\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right), \sigma\right)$, 其中 $\sigma=\left(\beta^{-1}-\alpha\right) \delta$, 方程 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 在$\overline{\mathbb{S}}_0$ 中有唯一解。

因此，特别有 $\overline{\mathbb{S}}_1 \subset F\left(\overline{\mathbb{S}}_0\right)$

推导

1) 对固定的 $\boldsymbol{y} \in \overline{\mathbb{S}}_1$, 作映射 $H: \overline{\mathbb{S}}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$\because F(x)=\boldsymbol{A} x-G(x)$, 则有 $G(x)=\boldsymbol{A} x-F(x)$ 和 $x=\boldsymbol{A}^{-1} F(x)^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} G(x)$

$$H(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(G(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{-1}(F(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}).$$

显然，$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 在 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 中有唯一解的充分必要条件是:

H 在 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 中有 **唯一**的不动点.

注意，对 $\forall x, z \in \overline{\mathbb{S}}_0$, 有

$$\|H(x)-H(z)\|=\left\|A^{-1}[G(x)-G(z)]\right\| \leqslant \beta \alpha\|x-z\|.$$

因 $\beta \alpha<1$, 故 H 在 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 上是压缩映射. 又对 $\forall \boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{S}}_0$, 有

$$\begin{aligned}
\left\|H(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\| & \leqslant\left\|H(\boldsymbol{x})-H\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\right\|+\left\|H\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\| \\
& \leqslant \beta \alpha\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(0)}\right\|+\boldsymbol{\beta}\left\|F\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)-\boldsymbol{y}\right\| \\
& \leqslant \beta \alpha \cdot \delta+\beta \cdot \sigma=\delta,
\end{aligned}$$

因此 ,H 将 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 映入自身，即 $H\left(\overline{\mathbb{S}}_0\right) \subset \overline{\mathbb{S}}_0$, 由压缩映射原理 ,$H$ 在 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 中有唯一不动点.

故方程 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 在$\overline{\mathbb{S}}_0$ 中有唯一解，从而 F 在 $\overline{\mathbb{S}}_0$ 上为双射

2) 现证 F^{-1} 在 $F\left(\overline{\mathbb{S}}_0\right)$ 上是连续的.

事实上，由于对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \overline{\mathbb{S}}_0$ 有

由于 $x=\boldsymbol{A}^{-1} F(x)^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} G(x)$, 故

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| &= \left\|\boldsymbol{A}^{-1}[F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y})]+\boldsymbol{A}^{-1}[G(\boldsymbol{x})-G(\boldsymbol{y})]\right\| . \\
&\leqslant \boldsymbol{\beta}\|F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y})\|+\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,
\end{aligned}
$$

即

$$
\|x-y\| \leqslant \frac{\beta}{1-\beta \alpha}\|F(x)-F(y)\|,
$$

故 F^{-1} 连续. 显然,F 本身也是连续的, 因此,F 是同胚映射

9 迭代格式的构造

对迭代格式 $\boldsymbol{x}^{(k)}=G\left(\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right), \quad k=1,2, \cdots$

1) 如果 G不依赖于迭代步数 k, 且 $x^{(k)}$ 只依赖于 $x^{(k-1)}$, 此时称式为 **单步定常迭代**.

2) 如果 G依赖于迭代步数 k, 但 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 只依赖于 $\boldsymbol{x}^{(k-1)}$, 此时迭代形式可表示为

$$
x^{(k)}=G_k\left(x^{(k-1)}\right), \quad k=1,2, \cdots . \tag{9.1}
$$

称式 (9.1) 为 **单步非定常迭代**.

3) 如果 G 不依赖于迭代步数 k, 但 $x^{(k)}$ 依赖于相邻的 m 个迭代值

$$
x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)},
$$

此时迭代格式可表述为

$$
x^{(k)}=G\left(x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)}\right), \quad k=m, m+1, \cdots . \tag{9.2}
$$

称式 (9.2) 为 m **步定常迭代**.

4) 如果 G依赖于迭代步数 k, 且 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 依赖于相邻的 m 个迭代值

$$x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)},$$

此时迭代格式可表述为

$$x^{(k)}=G_k\left(x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)}\right), \quad k=m, m+1, \cdots . \tag{9.3}$$

称式 (9.3) 为m **步非定常迭代**

10 Ostrowski 定理

Ostrowski 定理

矩阵范数为谱半径的“上确界”

即对任意 $\varepsilon>0$，存在 A 的一种矩阵范数 $\|\cdot\|_{\varepsilon}$，使得

$$\|A\|_{\varepsilon} \leqslant \rho(A)+\varepsilon.$$

设映射 $G: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有一个不动点 $x^* \in$int($\mathbb{D}$), 且在 x^* 处为 F-可导 ,$G'\left(x^*\right)$ 的谱半径

$$\rho\left(G'\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right)=\sigma<1.$$

则存在开球 $\mathbb{S}=\mathbb{S}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\delta}) \subset \mathbb{D}$, 对任意初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{S}, \boldsymbol{x}^*$ 是式 $x^{(k)}=G(x^{(k-1)})$ 的吸引点.

推导

只需验证式 $\|G(x)-G(x^*)\| \leq \alpha\|x-x^*\|$ 成立即可.

因 $\sigma<1$, 故可取 $\varepsilon>0$, 使 $\sigma+3\varepsilon<1$

对 $\varepsilon>0$, 存在一种范数 $\|\cdot\|\ \varepsilon$, 使

$$\left\|G'\left(\boldsymbol{x}^*\right)\right\|_{\varepsilon} \leqslant \sigma+\varepsilon.$$

另一方面，由 G 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处 F-可导和 F-导数的定义可知，对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{S}=\mathbb{S}\left(\boldsymbol{x}^*, \delta\right) \subset \mathbb{D}$ 有

$$\left\|G(\boldsymbol{x})-G\left(\boldsymbol{x}^*\right)-G'\left(\boldsymbol{x}^*\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|_{\varepsilon} \leqslant \boldsymbol{\varepsilon}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|_{\varepsilon}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|G(\boldsymbol{x})-G\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\|_{\varepsilon} \leqslant & \left\|G(\boldsymbol{x})-G\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)-G'\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)\right\|_{\varepsilon}+ \\
& \left\|G'\left(\boldsymbol{x}^{*}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right)\right\|_{\varepsilon} \\
& \leqslant(\boldsymbol{\sigma}+2\varepsilon)\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\right\|_{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

由 $\sigma+2\varepsilon<1$, 我们有 $\|G(x)-G(x^*)\| \leq \alpha\|x-x^*\|$ 成立.

根据吸引点定理, 本定理得证.

吸引点定理

设 x^* 是式 $x=G(x)$ 的解, $G:\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 若存在一个开球 $\mathbb{S}=\mathbb{S}\left(\boldsymbol{x}^{*},\delta\right)=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{*}\|<\delta,\delta>0\}\subset\mathbb{D}$ 和常数 $\alpha\in(0,1)$, 使得对一切 $x\in\mathbb{D}$, 有

$$
\|G(x)-G\left(x^{*}\right)\| \leqslant \alpha\left\|x-x^{*}\right\|.
$$

则对任意 $x^{(0)}\in\mathbb{S}$, $\boldsymbol{x}^*$ 是式 $x^{(k)}=G(x^{(k-1)})$ 的吸引点

11 Kantorovich 定理

设 $F:\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 初始点 $x^(0)$ 满足:

1) $\left[F'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}$ 存在，且

$$
\left\|\left[F'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}\right\| \leqslant \beta,
$$

$$
\left\|\left[F'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}F\left(x^{(0)}\right)\right\| \leqslant \eta;
$$

2) 在 $x^{(0)}$ 的邻域 $\mathbb{S}\left(\boldsymbol{x}^{(0)},\delta\right)$ 内 , $F'\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ 存在并满足 Lipschitz 条件

$$
\|F'(x)-F'(y)\| \leqslant \gamma\|x-y\|, \quad \forall x,y\in\mathbb{S}\left(x^{(0)},\delta\right),
$$

并且

$$
\rho=\beta\eta\gamma\leqslant\frac{1}{2},
$$

$$
\delta\geqslant\frac{1-\sqrt{1-2\rho}}{\rho}\eta,
$$

则式 $F(x)=0$ 至少有一个解 $x^*\in\mathbb{S}\left(x^{(0)},\delta\right)$, 且由式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}-[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ 产生的序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 x^*, 并有估计式

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\leqslant\frac{\theta^{2^k-1}}{\sum\limits_{i=0}^{2^k-1}\theta^{2i}}\eta,$$

其中

$$\theta=\frac{1-\sqrt{1-2\rho}}{1+\sqrt{1-2\rho}}.$$

12 非精确 Newton 法

非精确 Newton 法是为弥补 Newton 法计算量大的不足而提出来的.

顾名思义, 非精确 Newton 法在 Newton 法的每步迭代中只对 Newton 方程进行非精确求解. 非精确 Newton 法实质上是一类内外迭代算法, 其外迭代为经典 Newton 法, 而其内迭代可采用任何线性迭代方法.

这种内外迭代技术由于能够充分利用 Jacobi 矩阵的结构和稀疏性, 因此可以大大降低 Newton 法的计算代价.

Algorithm 1 Solving Nonlinear Equations with Inexact Newton Method

1: for $k=0,1,2,\ldots$ until convergence(直到收敛) do
2: Choose $\bar{\eta}_k\in[0,1)$;
3: Solve the inexact Newton equation

$$F'\left(x^{(k)}\right)s=-F\left(x^{(k)}\right) \tag{12.1}$$

to obtain $s^{(k)}$ such that

$$\left\|r^{(k)}\right\|=\left\|F\left(x^{(k)}\right)+F'\left(x^{(k)}\right)s^{(k)}\right\|\leq\eta_k\left\|F\left(x^{(k)}\right)\right\| \tag{12.2}$$

4: Set $x^{(k+1)}:=x^{(k)}+s^{(k)}$;
5: end for

算法描述了非精确 Newton 法的一般框架,

其中 $\bar{\eta}_k$ 为第 k 步迭代的 **控制阈值**, $\bar{s}^{(k)}$ 为 **非精确 Newton 步** , 而式 (12.2) 则称作 **非精确 Newton 条件**