高等数学期中考试模拟试题（三）

中国大学MOOC

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. $x \to 0$时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是(　　).

A. 无穷小　B. 无穷大　C. 有界但非无穷小　D. 无界但非无穷大

2. 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0\end{cases}$,则下列$f(x)$在$x=0$处(　　).

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续

D. 以上结论都不对

中国大学MOOC

3. 已知$f(x)$是奇函数且$x<0$时单增，则当$x>0$时，$f(x)$是(　).

A. 单增

B. 单减

C. 可能单增，可能单减

D. 既非单增，也非单减

4. 设$f(x), g(x)$都在$x=a$处取得极大值，则$F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$处(　).

A. 必取得极大值

B. 必取得极小值

C. 不可能取得极值

D. 是否取得极值不能确定

中国大学MOOC

5. 设$f(x)$在$x=a$的某邻域内有定义，则$f(x)$在$x=a$可导的一个充分条件是(　　).

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

中国大学MOOC

二. 填空题（共5道小题，每题4分，总计20分）

1.设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则$f(\ln x)$的定义域为________.

2.已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$,则$a=$ ________.

3.设$f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$，当$a=$____ ,$b=$____ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

4.函数$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$的第一类间断点$x=$______，第二类间断点$x=$______.

5.已知$x\to 0$时，$\sin x$与$\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a=$______.

三. 计算题（共5道小题，每题7分，总计35分）

1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

2.设$y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$，求$y'$.

3.设函数$y=y(x)$由$\begin{cases} x\text{-}e^{t}\sin t+1=0 \\ y=t^{3}+2t \end{cases}$确定，求$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

4.方程$\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$表示平面上一条曲线，试求该曲线在$x=0$处的切线方程和法线方程.

5.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^{2}+1}+\dfrac{n+2}{n^{2}+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^{2}+n}\right)$.

四. （本题9分）设$n\in N_{+}$，讨论函数$f(x)=\begin{cases} x^{n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处的连续性与可导性及$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

五. 证明下列各题（共3道题，每小题7分，共21分）

1.设$x_1 < -1$，$x_{n+1} + \sqrt{1-x_n} = 0$，证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 证明不等式：当$e < x_1 < x_2$时，有$\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_1}$.

3.设$f \in [0,1]$，f在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$.

证明：存在点$\xi \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta \in \left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.