

Desenvolvimento de Software para Análise de Treliças Planas

André de Weber, Henry Rocha, Vitor Eller

Abstract—O objetivo desse documento é a construção de um software em python para analisar treliças planas, e demonstrar possíveis representações reais em que pode ser utilizado.

Keywords—Python, treliças, treliças planas, software, simulação, Numpy.

1. INTRODUÇÃO:

A disciplina Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos de engenharia da computação estuda estruturas complexas e a física por trás. Uma delas é a treliça, uma estrutura constituída por barras, ligadas por articulações (nós) que se aplicada uma força transformam-se em trações e compressões em cada barra devido ao arranjo geométrico. Uma treliça rígida pode ser formada por três membros conectados.

O estudo foi feito através do desenvolvimento de um software em python para análise de tração e compressão em treliças planas elaborando cálculos de forças internas, deformações, deslocamentos nodais, reações de apoio e tensões internas.

2. CONCEITOS MECÂNICOS:

2.1. *Tensão admissível*

A tensão limite aplicada menor que a tensão de ruptura.

2.2. *Treliças simples*

Estrutura formada pela união de três membros conectados para não sofrer deformações e não ruir sob pequenas cargas.

2.3. *Tipos de apoio*

Os apoios são elementos que restringem os movimentos dos sólidos. Limitam os graus de liberdade de um corpo que nesse estudo se restringem a X e Y.

2.4. *Nós*

Articulação formada pelo encontro entre dois ou mais elementos (barras).

2.5. *Tensões internas*

A tensão é uma resultante das reações contrárias a sua deformação. Pode ser descrita como tração quando o sentido é divergente e compressão quando convergente. Pode ser representada como força por unidade de área.

2.6. Deformação

Mudança na forma e tamanho de um corpo quando aplicada uma força externa.

2.7. Deslocamentos nodais

Caracteriza a deformação no corpo. Descrito como variação da posição dos nós após a deformação.

3. SOFTWARE:

O estudo sobre o comportamento das treliças, dos nós, elementos e apoios influenciados por uma força permitiu maior entendimento da física por trás. Dessa forma foi possível o desenvolvimento do software para automatizar o cálculo das variáveis. A treliça analisada pode ser observada na figura 1, com elementos como barras de aço (resistência de 210 GPa), seções exemplificadas na figura 2 e considerando o $L = 4$.

O programa foi desenvolvido na linguagem Python e foi utilizada majoritariamente a biblioteca Numpy para realizar e facilitar os cálculos.

O input dos valores deverá ser feito através de planilhas excel para facilitar a organização e visualização das entradas.

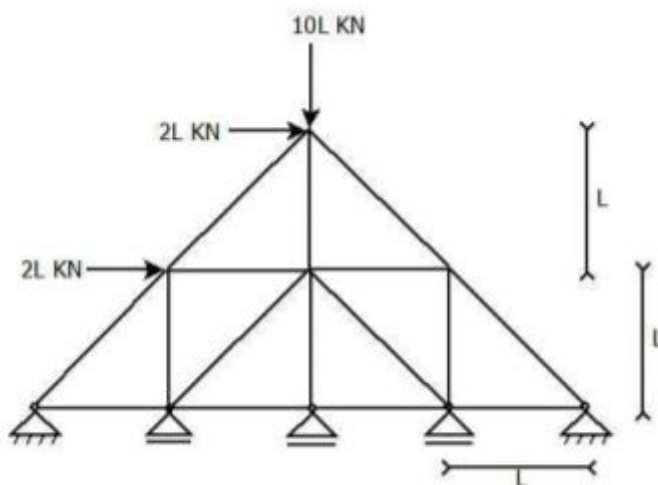


Figura 1 - imagem da treliça analisada.

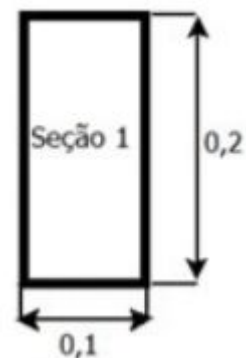


Figura 2 - Seção das barras

3.1. Unidades:

- 3.1.1. Comprimento: metros [m]
- 3.1.2. Módulo de elasticidade: Pascal [Pa]
- 3.1.3. Área: metros quadrados [m²]

- 3.1.4. Força externa: Newtons [N]
- 3.1.5. Deslocamentos: metros [m]
- 3.1.6. Tração/compressão: Newtons [N]

3.2. Dados e resultados:

3.2.1. Planilha Nos

Posição X e Y de cada nó existente e quantidade total.

x [m]	y [m]		Número de nós
0	0		9
4	4		
8	8		
4	0		
8	4		
8	0		
12	4		
12	0		
16	0		

Figura 3 - planilha dos nós

3.2.2. Planilha Incidencia

Ligação entre os nós, definição da área e tensão interna de cada um e quantidade total de membros.

nó 1	nó 2	E [Pa]	A [m²]		Número de membros
1	2	2,10E+11	2,00E-04		16
1	4	2,10E+11	2,00E-04		
2	4	2,10E+11	2,00E-04		
2	3	2,10E+11	2,00E-04		
2	5	2,10E+11	2,00E-04		
3	5	2,10E+11	2,00E-04		
3	7	2,10E+11	2,00E-04		
4	6	2,10E+11	2,00E-04		
4	5	2,10E+11	2,00E-04		
5	6	2,10E+11	2,00E-04		
5	7	2,10E+11	2,00E-04		
5	8	2,10E+11	2,00E-04		
6	8	2,10E+11	2,00E-04		
7	8	2,10E+11	2,00E-04		
7	9	2,10E+11	2,00E-04		
8	9	2,10E+11	2,00E-04		

Figura 4 - planilha de incidência

3.2.3. Planilha Carregamento

Definição da intensidade, sentido e quantidade das forças externas sobre determinados nós.

nó	1 = x 2 = y	Carga [N]	Número de cargas
3	1	8000	3
3	2	-40000	
2	1	8000	

Figura 5 - planilha de carregamento

3.2.4. Planilha Restrição

Definição dos tipos de apoio sobre determinados nós.

nó	1 = x 2 = y	Número de apoios
1	1	7
1	2	
4	2	
6	2	
8	2	
9	1	
9	2	

Figura 6 - planilha de restrição

3.2.5. Output

Reacoes de apoio [N]	Deslocamentos [m]	Deformacoes []	Forcas internas [N]	Tensoes internas [Pa]
[[-2.94164525e+03]	[[0.00000000e+00]	[[6.38190303e-05]	[[2680.39927319]	[[1.34019964e+07]
[[-1.89532850e+03]	[[0.00000000e+00]	[[2.49123036e-05]	[[1046.31675005]	[[5.23158375e+06]
[[7.99480729e+03]	[[1.19498820e-03]	[[-1.71108991e-04]	[[-7186.57760292]	[[-3.59328880e+07]
[[-3.55970270e+00]	[[-6.84435962e-04]	[[-1.78045763e-04]	[[-7477.92206007]	[[-3.73896103e+07]
[[8.00000000e+03]	[[2.40119679e-03]	[[-1.93283188e-05]	[[-811.78938757]	[[-4.05894694e+06]
[[-4.00000000e+04]	[[-3.31501065e-03]	[[-5.10110029e-04]	[[-21424.62120093]	[[-1.07123106e+08]
[[-1.17168276e+01]	[[9.96492143e-05]	[[-4.47419775e-04]	[[-18791.63055905]	[[-9.39581528e+07]
[[8.13895166e+03]	[[0.00000000e+00]	[[4.78668486e-05]	[[2010.40763944]	[[1.00520382e+07]
[[-2.65156783e+01]	[[1.11767493e-03]	[[-3.20681027e-05]	[[-1346.86031464]	[[-6.73430157e+06]
[[1.76011512e+00]	[[-1.27457054e-03]	[[-3.18642634e-04]	[[-13382.99064095]	[[-6.69149532e+07]
[[-4.97835734e+00]	[[2.91116609e-04]	[[1.27377348e-04]	[[5349.84861196]	[[2.67492431e+07]
[[1.33829906e+04]	[[0.00000000e+00]	[[-2.38648417e-04]	[[-10023.2335082]	[[-5.01161675e+07]
[[-5.19270895e+00]	[[1.62718432e-03]	[[4.79853809e-05]	[[2015.38599678]	[[1.00769300e+07]
[[3.55970270e+00]	[[-5.09664916e-04]	[[-1.27416229e-04]	[[-5351.48161821]	[[-2.67574081e+07]
[[9.09494702e-13]	[[4.83058132e-04]	[[-2.67106155e-04]	[[-11218.45849595]	[[-5.60922925e+07]
[[1.24389780e+04]	[[0.00000000e+00]	[[-1.20764533e-04]	[[-5072.11038628]]	[[-2.53605519e+07]]
[[-1.30047585e+04]	[[0.00000000e+00]			
[[7.93264808e+03]]	[[0.00000000e+00]]			

Figura 7 - output dos dados calculados

O software também constrói uma imagem do corpo para garantir a veracidade dos cálculos, assim conseguimos uma maior certeza do que está sendo analisado.

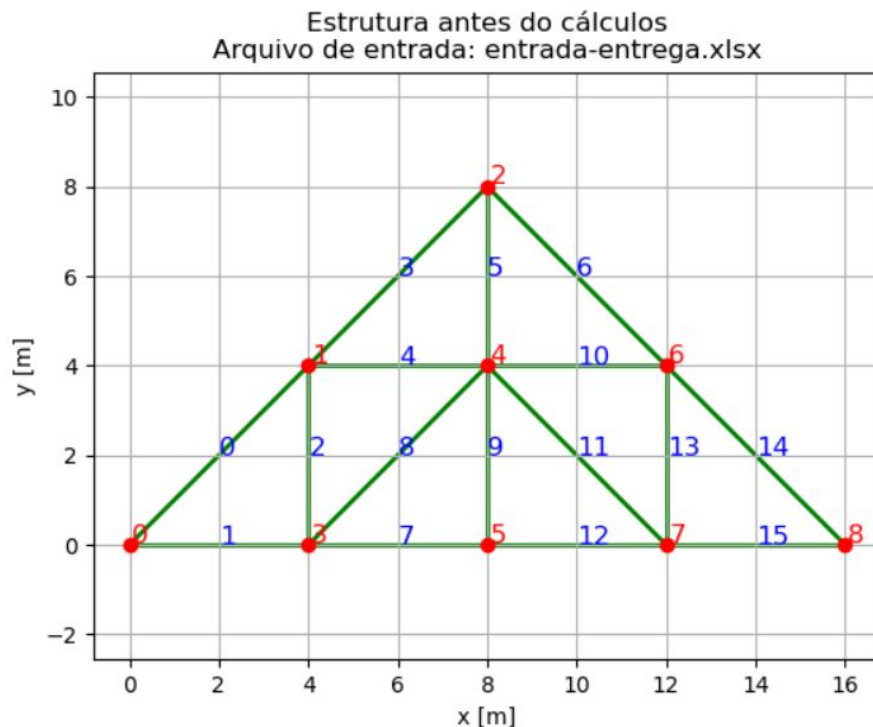


Figura 8 - imagem do corpo construída pelo software

O código foi estruturado em 6 arquivos `.py`, sendo que 4 deles estão organizados em 1 classe para cada.

3.3. Estrutura de código:

3.3.1. `structure.py`

A classe `Structure` contém funções que preparam o arquivo de output com a organização da lista de elementos, a matriz `Kg`, as restrições, o deslocamento através do método de Gauss, Jacobi ou usando a biblioteca `Numpy`, reações de apoio, deformação, tensão e força. Assim gera a saída e cria uma imagem simulada do corpo.

- 3.3.1.1. `__init__`
- 3.3.1.2. `criarListaDeElementos`
- 3.3.1.3. `criarKg`
- 3.3.1.4. `aplicarRestricoes`
- 3.3.1.5. `calcularDeslocamento`
- 3.3.1.6. `calcularReacoesDeApoio`
- 3.3.1.7. `calcularResto`

- 3.3.1.8. gerarSaida
- 3.3.1.9. plota
- 3.3.1.10. calculaPeso
- 3.3.1.11. checaLimitacoes
- 3.3.1.12. log

3.3.2. *solver.py*

A classe Solver contém uma função que utiliza o método de Gauss para a solução numérica do sistema de equações obtido na análise estrutural de treliças.

- 3.3.2.1. gauss
- 3.3.2.2. jacobi

3.3.3. *node.py*

A classe Node contém duas funções em que se armazenam as informações de um nó e possibilidade de apresentar ele no output.

- 3.3.3.1. `__init__`
- 3.3.3.2. `__str__`

3.3.4. *main.py*

O main.py define o arquivo de input e chama a classe e as funções do structure criando o arquivo de output com o nome desejado.

3.3.5. *funcoesTermosol.py*

O arquivo contém funções para o plot de todos pontos, para importar o arquivo com informações do corpo e para gerar a saída com os resultados.

- 3.3.5.1. plota
- 3.3.5.2. importa
- 3.3.5.3. geraSaida

3.3.6. *element.py*

A classe Element contém funções em que armazenam as informações de um elemento, cria a matriz Ke do elemento e gera a saída do objeto.

- 3.3.6.1. `__init__`
- 3.3.6.2. `calculateKe`
- 3.3.6.3. `__str__`

4. VALIDAÇÃO:

A validação foi feita através de uma comparação computacional entre o software de autoria do grupo e o Ftool, um programa com objetivo de prototipar estruturas de modo fácil e eficiente, dos resultados da figura a seguir. Foram utilizados os seguintes parâmetros:

- Módulo de elasticidade: 210GPa
- Seção transversal: $2 \cdot 10^{-4} m^2$
- Cargas no nó 3: 150N em x e -100N em y.
- Apoio nó 1: rolete.
- Apoio nó 2: pino.

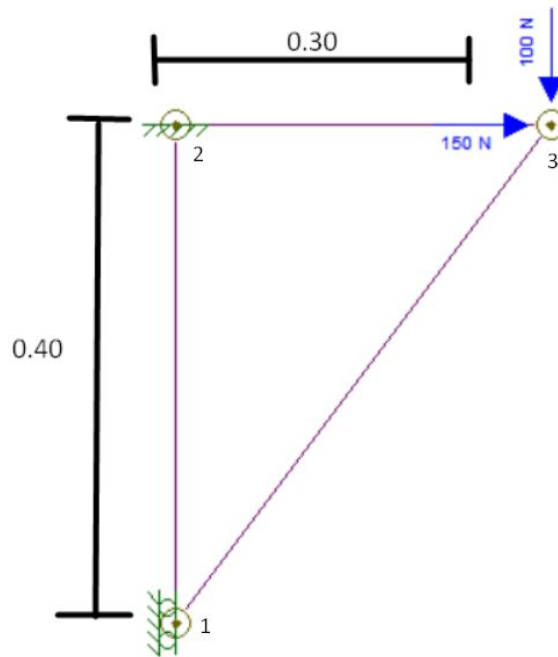


Figura 9 - corpo para validação

4.1. Abordagem computacional do Ftool:

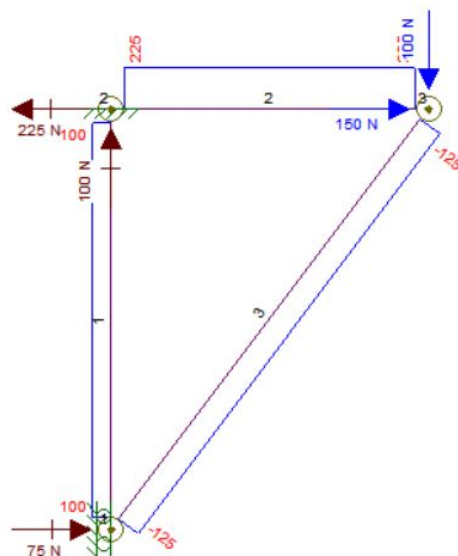


Figura 10 - imagem do corpo com forças internas e reações de apoio

Os números destacados em vermelho representam as forças internas: 100N, 225N e -125N. Enquanto as reações de apoio em vinho: -225N, 100N e 75N.

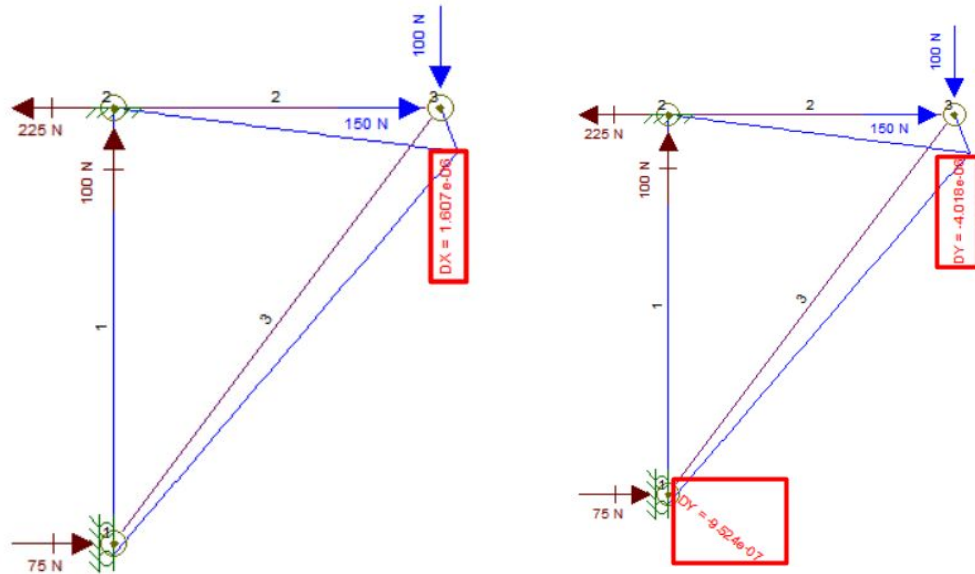


Figura 11 e 12 - deslocamentos horizontais e verticais

Os deslocamentos estão destacados com o quadrado vermelho: 1.607m na vertical e -9.52m e -4.017m na horizontal.

4.2. Abordagem computacional de nossa autoria:

Com o resultado obtido na abordagem do Ftool, podemos validar se a abordagem de nossa autoria está condizente com o esperado.

Primeiro adicionamos as coordenadas dos nós:

	A	B	C	D
1	x [m]	y [m]		Número de nós
2	0	0		3
3	0	0.4		
4	0.3	0.4		

Figura 13 - planilha dos nós para validação

Em seguida as áreas e força de resistência para cada membro:

	A	B	C	D	E	F
1	nó 1	nó 2	E [Pa]	A [m²]		Número de membros
2	1	2	2.10E+11	2.00E-04		3
3	2	3	2.10E+11	2.00E-04		
4	3	1	2.10E+11	2.00E-04		
5						

Figura 14 - planilha de incidência para validação

Adicionamos a carga presente no nó:

	A	B	C	D	E
1	nó	1 = x 2 = y	Carga [N]		Número de cargas
2	3	1	150		2
3	3	2	-100		

Figura 15 - planilha de carregamento para validação

Por fim as restrições de cada nó ocasionadas pelos apoios:

	A	B	C	D
1	nó	1 = x 2 = y		Número de apoios
2	1	1		3
3	2	1		
4	2	2		

Figura 16 - planilha de restrição para validação

Após utilizar o software feito pelo grupo obtivemos um output com o resultado esperado.

Reacoes de apoio [N]	Deslocamentos [m]	Deformacoes []	Forcas internas [N]	Tensoes internas [Pa]
[[7.50000000e+01 [1.33070728e-08 [-2.25000000e+02 [1.00000000e+02 [1.50000000e+02 [-1.00000000e+02]]]	[[0.00000000e+00 [-9.52380952e-07 [0.00000000e+00 [0.00000000e+00 [1.60714286e-06 [-4.01785714e-06]]]	[[2.38095238e-06 [5.35714286e-06 [-2.97619048e-06]]]	[[99.99999999 [224.99999998 [-125.]]	[[499999.99993346 [1124999.99991368 [-625000.]]

Figura 17 - output dos resultados

Assim como na abordagem do Ftool, conseguimos os mesmos valores na abordagem de nossa autoria para as variáveis de força interna, equivalente a -125, 225 e 100. Deslocamentos: -9.52m, 1.607m e -4.01m. Por fim as reações de apoio: 75N, -225N e 100N.

O software reconstrói a imagem do corpo para maior certeza da análise.

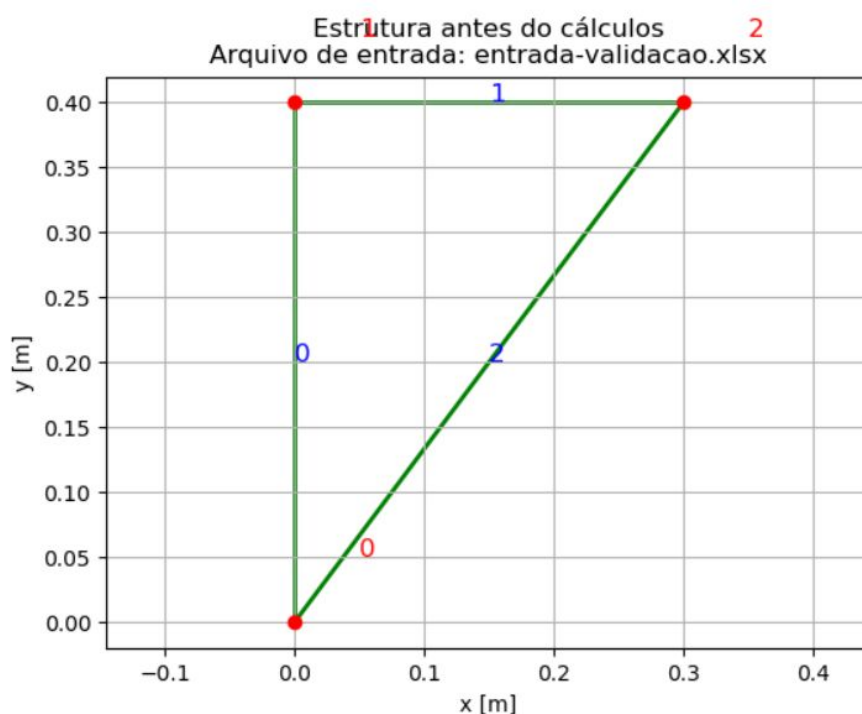


Figura 18 - imagem do corpo construída pelo software

5. MÉTODO UTILIZADO:

O software de simulação computacional necessita de um método de soluções numérico para o sistema de equações que visam diminuir o número de operações com muitas equações, principalmente se a matriz contém diversos elementos nulos. Além disso possibilita evitar instabilidades numéricas. As possibilidades de implementação poderiam ser os métodos de Gauss-Seidel ou de Jacobi que estão representados pela figura a seguir e podem ser selecionados no software.

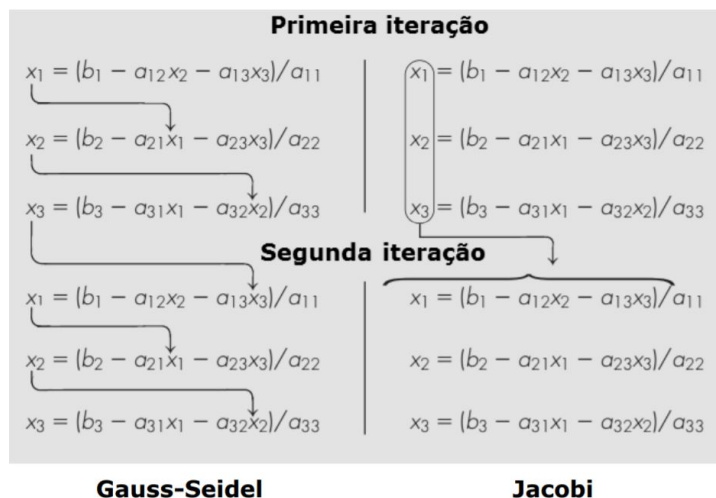


Figura 19 - imagem de representação do funcionamento dos métodos de Gauss e Jacobi.

6. A CONSTRUÇÃO DA PONTE:

Utilizando o software desenvolvido e os conteúdos adquiridos, foi proposta a construção de uma ponte que cumprisse requisitos específicos e predeterminados. Esta ponte tinha como objetivo transpassar um vão livre de 400mm, e suportar a maior carga possível.

6.1. Os requisitos:

Para garantir que o modelo proposto se encontrava dentro dos requisitos determinados foi desenvolvida uma função específica (checaLimitações), capaz de informar onde se algum limite era rompido, e em qual ponto.

Essa foi essencial para o andamento do projeto, possibilitando o grupo visualizar onde existiam gargalos, e, aliando esta informação aos conhecimentos obtidos em aula, pensar em uma abordagem para contornar o problema.

6.2. O desenvolvimento:

Partindo de iterações anteriores e de inspirações obtidas no cotidiano, o grupo decidiu por desenhar uma ponte com suporte superior e inferior. Utilizando também estruturas conhecidas, como treliças e pontos de apoio, foi possível obter a estrutura que pode ser vista na figura 20.

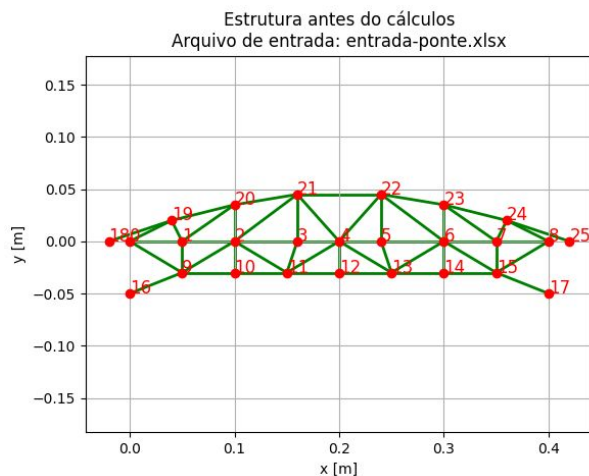


Figura 20 - imagem da estrutura final da ponte

Nesta estrutura, a altura $y=0$ do plano cartesiano representa o nível do solo. Os pontos zero, oito, dezesseis, dezessete, dezoito, e vinte e cinco são pontos de apoio na estrutura pré existente, a qual representa os limites do vão livre. Os seis pontos de apoio são do tipo engaste, o qual restringe o movimento do nó nos eixos x e y . Após análise inicial, foi constatado que a estrutura apresentada era capaz de suportar cargas acima do valor mínimo, além de possuir considerável relação carga-massa. Com isso o grupo optou por seguir com a estrutura, realizando apenas otimizações onde fosse possível.

6.3. Otimizações:

Utilizando as informações referentes às tensões em cada elemento e a função de cálculo das restrições, foi possível compreender quais elementos seriam beneficiados por um aumento em sua área de seção transversal. Este aumento reduziria as tensões sofridas e os deslocamentos de cada nó, possibilitando assim um aumento na carga aplicada na estrutura. Após inúmeras iterações o grupo atingiu valores que otimizam as áreas dos elementos, maximizando então a carga suportada pela ponte.

7. LIMITAÇÕES DO SOFTWARE E MÉTODO:

7.1. Software:

O software elaborado tem uma limitação em relação a distribuição de peso do corpo, pois está programado para simular o plano em duas dimensões, dessa forma desconsidera o eixo z .

7.2. Métodos:

Os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi têm uma limitação de solução, pois apenas suportam sistemas lineares de dimensão 3 representados pela figura 19.

8. APLICAÇÕES:

O software desenvolvido tem grande potencial na análise de projetos físicos, mais especificamente na análise de sistemas estáticos. Ele se sobressai ainda mais na análise de estruturas

treliçadas. Ele facilita o cálculo de diversas variáveis de grande interesse durante o projeto de uma estrutura 2D, como as tensões internas, forças internas, reação dos apoios, entre outras.

Utilizando o software os engenheiros conseguem projetar e simular as suas estruturas rapidamente, testando diferentes parâmetros como a espessura de cada elemento, seu comprimento, etc. A visualização prévia da ponte projetada também ajuda e acelera o processo de desenvolvimento.

Há aplicações em estruturas como influência das cargas em estruturas de concreto que podem levar a fissuras e rupturas, estudo de limites de resistência dos materiais e cargas em vigas e colunas, em pontes e lajes que podem sofrer deformações, cisalhamento e flexão através de carregamentos.

9. Referências:

- [1]CAVALCANTE, João Paulo de Barros. Análise estática de treliça via modelagem numérica. In: CAVALCANTE, João Paulo de Barros. Análise estática de treliça via modelagem numérica. Orientador: Dra. Marcilene Vieira da Nóbrega. 2011. Trabalho de conclusão de curso (Universidade Federal Rural do Semi-Árido) - Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, [S. l.], 2011. Disponível em:
http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/270/TCC%20-%20BCT/TCC_JO%C3%83O%20PAULO%20DE%20BARROS%20CAVALCANTE.pdf. Acesso em: 13 abr. 2020.