西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期中考试模拟题（一）答案

一. 填空题（每小题3分，共15分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2xe^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ______.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=$ ______.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2xe^{x}\right)^{\frac{1}{2xe^{x}}\cdot\frac{2e^{x}}{1}}$

$=e^{2}$

解 $\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=3\sqrt[n]{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{3}=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$

3. $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'(0)=$ ______.

解 $y'=\frac{2}{3}(x+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}}(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})$ 则$y'(0)=\frac{1}{3}$.

4. 函数$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^2) & x>0 \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内可导,则$a=$__,$b=$__.

解 $\because f(x)$在$x=0$处可导,$\therefore f(x)$在$x=0$处连续

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \quad 即\lim_{x\to 0^+} b(1-x^2)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}$$

$$\Rightarrow b=1 \qquad 则\ f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ 1-x^2 & x>0 \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=0 \qquad \Rightarrow a=0$$

5. 已知$(1,2)$是曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点,则$a=$ __,$b=$ __.

解 因为$(1,2)$是曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点,所以$2=a+b$

且$y''(1)=6a+2b=0$

$\Rightarrow a=-1, b=3.$

二. 单选题（每小题3分，共12分）

1. $x \to 0$时，$\ln(1+2\sin x)$与下面哪个表达式是等价无穷小量（ D ）.

A. $1+2\sin x$　B. x　C. $2x^2$　D. $2x$

解 $x \to 0$时，$\ln(1+2\sin x) \sim 2\sin x \sim 2x$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（ C ）

A. 极限不存在　B. 极限存在但不连续　C. 连续　D. 以上结论都不成立

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2} = 0 = f(0)$　　函数$f(x)$在$x=0$处连续.

3. 已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，

则在$x=0$处$f(x)$（ D ）

A. 不可导　B. 可导，且$f'(0)\neq0$　C. 取得极大值　D. 取得极小值

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2 \quad \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=2>0$ 知存在$\overset{0}{U}(0,\delta)$，$x\in\overset{0}{U}(0,\delta)$，$\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}>0$

$f(x)-f(0)>0\Rightarrow f(x)>f(0)$　　$f(x)$在$x=0$处取得极小值

4. 曲线$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（C ）

A.$(1,0)$ B.$(2,0)$ C.$(3,0)$ D.$(4,0)$

解 $$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)^3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4}{(x-3)^3}=2$$

$$\frac{f(x)}{(x-3)^3}=2+\alpha(x),\left(\lim_{x\to 3}\alpha(x)=0\right)$$

$$f(x)=2(x-3)^3+o\left((x-3)^3\right)\qquad f'(3)=f''(3)=0,\ f'''(3)=12$$

$$f'''(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f''(x)-f''(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f''(x)}{x-3}=12>0$$

$x\in(3-\delta,3),\ f''(x)<0;\ x\in(3,3+\delta),\ f''(x)>0$ 则$(3,0)$是拐点

三. 计算题（每小题9分，共54分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\sin x}{x^2}\right)=\frac{3}{4}$$

2.设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$,求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\ln x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{1-\cos x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{1-\cos x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{x^2}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x + e^x\cos x - 2x - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x + e^x\cos x - e^x\sin x + e^x\cos x - 2}{1}$$

$$= 0$$

4. 设$y^x = e^{(x+y)}$,求dy.

解 $x\ln y = x + y$,两边对x求导得:

$$\ln y + x\cdot\frac{y'}{y} = 1 + y'$$

$$y' = \frac{y\ln y - y}{y - x}$$

$$dy = \frac{y\ln y - y}{y - x}dx$$

5. 设函数$y=f(x)$由方程$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$确定，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}$$ $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}$$ $$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi^3}$$

6. 求曲线$y = x^4(12\ln x - 7)$的凹凸区间及拐点.

解 $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3$

$y'' = 12x^2(12\ln x - 7) + 84x^2 = 144x^2 \ln x$

$x > 1, y'' > 0$,函数的图像凹区间为$[1,+\infty)$

$x < 1, y'' < 0$,函数的图像凸区间为$(0,1]$

$y(1) = -7$ 拐点为$(1. -7)$

四. (10分) 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x} & x\le 0\\[2ex] \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0\end{cases}$ 的间断点,并判断其所属类型.

解 1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 不存在, $x=2$ 第二类间断点

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, $x=0$ 第一类(跳跃)间断点

3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{2}{\pi}$, $\quad x=-1$ 第一类(可去)间断点

4. $\lim\limits_{x\to -(2k+1)} f(x)=\lim\limits_{x\to -(2k+1)}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\infty$, $k\in N_+$, $x=-(2k+1)$ 第二类(无穷)间断点.

五. （9分）设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)=1$，证明：
(1)存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$；(2)存在 $\eta\in(-1,1)$，使 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

证明 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$ $\quad F(0)=0, F(1)=0$

根据罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$ 即 $f'(\xi)=1$

函数 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 的奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数 则 $f'(-\xi)=1$

(2) 令 $G(x)=e^{x}\left(f'(x)-1\right)$ $\quad G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 可导

$$G(-\xi)=e^{\xi}\left(f'(-\xi)-1\right)=0 \qquad G(\xi)=e^{\xi}\left(f'(\xi)-1\right)=0$$

$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 满足罗尔中值定理 存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使 $G'(\eta)=0$

$$G'(\eta)=e^{\eta}\left(f'(\eta)-1\right)+e^{\eta}f''(\eta)=0 \quad\Rightarrow\quad f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY