西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下期中模拟题（二）答案

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$，其中 $\alpha>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　　　　).

A. 连续但不可偏导；　　B. 可偏导但不连续；

C. 可微且 $df\,|_{(0,0)}=0$；　　D. $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

解 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}=0=f(0,0)$ 则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^{1+\alpha}-0}{x}=\lim_{x\to0}x^{\alpha}=0$$

同理 $f_y(0,0)=0$　　　则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可偏导

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数$f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$，其中$\alpha>0$为常数，则$f(x,y)$在(0,0)处(C D).

A. 连续但不可偏导；　B. 可偏导但不连续；

C. 可微且$df|_{(0,0)}=0$;　D. $f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在(0,0)处连续.

解

$$f_x(x,y)=\begin{cases}0 & x^2+y^2=0\\ \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

因为$\left|\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right|\le\left|\dfrac{2x}{(x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}\right|=\left|2x^{\alpha}\right|$

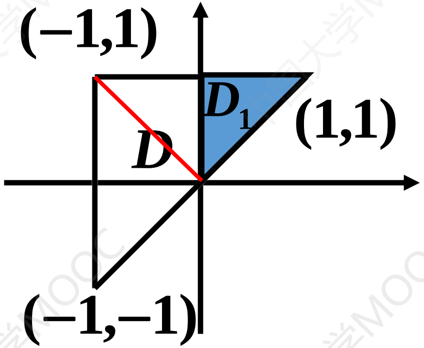
所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}=0=f_x(0,0)$,则$f_x(x,y)$在(0,0)处连续.

2. 已知D为顶点坐标为$A(1,1), B(-1,1)$和$C(-1,-1)$的三角形区域，D_1为D在第一象限部分，则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$等于(A).

A. $2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y dxdy$;　　B. $2\iint\limits_{D_1} xydxdy$;

C. $4\iint\limits_{D_1} (xy+\cos x\sin y)dxdy$;　　D. 0.

解 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y dxdy$



3. 设有直线$L:\begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$和曲面$z=x^2-y^2+z^2$在点(1,1,1)的切平面为$\pi$，则直线L和平面$\pi$的位置关系为(C).

A $L\in\pi$;　B $L\parallel\pi$;　C $L\perp\pi$;　D L与π斜交.

解　直线L的方向向量为$\Gamma=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(4,-4,2)$

$$F=x^2-y^2+z^2-z \quad F_x=2x, F_y=-2y, F_z=2z-1$$

曲面$z=x^2-y^2+z^2$在点(1,1,1)的切平面π法向量

$$n=\left(F_x,F_y,F_z\right)\big|_{(1,1,1)}=(2,-2,1)$$ 　因为$\Gamma\parallel n$　则$L\perp\pi$.

4. 设空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=2\\x+y+z=1\end{cases}$在点$P(-1,1,1)$的切线的方向向量为$\vec{a}$,

则函数$u=x^2+2y^2-3z^2$在点$M(2,-1,-1)$处沿方向$\vec{a}$的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}|_M$=(D).

A $-2\sqrt{6}$； B $2\sqrt{6}$； C 12或-12； D $2\sqrt{6}$或$-2\sqrt{6}$.

解

对$\begin{cases}x^2+y^2=2\\x+y+z=1\end{cases}$求全微分得$\begin{cases}2xdx+2ydy=0\\dx+dy+dz=0\end{cases}$

将点$P(-1,1,1)$代入得$\begin{cases}-dx+dy=0\\dx+dy+dz=0\end{cases}$ 则$\vec{a}\parallel(1,1,-2)\parallel\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)|_M\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right)=(4,-4,6)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right)=\mp2\sqrt{6}.$$

5. 设函数f具有一阶连续偏导数，若$f\left(x,x^2\right)=x^3$，$f_x\left(x,x^2\right)=x^2-2x^4$则$f_y\left(x,x^2\right)=$(A).

A $x+x^3$； B $2x^2+2x^4$； C x^2+x^5； D $2x+2x^2$.

解 $f\left(x,x^2\right)=x^3$两边对x求偏导数得

$$f_x\left(x,x^2\right)+2xf_y\left(x,x^2\right)=3x^2$$

将$f_x\left(x,x^2\right)=x^2-2x^4$代入得

$$f_y\left(x,x^2\right)=x+x^3.$$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

1.函数$u=e^{-\pi z}\cos\frac{x}{y}$在点M$(\frac{1}{4},\frac{1}{\pi},0)$处的全微分$du=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(dx-\frac{\pi}{4}dy+dz)$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\pi z}\sin\frac{x}{y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\pi z}\sin\frac{x}{y},\frac{\partial u}{\partial z}=-\pi e^{-\pi z}\cos\frac{x}{y}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\frac{\pi^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2},\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$du=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M dx+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M dy+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M dz=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(dx-\frac{\pi}{4}dy+dz).$$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

2.设$u=z^2-2xy+y^2$在点$(1,-1,\frac{1}{2})$处方向导数的最小值为$=-\sqrt{21}$.

解 函数$u=z^2-2xy+y^2$在点M$(1,-1,\frac{1}{2})$处方向导数的最小值为

该函数在M点梯度向量模长的**相反数**.

$$gradu=(-2y,-2x+2y,2z)$$

$$gradu\big|_M=(2,-4,1)$$

$$\left\|gradu\big|_M\right\|=\sqrt{21}.$$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

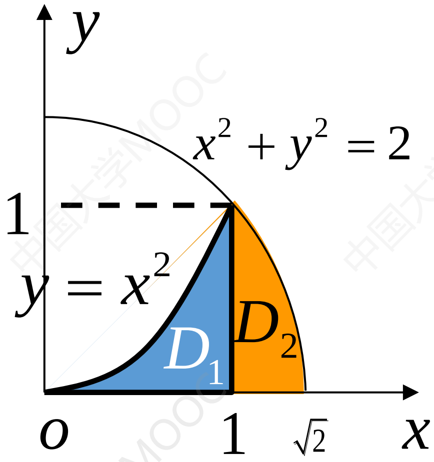
3.交换二次积分的次序（其中$f(x,y)$连续）

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$$

解 $$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

$$=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$$



二. 填空题（每小题3分，共15分）

4.使二重积分$\iint\limits_D (4-4x^2-y^2)dxdy$达到最大的平面区域$D$为

$\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2\le 4\}$.

解 使二重积分$\iint\limits_D (4-4x^2-y^2)dxdy$达到最大的平面区域$D$为

被积函数$4-4x^2-y^2\ge 0$的平面区域.

即$\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2\le 4\}$.

二. 填空题（每小题3分，共15分）

5.设$z=f(x^2-y^2,\varphi(xy))$其中f,φ可微，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x^2+2y^2)f_1$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+y\varphi' f_2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1+x\varphi' f_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}x-y\frac{\partial z}{\partial y}=(2x^2+2y^2)f_1.$$

三.计算下来各题（每小题8分，共16分）

1.设$z = f(x^2 - y^2, e^{xy}) + \dfrac{y}{g(x^2 + y^2)}$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + ye^{xy} f_2 - \frac{2xyg'}{g^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\left(-2yf_{11} + xe^{xy} f_{12}\right) + (1 + xye^{xy}) f_2 + ye^{xy}\left(-2yf_{21} + xe^{xy} f_{22}\right)$$

$$-\frac{(2xg' + 2xyg'' \cdot 2y)g^2 - 2xyg' \cdot 2gg' \cdot 2y}{g^4}.$$

三.计算下来各题（每小题8分，共16分）

2.设$\vec{r}=\vec{r}(t)$空间R^3中动点$\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T$的向径。

证明：$\left\|\vec{r}(t)\right\|=c \Leftrightarrow$ 内积 $<\vec{r}'(t),\vec{r}(t)>=0$.($c$为常数)

解　**必要性**：$\left\|\vec{r}(t)\right\|=c \Rightarrow <\vec{r}(t),\vec{r}(t)>=c^2$

两边对t求导得：$2<\vec{r}'(t),\vec{r}(t)>=0 \Rightarrow <\vec{r}'(t),\vec{r}(t)>=0$

充分性：$<\vec{r}'(t),\vec{r}(t)>=0 \Rightarrow \dfrac{d<\vec{r}(t),\vec{r}(t)>}{dt}=0$

$\Rightarrow <\vec{r}(t),\vec{r}(t)>=$常数，$\Rightarrow \left\|\vec{r}(t)\right\|=c.$

四.计算下来各题（每小题8分，共24分）

1.计算二重积分$I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$,

其中D是由$x^2+y^2=4$与坐标轴所围的第一象限的闭区域.

解

$$I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 \ln(1+\rho^2)\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^4 \ln(1+t)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}(5\ln 5-4).$$

四.计算下来各题（每小题8分，共24分）

2.设函数f连续，平面有界闭区域D由确定$|y|\le|x|\le 1$。

证明：$\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi\int_0^1 xf\left(x\right)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)dx.$

解

$$\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=4\iint\limits_{D_1} f\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=4\left(\int_0^1 d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\rho)\rho d\theta+\int_1^{\sqrt{2}} d\rho\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} f(\rho)\rho d\theta\right)$$

$$=\pi\int_0^1 f(\rho)\rho d\rho+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{\rho}\right)f(\rho)\rho d\rho.$$

四.计算下来各题（每小题8分，共24分）

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$, 函数$u(x,y,z)=f(r)$,其中f具有二阶连续偏导数

（1）把$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成$r$的函数；

（2）若u满足$\Delta u=0$，求$f(r)$.

解 (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\cdot\dfrac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\dfrac{r-x\cdot\dfrac{x}{r}}{r^2}=f''(r)(\dfrac{x}{r})^2+f'(r)\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

同理可得$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)(\dfrac{y}{r})^2+f'(r)\dfrac{r^2-y^2}{r^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)(\dfrac{z}{r})^2+f'(r)\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

则$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+f'(r)\dfrac{2}{r}$.

四.计算下来各题（每小题8分，共24分）

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$, 函数$u(x,y,z)=f(r)$,其中f具有二阶连续偏导数

（1）把$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成$r$的函数；

（2）若u满足$\Delta u=0$，求$f(r)$.

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}$$

解　（2）$f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}=0,$

解微分方程得$f(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2.$

五. (12分) 求函数$f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$在闭区域$x^2+2y^2\le 3$上的最值.

解 $\begin{cases} f_x=4x+6y=0 \\ f_y=6x+2y=0 \end{cases}$ 得驻点$(0,0)$, $f(0,0)=0$

令$L=2x^2+6xy+y^2+\lambda(x^2+2y^2-3)$

$\begin{cases} L_x=4x+6x+2\lambda x=0 \\ L_y=6x+2x+4\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+2y^2-3=0 \end{cases}$ 得$(1,-1),(-1,1),(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$

比较函数值可得在$(1,-1),(-1,1)$取得最小值$f(\pm 1,\mp 1)=-3$,

在$(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$取得最大值$f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\sqrt{2})=\frac{21}{2}$.

六（10分）设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$ 求$f(x)$.

解
$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

两端同时关于t求导数，可得$f'(t)=8\pi t\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi t f(t)$，且$f(0)=1$

解微分方程得$f(t)=4\pi t^2\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+C\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}$　　由$f(0)=1$，得$C=1$

因此$f(t)=4\pi t^2\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}$.

七. (8分) 设函数$F(x,y)=f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$, 其中$f,g,\varphi$连续

证明：$F(x,y)=C_2e^{C_1(x^2+y^2)}$，其中$C_1,C_2$为任取常数.

解 对$f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$两边分别求偏导得

$$f'(x)g(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f(x)g'(y)=\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

从而$yf'(x)g(y)=xf(x)g'(y)$

分离变量得$\dfrac{f'(x)}{xf(x)}=\dfrac{g'(y)}{yg(y)}=C_1$ C_1为常数

$$f(x)=C_2e^{\frac{1}{2}C_1x^2},\ g(y)=C_3e^{\frac{1}{2}C_1y^2},\quad \Rightarrow F(x,y)=C_2C_3e^{\frac{C_1}{2}(x^2+y^2)}=\tilde{C}_2e^{\tilde{C}_1(x^2+y^2)}.$$