期末考试模拟题（五）2024.1

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$对任意的正整数n满足$a_n \le b_n \le a_{n+1}$，则【 】.

   A. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$均收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

   B. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$均发散，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$；

   C. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$具有相同的敛散性；

   D. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$具有不同的敛散性.

2. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt,\ g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则【 】.

   A. $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数； B. $f(x)$与$g(x)$均为奇函数；

   C. $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数； D. $f(x)$与$g(x)$均为周期函数.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 跳跃间断点的个数为【 】.

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2f(x^2)}{x^2}=$【 】

   A. 0 B. $f'(0)$ C. $-f'(0)$ D. $-2f'(0)$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处【 】.

   A. 不可导； B. 可导且 $f'(0)\ne 0$； C. 取得极大值 D. 取得极小值

6. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式为【 】.

   A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$；

   B. $y^*=ax(ax^2+bx+c)+A\sin x+B\cos x$；

   C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$；

   D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 当 $x \to 0^+$ 时，$\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\ln\left(1+x^3\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n =$____________.

2. 设 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=2} =$____________.

3. 曲线 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为____________.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1} =$____________.

5. $\int_{-1}^{1}(x^2\sin x+\sqrt{1-x^2})dx =$____________.

6. 微分方程 $y' = 1+2x+y^2+2xy^2$ 满足 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解为____________.

三、计算下列各题（1-5 题每题 6 分，6-9 题每题 7 分，共计 58 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(e^x-1\right)}$.

2. 计算 $\int \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$.

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + xe^y = \arctan y$ 所确定，求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

4. 计算 $I = \int_0^2 f\left(x-1\right)dx$, 其中 $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, x \ge 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, x < 0 \end{cases}$.

5. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}} + e^{-x}\cos x\right)dx$ 的敛散性.

6. 设 $f(x)$ 为可微函数，解方程 $f(x) = e^x + \int_0^x e^x\left[f\left(t\right)\right]^2 dt$.

7. 试问 $f\left(x\right) = \int_0^1 e^{x^2t^2}dt$ 在 $x=0$ 处是否取得极值，若取得极值，是极大值还是极小值？

8. 设直线 $y = ax\left(0<a<1\right)$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围图形记为 D_1，其面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围图形记为 D_2，其面积为 S_2.

（1）确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）当 S_1+S_2 取得最小值时，求平面图形 D_2 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

9. 求方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y-e^t \\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y-e^t \end{cases}$ 的通解.

四、证明题（本题 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, 0<f'(x)<1,$ 求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1 f^3(x)dx.$$