西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

《高等数学》期末考试模拟题（四）答案

数学与统计学院：张芳

一. 单选题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$，在$x=0$处(C).

A. 连续且取极大值；　　B. 连续且取极小值；

C. 可导且导数不为零；　　D. 可导且导数为零.

2. 函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续且$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,

则$f(x)$在$x=0$处(D).

A. 不可导；　　B. 可导且$f'(0)\neq 0$;

C. 取得极大值；　　D. 取得极小值.

一. 单选题（共5道小题，每小题3分，共15分）

3. 微分方程$y''-y=e^x+1$的一个特解可设为$(a,b$为常数$)$(**B**).

A. ae^x+b； B. axe^x+b； C. ae^x+bx； D. axe^x+bx；

4. 函数$y=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$的间断点个数是(**D**).

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

5. 当$x\to 0$时,函数$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$是(**A**).

A. 无界的但不是无穷大量 ； B. 无穷大量；

C. 有界的但不是无穷小量 ； D. 无穷小量 .

二. 填空题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林公式中 x^{2021} 项的系数为 = $\underline{-\dfrac{1}{2021}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\underline{\quad 1\quad}$.

3. 反常积分 $\int_1^3 \ln\sqrt{\dfrac{\pi}{|2-x|}}dx=\underline{\ln\pi+1}$.

4. 设 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\underline{\dfrac{2e^2-3e}{4}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k+\dfrac{1}{n}\right)^2\tan\dfrac{1}{n^3}=\underline{\dfrac{1}{3}}$.

三．计算题（共7道小题，每小题6分，共42分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\ln t)dt}{\cos x\int_0^x \ln^2(1+t)dt}$．

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\ln t)dt}{\cos x\int_0^x \ln^2(1+t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\ln t)dt}{\int_0^x \ln^2(1+t)dt}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\tan^3 x\ln x}{\ln^2(1+x)}=1$$

利用L'Hospital法则

三. 计算题（共7道小题，每小题6分，共42分）

2. 讨论函数$f(x)=|x|^{\frac{1}{20}}+|x|^{\frac{1}{21}}-2\cos x$的零点个数 .

解 $f(x)$是偶函数，所以只需讨 论$x>0$时的零点，

当$x>1$时, $f(x)>0$, 所以f在$(1,+\infty)$内没有零点；

$f(0)=-2<0$, $f(1)>0$, 所以f在$(0,1)$至少有一个零点；

当$x\in(0,1)$时, $f'(x)=\dfrac{1}{20}x^{-\frac{19}{20}}+\dfrac{1}{21}x^{-\frac{20}{21}}+2\sin x>0$,

所以f在$(0,1)$中严格单调，从而至多 有一个零点；

所以f在$(0,+\infty)$中有且只有一个零点，

从而f在$(-\infty,+\infty)$内有且只有两个零点；

三. 计算题（共7道小题，每小题6分，共42分）

3. 求微分方程$(y+1)y''+(y')^2=(1+2y+\ln y)y'$满足$y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$的解.

方程不显含x

解 设$y'=p$,则$y''=p\frac{dp}{dy}$,方程化为$(y+1)p\frac{dp}{dy}+p^2=(1+2y+\ln y)p$

$$\frac{dp}{dy}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1} \Rightarrow p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y+C)$$

由$y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$得$C=0$,即

$$p=\frac{1}{y+1}(y^2+y\ln y),\quad 即\ \frac{1+\frac{1}{y}}{y+\ln y}y'=1$$

代入初始条件得: $\ln(y+\ln y)=x$

三. 计算题（共7道小题，每小题6分，共42分）

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} dx + 0 = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$

$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t}{1+\cos t} dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t(1-\cos t)}{1-\cos^2 t} dt$

利用奇偶性

$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^2 t) dt = 4 - \pi.$

令x=$sint$,作定积分换元

三. 计算题（共7道小题，每小题6分，共42分）

5. 将圆周$x^2+y^2=4x-3$绕y轴旋转一周，求所得旋 转体的体积．

解 圆的方程为 : $(x-2)^2+y^2=1$.

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2dy-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2dy$$

$$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=8\pi\cdot\frac{1}{2}\pi=4\pi^2.$$

三. 计算题

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x+b\sin x+c, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，讨论常数 a,b,c 以及 k 的取值.

解

由 f 可微知它在 $x=0$ 处连续. 当 $k<0$ 时, $f(0+0)$ 不存在, $\therefore k>0$.

当 $k>0$ 时, $f(0+0)=f(0)=0$, $f(0-0)=c$，所以 $c=0$.

又 $k<1$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, $\therefore k>1$.

当 $k>1$ 时，$f'_-(0)=b$,，$f'_+(0)=0$, $\therefore b=0$.

三. 计算题

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin^2 x+b\sin x+c, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上

连续可微，讨论常数 a,b,c 以及 k 的取值 .

解 当 $k>1, c=0, b=0$ 时,

$$f'(x)=\begin{cases} 2a\sin x\cos x, & x<0 \\ 0, & x=0\,. \\ kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

当 $k<2$ 时，$f'(0+0)$ 不存在，$\therefore k>2.$

综上所述，$k>2, b=0, c=0$ 是 f 连续可微的必要条件 .

7. 求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值 .

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$, $f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$.

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$.令$f'=0$得驻点 $x=0,\pm1$, 结果列下表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

单调增区间为$(-1,0),(1,+\infty)$,单调减区间为$(-\infty,-1),(0,1)$,

极小值为 $f(\pm1)=0$, 极大值 $f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$.

四.（本题10分）求微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的通解.

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=4.$

$$\lambda=-2, A+2E\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, r_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};$$

$$\lambda=4, A-4E\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, r_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix};$$

四.（本题10分）求微分方程组 $\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的通解．

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\ \lambda_3=4.$

$$X(t)=(r_1e^{-2t},r_2e^{-2t},r_3e^{4t})=\begin{bmatrix}e^{-2t}&-e^{-2t}&e^{4t}\\e^{-2t}&0&e^{4t}\\0&e^{-2t}&2e^{4t}\end{bmatrix};\ r_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},r_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},r_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix};$$

对应齐次微分方程组通 解为：$x=X(t)C$

$$X(0)\neq E,X^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

四.（本题10分）求微分方程组 $\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的通解 .

解

$$X(t)=(r_1e^{-2t},r_2e^{-2t},r_3e^{4t})=\begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t}\\ e^{-2t} & 0 & e^{4t}\\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t}\end{bmatrix};\quad X(0)\neq E,$$

$$X^{-1}(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

对应齐次微分方程组通 解为：$x=X(t)C$

通解为：$x(t)=X(t)X^{-1}(0)C+\int_0^t X(t-\tau)X^{-1}(0)f(\tau)d\tau$

$$=\begin{bmatrix}e^{-2t}(\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3-\frac{1}{4})+e^{4t}(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3+\frac{1}{8})+\frac{1}{8}\\ e^{-2t}(-\frac{1}{2}C_1+\frac{3}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3-\frac{1}{4})+e^{4t}(\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_3+\frac{1}{8})+\frac{1}{8}\\ e^{-2t}(C_2-C_1)+e^{4t}(C_1-C_2+C_3+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

五. (本题6分)证明等式 $\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt$,

其中$a,b>0$,且等式两端的二个积分 都收敛 .

证明 令$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$,则$dx=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}dt$

$$I=\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{2a}(\int_{-\infty}^{0}+\int_0^{+\infty})f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

在积分$\int_{-\infty}^{0}$ 中令$t=-u$,则

$$I=\frac{1}{2a}(\int_0^{+\infty} f(\sqrt{u^2+4ab})\frac{\sqrt{u^2+4ab}-u}{\sqrt{u^2+4ab}}du+\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt)$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt.$$

六. (6分)设$0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,

证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

证明 $\because 0<x_1<3, 0<3-x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,

$\therefore 0<\sqrt{x_1(3-x_1)}<3$,即$0<x_2<3$,

单调有界原理

同理有：$0<x_n<3,(n=1,2,\cdots)$;

又$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\dfrac{x_n+(3-x_n)}{2}=\dfrac{3}{2}(n=1,2,\cdots)$,

$$\therefore x_{n+1}\ge\sqrt{x_n(3-\frac{3}{2})}=\sqrt{\frac{3}{2}x_n}\ge\sqrt{x_nx_n}=x_n(n=1,2,\cdots),$$

$\therefore$ 数列$\{x_n\}$单调增有上界，收敛。

$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边取极限，解之得数 列极限为$\dfrac{3}{2}$。

七. (6分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2,$

证明: (1)$\exists\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)=0$;(2)$\exists\eta\in(0,1)$,使$f''(\eta)-f(\eta)=0$.

证明(1) 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知$f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1,$

故$\exists a>0,a\in(0,\delta_1)$,且$f(a)>f(0)=0.$

由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$知$f(1)=0,f'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2,$

故$\exists b>0,b\in(1-\delta_2,1)$,且$b\neq a,f(b)<f(1)=0.$

$\therefore f(a)f(b)<0$,由介值定理知$\exists\xi\in(a,b)\in(0,1)$,使$f(\xi)=0$.

七.(6分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$,

证明:(1)$\exists\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)=0$;(2)$\exists\eta\in(0,1)$,使$f''(\eta)-f(\eta)=0$.

证明(2) 构造函数$F(x)=e^{-x}f(x)$,由(1)知$F(0)=F(\xi)=F(1)=0$,

由$Rolle$定理知$\exists\xi_1\in(0,\xi)$,使$F'(\xi_1)=0$, $\exists\xi_2\in(\xi,1)$,使$F'(\xi_2)=0$.

$F'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$,$\xi_1,\xi_2$分别是$f'(x)-f(x)=0$的两个根,

构造$G(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$,则$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$,

由$Rolle$定理知$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$,使$G'(\eta)=0$,

即 $f''(\eta)-f(\eta)=0$.