高等数学期末考试模拟试题（三）答案

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)>\max\{f(a),f(b)\}$,则(B).

A.对任意$x\in(a,b)$，有$f''(x)<0$;

B.必存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$;

C.对任意$x\in(a,b)$，有$f''(x)\geq 0$;

D.必存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)>0$;

2. 下列曲线中必有斜渐近线的是(C).

A. $y = x + \cos x$;

B. $y = x + \cos^2 x$;

C. $y = x + \cos\dfrac{1}{x}$;

D. $y = x^2 + \cos\dfrac{1}{x}$.

3. 下列各积分中不等于零的是(A).

A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+\cos^2 x} dx$;

B. $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx$;

C. $\int_{0}^{2\pi} \sin^5 x dx$;

D. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + \cos x}{2} dx$.

4. 下列广义积分中，发散的是(A).

A. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x\cos x}$; B. $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$; C. $\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; D. $\int_{0}^{1}\ln x\mathrm{d}x$.

5. 下列选项中，不是某个二阶常系数线性微分方程的一组解的是(D).

A. $e^{x}+x, x-2e^{-2x}, e^{-2x}+x$;　B. $e^{x}+xe^{-x}, 2xe^{x}+xe^{-x}, xe^{x}+xe^{-x}$;

C. $e^{x}-x+1, 2-x, e^{x}-x$;　D. $x\left(e^{x}+1\right), xe^{x}-2e^{-x}, xe^{x}+2x+2e^{-x}$.

二. 填空题（共5道小题，每题3分，总计15分）

1.设可微函数$y=f(x)$由方程$\cos(xy)+\ln y-x=1$确定，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=\underline{\quad 2 \quad}.$$

2.已知函数$y = f(x)$由参数方程$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}(0 < t < \pi)$确定，则

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ __$-\dfrac{3}{4\sin^3 t}$__.

3.设$f(x)=(x-1)\ln(2-x)(\forall x<2)$,则$f(x)$的最大值是_0_.

4. 若函数$f(x)$满足$f(x)=x+\int_0^2 f(t)dt$,则$f(x)=$ $\underline{\quad x-2 \quad}$.

5. 微分方程$yy' + xy^2 = 5x$的通解为：$\underline{y^2 = 5 + Ce^{-x^2}}$.

三. 计算题（共6道小题，每题7分，总计42分）

1.设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\ln(x+1)\right]e^{nx}+ax+b}{e^{nx}+1}$.

(1)求$f(x)$的表达式；

(2)试确定常数a,b，使$f(x)$在$x=0$处可导.

解

(1) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ \dfrac{b}{2}, & x=0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$

(2) $\because f(x)$在$x=0$处连续，

$\therefore f(0-0)=f(0)$

而$f(0-0)=b, f(0)=\dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow b=0;$

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ \dfrac{b}{2}, & x=0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$$

又$\because f(x)$在$x=0$处可导，即$f_+'(0)=f_-'(0)$,

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1, \qquad f_-'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a,$$

$\therefore a=1.$

2.计算极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{1+t}-e^{\frac{t}{2}}}{\ln^2(1+2t)}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left[1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right]-\left[1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right]}{4t^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}t^2+o\left(t^2\right)}{4t^2}=-\frac{1}{16}.$$

3.设函数$\Phi(u)=\int_0^u (x^2-1)e^x dx$的极值.

解 $\Phi'(u)=e^u(u^2-1)$

令$\Phi'(u)=0$得驻点为$u=\pm 1$

$\Phi''(u)=e^u(u^2+2u-1)$ 从而$\Phi''(1)>0, \Phi''(-1)<0$

$\therefore u=1$为极小值点,$u=-1$为极大值点

$$\Phi(u)=\int_0^u (x^2-1)de^x = e^x(x^2-1)\Big|_0^u - \int_0^u 2xe^x dx = e^u(u^2-2u+1)-1$$

故极小值$\Phi(1)=-1$, 极大值$\Phi(-1)=4e^{-1}-1$.

4.计算定积分$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+2e^x-e^{2x}}}\mathrm{d}x.$

解 令$t=e^x,\mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x \qquad x=0,t=1;x=\ln 2,t=2$

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+2e^x-e^{2x}}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{t}{\sqrt{1+2t-t^2}}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{-\frac{1}{2}\left(1+2t-t^2\right)'+1}{\sqrt{1+2t-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{1+2t-t^2}\,\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2-(t-1)^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}-1+\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}\Big|_1^2=\sqrt{2}-1+\frac{\pi}{4}$$

5.计算不定积分$\int \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 令$x=t^2\ (t\geq 0)$，则

$$\int \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int \ln(1+t)\mathrm{d}t^2 \quad =t^2\ln(1+t)-\int \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\left(t^2-1\right)\ln(1+t)-\frac{1}{2}t^2+t+C$$

$$=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}+C$$

6.求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}\vec{x}$ 的通解.

解

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 3 & 3\\ \lambda+2 & \lambda+5 & 3\\ 0 & 6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-2, \lambda_3=4$

6.求微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}\vec{x}$ 的通解.

解 对于 $\lambda_1=\lambda_2=-2$

$$A+2I=\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1-x_2+x_3=0$$

$\vec{r}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\vec{r}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$ 同理，对于λ=4，有$\vec{r}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

6.求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}\vec{x}$ 的通解.

解

$$\vec{r}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\vec{r}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad \vec{r}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

故通解为 $\vec{x}(t)=C_1e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+C_3e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

四. 应用题（本题7分） 求曲线$y=3\left(1-x^2\right)$与x轴围成的封闭图像绕$y=3$旋转一周所得的旋转体的体积.

解 $$V=18\pi-\int_{-1}^{1}\pi\left[3-3\left(1-x^2\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=18\pi-9\pi\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x$$

$$=18\pi-\frac{18}{5}\pi=\frac{72\pi}{5}$$

五.（本题7分）若$f(x)$在$(0,1)$内可导，且有最大值1，最小值0. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)>2$.

证明 设最大值为$f(x_1)=1$，最小值为$f(x_2)=0$, 其中$x_1,x_2\in(0,1)$.

则$f'(x_2)=0$,

根据Taylor公式，存在ξ介于x_1与x_2之间，使得

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_2-x_1)^2$$

即$1=f(x_2)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x_2-x_1)^2\Rightarrow f''(\xi)=\dfrac{2}{(x_2-x_1)^2}>2$

且$\xi\in(0,1)$

六.（本题7分）设$f(x)$具有二阶导数，且$f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

证明:(1) $f''(x)-f'(\pi-x)=\cos x$;

(2)求$f(x)$的表达式.

证明　(1)对$f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$两端求导，得

$$f'(x)-f''(\pi-x)=\cos x$$

令$x=\pi-u$，则$f'(\pi-u)-f''(u)=-\cos u$　　再将u换回x即得证.

六．（本题7分）设$f(x)$具有二阶导数，且$f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

证明:(1) $f''(x)-f'(\pi-x)=\cos x$;

(2)求$f(x)$的表达式.

解(2) 由(1)知，$f''(x)+f(x)=\sin x+\cos x$

$y''+y=0$的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

由实数域内的待定系数法，

设$y^*=Ax\cos x+Bx\sin x$是$y''+y=\cos x+\sin x$的解，代入方程，得

解(2) 由(1)知，$f''(x)+f(x)=\sin x+\cos x$

$y''+y=0$的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

由实数域内的待定系数法，

设$y^*=Ax\cos x+Bx\sin x$是$y''+y=\cos x+\sin x$的解，代入方程，得

$A=-\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{2}$ 故$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x(\sin x-\cos x)$

所以，$C_1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}, C_2=-\dfrac{\pi}{4}$

从而$f(x)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}\right)\cos x+\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin x$

七.（本题7分） 设$f(x)$的导函数$f'(x)$在$[a,b]$上连续,

$$f(a)=f(b)=0,\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1.$$

求证:(1)$(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \geq f^2(x)$;

(2)$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x \geq \dfrac{8}{(b-a)^2}$.

证明 (1) $f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leq \int_a^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t$

$$=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t$$

$$(1)\ f^2(x)\le (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,dt;$$

$$(2)\ f^2(x)=\left[\int_b^x f'(t)\,dt\right]^2\le (b-x)\int_x^b [f'(t)]^2\,dt$$

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=1\Rightarrow 1=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)\,dx$$

$$1\le \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left\{(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,dt\right\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left\{(b-x)\int_x^b [f'(t)]^2\,dt\right\}dx$$

$$\le \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left\{(x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2\,dt\right\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left\{(b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(t)]^2\,dt\right\}dx$$

$$\le \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left\{ (x-a) \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left\{ (b-x) \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x$$

$$\le \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-x) \left\{ \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t + \frac{(b-a)^2}{8} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^b [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \ge \frac{8}{(b-a)^2}$$