



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下册期中考试题

2021年05月



一. 填空题 (每小题3分, 共15分)

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 其中函数 $f(u, v)$ 可微, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$



一. 填空题 (每小题3分, 共15分)

3. $u = 2xy - z^2$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处的方向导数的最大值为 _____.

4. 设 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(x, y)$, 且 φ 为可微函数, 则 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 =$ _____.

5. 设区域 $(D) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, 则 $\iint_{(D)} (x + y + 1) d\sigma =$ _____.



二. 计算题 (共10道小题, 每题6分, 共60分)

1. 设 $z = f(x^2 y, \frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的隐函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

3. 已知方程组 $\begin{cases} xu + yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 确定了隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$,

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.



二. 计算题 (共10道小题, 每题6分, 共60分)

4. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$ 在点 $P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 处的切线与法平面方程.

5. 已知曲线 $\begin{cases} y = 2x \\ z = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切向量 \vec{a} 与 z 轴正向的夹角为锐角, 求函数 $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处沿向量 \vec{a} 的方向导数.

二. 计算题 (共10道小题, 每题6分, 共60分)



6. 计算积分 $I = \iint_{(D)} |x^2 + y^2 - 1| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

7. 计算 $\int_0^1 dy \int_y^1 x \sin \frac{y}{x} dx$.

8. 求曲面 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 围成的立体体积.



二. 计算题 (共10道小题, 每题6分, 共60分)

9. 计算 $\iiint_{(V)} z^2 dV$, 其中 $(V) = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-1)^2}{c^2} \leq 1 \right\}$.

10. 已知向量值函数 $\vec{w} = \vec{f}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ u_2 \sin u_1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \ln x_1 \cos x_2 \\ x_2 + \sin x_1 \\ x_1^2 e^{x_2} \end{pmatrix}$

求复合函数 $(f \circ g)$ 在 $(1, 0)$ 点处的导数.



三、(本题9分)讨论 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和可微性.



四. (本题8分) 求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一个切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 围成的立体体积最小, 写出切平面方程并求出最小体积.



五.(本题8分)若 $\forall t > 0$, 有 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则函数 $f(x, y)$ 称为 n 次齐次函数. 证明: 若 $f(x, y)$ 可微, 则 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$.