西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

《高等数学》期中考试模拟题（四）

一. 填空题（共5道小题，每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}}=$ ____ .

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)=$ ____ .

3. 设$y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$,则$y'(0)=$ ____ .

4. 设函数$y=y(x)$由方程$x=y^{y}$确定，则$dy=$ ______ .

5. 函数$y=x+2\cos x$在$[0,\pi/2]$上的最大值为 ____ .

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(3x)}{1-\cos(\sin x)}$.

2. 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\tan\dfrac{1}{x}$，求 $y'\left(\dfrac{4}{\pi}\right)$.

3. 已知曲线 $\begin{cases} x=f(t)-1 \\ y=f(e^{2t}-1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0)=2,\ f'(0)\neq 0$，

求 $t=0$ 处曲线的切线方程 .

二. 计算题（共7道小题，每题8分，共56分）

4. 设$F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)\right]\sin\frac{x}{t}$,其中$f$二阶可导，求$F(x),F'(x)$.

5. 当$x\to 0^+$时,$\alpha(x)=\sqrt{a}-\sqrt{a+x^3}\ (a\ge 0)$是$x$几阶无穷小？说明理由.

6. 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,证明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

7. 求曲线$y=x^4(12\ln x-7)$的凹凸区间及拐点.

三.（本题9分）讨论函数$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}, & x\geq 0\end{cases}$的连续性；若有间断点，说明间断点的 类型.

四. 证明题

1. (本题8分)设$f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导，且$f(0)=0$，$f''(x)<0$，证明：对任意两点$x_1>0$和$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

2. (本题7分)设$f(x)$在$[0,1]$上有三阶连续导数，且$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$|f'''(\xi)|\geq 24$.