西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

《高等数学》期中考试模拟题(四)答案

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}}=$ ____ .

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=$ ____ .

3. 设$y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$，则$y'(0)=$ ____ .

4. 设函数$y=y(x)$由方程$x=y^{y}$确定，则$dy=$ ______ .

5. 函数$y=x+2\cos x$在$[0,\pi/2]$上的最大值为 ____ .

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}} =$ ______ .

解法1

$$\lim_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+2xe^{x})^{\frac{1}{2xe^{x}}}\right]^{\frac{2xe^{x}}{x}} = \underline{\ e^{2}\ }.$$

解法2

$$\because\ (1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+2xe^{x})}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2xe^{x}) = 2 \qquad \therefore \lim_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}} = e^{2}.$$

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=$ ____ .

解 记 $S_n=\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}$,则

$$a_n=\frac{n+1}{n^2+n}+\frac{n+2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\le S_n\le\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+1}=b_n$$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{3}{2}$, $\quad\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{2}$

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

3. 设$y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$，则$y'(0)=$______.

解

复合函数求导

$$y'=\frac{2}{3}\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)，则y'(0)=\underline{\ \frac{1}{3}\ }.$$

4. 设函数$y=y(x)$由方程$x=y^y$确定，则$dy=$______.

解 两边取对数得 $\ln x=y\ln y$，

隐函数求微分

两边微分得 $\frac{1}{x}dx=\ln y dy+dy$，$\Rightarrow$ $dy=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

5. 函数$y = x + 2\cos x$在$[0, \pi/2]$上的最大值为_____.

解

令$y' = 1 - 2\sin x = 0$得驻点：$x = \dfrac{\pi}{6}$

连续函数的最值

在$[0, \pi/6)$上$y' > 0$, 在$(\pi/6, \pi/2]$上$y' < 0$

$\therefore$ 函数在$[0, \pi/2]$上的最大值为$\underline{\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}}$.

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}$.

解 利用无穷小的等价代换，

$\dfrac{0}{0}$ 待定型

当$x\to 0$时, $\tan x \sim x$, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}(\sin x)^2}=18.$$

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

2. 设$y=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\tan\frac{1}{x}$,求$y'\left(\frac{4}{\pi}\right)$.

解

$$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\tan\frac{1}{x}+e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\cos^2\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$y'\left(\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{\pi^2}{16}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

乘积求导与
复合函数求导

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

3. 已知曲线 $\begin{cases} x = f(t) - 1 \\ y = f(e^{2t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0) = 2, f'(0) \neq 0,$

求 $t = 0$ 处曲线的切线方程．

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{2f'(e^{2t}-1)e^{2t}}{f'(t)}$, $\therefore \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 2,$

参数方程求导

当 $t = 0$ 时，$x = 1, y = 2,$

曲线在 $t = 0$ 处的切线方程为：

$$y - 2 = 2(x - 1), \text{即 } y = 2x.$$

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

4. 设$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty} t^2\left[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)\right]\sin\frac{x}{t}$，其中$f$二阶可导，求$F(x), F'(x)$.

解

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}\pi\cdot\frac{f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)}{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot x$$

导数的定义

$$=\pi x f'(x)$$

$$F'(x)=\pi f'(x)+\pi x f''(x).$$

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

5. 当$x\to 0^+$时，$\alpha(x)=\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}$ $(a\ge 0)$是x几阶无穷小？说明理由．

解

$$\because \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{x^3(\sqrt{a}+\sqrt{a+x^3})}=-\frac{1}{2\sqrt{a}},\quad a\ne 0$$

$\therefore$ 当$a>0$时，$\alpha(x)$是x的三阶无穷小；

当$a=0$时，$\alpha(x)=-x^{\frac{3}{2}}$是$x$的$\dfrac{3}{2}$阶无穷小．

6. 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,证明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

解

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$\frac{0}{0}$待定型

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^3}{e^{t^2}}=0=f'(0)$$

$\therefore f'(x)$在$x=0$处连续.

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

7. 求曲线$y = x^4(12\ln x - 7)$的凹凸区间及拐点．

解 $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3$;

$y'' = 144x^2 \ln x$;

在区间$(0,1)$上，$y'' < 0$，函数曲线是(上)凸的;

在区间$(1,+\infty)$上，$y'' > 0$，函数曲线是(上)凹的;

$\therefore$ 拐点 为$(1,-7)$.

三.（本题9分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}, & x\geq 0\end{cases}$ 的连续性；若有间断点，说明间断点的 类型.

解 函数没有定义的点有：$-1,\ 2k+1,(k=0,1,2,\cdots)$及分界点0

1. $\because \lim\limits_{x\to-1} f(x)$不存在；　$\therefore x=-1$为第二类(震荡)间断点；

2. $\because \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\sin 1;\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1;$　$\therefore x=0$为跳跃间断点；

3. $\because \lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=-\dfrac{4}{\pi}$　$\therefore x=1$为可去间断点；

4. $\because \lim\limits_{x\to2k+1} f(x)=\infty, k\in N_+,$　$\therefore x=2k+1$为第二类(无穷)间断点；

函数在R中除去上述间断点的所 有区间连续.

四. 证明题

1. (本题8分)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导，且$f(0)=0$，$f''(x)<0$，证明：对任意两点$x_1>0$和$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证明 不妨设$x_1<x_2$，利用*Lagrange*中值定理有

$$\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(\xi_1),x_2<\xi_1<x_1+x_2$$

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=f'(\xi_2),0<\xi_2<x_1$$

$\because f''(x)<0$且$\xi_2<\xi_1$，$\therefore f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

从而$\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}<\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}$ 即$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

2. (本题7分)设$f(x)$在$[0,1]$上有三阶连续可导，且$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$|f'''(\xi)|\geq 24$.

证明 $\because f'(\frac{1}{2})=0$，将$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处展开，有

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,\ \zeta\text{介于}x\text{与}\frac{1}{2}\text{之间};$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_1\in(\frac{1}{2},1);$$

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\quad \xi_2\in(0,\frac{1}{2});$$

上面两式相减：$1=\frac{1}{48}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$;

取$|f'''(\xi)|=\max(|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|)$ 则$\exists\xi\in(0,1)$，使得$|f'''(\xi)|\geq 24$.