《线性代数与解析几何》期中考试模拟试题（二）参考答案（2017）

一、单项选择（每小题 **3** 分，共 **15** 分）

1. C　2 .A　3. D　4. D　5. B

二、填空题

6. 2；　7. $\frac{1}{2}(A+2I)$；　8. $2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$；　9. 2；　10. 4.

三、解答题

11. 解　第 **1** 行乘以 -1 分别加到第 **2,3,4,5** 行，再把第 k （$k=2,3,4,5$）列的 $\frac{1}{k}$ 倍加到第 **1** 列 ，得

$$D=\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&-2&0&0&0\\1&0&-3&0&0\\1&0&0&-4&0\\1&0&0&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&3&4&5\\0&-2&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-4&0\\0&0&0&0&-5\end{vmatrix}=480.$$

12. 解　等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$ 两端左乘 A^*，右乘 A，得

$$|A|B=A^*B+3|A|I$$

由 $|A^*|=8$，知 $|A|=2$. 代入上式，得 $(2I-A^*)B=6I$，

故 $B=6(2I-A^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$.

13. 解　因为两个同型矩阵等价的充要条件为秩相等，故 $r(A)=r(B)$.

易知 $r(B)=2$, 故 $r(A)=2$.

从而 $\det(A)=\det\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$，

当 $a=-1$ 时，$r(A)=1$；当 $a=2$ 时，$r(A)=2$；

所有，当 $a=2$ 时，两个矩阵等价.

14. 解　$A\to\begin{bmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&\cdots&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{bmatrix}$

当 $a\ne b$ 且 $a\ne(1-n)b$ 时，$r(A)=n$；

当 $a=b=0$ 时，$r(A)=0$；

当 $a=b\ne0$ 时，$r(A)=1$；

当 $a\ne b$ 且 $a=(1-n)b$ 时，$r(A)=n-1$.

15. 解　设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(l,m,n)$.

因为直线 L 与平面 $\pi:3x-y+2z+1=0$ 平行，故直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(3,-1,2)$ 垂直，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=3l-m+2n=0 \qquad (1)$$

又直线 L 过点 P_0，并且与直线 L_1 相交，所以三向量 $\overrightarrow{P_0P_1},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}$ 共面，其中 $\boldsymbol{a}_1=(4,-2,1)$ 是 L_1 的方向向量，$P_1(1,3,0)$ 为 L_1 上的点，$\overrightarrow{P_0P_1}=(0,3,2)$.故有

$$[\overrightarrow{P_0P_1}\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}]=\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0, \qquad (2)$$

由（**1**）、（**2**）解得 $m=-\dfrac{25}{2}l,n=-\dfrac{31}{4}l$，取 $l=4$，得直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(4,-50,-31)$.故所求直线 L 的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-50}=\frac{z+2}{-31}.$$

16. 解 交线为：$\begin{cases}x-2y+z-1=0\\ x=0\end{cases}$

过此交线的平面束方程为 $x-2y+z-1+\lambda x=0$，其法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\lambda+1,-2,1)$.

由 $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(1,-2,1)=\lambda+1+4+1=0$ 得 $\lambda=-6$.

故所求平面 π 的方程为 $x-2y+z-1-6x=0$ 即 $-5x-2y+z-1=0$.