西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数与解析几何 课时：64 考试时间：2019 年 10 月 20 日

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　2.A　3.D　4.C　5.D

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. **0**；　**7.** $2^{2019}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$；　**8.** -16；

9. $3(x-1)+1(y-2)+(-7)(z-3)=0$　**(** $3x+y-7z+16=0.$ **)**　**10.** $\frac{1}{3}$.

三、解答题（**第 11 题 10 分；第 12-16 每题 12 分，共 70 分**）

11．(1) $|A_n| \underset{\text{按第一列展开}}{=} 2a|A_{n-1}|+a^2\cdot(-1)^{2+1}\cdot|A_{n-2}|=2a|A_{n-1}|-a^2|A_{n-2}|$,

则 $|A_n|-a|A_{n-1}|=a(|A_{n-1}|-a|A_{n-2}|)=\cdots=a^{n-2}(|A_2|-a|A_1|)=a^n.$ ……3 分

$\therefore |A_n|=a^n+a|A_{n-1}|=a^n+a(a^{n-1}+a|A_{n-2}|)=2a^n+a^2|A_{n-2}|$

$=\cdots=(n-1)a^n+a^{n-1}|A_1|=(n+1)a^n.$ ……5 分

也可以使用数学归纳法，或化为上三角形

(2) 由cramer法则知，当 $D=|A_n|\neq 0$ 时，即 $a\neq 0$ 时方程组有唯一解. …… 8 分

且 $x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$, $x_n=\frac{D_n}{D}=\frac{(-1)^{n+1}(a^2)^{n-1}}{(n+1)a^n}=(-1)^{n+1}\frac{a^{n-2}}{n+1}$.……10 分

12．$\because 1=|I|=|AA^T|=|A|^2$，而已知 $|A|<0, \therefore |A|=-1;$ ……6 分

$|A+I|=|A+AA^T|=|A(I+A^T)|=|A|\cdot|I+A^T|=-|(I+A)^T|=-|I+A|.$

$\therefore |I+A|=0$ ……12 分

13．(1) L_1 的方向向量可取作 $\vec{a}_1=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$,

易得 L_1 上一点 $P_1(0,-3,-2)$，则 L_1 对称式方程为：$\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{2}$. ……4 分

(2) $d=\frac{\|P_1M\times\vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_1\|}=\frac{\sqrt{93}}{3}$ ……8 分

(3) L_2 过点 $P_2(-1,1,0)$, 其方向向量 $\vec{a}_2=(1,-2,2)$,

$$\because\left[\overrightarrow{P_1P_2}\ \ \vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\right]=\begin{vmatrix}-1&4&2\\-1&-1&2\\1&-2&2\end{vmatrix}=20\neq 0,\ \therefore L_1\text{与}L_2\text{异面}.$$ ……12 分

14. $\because I=A\left[C(E-C^{-1}B)\right]^T=A(C-B)^T,\quad \therefore A=\left[(C-B)^T\right]^{-1}=\left[(C-B)^{-1}\right]^T$ ……6 分

而 $C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 求 $(C-B)^{-1}$ 的方法有多种:

如(1)利用初等行变换；(2)利用伴随矩阵；(3)利用矩阵特点等.

得 $(C-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$ ……12 分

15. $A\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\ r_4-2r_1}]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&-3&-2&-3\\0&3&\mu-2&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-3&-2&-3\\0&0&\mu-4&\lambda-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$ ……6 分

故当 $\mu=4$, 且 $\lambda=5$ 时, $r(A)=2$; 当 $\mu\neq 4$, 或 $\lambda\neq 5$ 时, $r(A)=3$. ……12 分

16.（**1**）由题意知 $A^*=-A^T\Rightarrow\left|A^*\right|=(-1)^3\left|A\right|\Rightarrow\left|A\right|^2=-\left|A\right|\Rightarrow\left|A\right|=0$ 或 $\left|A\right|=-1$, ……4 分

而 A 为非零实矩阵, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 则 $\left|A\right|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a^2{}_{11}-a^2{}_{12}-a^2{}_{13}<0$,

故 $\left|A\right|=-1$. ……8 分

(2) 由(1)知 $A^{-1}=\dfrac{1}{\left|A\right|}A^*=-A^*=A^T$, 故 A 为正交矩阵. ……12 分