第六章　特征值与特征向量

6.1 矩阵的特征值与特征向量

数学与统计学院
李继成

主要内容

1. 特征值与特征向量的概念
2. 特征方程、特征多项式与特征子空间
3. 求特征值与特征向量的一般步骤
4. 特征值和特征向量的性质

1 特征值与特征向量的概念

定义6.1.1（特征值与特征向量）

设A是n阶矩阵，如果有复数λ和n维非零列向量x,使得

$$Ax = \lambda x$$

则称λ为矩阵A的一个特征值 称非零列向量x为A的对应于特征值λ的特征向量.

λ_0是A的特征值 $\Longleftrightarrow$ $(\lambda_0 E - A)x = 0$有非零解

$\Longleftrightarrow$ 系数行列式$|\lambda_0 E - A| = 0$

1 特征值与特征向量的概念

定义6.1.1（特征值与特征向量）

设A是n阶矩阵，如果有复数λ和n维非零列向量x,使得

$$Ax = \lambda x$$

则称λ为矩阵A的一个特征值 称非零列向量x为A的对应于特征值λ的特征向量.

注意:

- 特征向量是非零向量.
- 属于同一特征值λ_0的特征向量不唯一
- 若ξ_1, ξ_2都是A的属于λ_0的特征向量对任意常数k_1, k_2, 若$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \neq 0$,则$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$都是$A$的属于$\lambda_0$的特征向量

主要内容

1. 特征值与特征向量的概念
2. 特征方程、特征多项式与特征子空间
3. 求特征值与特征向量的一般步骤
4. 特征值和特征向量的性质

2 特征方程、特征多项式与特征子空间

定义6.1.2 (特征方程、特征多项式与特征子空间)

A的特征多项式：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

A的特征方程：$|\lambda E-A|=0$

特征子空间：方程组$(\lambda_i E-A)x=0$的解空间为λ_i的特征子空间V_{λ_i}

方程组$(\lambda_i I-A)x=0$的基础解系就是特征子空间V_{λ_i}的一个基

如果λ_i为$|\lambda E-A|=0$的k重根，则称λ_i为A的k重特征值，并称k为λ_i的代数重数.

称方程组$(\lambda_i I-A)x=0$的解空间的维数为特征值λ_i的几何重数.

主要内容

1. 特征值与特征向量的概念
2. 特征方程、特征多项式与特征子空间
3. 求矩阵特征值与特征向量的一般步骤
4. 特征值和特征向量的性质

3 求矩阵特征值与特征向量的一般步骤

(1) 解特征方程$|\lambda I - A| = 0$得其全部根

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(重根按重数计算)

(2) 对A的每个特征值λ_i,解齐次线性方程组$(\lambda_i I - A)x = 0$,

得其一个基础解系$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{ik_i}$,

则属于λ_i的全部特征向量为

$x = c_1\xi_{i1} + c_2\xi_{i2} + \cdots + c_{k_i}\xi_{ik_i}$, ($c_1, \cdots, c_{k_i}$为不全为零的任意常数)

例1 求$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量

解 由$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-3)=0$得$A$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3.$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$,解方程组$(0I-A)x=0$得基础解系:

$$0I-A\to A\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

所以：属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$,

$(k_1,k_2$为不全为零的任意常数

例1 求$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量

解 A的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3.$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$,解方程组$(0I-A)x=0$得基础解系:

$$\xi_1=[-1,1,0]^T,\xi_2=[-1,0,1]^T$$

属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的全部特征向量为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$, (k_1,k_2不全为零)

对于$\lambda_3=3$,求方程组$(3I-A)x=0$的基础解系:

$$3I-A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

属于特征值$\lambda_3=3$的全部特征向量为$x=k_3\xi_3$, $(k_3\neq 0)$

例2 求$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$的特征值与特征向量

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \quad \Rightarrow \lambda_1=i, \lambda_2=-i$为$A$的全部特征值.

对于$\lambda_1=i$,解方程组$(iI-A)x=0$,

$$iI-A=\begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \xi_1=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$$

所以，属于$\lambda_1=i$的全部特征向量为$x=k_1\xi_1$, $(k_1\neq 0)$

对于$\lambda_2=-i$,解方程组$(-iI-A)x=0$,

$$-iI-A\rightarrow iI+A\rightarrow\begin{bmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \xi_2=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$$

所以，属于$\lambda_2=-i$的全部特征向量为$x=k_2\xi_2$, $(k_2\neq 0)$

例3 设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，向量$x=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$是$A$的伴随矩阵$A^*$的一个特征向量，求常数$k$的值及与$x$对应的特征值$\lambda$.

解 已知:$A^*x=\lambda x$,用A左乘两端，得：$\lambda Ax=4x$

$$\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{cases}\lambda(2+k+1)=4\\\lambda(1+2k+1)=4k\\\lambda(1+k+2)=4\end{cases}$$

解方程组得：$\lambda=4$，$k=-2$或$\lambda=1$，$k=1$.

主要内容

1 特征值与特征向量的概念

2 特征方程、特征多项式与特征子空间

3 求特征值与特征向量的一般步骤

4 特征值和特征向量的性质

4 特征值和特征向量的性质

性质6.1.1 设n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

则：(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$; (2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

证明思路: (1) 因$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值，

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

令$\lambda=0$，得$|-A|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 即：$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

(2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det(A)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

你能发现矩阵可逆与其特征值的关系吗？

4 特征值和特征向量的性质

性质6.1.1 设n阶方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

则：(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$; (2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

推论： n阶方阵A可逆(不可逆)

$\Leftrightarrow$ A的n个特征值全不为零(至少有1个零特征值).

定义： 称方阵A的主对角线上元素之和为**A的迹**. 记为:

$$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn};$$

例： 设A为3阶方阵，I为3阶单位阵，$I-A, I+A, 3I-A$都不可逆，试求A的行列式.

解 A的特征值有1,-1,3，$\det(A)=-3$.

性质6.1.2 设λ为方阵A的一个特征值，则

(1)对任何正整数m，λ^m为方阵A^m的一个特征值

(2)对任何多项式 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$，

$f(\lambda)$为矩阵$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$的一个特征值.

证明 (1) $Ax=\lambda x$，$A^2 x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda^2 x$

$$\Rightarrow A^m x=A^{m-1}\lambda x=\lambda A^{m-1}x=\lambda^2 A^{m-2}x=\cdots=\lambda^m x$$

(2)
$$\begin{aligned}
f(A)x &= (a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I)x \\
&= a_m A^m x+\cdots+a_1 Ax+a_0 Ix \\
&= a_m \lambda^m x+\cdots+a_1 \lambda x+a_0 x \\
&= (a_m \lambda^m+\cdots+a_1 \lambda+a_0)x \\
&= f(\lambda)x
\end{aligned}$$

性质6.1.2 设λ为方阵A的一个特征值，则

(1)对任何正整数m，λ^m为方阵A^m的一个特征值

(2)对任何多项式 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$,

$f(\lambda)$为矩阵$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$的一个特征值.

例： 3阶方阵A的3个特征值为1,2,0，求矩阵 $2I+3A^2$ 的行列式.

解 $2I+3A^2$的特征值为5,14,2,

所以矩阵$2I+3A^2$的行列式为140

性质6.1.2 设λ为方阵A的一个特征值，则

(1)对任何正整数m，λ^m为方阵A^m的一个特征值

(2)对任何多项式 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$,

$f(\lambda)$为矩阵$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$的一个特征值.

性质6.1.3 若数λ为n阶可逆矩阵的A的一个特征值，则

$\lambda\neq 0$, 且$\dfrac{1}{\lambda}$为A^{-1}的一个特征值,$\det(A)\lambda^{-1}$为A^*的一个特征值.

性质6.1.4 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$x_i$是$A$的属于特征值$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$的特征向量，则$x_1,x_2,\cdots,x_m$线性无关.即属于互不相同特征值的特征向量线性无关

证明思路： 以m=3为例. 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是矩阵$A$的互不相同的特征值，

x_1,x_2,x_3是A的属于$\lambda_i\,(i=1,2,3)$的特征向量 $Ax_i=\lambda_i x_i, i=1,2,3.$

设有一组数k_1,k_2,k_3使得 $k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$

$$A(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)=\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\lambda_3k_3x_3=0$$

$$A(\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\lambda_3k_3x_3)=\lambda_1^2k_1x_1+\lambda_2^2k_2x_2+\lambda_3^2k_3x_3=0$$

$$\Rightarrow[k_1x_1\ k_2x_2\ k_3x_3]\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow[k_1x_1\ k_2x_2\ k_3x_3]=0$$

$$\Rightarrow k_i=0, i=1,2,3.$$

性质6.1.4的推广

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ik_i}$为$A$的属于$\lambda_i$的一组线性无关特征向量$(i=1,2,\cdots,m)$，则向量组 $\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1k_1};\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2k_2};\cdots;\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mk_m}$ 线性无关

性质6.1.5 矩阵A的任何特征值的几何重数不大于代数重数.

例3 设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同特征值，x_i为属于λ_i的特征向量$(i=1,2)$. 证明：x_1+x_2不是A的特征向量.

证明： 反证法。设x_1+x_2是矩阵A的属于λ_0的特征向量,则

$$A(x_1+x_2)=\lambda_0(x_1+x_2)$$

$$\Rightarrow Ax_1+Ax_2=\lambda_0x_1+\lambda_0x_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\lambda_0x_1+\lambda_0x_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_0)x_1+(\lambda_2-\lambda_0)x_2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1-\lambda_0=0,\lambda_2-\lambda_0=0$$

与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾.

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第六章　特征值与特征向量

6.2 相似矩阵与矩阵的相似对角化

数学与统计学院
李继成

主要内容

1 相似矩阵

2 矩阵可对角化的条件

3 实对称矩阵的对角化

1 相似矩阵

定义6.2.1（相似矩阵） 对于$A_{n\times n}, B_{n\times n}$,若存在可逆矩阵$P_{n\times n}$,

使得$P^{-1}AP = B$,则称A与B相似，记为$A \sim B$,

如果A与对角矩阵相似则称A可相似对角化(简称：A可对角化)

矩阵相似的性质：

(1)自反性: $A \sim A$

(2)对称性: 若$A \sim B$,则$B \sim A$

(3)传递性: 若$A \sim B, B \sim C$,则$A \sim C$

矩阵相似保留了矩阵的哪些属性不变？

定理6.2.1 设n阶矩阵A与B相似,则

(1) $\det(A)=\det(B)$;

(2) $r(A)=r(B)$;

(3) A与B有相同的特征多项式自然有相同的特征值;

(4)若A可逆,则$A^{-1}\sim B^{-1}$.

说明

- 该定理的逆命题不真例如$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$与$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
有相同的行列式，相同的秩及相同的特征值，但是它们不相似. 因为与单位矩阵相似的只能是单位矩阵.
- 若A与对角阵D相似,则D的对角元均为A的特征值
- 并非任何矩阵都可对角化，例如$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$不能对角化。

主要内容

1. 相似矩阵
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化

本节的两个主要问题：

(1)方阵可对角化的条件是什么？

(2) 如果方阵A可对角化,即存在可逆矩阵P及对角矩阵D, 使得$P^{-1}AP = D$,那么,如何求矩阵P和D呢？

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

证 **(必要性)** 设A可对角化,即存在可逆矩阵P，对角阵D,使得

$$P^{-1}AP=D \Leftrightarrow AP=PD$$

P按列分块为$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}D$$

$$\begin{bmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{bmatrix}$$

$$A\,p_i=\lambda_i\,p_i\,,\quad i=1,\cdots,n$$

因为$p_i\neq 0 \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值,

$p_1,p_2,\cdots,p_n$依次为对应的线性无关的特征向量　**必要性得证**

以上过程逆推可得充分性证明

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

推论6.2.1 (充分条件) 如果n阶矩阵A有n个互不相同的特征值，

则矩阵A可相似对角化.

推论6.2.2(充要条件) n阶矩阵A可相似对角化当且仅当A的

每个特征值的几何重数等于代数重数.

例1 方阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\5&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵若是,

求可逆矩阵P及对角矩阵D,使得$P^{-1}AP=D$.

解

A的特征方程:$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-5&\lambda-5&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-5&\lambda-5&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-5&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$$

A有3个互不相同的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$. 故$A$必可对角化

例1 方阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\5&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵?若是,

求可逆矩阵P及对角矩阵D,使得$P^{-1}AP=D$.

解 A有3个互不相同的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$, A可对角化

对$\lambda_1=0$,解方程组$(0I-A)x=0$, 得基础解系$\xi_1=[1,-1,0]^T$

对$\lambda_2=2$,解方程组$(2I-A)x=0$, 得基础解系$\xi_2=[0,0,1]^T$

对$\lambda_3=6$,解方程组$(6I-A)x=0$,得基础解系$\xi_3=[1,5,0]^T$,

令矩阵$P=[\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&5\\0&1&0\end{bmatrix}$, 则有$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$

例2 常数a,b满足什么条件时 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化?

可对角化时,求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵,并求A^n.

解

A的特征方程 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-a&\lambda-1&-b\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

得A得全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

A可对角化$\Leftrightarrow I-A$的秩为1

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-1\\a&b\end{vmatrix}=a+b=0$

$I-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-a&0&-b\\-1&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\a&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

例2 常数a,b满足什么条件时 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化?

可对角化时,求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵,并求A^n.

解 A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$, A可对角化$\Leftrightarrow$ $a+b=0$,

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&-a\\1&0&0\end{bmatrix}$$

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$,解$(I-A)x=0$,

$$I-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-a&0&a\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \xi_1=(0,1,0)^T,\xi_2=(1,0,1)^T$$

对于$\lambda_3=-1$,解$(-I-A)x=0$

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-a&-2&a\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \xi_3=(1,-a,-1)^T$$

令$P=[\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3]$

$$P^{-1}AP=diag(1,1,-1)$$

例2 常数a,b满足什么条件时 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化?

可对角化时,求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵,并求A^n.

解

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}=D \quad\Rightarrow A=PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})=PD^nP^{-1}$$

$$D^n=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(-1)^n\end{bmatrix}$$

$n=2k$时: $A^n=PIP^{-1}=I,$

$n=2k+1$: $A^n=A^{2k+1}=A^{2k}A$

$=IA=A$

例3 判断$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ 6 & 4 & -9\\ 5 & 3 & -7\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵?

解

$$|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & 5\\ -6 & \lambda-4 & 9\\ -5 & -3 & \lambda+7\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0$: $0I-A\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ➜秩$(0I-A)$=2

属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的线性无关的特征向量只有一个, 故A不能对角化

主要内容

1 相似矩阵

2 矩阵可对角化的条件

3 实对称矩阵的对角化

3 实对称矩阵的对角化

方阵A为实对称矩阵$\Leftrightarrow$ A是实矩阵且是对称矩阵

性质6.2.1 实对称矩阵的特征值都是实数.

证明 设λ为实对称矩阵A的任意一个特征值 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为其对应的特征向量 则有：$Ax=\lambda x$

两端取共轭再取转置

$$\bar{x}^T A^T=\bar{\lambda}\bar{x}^T \quad \Rightarrow \bar{x}^T A=\bar{\lambda}\bar{x}^T \quad \Rightarrow \bar{x}^T Ax=\bar{\lambda}\bar{x}^T x$$

$$\Rightarrow \bar{x}^T \lambda x=\bar{\lambda}\bar{x}^T x \Rightarrow (\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^T x=0$$

因为 $\bar{x}^T x=\|x\|^2>0$ $\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$，即$\lambda$为实数.

性质6.2.2 设λ_1, λ_2是实对称矩阵A的两个不同特征值 x_1, x_2分别为对应的特征向量 则x_1与x_2正交, 即

$$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = 0$$

证明 $Ax_1 = \lambda_1 x_1,\ Ax_2 = \lambda_2 x_2,$

$$\Rightarrow x_2^T A x_1 = x_2^T \lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1 = \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle,$$

$$x_1^T A x_2 = x_1^T \lambda_2 x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2 = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle,$$

由于$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1^T x_2 = x_2^T x_1 = 0.$

定理6.2.3 对于任一n阶实对称矩阵A,必存在n阶正交矩阵P,

使得： $P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值

矩阵P的列向量组为A的n个标准正交的特征向量

证明:用归纳法. n=1 ,显然成立;

假设阶数为n-1成立, 下证阶数为n时成立：

设α_1是矩阵A的属于特征值λ_1的单位特征向量则将其扩充可得

R^n的标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 令 $P_1=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]$

$AP_1=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]$

$$=[\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$AP_1=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]$$

$$=[\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=P_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta^T\\ 0 & A_1\end{bmatrix}P_1^T$$

$$\Rightarrow A^T=P_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ \beta & A_1^T\end{bmatrix}P_1^T$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\lambda_1 & \beta^T\\ 0 & A_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ \beta & A_1^T\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\beta=0,\ A_1=A_1^T,$$

A_1是$n-1$阶实对称阵

由归纳法存在$n-1$阶正交阵P_2,

$$P_2^T\ A_1P_2=diag(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$P=P_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$是$n$阶正交阵,

$$P^TAP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^T\end{bmatrix}P_1^TAP_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & P_2^TA_1P_2\end{bmatrix}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

定理6.2.3 对于任一n阶实对称矩阵A，必存在n阶正交矩阵P，

使得： $P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值

矩阵P的列向量组为A的n个标准正交的特征向量

推论6.2.3 实对称矩阵每个特征值的几何重数等于其代数重数.

实对称矩阵正交相似对角化的具体步骤：

1. 计算A的全部互不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_s$ $(k_1+k_2+\cdots+k_s=n)$.

2. 对每个k_i重特征值λ_i 解方程$(\lambda_i E-A)x=0$得k_i个线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$，

   再将$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$标准正交化为$e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{ik_i}$

3. $e_{11},e_{12},\cdots,e_{1k_1};e_{21},e_{22},\cdots,e_{2k_2};\cdots;e_{s1},e_{s2},\cdots,e_{sk_s}$为标准正交向量组$(k_1+k_2+\cdots+k_s=n)$

4. 将(3)中的标准正交向量组按列排成n阶矩阵P(正交阵)，特征值对应排成n阶对角阵D，就有$P^TAP=D$

例1 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$,求一个正交矩阵$P$,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=0,\ \Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=-1,$

分别求得$\lambda_1=3,\lambda_2=-1$对应的特征向量$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

ξ_1与ξ_2已经正交,再单位化: $e_1=\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ e_2=\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

令$P=[e_1\quad e_2]$,则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&\\&-1\end{bmatrix}$.

例2

已知$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$相似,

(1)求a,b的值; (2)求正交矩阵P使得$P^{-1}AP=D$.

解 (1)A的特征值为$5,b,-1$,

$$\begin{cases}5+b+(-1)=0+0+3\\5\times b\times(-1)=|A|=4a-3\end{cases}\Rightarrow a=2,b=-1$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&2&3\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$$

例2 已知$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$相似,

(1)求a,b的值; (2)求正交矩阵P使得$P^{-1}AP=D$.

解 (1)A的特征值为5,–1,–1, $a=2, b=-1$

(2)对于$\lambda_1=5$, $5I-A\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$, $-I-A\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

令$P=\begin{bmatrix}\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}&\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}&\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}\end{bmatrix}$, 则有$P^{-1}AP=P^{T}AP=D$.

例3 设A为n阶实对称阵 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$n$个特征值，对应的正交单位特征向量分别为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

证明：$A=\lambda_1\xi_1\xi_1^T+\lambda_2\xi_2\xi_2^T+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^T$.

证明 令：$P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$, $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

则：$P^TAP=D\Rightarrow A=PDP^T$

$$=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\\ \vdots \\ \xi_n^T\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1\xi_1\xi_1^T+\lambda_2\xi_2\xi_2^T+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^T.$$

你发现了什么？

第六章　特征值与特征向量

课后习题选讲

数学与统计学院
赵小艳

例1 若存在某正整数k, 使得方阵A满足$A^k=O$,

证明：A的特征值都为0.

幂零矩阵

证 设λ是A的特征值, α是对应的特征向量，且$A\alpha=\lambda\alpha$,

则$A^k\alpha=\lambda^k\alpha=0$，而特征向量$\alpha\neq0$,

$\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$.

特征值与特征向量的定义 $Ax=\lambda x\ (x\neq0)$

例2 若矩阵 $A_{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$, 证明: A的特征值必为0或1.

幂等矩阵

证 设λ是A的特征值, α是对应的特征向量, 且 $A\alpha=\lambda\alpha$,

则 $A^2\alpha = A(A\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$,

由 $A^2 = A$ 得 $(\lambda^2 - \lambda)\alpha = 0$, 而特征向量 $\alpha \neq 0$,

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 或 1.

注意: 虽然A的特征值必为0或1, 但是0,1未必都能取到.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

特征值与特征向量的定义 $Ax = \lambda x \ (x \neq 0)$

例3 设n维向量$\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T\neq 0$, $\beta=(b_1,\ldots,b_n)^T\neq 0$, 且 $\alpha^T\beta=0$, 令 $A=\alpha\beta^T$. 求: (1) A^2; (2)A的特征值与特征向量.

解 (1) $A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=O$.

(2) 设$Ax=\lambda x(x\neq 0)$, 则有$A^2x=\lambda^2x$.又$A^2=O$, 得$\lambda^2x=0$, 而$x\neq 0$, 所以$\lambda=0$是A唯一的特征值. 不妨设$a_1b_1\neq 0$,

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \cdots & & \cdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\neq 0,\quad r(A)\geq 1,\ \alpha\neq 0, \text{故} r(A)\leq r(\alpha)=1,$$

所以$r(A)=1$. 由$Ax=0$得$n-1$个线性无关的特征向量:

$$x_1=(-b_2,b_1,\cdots,0)^T,\ x_2=(-b_3,0,b_1,\cdots,0)^T,\cdots,x_{n-1}=(-b_n,0,\cdots,b_1)^T.$$

0的所有特征向量为$c_1x_1+\cdots+c_{n-1}x_{n-1}(c_1,\cdots,c_{n-1}$不全为零).

例4 设A,B均为n阶矩阵, 证明: AB与BA有相同的特征值.

证 (1) 设$\lambda \neq 0$是AB的特征值, α是对应特征向量, 即$(AB)\alpha = \lambda\alpha$,

则$B(AB)\alpha = \lambda B\alpha$, 即$(BA)(B\alpha) = \lambda(B\alpha)$, 而$B\alpha \neq 0$

(否则$A(B\alpha) = 0$,与$(AB)\alpha = \lambda\alpha \neq 0$矛盾)

故λ也是BA的特征值, 相应的特征向量为$B\alpha$.

(2) 设$\lambda = 0$是AB的一个特征值, 则有$\det(AB) = 0$, 从而

$\det(BA) = \det(AB) = 0$, 故0也是BA的特征值.

总之, AB与BA有相同的特征值.

特征值与特征向量的定义 $Ax = \lambda x\ (x \neq 0)$

例5 设任意n维非零列向量都是n阶矩阵A的特征向量.

证明: A为数量矩阵(即存在常数k, 使$A=kI$).

解 设$A_n=(a_{ij})$的特征值为k, 取特征向量$x=e_1=(1,0,\cdots,0)^T$, 则

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}=k,\ \ a_{21}=\cdots=a_{n1}=0.$$

一般地, 取$x=e_j$, 则$a_{jj}=k, a_{ij}=0(i, j=1,\cdots,n, i\neq j)$.

所以$A=\mathrm{diag}(k,\cdots,k)=kI$.

特征值与特征向量的定义 $Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$

例6 设λ为正交矩阵A的特征值. 证明: $\frac{1}{\lambda}$也是A的特征值.

证 若λ是正交矩阵A的特征值, 则A可逆, $\lambda \neq 0$, 且$|A-\lambda I|=0$.

$$0=|A-\lambda I|=|A-\lambda AA^T| = |A(I-\lambda A^T)|$$

$$=|A||(I-\lambda A)^T|=|A||I-\lambda A| = |A|\lambda^n\left|\frac{1}{\lambda}I-A\right|$$

所以 $\left|\frac{1}{\lambda}I-A\right|=0$, $\frac{1}{\lambda}$也是A的特征值.

正交矩阵的定义 $AA^T=A^TA=I$ 或 $A^T=A^{-1}$

例7 证明：正交矩阵的特征值的模为1.

证1 设A为n阶正交矩阵，λ是A的特征值，$\alpha \neq 0$是对应的特征向量，

则有$A\alpha = \lambda\alpha$. 一方面，A是正交阵，所以 $\|A\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$；

另一方面，$\|A\alpha\|^2 = \|\lambda\alpha\|^2 = |\lambda|^2 \|\alpha\|^2$，所以 $\|\alpha\|^2 = |\lambda|^2 \|\alpha\|^2$，

注意到$\alpha \neq 0$，所以 $|\lambda|^2 = 1$.

证2 设$A\alpha = \lambda\alpha\,(\alpha \neq 0)$，取共轭得$\bar{A}\bar{\alpha} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}$，$A\bar{\alpha} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}\,(A$是实矩阵$)$，

取转置得$\bar{\alpha}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{\alpha}^T$，右乘$\alpha$得 $\bar{\alpha}^T A^{-1}\alpha = \bar{\lambda}\bar{\alpha}^T\alpha$，

$\lambda^{-1}\bar{\alpha}^T\alpha = \bar{\lambda}\bar{\alpha}^T\alpha$，$\Rightarrow (\lambda\bar{\lambda} - 1)\bar{\alpha}^T\alpha = 0$，

$\bar{\alpha}^T\alpha = \|\alpha\|^2 \neq 0$，所以 $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$.

例8 设A是奇数阶正交矩阵,$|A|=1$. 证明：A有特征值1.

证 $|A-I|=|A-AA^T|=|A(I-A^T)|=|A||I-A^T|$

$$=|(I-A)^T|=|I-A|$$

$$=(-1)^n|A-I|$$

$$=-|A-I|$$

所以 $|A-I|=0.$ A有特征值1.

正交矩阵的定义 $AA^T=A^TA=I$ 或 $A^T=A^{-1}$

例9 设矩阵A与B相似,即存在可逆阵P,使得$P^{-1}AP=B$,且向量x是A的属于特征值λ_0的特征向量,求矩阵B的属于特征值λ_0的特征向量.

解 由已知, $Ax=\lambda_0 x\ (x\neq 0)$. 由$P^{-1}AP=B$得$A=PBP^{-1}$.

$$PBP^{-1}x=\lambda_0 x \quad \Rightarrow B(P^{-1}x)=\lambda_0(P^{-1}x)$$

注意到$P^{-1}x\neq 0$,

所以$P^{-1}x$是矩阵B的属于特征值λ_0的特征向量.

例10 设 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^m=O$(m 为正整数), 证明:

A 不相似于对角阵.

证法一 首先, 由于 $A^m=O$, 从而0是 A 的 n 重特征值. 其次,

$A\neq O, r(A)\geq 1$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系中最多含 $n-1$ 个解,

即 A 的特征值0的几何重数 $\leq n-1<n$ (代数重数),

所以 A 不相似于对角阵.

证法二 用反证法. 首先, 由于 $A^m=O$, 从而 A 的特征值全为零.

假设 A 相似于对角阵, 则存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=O$.

从而得 $A=O$, 与题设中 A 为非零矩阵矛盾.

故 A 不能相似于对角阵.

例11 设3阶矩阵 A 与对角矩阵 $B=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 相似, 证明: 矩阵 $C=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)=O$.

证 由 A 与 B 相似, 故存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, $A=PBP^{-1}$.

$$A-\lambda_i I=PBP^{-1}-\lambda_i PP^{-1}=P(B-\lambda_i I)P^{-1},\ i=1,2,3.$$

$$C=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)$$

$$=\left(P(B-\lambda_1 I)P^{-1}\right)\left(P(B-\lambda_2 I)P^{-1}\right)\left(P(B-\lambda_3 I)P^{-1}\right)$$

$$=P\begin{bmatrix}0 & & \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \\ & & \lambda_3-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_3-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_3 & & \\ & \lambda_2-\lambda_3 & \\ & & 0\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=O.$$

例12 设同阶实对称阵A与B有相同的特征值, 证明A与B相似.

证 设n阶实对称阵A与B的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

记 $D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 则存在可逆阵$P,Q$, 使得

$$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ=D.$$

则 $A=PQ^{-1}BQP^{-1}=(QP^{-1})^{-1}BQP^{-1}=C^{-1}BC$

其中 $C=QP^{-1}$为可逆矩阵. 所以A与B相似.

注意: 两个非实对称阵, 即使有相同的特征值, 也不一定相似.

因为他们不一定能相似于特征值组成的对角阵.

例13 设 α,β 均为 n 维非零列向量，$A=\alpha\beta^T$，证明：

(1) $r(A)=1$; (2) 0为 A 的特征值且几何重数为 $n-1$;

(3) $\beta^T\alpha$ 也是 A 的特征值且 α 是相应的特征向量；

(4) 当 $\beta^T\alpha\neq 0$ 时，A 可以对角化．

证 (1) $\alpha\neq 0, r(\alpha)=1$ 是列满秩阵，从而 $r(A)=r(\alpha\beta^T)=r(\beta^T)=1$.

(2) 由于 $r(A)=1<n$，所以 $\lambda=0$ 是 A 的一个特征值. 由于 $Ax=0$ 的基础解系含 $n-r(A)=n-1$ 个向量，即0的几何重数为 $n-1$.

(3) $A\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=(\beta^T\alpha)\alpha$，所以 $\lambda=\beta^T\alpha$ 是 A 的特征值，相应的特征向量为 α.

(4) 当 $\beta^T\alpha\neq 0$ 时，由(2),(3)知 A 的每个特征值的几何重数都等于代数重数，所以 A 可以对角化.

例14 若矩阵$A_{n\times n}$满足$A^2=A$, 证明: A必相似于对角阵.

证 满足$A^2=A$的特征值只能是0或者1.

$$A(A-I)=O\Rightarrow r(A)+r(A-I)\le n.$$

而$r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\ge r(A+I-A)=r(I)=n.$

所以$r(A)+r(A-I)=n$. A的所有线性无关特征向量个数为

$$(n-r(A))+(n-r(A-I))=n.$$

所以A必相似于对角阵

重要结论 (1) 若$A_{m\times n}, B_{n\times p}$, 且$AB=O$, 则$r(A)+r(B)\le n$.

(2) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

例14 若矩阵 $A_{n\times n}$ 满足 $A^2=A$, 证明: A必相似于对角阵.

证　满足$A^2=A$的特征值只能是0或者1.

$$A(A-I)=O \Rightarrow r(A)+r(A-I)\le n.$$

而 $r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\ge r(A+I-A)=r(I)=n.$

所以 $r(A)+r(A-I)=n.$ A的所有线性无关特征向量个数为

$$(n-r(A))+(n-r(A-I))=n.$$

所以 A必相似于对角阵

进一步 若 $r(A)+r(A-I)=n$, 则 $A^2=A$. 若$A=O$或I, 结论成立.

若$A\ne O, A\ne I$, 则 A相似于对角阵$D=diag(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$,

即$\exists$可逆矩阵P, 使得 $A=PDP^{-1}$, 所以 $A^2=PD^2P^{-1}=A$.

例15 设 A 为 n 阶矩阵, λ_0 为 A 的一个特征值, 其特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k, V_{λ_0} 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 可以扩充为 F^n 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n$.

令矩阵 $P=\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right]$, $B=P^{-1}AP$. 证明: (1) B 形如 $\begin{bmatrix}\lambda_0 I & B_{12}\\ O & B_{22}\end{bmatrix}$;

(2) λ_0 是重数至少为 k 的 B 的特征值;

(3) 利用 A 与 B 相似证明 λ_0 是重数至少为 k 的 A 的特征值.

证 (1) $A\alpha_i=\lambda_0\alpha_i, i=1,\cdots,k$. $A\alpha_j=b_{1j}\alpha_1+\cdots+b_{nj}\alpha_n$, $j=k+1,\cdots,n$.

$$AP=A\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right)=\left(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n\right)=P\begin{pmatrix}\lambda_0, \cdots, 0, & b_{1,k+1}, \cdots, & b_{1n}\\ \cdots\cdots & & \\ 0, \cdots, \lambda_0, & b_{k,k+1}, \cdots, & b_{kn}\\ 0, \cdots, 0, & b_{k+1,k+1}, \cdots, & b_{k+1,n}\\ \cdots\cdots & & \\ 0, \cdots, 0, & b_{n,n}, \cdots, & b_{n,n}\end{pmatrix}$$

即 $AP=PB$

则 $B=P^{-1}AP$, 且 $B=\begin{pmatrix}\lambda_0 I & B_{12}\\ O & B_{22}\end{pmatrix}$.

例15 设 A 为 n 阶矩阵，λ_0 为 A 的一个特征值，其特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k，V_{λ_0} 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 可以扩充为 F^n 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n$. 令矩阵 $P=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$，$B=P^{-1}AP$. 证明：(1) B 形如 $\begin{bmatrix}\lambda_0 I & B_{12}\\ O & B_{22}\end{bmatrix}$；

(2) λ_0 是重数至少为 k 的 B 的特征值；

(3) 利用 A 与 B 相似证明 λ_0 是重数至少为 k 的 A 的特征值.

证 (2) $|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}(\lambda_0-\lambda)I_k & B_{12}\\ O & B_{22}-\lambda I_{n-k}\end{vmatrix}=(\lambda_0-\lambda)^k|B_{22}-\lambda I_{n-k}|$

所以 λ_0 是 B 的重数至少为 k 的特征值.

(3) A 与 B 相似，具有相同的特征值，所以 λ_0 也是 A 的重数至少为 k 的特征值.

第六章　特征值与特征向量

总习题

数学与统计学院

例1 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$的非零特征值是____.

解 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-8 & -2 & -2 & -2 \\ \lambda-8 & \lambda-2 & -2 & -2 \\ \lambda-8 & -2 & \lambda-2 & -2 \\ \lambda-8 & -2 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-8 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$=\lambda^3(\lambda-8)$ 所以A的非零特征值是8.

解二 $r(A)=1$,所以A有特征值0,且至少是三重根.

设A的另一特征值为λ,则$tr(A)=\lambda$, 所以$\lambda=8$.

例2 设A为2阶方阵,α_1,α_2为线性无关的2维向量,$A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$,则$A$的非零特征值为____.

解 $A[\alpha_1\ \ \alpha_2]=[A\alpha_1\ \ A\alpha_2]=[\,0\ \ 2\alpha_1+\alpha_2\,]=[\alpha_1\ \ \alpha_2]\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

A相似于$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 所以$A$的非零特征值为1.

例3 设向量$\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(1,0,k)^T$,若方阵$\alpha\beta^T$有特征值3,则$k=$____.

解 $r(\alpha\beta^T)=1$, 所以矩阵$\alpha\beta^T$至少有2重特征值0,

矩阵$\alpha\beta^T$的三个特征值为3, 0, 0.

$$tr(\alpha\beta^T)=3+0+0=3,$$

而 $tr(\alpha\beta^T)=tr(\beta^T\alpha)=1+k$

所以 $k=2.$

已知结论： 设A,B都是n阶方阵,则$tr(AB)=tr(BA)$.

例4 设$A_{4\times4}$相似于$\mathrm{diag}(2,2,2,-2)$，则$\det\left(\frac{1}{4}A^*+3I\right)=$ ____.

解 A^*的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$，其中λ是A的特征值. $|A|=-16.$

所以A^*的特征值为：$-8,-8,-8,\ 8.$

$\frac{1}{4}A^*+3I$的特征值为：$1,1,1,5.$

$$\det\left(\frac{1}{4}A^*+3I\right)=1\times1\times1\times5=5.$$

例5 已知$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & b & \\ & & -1 \end{bmatrix}$相似，则$a=$____,$b=$____.

解 由相似的性质,第一个矩阵的特征值为 $5, b, -1.$

利用特征值的性质得 $\begin{cases} 5+b-1=3 \\ -5b=|A|=4a-3 \end{cases}$

解得$a=2$，$b=-1.$

例6 已知矩阵$\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$不相似于对角阵，则$a=$____.

解 $|\lambda I - A| = (\lambda - a)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$,

A 不能相似对角阵, 所以 $a=1$或$a=2$.

当$a=2$, 2是二重特征值，$2I - A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$r(2I-A)=1$, 几何重数等于代数重数, A能对角化.

$a=1$时，$r(I-A)=2$，A不可对角化. 因此, $a=1$.

例7 已知 A 与 $B=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 相似，则 $r(A-2I)+r(A-I)=$ ____.

解 $A-2I \sim B-2I=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $A-I \sim B-I=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

计算得 $r(B-2I)=3$, $r(B-I)=1$;

所以 $r(A-2I)+r(A-I)=r(B-2I)+r(B-I)=4$.

例8 设α,β均为3维向量,若方阵$\alpha\beta^T$相似于$\mathrm{diag}(2,0,0)$,

则$\beta^T\alpha=$____.

解 方阵$\alpha\beta^T$的三个特征值为$2,0,0$. $tr(\alpha\beta^T)=2+0+0=2.$

设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$,

则$\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$

$\beta^T\alpha=tr(\alpha\beta^T)=2.$

例9 设A是n阶实对称阵，α是A的属于特征值λ的特征向量，则矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是(　　).

(A) $P^{-1}\alpha$　　(B) $P^T\alpha$　　(C) $P\alpha$　　(D) $(P^{-1})^T\alpha$.

解 记 $B=(P^{-1}AP)^T=P^TA(P^T)^{-1}$，则 $A=(P^T)^{-1}BP^T$.

由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 得 $(P^T)^{-1}BP^T\alpha=\lambda\alpha$.

$$\therefore \quad B(P^T\alpha)=\lambda(P^T\alpha).$$

矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量为 $P^T\alpha$.

应选 B.

例10 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值, α_1,α_2分别是对应于λ_1,λ_2的特征向量, 则$\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) $\lambda_1 \neq 0$　　(B) $\lambda_2 \neq 0$　　(C) $\lambda_1 = 0$　　(D) $\lambda_2 = 0$.

解 $$\begin{bmatrix}\alpha_1 & A(\alpha_1+\alpha_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

应选 B.

例11 设4阶矩阵 A 的秩为3, 且 $A^2+A=O$, 则 A 相似于(   ).

(A) $\mathrm{diag}(1,1,1,0)$ (B) $\mathrm{diag}(1,1,-1,0)$

(C) $\mathrm{diag}(1,-1,-1,0)$ (D) $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$

解一 $A \sim D \Rightarrow A^2+A \sim D^2+D$

由 $A^2+A=O$ 知 $D^2+D=O$, 应选 D.

解二 设 λ 是 A 的特征值, 则 $\lambda^2+\lambda$ 是 A^2+A 的特征值.

$\lambda^2+\lambda=0$ 解得 A 的特征值只能取 0 或 -1.

A 的秩为3, 0至少是一重特征值. 应选 D.

例12 设4阶阵 A 的特征值互不相同, 且 $\det(A)=0$, 则 $r(A)=($　　$)$.

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3.

解　$\det(A)=0$, 则 A 有特征值0.

又 A 的特征值互不相同, 所以0是单特征值,

而且 A 的其他特征值都不是0,

所以 $r(A)=3$.

应选 D.

例13 设$-1,1$都是3阶阵A的特征值, α_1,α_2为对应的特征向量, α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$, $P=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$,则下列结论正确的是( ).

（A）P不可逆　　（B）P可逆且$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,1,1)$

（C）P可逆且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$（D）$P$是否可逆不能确定.

解 $A\left[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\right]=\left[-\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3\right]=\left[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\right]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,

左乘A并代入得 $-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$,

两式相减得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0,\Rightarrow k_1=0,\ k_3=0,\ k_2=0.$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, P可逆.

例14 设$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$可逆,$\lambda$为$A^*$的一个特征值且相应的特征向量为$\alpha=(1,b,1)^T$,求$a,b$和$\lambda$的值.

解 $A^*\alpha=\lambda\alpha$ 得 $AA^*\alpha=\lambda A\alpha$, $|A|\alpha=\lambda A\alpha$. 而 $|A|=3a-2$.

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}=\frac{3a-2}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3+b=\dfrac{3a-2}{\lambda}\\2+2b=\dfrac{3a-2}{\lambda}b\\1+a+b=\dfrac{3a-2}{\lambda}\end{cases}$$

解得 $a=2,b=-2,\lambda=4$ 或 $a=2,b=1,\lambda=1$.

例15 设 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}, B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2I$ 的特征值与特征向量.

解 $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=7,\ \lambda_2=\lambda_3=1.\quad |A|=7.$

$\lambda_1=7$ 对应特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^T$.

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应特征向量为 $\xi_2=(1,-1,0)^T, \xi_3=(1,1,-2)^T$.

A^* 的三个特征值为$(|A|/\lambda)$：1, 7, 7, 对应特征向量为：ξ_1,ξ_2,ξ_3.

B 与 A^* 相似, B 的特征值为：1, 7, 7,特征向量：$P^{-1}\xi_1, P^{-1}\xi_2, P^{-1}\xi_3$.

$B+2I$ 的特征值为：3, 9, 9, 特征向量：$P^{-1}\xi_1, P^{-1}\xi_2, P^{-1}\xi_3$.

其中：$P^{-1}\xi_1=(0,1,1)^T, P^{-1}\xi_2=(-1,1,0)^T, P^{-1}\xi_3=(3,1,-2)^T$.

例16 若$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$相似于对角阵 D, 试确定常数a 的值并求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = D$.

解 $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -2.$

由于A能相似对角阵, 所以6的几何重数等于2, 即 $r(A-6I)=1.$

$$A-6I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ 所以 $a=0.$

$\lambda = 6$对应特征向量为 $\xi_1 = (1,2,0)^T, \xi_2 = (0,0,1)^T.$

$\lambda_3 = -2$ 对应特征向量为 $\xi_3 = (1,-2,0)^T.$

令$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), D = \mathrm{diag}(6,6,-2)$, 则$P^{-1}AP = D.$

例17 设3阶实对称矩阵A的每行元素的和都是3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是$Ax=0$的两个解，

(1) 求正交阵Q和对角阵D，使得$Q^TAQ=D$;

(2) 求A及$(A-\frac{3}{2}I)^6$.

解 (1) A的每行元素的和都是3，则$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$\lambda_1=3$是A的特征值，对应特征向量为$\xi_1=(1,1,1)^T$.

又$Ax=0$有两个线性无关的解，所以0是A的二重特征值，

对应特征向量为α_1,α_2. 将ξ_1,α_1,α_2正交化、单位化得

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\ e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T,\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T.$$

令$Q=(e_1,e_2,e_3)$, $D=\mathrm{diag}(3,0,0)$, 则$Q^TAQ=D$.

例17 设3阶实对称矩阵A的每行元素的和都是3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$是$Ax=0$的两个解,

(1) 求正交阵Q和对角阵D, 使得$Q^TAQ=D$;

(2) 求A及$(A-\frac{3}{2}I)^6$.

解 (2)
$$A=QDQ^T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{pmatrix}=3e_1e_1^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

$$A-\frac{3}{2}I=QDQ^T-\frac{3}{2}I=Q(D-\frac{3}{2}I)Q^T=\frac{3}{2}Q\mathrm{diag}(1,-1,-1)Q^T$$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T,\ e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T,\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T.$$

令$Q=(e_1,e_2,e_3)$, $D=\mathrm{diag}(3,0,0)$, 则$Q^TAQ=D$.

例17 设3阶实对称矩阵A的每行元素的和都是3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是$Ax=0$的两个解，

(1) 求正交阵Q和对角阵D，使得$Q^TAQ=D$；

(2) 求A及$(A-\frac{3}{2}I)^6$.

解 (2) $A=QDQ^T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{pmatrix}=3e_1e_1^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$A-\frac{3}{2}I=QDQ^T-\frac{3}{2}I=Q(D-\frac{3}{2}I)Q^T=\frac{3}{2}Q\mathrm{diag}(1,-1,-1)Q^T$$

$$(A-\frac{3}{2}I)^6=(\frac{3}{2})^6Q(\mathrm{diag}(1,-1,-1))^6Q^T=(\frac{3}{2})^6I.$$

例18 设 A 为3阶矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的3维列向量组且满足$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$,

(1) 记$Q=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$, 求矩阵 B, 使得 $AQ=QB$;

(2) 求可逆阵 M, 使 $M^{-1}BM$ 成为对角阵;

(3) 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 成为对角阵.

解 (1) 由已知得 $A\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}}$ 记为 B

则$AQ=QB$.

(2) B的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=4$.

对应特征向量: $\xi_1=(1,-1,0)^T, \xi_2=(1,1,-1)^T, \xi_3=(0,1,1)^T$.

令 $M=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $D=\mathrm{diag}(1,1,4)$, 则$M^{-1}BM=D$.

(3) $A=QBQ^{-1}=QMDM^{-1}Q^{-1}=PDP^{-1}$, 则 $PAP^{-1}=D$,

其中P可逆, 且 $P=QM=(\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3)$.