西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 几何向量及其应用

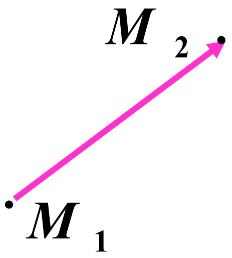
3.1 向量及其线性运算

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1. 向量的基本概念
2. 向量的线性运算
3. 向量共线、共面的充要条件
4. 空间直角坐标系和向量的坐标
5. 向量的长度和方向余弦
6. 用坐标进行向量的线性运算
7. 正交射影

1.向量的基本概念



向量： 既有大小又有方向的量.

向量表示：$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以M_1为起点，M_2为终点的有向线段

向量的长度(模)： 向量的大小. $\|\vec{a}\|$或 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

单位向量： 模长为1的向量. $\overrightarrow{a^0}$或 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$

零向量： 模长为0的向量. $\vec{0}$

自由向量： 不考虑起点位置的向量.

相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

负向量： 大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

向径： 空间直角坐标系中任一点M与原点构成的向量$\overrightarrow{OM}$

共线或平行： 两个非零向量方向相同或相反，$\vec{a} /\!/ \vec{b}$

正交或垂直： 两个非零向量的方向互相垂直，$\vec{a} \perp \vec{b}$

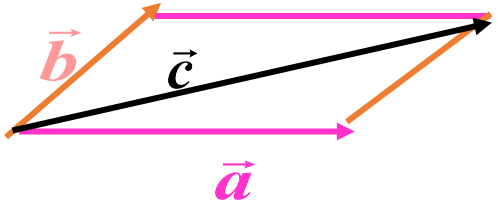
注: 零向量与任意向量共线， 与任意向量正交

主要内容

1 向量的基本概念
2 向量的线性运算
3 向量共线、共面的充要条件
4 空间直角坐标系和向量的坐标
5 向量的长度和方向余弦
6 用坐标进行向量的线性运算
7 正交射影

2.向量的线性运算

加法： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



平行四边形法则(三角形法则)

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

(2) 结合律： $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$

(3) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

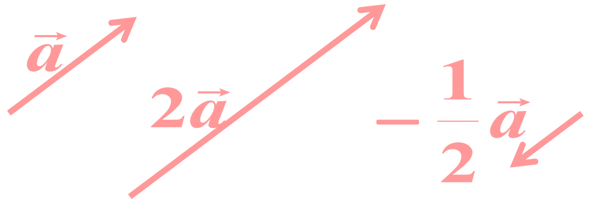
数乘向量

设λ是一个数, 向量 $\vec{a}$与 λ 的乘积$\lambda\vec{a}$ 规定为

(1) $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向, $\|\lambda\vec{a}\| = \lambda\|\vec{a}\|$

(2) $\lambda = 0$, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向, $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$



减法 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律： $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律： $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

设 $\vec{a}^{0}$ 表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量

则 $\vec{a}=\|\vec{a}\|\vec{a}^{0} \Longrightarrow \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{a}^{0}.$

注： 一个非零向量除以它的模是一个与其同方向的单位向量

向量的加法与数乘向量的运算统称为向量的**线性运算**.

三角不等式：

$$\|\overrightarrow{a+b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

向量长度的基本性质：

（1）非负性： $\|\vec{a}\| \ge 0$, 且 $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

（2）齐性： $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

（3）三角不等式：$\|\overrightarrow{a+b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

主要内容

1 向量的基本概念

2 向量的线性运算

3 向量共线、共面的充要条件

4 空间直角坐标系和向量的坐标

5 向量的长度和方向余弦

6 用坐标进行向量的线性运算

7 正交射影

3. 向量共线共面的充要条件

定理3.1.1 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的常数 k_1 和 k_2，使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$$

推论3.1.1 在一条直线上取定一个非零向量 $\vec{e}_1$，则该直线上任一向量 $\vec{a}$ 必可由 $\vec{e}_1$ 惟一地表示为 $\vec{a}=x\vec{e}_1$，其中 x 为一个常数.

定理3.1.2 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 的充要条件是存在不全为零的常数 k_1,k_2和k_3,使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$$

推论3.1.2 在一个平面内取定两个 不共线的向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$,则该平面上任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1,\vec{e}_2$唯一地表示为 $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$,其中$x,y$为常数.

定理3.1.3 设$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$是空间中不共面的三个向量，则空间中任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$唯一地表示为 $\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$,其中$x,y,z$为常数.

主要内容

1 向量的基本概念

2 向量的线性运算

3 向量共线、共面的充要条件

4 空间直角坐标系和向量的坐标

5 向量的长度和方向余弦

6 用坐标进行向量的线性运算

7 正交射影

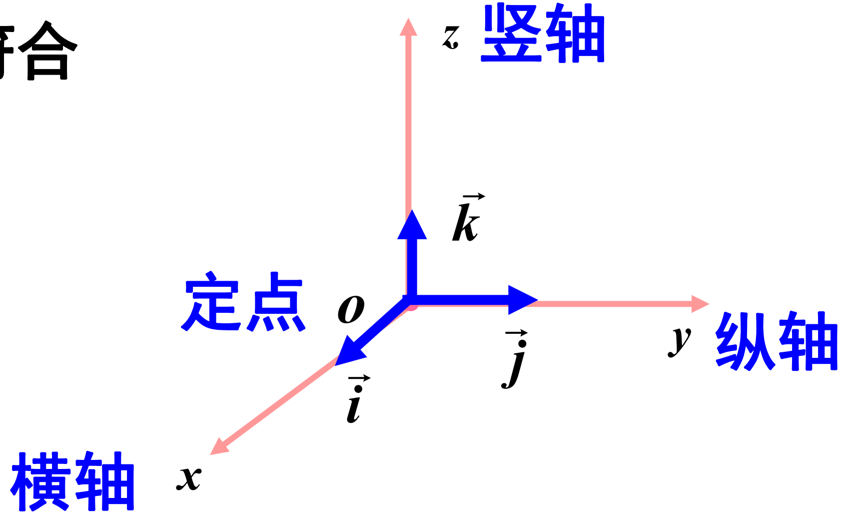
4. 空间直角坐标系与向量的坐标

空间直角坐标系

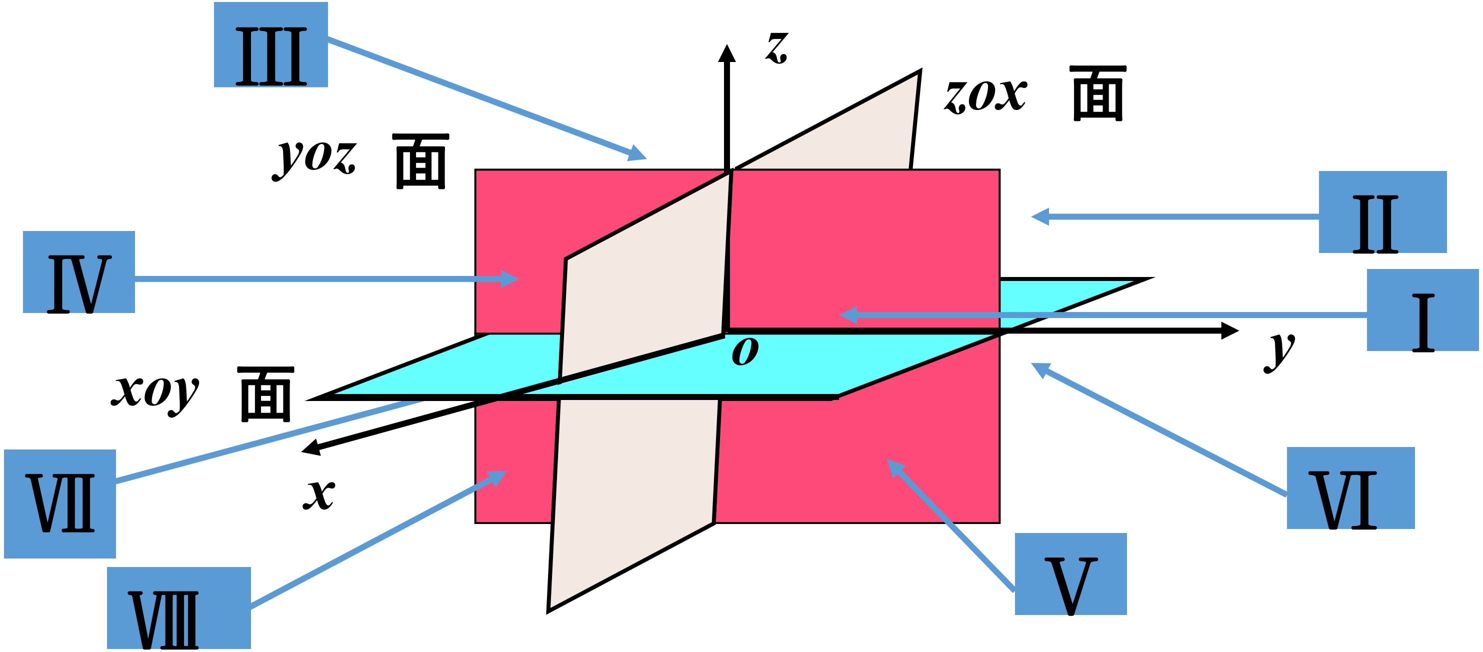
三个坐标轴的正方向符合**右手系.**

记为

$$\{O\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\vec{k}\ \}$$



空间直角坐标系

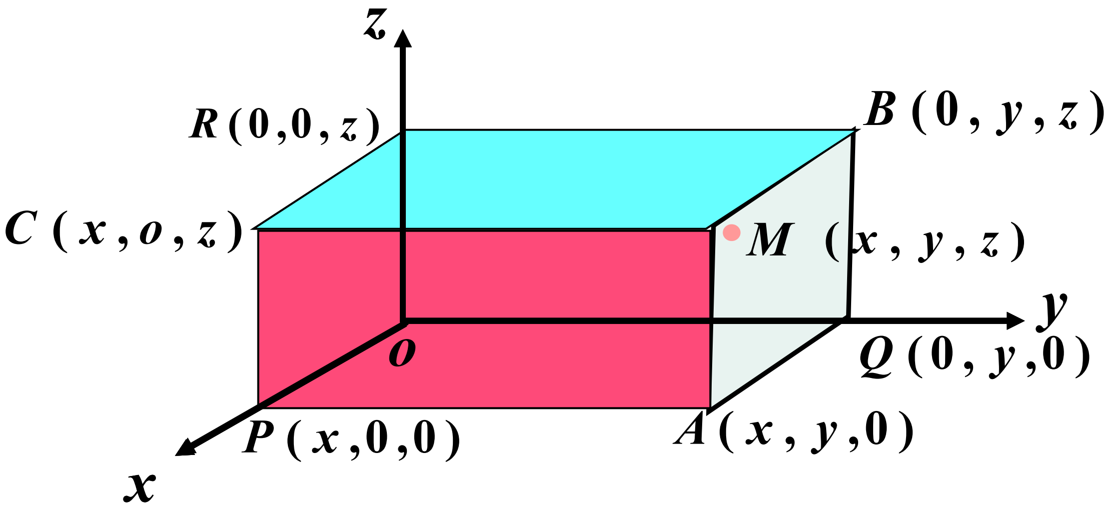


空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点 $\xleftarrow{\quad 1--1 \quad}\!\!\!\rightarrow$ 有序数组 (x, y, z)

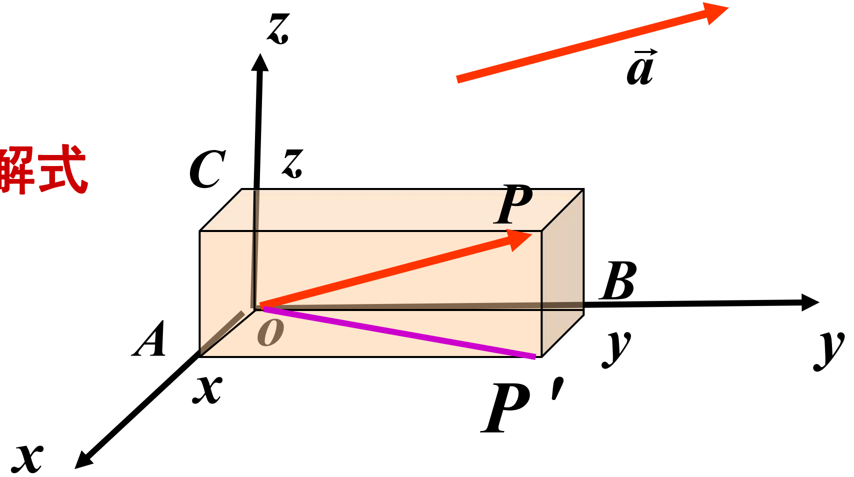
特殊点的表示: 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$ $O(0,0,0)$



向量的坐标

设 $\vec{a}$ 为空间直角坐标系中的 一个向量，将 $\vec{a}$ 平移使其起点与原点重合，终点为 P，则有



$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$ 分解式

$$= (x, y, z)$$ 向量的坐标

起点为 $A(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $B(x_2, y_2, z_2)$ 的向量

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

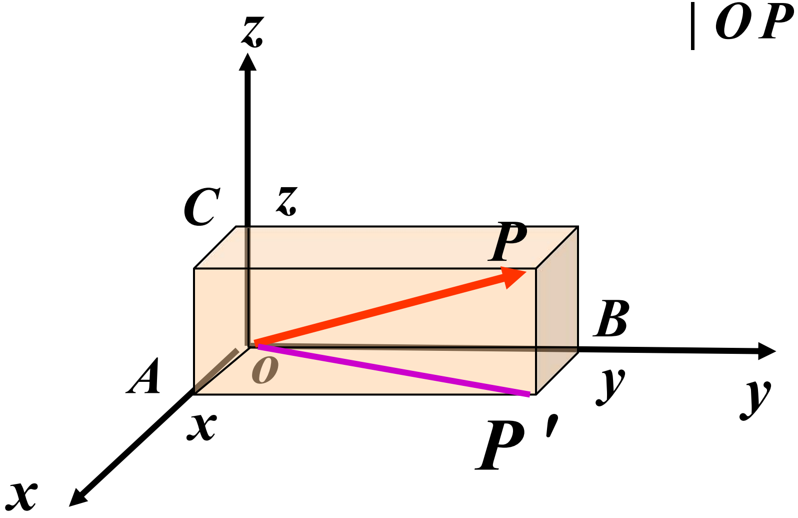
特别地 $\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$

主要内容

1 向量的基本概念
2 向量的线性运算
3 向量共线、共面的充要条件
4 空间直角坐标系和向量的坐标
5 向量的长度和方向余弦
6 用坐标进行向量的线性运算
7 正交射影

5. 向量的长度与方向余弦

设 $\vec{a} = (x, y, z)$，则 $\|\vec{a}\| = \|\overrightarrow{OP}\|$



$$|OP|^2 = |OP'|^2 + |P'P|^2$$

$$= |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

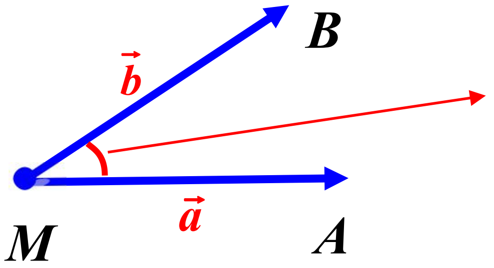
从而 $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

对于 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

向量的夹角：

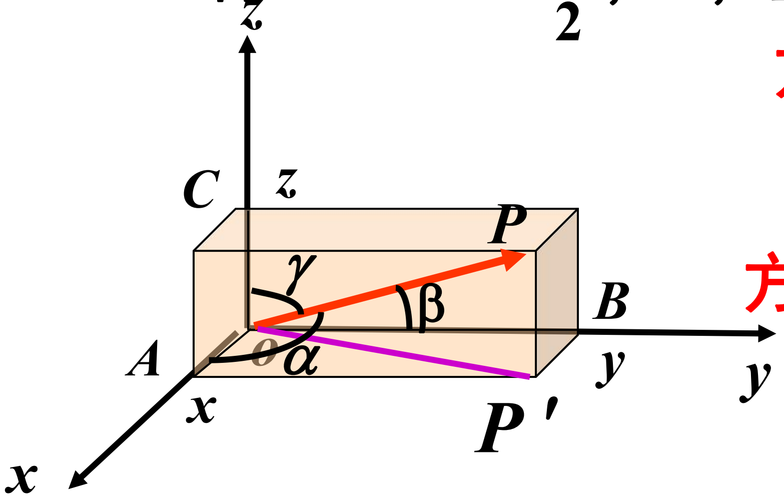


$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角

$0 \le \angle AMB \le \pi$

注： 若 $\vec{a}=0$ 或 $\vec{b}=0$，$\angle AMB$ 为任意值；

若 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{2}$，$\vec{a},\vec{b}$ 垂直.



方向角 向量 $\vec{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向之间的夹角 α,β,γ

方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\beta=\dfrac{y}{\|\vec{a}\|}$

$\cos\gamma=\dfrac{z}{\|\vec{a}\|}$

方向余弦 $\cos\alpha = \dfrac{x}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\beta = \dfrac{y}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\gamma = \dfrac{z}{\|\vec{a}\|}$

方向余弦的特征

(1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(2) 单位向量的方向余弦就是它的坐标.

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例 1 求平行于向量 $\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$ 的单位向量的分解式。

解 所求向量有两个，一个与 $\vec{a}$ 同向，一个反向

$$\because \|\vec{a}\|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$$

$$\therefore \overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\frac{6}{11}\vec{i}+\frac{7}{11}\vec{j}-\frac{6}{11}\vec{k},$$

或 $$\overrightarrow{a^0}=-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=-\frac{6}{11}\vec{i}-\frac{7}{11}\vec{j}+\frac{6}{11}\vec{k}.$$

例 2 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = 2$，它与 x轴和 y轴的夹角分别为 $\pi/3$ 和 $\pi/4$，如果 P_1的坐标为 $(1,,0,3)$，求 P_2的坐标。

解 设$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为 α、β、γ，

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow z = 4, \quad z = 2,$$

P_2的坐标为$(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$

主要内容

1 向量的基本概念

2 向量的线性运算

3 向量共线、共面的充要条件

4 空间直角坐标系和向量的坐标

5 向量的长度和方向余弦

6 用坐标进行向量的线性运算

7 正交射影

6. 用坐标进行向量的线性运算

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$,

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$,

则

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

$$= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$$

$$= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

用坐标表示向量的共线共面的充要条件

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$,

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$,

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在 不全为零的常数 k_1 和 k_2,

使得

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad (\text{不妨设} k_1 \neq 0,\ \lambda = -\frac{k_2}{k_1})$$

$$\Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z),$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

三向量 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$, **共面**

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的常数 k_1, k_2, k_3,使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_x k_1 + b_x k_2 + c_x k_3 = 0 \\ a_y k_1 + b_y k_2 + c_y k_3 = 0 \\ a_z k_1 + b_z k_2 + c_z k_3 = 0 \end{cases}$$ 有非零解

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

主要内容

1 向量的基本概念

2 向量的线性运算

3 向量共线、共面的充要条件

4 空间直角坐标系和向量的坐标

5 向量的长度和方向余弦

6 用坐标进行向量的线性运算

7 正交射影

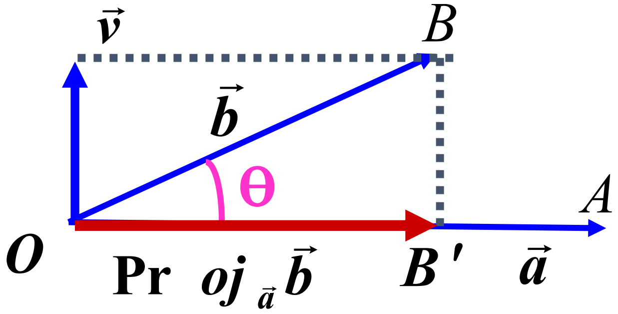
7. 正交射影

定义3.1.3（正交射影向量和正交射影）

设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \|\vec{b}\|\cos\theta \cdot \vec{a}^0$$

为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的**正交射影向量**，简称为**射影向量**。



定义数值 $(\vec{b})_{\vec{a}} = \|\vec{b}\|\cos\theta$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的**正交射影**，简称为**射影**

即有向线段 OB' 的值

令 $\vec{v} = \vec{b} - \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$，则 $\vec{b} = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} + \vec{v}$（向量 $\vec{b}$ 的正交分解）

注：向量 $\vec{a} = (x, y, z)$的坐标 x, y, z分别是 $\vec{a}$在坐标向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 上的射影．

射影的基本性质

（1） $(k\vec{b})_{\vec{a}} = k(\vec{b})_{\vec{a}}$

（2） $(\vec{b} + \vec{c})_{\vec{a}} = (\vec{b})_{\vec{a}} + (\vec{c})_{\vec{a}}$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 几何向量及其应用

3.2 数量积 向量积 混合积

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1 数量积及其坐标表示

2 数量积的应用

3 向量积及其坐标表示

4 向量积的应用

5 混合积及其坐标表示

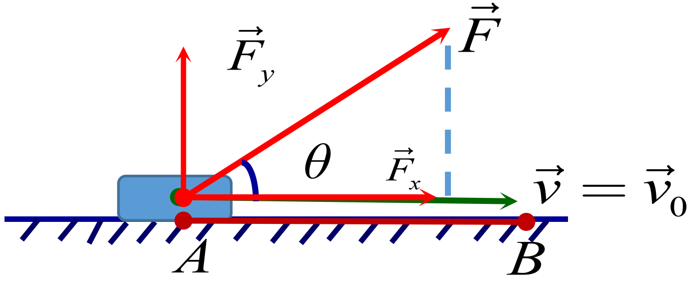
6 混合积的性质

1. 数量积（内积、点积）

例： 常力沿直线做功

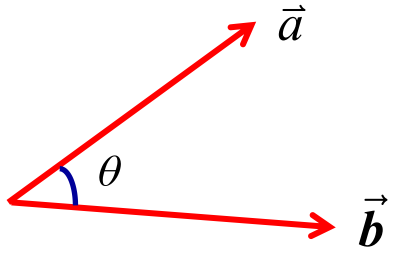
$$W = \left\|\vec{F}_x\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos\theta,$$

其中 $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_0 t.$



定义1（数量积）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta = \|\vec{a}\| \left(\vec{b}\right)_{\vec{a}} = \|\vec{b}\| \left(\vec{a}\right)_{\vec{b}}$$



性质：

（1）$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

（2）$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

（3）$\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

（4）$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\because\ \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},\quad \therefore\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0,$$

$$\because \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1,$$

$$\therefore\ \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

数量积的坐标表达式

主要内容

1 数量积及其坐标表示

2 数量积的应用

3 向量积及其坐标表示

4 向量积的应用

5 混合积及其坐标表示

6 混合积的性质

2. 数量积的应用

(1) 求向量的模

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(2) 求非零向量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

(3) 求射影

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{b}\|(\vec{a})_{\vec{b}} = \|\vec{a}\|(\vec{b})_{\vec{a}}$$

$$\Rightarrow (\vec{a})_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\quad\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \qquad (\vec{b})_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\quad\vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

例 1 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, 求 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; (1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 ; (3) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的射影 .

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

$$(2)\quad \cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore\ \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

$$(3)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{b}\|(\vec{a})_{\vec{b}}\qquad \therefore\ (\vec{a})_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=-3.$$

例2 证明向量 $\vec{c}$ 与向量 $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ 垂直 .

证

$$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore\ [(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

主要内容

1 数量积及其坐标表示

2 数量积的应用

3 向量积及其坐标表示

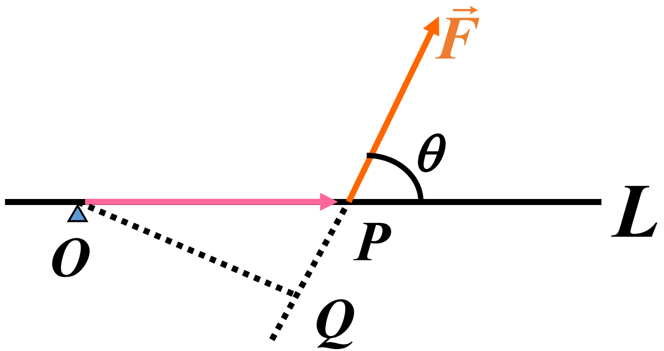
4 向量积的应用

5 混合积及其坐标表示

6 混合积的性质

3. 向量积（外积、叉积）

实例 设 O 为一根杠杆 L 的支点，有一力 $\vec{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处 .力 $\vec{F}$ 与 OP 的夹角为 θ,力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量，其模



$$\|\vec{M}\| = |OQ|\,\|\vec{F}\|$$
$$= \|\overrightarrow{OP}\|\,\|\vec{F}\|\sin\theta$$

$\vec{M}$ 的方向垂直于 OP 与 $\vec{F}$ 所决定的平面，指向符合右手系 。

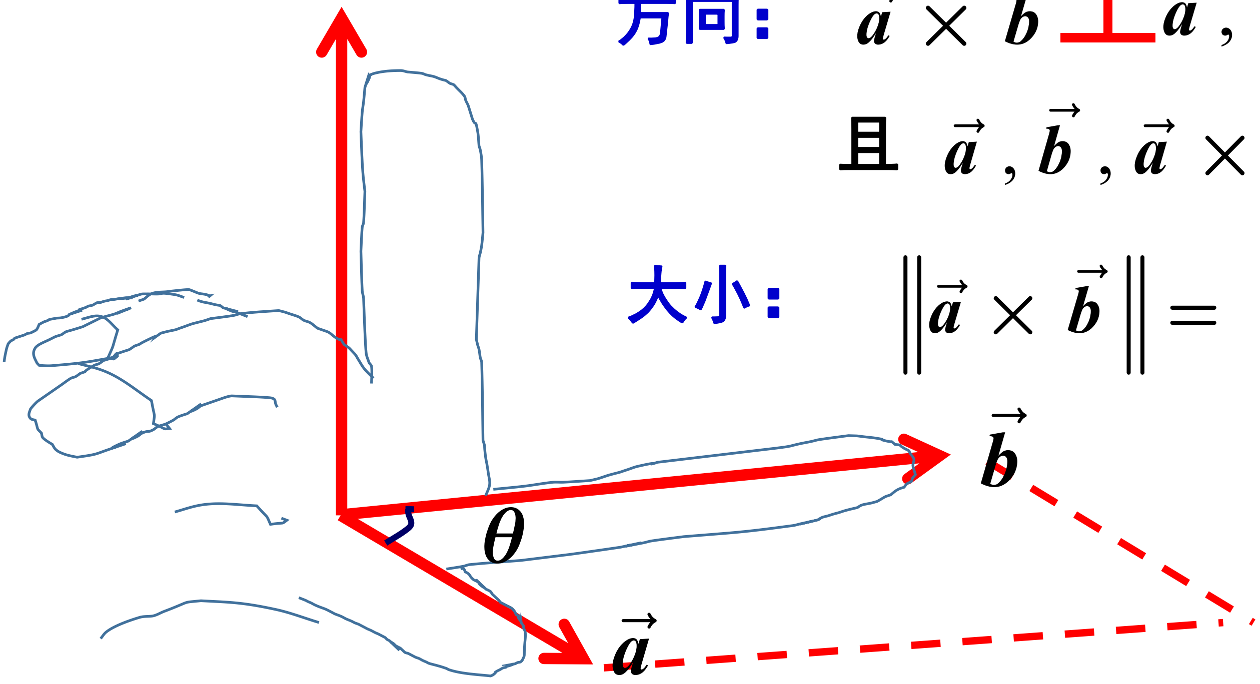
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

定义2（向量积） $\vec{a} \times \vec{b}$

方向： $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$， $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 构成右手系.

大小： $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$



向量积的基本性质

（1） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

（2）分配律： $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

（3）若λ为数： $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

关于向量积的说明：

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$. $(\because\ \theta=0\Rightarrow\sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\ \Leftarrow\Rightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\because \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\because \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

主要内容

1 数量积及其坐标表示

2 数量积的应用

3 向量积及其坐标表示

4 向量积的应用

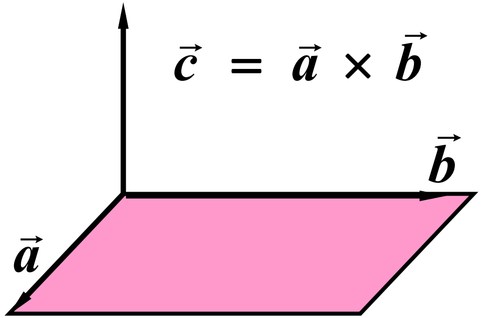
5 混合积及其坐标表示

6 混合积的性质

4. 向量积的应用

（1）求平行四边形的面积

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$表示以 $\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积．



（2）判定向量共线

$$a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z$$

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \iff \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. \quad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0})$$

$$\iff a_y b_z - a_z b_y = a_z b_x - a_x b_z = a_x b_y - a_y b_x = 0$$

$$\iff a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z \iff \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

（3）求与两个不共线的向量都垂直的向量

例 3 求与 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量 .

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{c^0}=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

主要内容

1. 数量积及其坐标表示
2. 数量积的应用
3. 向量积及其坐标表示
4. 向量积的应用
5. 混合积及其坐标表示
6. 混合积的性质

5. 向量的混合积

定义3 已知三向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 称数量 $(\vec{a} \quad \vec{b})\ \vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的**混合积**, 记作 $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]$

几何意义： 记 $\theta = (\vec{a} \times \vec{b},\ \vec{c})$

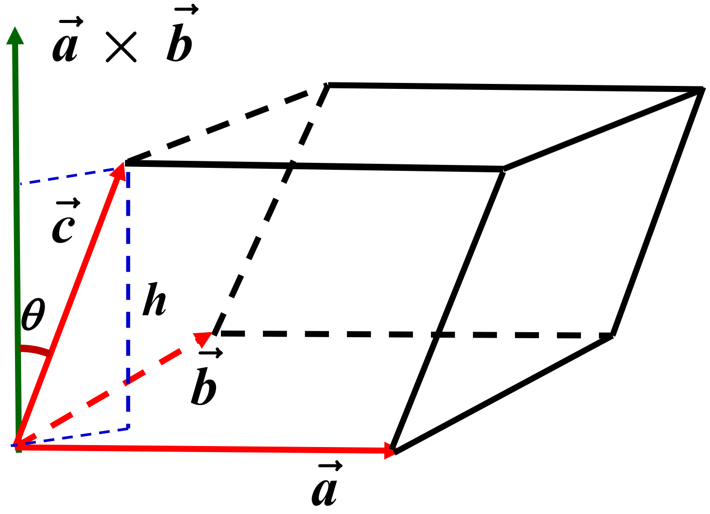
θ为锐角时,

$$\left(\vec{a} \quad \vec{b}\right)\ \vec{c} = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \left(\vec{c}\right)_{\vec{a}\times\vec{b}}$$

$$= \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \left\|\vec{c}\right\| \cos\ \theta = V_{六面体}$$

θ为钝角时,

$$-\left(\vec{a} \quad \vec{b}\right)\ \vec{c} = V_{六面体}$$



混合积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$,

则 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a} \quad \vec{b})\ \vec{c}$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

主要内容

1 数量积及其坐标表示

2 数量积的应用

3 向量积及其坐标表示

4 向量积的应用

5 混合积及其坐标表示

6 混合积的性质

6. 混合积的性质

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(2) 互换混合积中任意两个向量的位置，则混合积变号，

例如，$[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0.$$

例4 已知 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=2$,

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解

$$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 几何向量及其应用

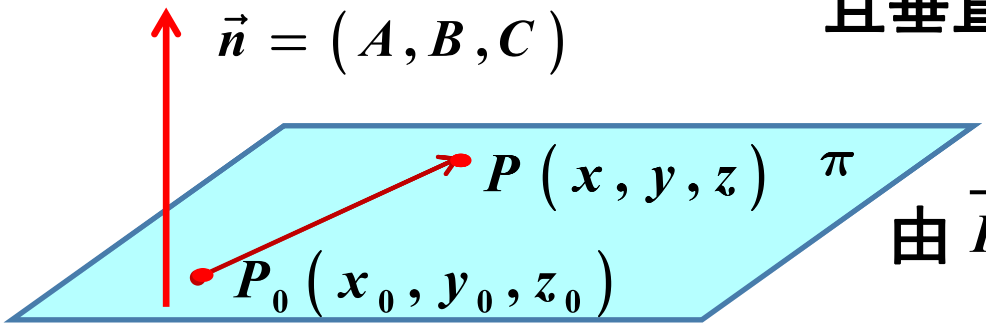
3.3 平面与空间直线

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1. 平面的点法式和一般式方程
2. 平面的截距式和参数式方程
3. 两个平面的位置关系
4. 直线的方程
5. 两条直线的位置关系
6. 直线与平面的位置关系
7. 距离

1. 平面的点法式方程



设平面 π 通过已知点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

任取 $P(x,y,z)\in\pi$,

由 $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$ 知 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$

点法式方程: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

称向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为平面 π 的**法向量**

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和 $C(0,2,3)$的平面方程．

解 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(14,9,-1)$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得

$$14x+9y-z-15=0.$$

平面的一般式方程：

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow\ Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ 平面的一般式方程

$$A(x-0)+B(y-0)+C[z-(-\frac{D}{C})]=0 \qquad (C\neq 0)$$

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，过点 $(0,\ 0,-\frac{D}{C})$

平面方程 $\longleftrightarrow$ 三元一次方程

平面的一般式方程的几种特殊情况：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(1) $D=0$， 平面通过坐标原点；

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面通过}x\text{轴；} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴；} \end{cases}$

类似可讨论$B=0$, $C=0$的情形.

(3) $A=B=0$，平面平行于xoy坐标面（即垂直于z轴）；

类似可讨论$A=C=0$, $B=C=0$的情形.

例 2 求过点 $(1,2,-3)$, 且通过 x轴的平面方程 .

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

由平面通过x轴知

$$A = D = 0,$$

由平面过点 $(1,2,-3)$知 $2B - 3C = 0$

$$\Rightarrow B = \frac{3}{2}C,$$

所求平面方程为 $3y + 2z = 0$.

主要内容

1 平面的点法式和一般式方程

2 平面的截距式和参数式方程

3 两个平面的位置关系

4 直线的方程

5 两条直线的位置关系

6 直线与平面的位置关系

7 距离

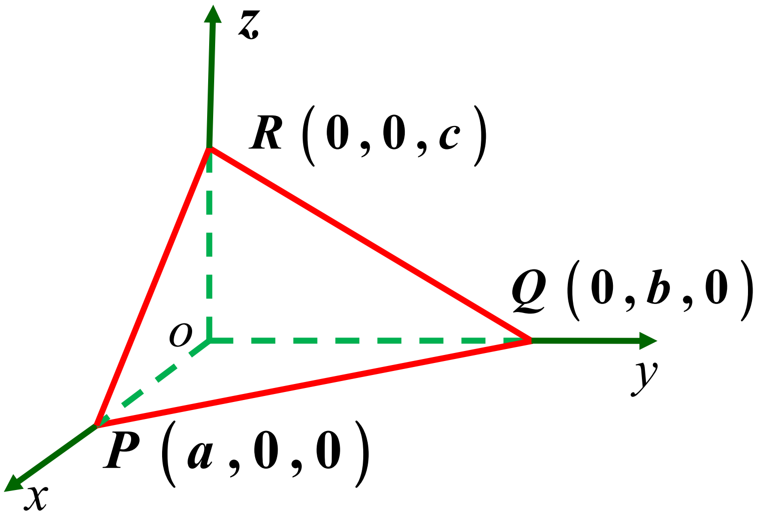
2 平面的截距式方程

设平面在 x, y, z 三轴上分别有截距 $OP = a, OQ = b, OR = c$ (a, b, c 为非零常数), 求平面的方程.

设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

平面过点 P, Q, R,

所以 $\begin{cases} aA + D = 0 \\ bB + D = 0 \\ cC + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{D}{a} \\ B = -\dfrac{D}{b} \\ C = -\dfrac{D}{c}. \end{cases}$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$(a\ b\ c \neq 0)$

平面的参数式方程

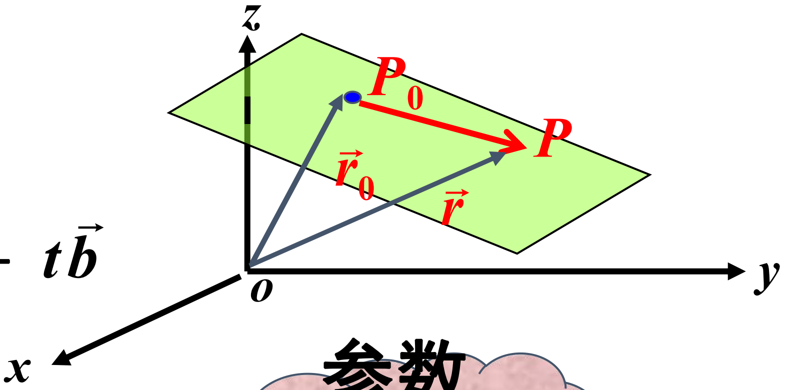
设平面 π过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 且已知 π上两个不共线的向量

$\vec{a}=(L_1,M_1,N_1)$, $\vec{b}=(L_2,M_2,N_2)$, 求此平面的方程 .

设平面上任一点为 $P(x,y,z)$

则存在唯一的一组实数s,t, 使得

$$\overrightarrow{P_0P}=s\vec{a}+t\vec{b} \quad \text{或} \quad \vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{a}+t\vec{b}$$



$$\begin{cases} x=x_0+sL_1+tL_2 \\ y=y_0+sM_1+tLM_2 \\ z=z_0+sN_1+tN_2 \end{cases}$$

主要内容

1 平面的点法式和一般式方程

2 平面的截距式和参数式方程

3 两个平面的位置关系

4 直线的方程

5 两条直线的位置关系

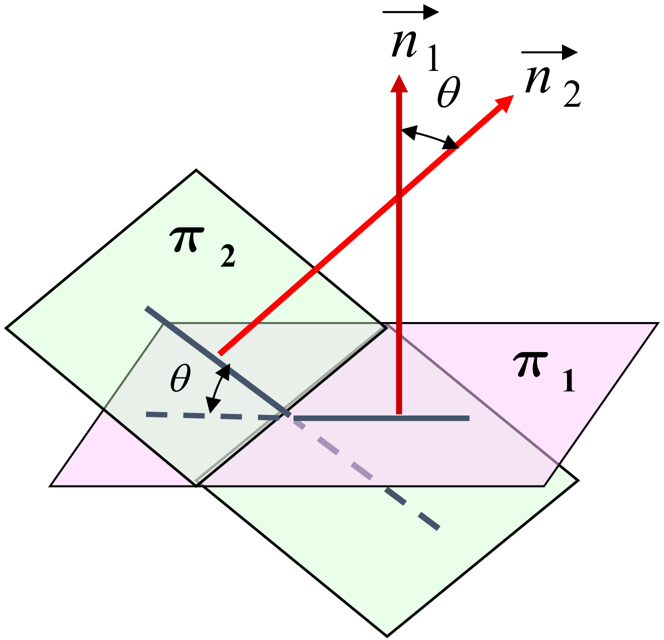
6 直线与平面的位置关系

7 距离

3 两个平面的位置关系

定义： 两平面法向量之间的夹角称为两平面的**夹角**.

（通常取锐角）



$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),$$

$$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2),$$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow n_1 // n_2 \Longleftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$

两平面位置关系：

(1) π_1与π_2相交 $\Leftrightarrow n_1$与n_2不平行

$\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

(2) π_1与π_2平行而不重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

(3) π_1与π_2重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

例3 研究以下各组里两平面的位置关系：

$$(1)\ -x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$$

$$(2)\ 2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$$

$$(3)\ 2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$$

解 $(1)\quad \cos\theta=\dfrac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$，两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1=(2,-1,1)$, $\vec{n}_2=(-4,2,-2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1$ $M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2},$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1$ $M(1,1,0)\in\Pi_2$

两平面重合.

例 4 求过点 $(1,1,1)$, 且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程 .

解 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得

$$2x+3y+z-6=0.$$

主要内容

1. 平面的点法式和一般式方程
2. 平面的截距式和参数式方程
3. 两个平面的位置关系
4. 直线的方程
5. 两条直线的位置关系
6. 直线与平面的位置关系
7. 距离

4 直线的方程

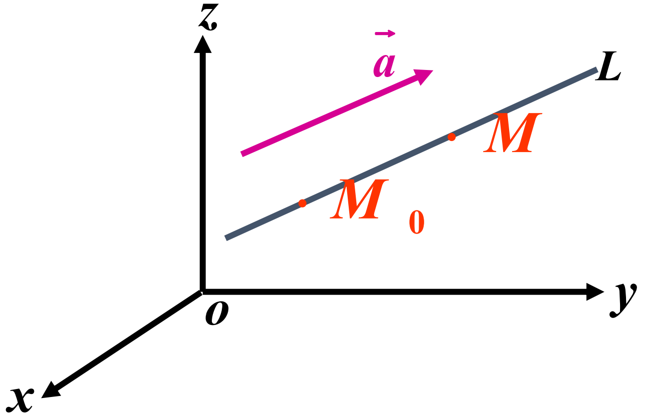
对称式方程

过一点且与一已知非零向量平行的直线是唯一确定的

方向向量：与直线平行的非零向量

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = (l, m, n)$,

$M(x, y, z)$ 为直线上任一点



则有 $\overrightarrow{M_0M} // \vec{a}$

即 $$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$ 直线的对称式方程

注： $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 形式上的比例式

$$l=0,\quad \begin{cases} x=x_0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}, \end{cases} \qquad \vec{a}=(0,m,n),$$

$$l=0,\ m=0,\quad \begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \end{cases} \qquad \vec{a}=(0,0,n),$$

直线的参数方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

直线的对称式方程

令 $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

直线的一组方向数

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

直线的参数方程

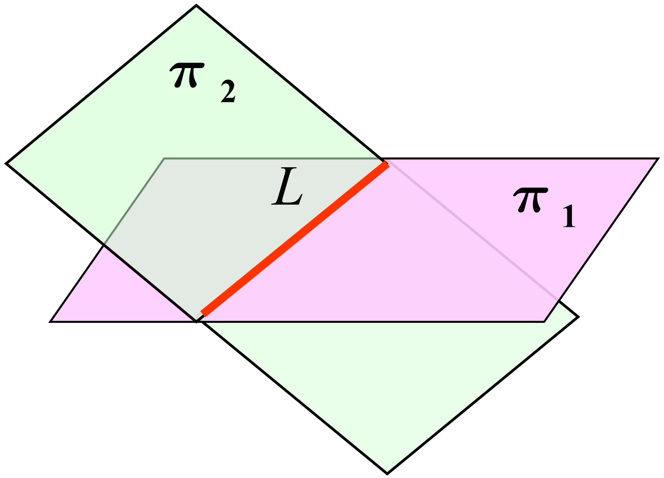
直线的一般式方程

如果两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

不平行，则其交线是一条直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



空间直线的一般式方程

其方向向量为

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$$

例 5 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases}$，解得 $y_0=0$，$z_0=-2$

点坐标 $(1,0,-2)$，取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(4,-1,-3)$，

对称式方程

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}.$

例6 求过平面 $\pi_1: 2x+5y-3z+4=0$与平面 $\pi_2: -x-3y+z-1=0$的交线 L,且与平面 π_2垂直的平面方程 .

解 1 L的方向向量为

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=(-4,1,-1)$$

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=(-2,5,13)$$

取L上的点 $P_0(-7,2,0)$，在所求平面上，

故

$$-2(x+7)+5(y-2)+13z=0$$

即

$$2x-5y-13z+24=0$$

平面束

解 2 过L的所有平面为 （不包括π_2）

$$2x+5y-3z+4+t(-x-3y+z-1)=0$$

即

$$(2-t)x+(5-3t)y+(-3+t)z+4-t=0$$

可求其中与 π_2垂直的平面满足条件

$$(2-t)\times(-1)+(5-3t)\times(-3)+(-3+t)\times 1=0$$

解得 $t=20/11$， $2x-5y-13z+24=0$

主要内容

1 平面的点法式和一般式方程

2 平面的截距式和参数式方程

3 两个平面的位置关系

4 直线的方程

5 两条直线的位置关系

6 直线与平面的位置关系

7 距离

5 两条直线的位置关系

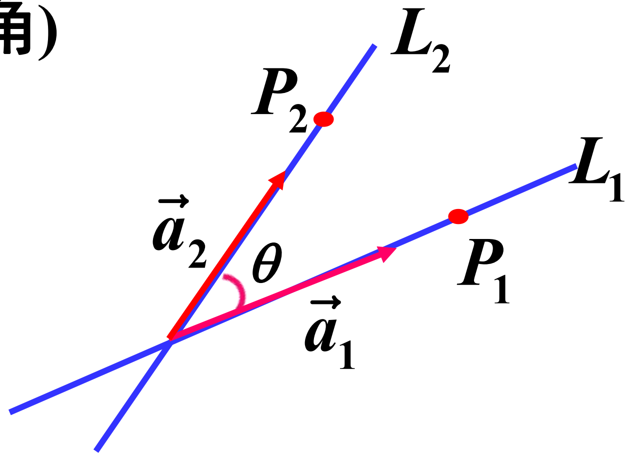
定义(夹角) 两直线的方向向量的夹角(锐角)

直线 L_1 : $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$,

$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_1=(l_1,m_1,n_1)$.

直线 L_2 : $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$,

$P_2(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$.

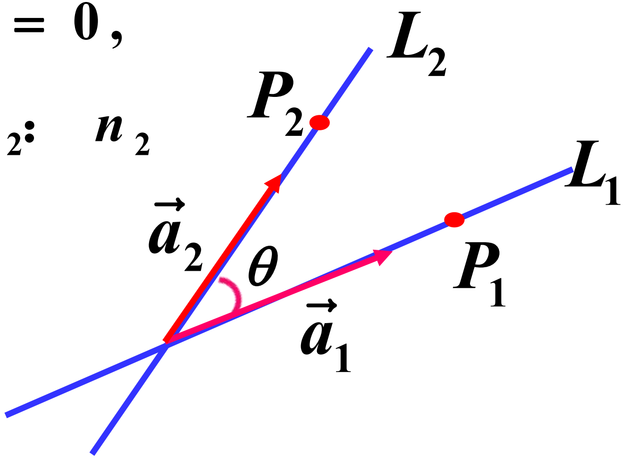


$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{\|\vec{a}_1\|\|\vec{a}_2\|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

特别地

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow l_1 : m_1 : n_1 = l_2 : m_2 : n_2$



两直线的位置关系：

L_1与L_2共面

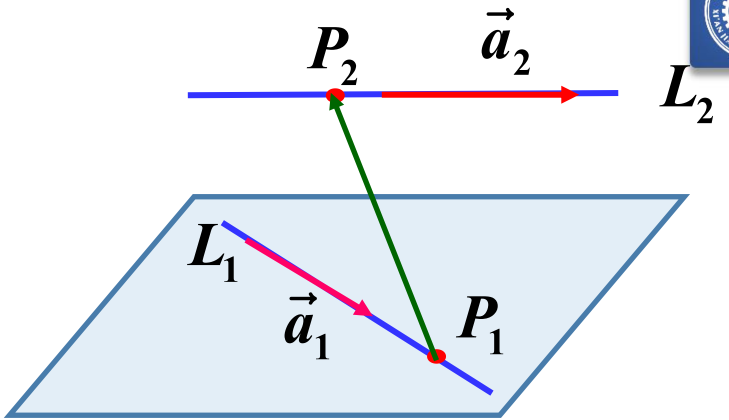
$\Leftrightarrow$ 三向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$共面

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

两直线的位置关系：

(1) L_1与L_2异面

$\Leftrightarrow$ 三向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$不共面



(2) L_1与L_2相交于一点

$\Leftrightarrow$ 三向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$共面，且$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$

(3) L_1与L_2平行而不重合 $\Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{P_1P_2}$

(4) L_1与L_2重合$\Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$

例 7 求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的平面方程　　.

解　设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(l,m,n)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取　$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

主要内容

1. 平面的点法式和一般式方程
2. 平面的截距式和参数式方程
3. 两个平面的位置关系
4. 直线的方程
5. 两条直线的位置关系
6. 直线与平面的位置关系
7. 距离

6 直线与平面的位置关系

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的**夹角**.

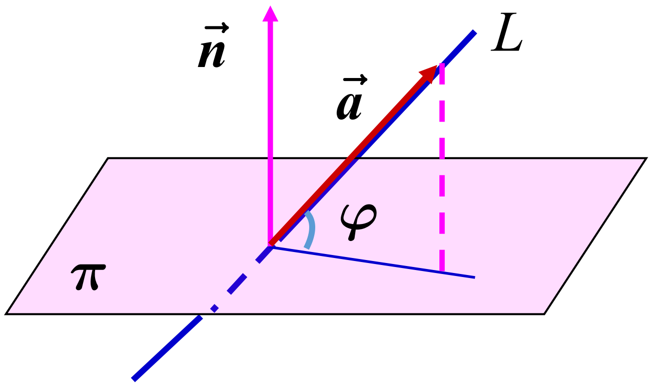
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

$$\vec{a}=(l,m,n),$$

$$\pi: \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\vec{n}=(A,B,C),$$



$$\sin\varphi=\left|\cos(\vec{a},\vec{n})\right|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{n}\|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\Rightarrow\quad (1)\quad L\perp\pi \iff \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

$$(2)\quad L\,//\,\pi \iff Al+Bm+Cn=0.$$

直线与平面的位置关系：

（1）直线与平面相交于一点 $\Longleftrightarrow\ Al+Bm+Cn\neq 0.$

（2）直线与平面平行，但直线不在平面上

$\Longleftrightarrow\ Al+Bm+Cn=0.\quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$

（3）直线在平面上 $\Longleftrightarrow$

$$Al+Bm+Cn=0.$$
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

例 8 设直线 $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$，平面 $\pi: x - y + 2z = 3$，求直线与平面的夹角 .

解: $\vec{n} = (1, -1, 2)$，$\vec{a} = (2, -1, 2)$，

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$= \frac{|1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 2 \times 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore \quad \varphi = \arcsin \dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

主要内容

1 平面的点法式和一般式方程

2 平面的截距式和参数式方程

3 两个平面的位置关系

4 直线的方程

5 两条直线的位置关系

6 直线与平面的位置关系

7 距离

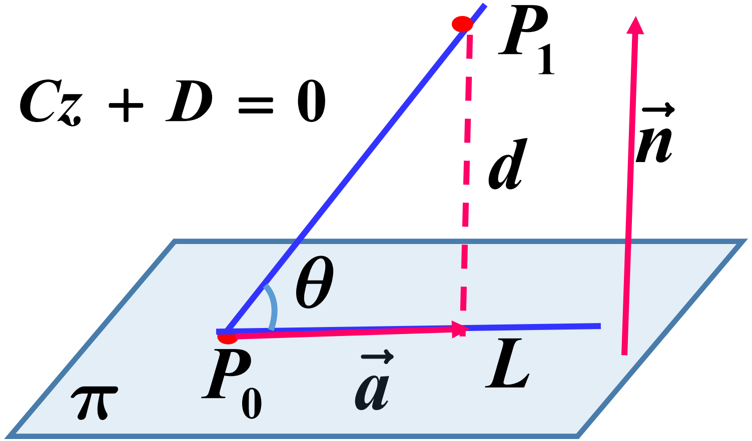
7 距　离

点到平面的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 是平面 π： $Ax + By + Cz + D = 0$

外一点，求 P_1 到平面的距离 .

任取 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$，



$$d = |(\overrightarrow{P_0P_1})_{\vec{n}}| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{\|n\|}$$

$$= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到直线的距离

给定直线 $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 及直线外一点

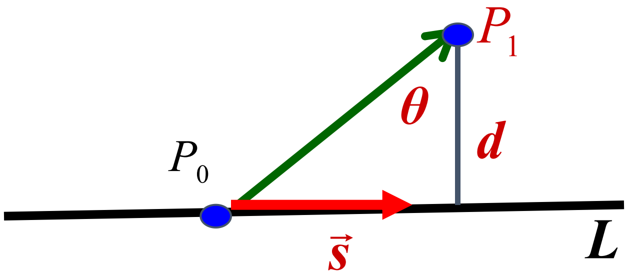
$P_1(x_1, y_1, z_1)$, 求 P_1 到直线的距离 .

任取 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$,

$$d = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \cos\theta$$

$$= \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \sin(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{s})$$

$$= \|\overrightarrow{P_0P_1}\| \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{s}\|}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\| \cdot \|\vec{s}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}$$



$\vec{s} = (l, m, n)$

第三章　几何向量及其应用

3.5 课后习题选讲

数学与统计学院
王勇茂

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

主要内容

例1–例13：第3章习题

例14：习题3.2，A 7

例15–17：习题3.2，B 1,2,3

例18–24：习题3.3，
A.2(6),3,11,12,14,16,17

例25 习题3.3，B;例26

备注:教材为 魏战线,李继成,线性代数与解析几何,第二版,高等教育出版社出版

例1 设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$,则$\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$_____.

解 $\left[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=\left[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\right]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

$$=4.$$

例2 以$A(5,1,-1), B(0,-4,3), C(1,-3,7)$为顶点的三角形的面积＝______.

解 $\overrightarrow{AB}=(-5,-5,4), \overrightarrow{BC}=(1,1,4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(-5,-5,4)\times(1,1,4)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=(-24,24,0).$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+24^2+0^2}=12\sqrt{2}.$$

例3

过原点及点$(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直的平面的方程为____.

解 该平面的法向量与向量 $(6,-3,2),(4,-1,2)$ 都垂直.
可取为这二个向量的外积向量，即:

$$\vec{n}=(6,-3,2)\times(4,-1,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)\parallel(2,2,-3).$$

该平面的点法式方程为: $2(x-0)+2(y-0)-3(z-0)=0$

即: $2x+2y-3z=0.$

例4

若直线 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x+1=y-1=z$ 相交, 则 $\lambda=$ ____.

解 取二直线上的点 $P_1(1,-1,1), P_2(-1,1,0), \overrightarrow{P_1P_2}=(-2,2,-1)$.

二直线的方向向量为: $\vec{a_1}=(1,2,\lambda), \vec{a_2}=(1,1,1)$,

由直线共面的条件知: $\vec{a_1}\times\vec{a_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$, 即:

$$\vec{a_1}\times\vec{a_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,\text{解得}\lambda=\frac{5}{4}.$$

例5　点$(2,1,0)$到平面$3x+4y+5z=0$的距离=______.

解

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{\left|3\times 2+4\times 1+5\times 0\right|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}$$

$$=\frac{10}{5\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

例6 若向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面,下列说法正确的是(　　).

(A)$\vec{a},\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}$必不共面.

(B)$\vec{c}$可由$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$惟一地线性表示.

(C)当$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$时,必有$\vec{b}=\vec{c}$.

(D)当$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$时,必有$\vec{b}=\vec{c}$.

解 (A)取$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$易知(A)错.

(B)正确, 此时可构成仿射坐标系.

(C)错误, 只能说明$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$.

(D)错误, 只能说明$\vec{a}\parallel(\vec{b}-\vec{c})$.

例7 若有直线$L: x-1=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$与平面$\pi: 2x+3y+z-1=0$,则(　　).

（A）L与π平行但不在π上.

（B）L在π上.

（C）L与π垂直相交.

（D）L与π相交但不垂直.

解 (A)错.$(1,-2,6)\cdot(2,3,1)=2\neq 0$, 故$L$与$\pi$不平行.

(B)错误. L上的点$(1,-1,0)$显然不在π上.

(C)错误,$(1,-2,6)\nparallel(2,3,1)$, 故$L$与$\pi$不垂直.

(D)正确.

例8 若四点$A(1,0,-2), B(7,x,0), C(-8,6,1), D(-2,6,1)$共面，则$x=$(　　).

(A)0.　(B)6.　(C)4.　$(D)-4$.

解 该平面方程为：
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

因该方程为三元一次方程，必表示一平面；而点A、C、D的坐标均适合它（如将点A坐标代入行列式，则第一，4行元素相同，行列式值必为0,余同），故它表示过A、C、D的平面，点B要在该平面上，其坐标必须适合它。

将$B(7,x,0)$坐标代入可得，$x=4$.

$\therefore (C)$正确.

或： 也可由AB、AC、AD共面的充要条件求解

例9 求通过直线$\begin{cases}2x-z=0\\x+y-z+5=0\end{cases}$且垂直于平面$7x-y+4z-3=0$的平面的方程.

解 直线的方向向量为：$(2,0,-1)\times(1,1,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & 0 & -1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,1,2).$

所求平面的法向量为：$(1,1,2)\times(7,-1,4)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & 1 & 2\\7 & -1 & 4\end{vmatrix}=(6,10,-8).$

点(5, 0, 10)为所求平面上的一点，故该平面点法式方程为：

$6(x-5)+10(y-0)-8(z-10)=0,$ 即：$3x+5y-4z+25=0.$

例10 直线 L 过点 $P_0(1,0,-2)$，与平面 $\pi: 3x-y+2z+1=0$ 平行，与直线 $L_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 相交. 求 L 的对称式方程.

解 易知 $P_0(1,0,-2)$ 在平面 π 上，直线 L 也在平面 π 上

故直线 L_1 也与平面 π 相交，设交点为 P_1.

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=z=t$， 则 $x=1+4t, y=3-2t, z=t$

代入平面 π 的方程，解得 $t=-\dfrac{1}{16}$，故点 P_1 的坐标为 $(\dfrac{3}{4},\dfrac{25}{8},-\dfrac{1}{16})$.

直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=(-\dfrac{1}{4},\dfrac{25}{8},\dfrac{31}{16})$,

直线 L的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}=(-\frac{1}{4},\frac{25}{8},\frac{31}{16})$,

L 的对称式方程为: $\dfrac{x-1}{\frac{-1}{4}}=\dfrac{y-0}{\frac{25}{8}}=\dfrac{z+2}{\frac{31}{16}}$,

即: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-0}{50}=\dfrac{z+2}{31}$.

例11 求点(1,2,3)到直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$的距离.

解 直线的方向向量$\vec{a}$为:

$$\vec{a}=(1,1,-1)\times(2,0,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-2)$$

记$P_1=(1,2,3)$在直线上取一点$P_0(0,4,3)$,则$\overrightarrow{P_0P_1}=(1,-2,0)$

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\times\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{\left\|(1,-2,0)\times(1,-3,-2)\right\|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{\left\|(4,2,-1)\right\|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

例12 设有点$P_0(2,-3,-1)$,直线$L_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z.$

(1) 求P_0到L_1的垂足点P_1;

(2) 求过P_0且与L_1垂直相交的直线的对称式方程;

(3) 求P_0关于L_1的对称点P_2.

解 (1)在直线L_1上取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,则: $\dfrac{x_1-1}{-2}=\dfrac{y_1+1}{-1}=z_1=t$

则点P_1坐标为$(1-2t,-1-t,t)$, 而P_1P_0与$(-2,-1,1)$垂直,故:

$$(1+2t,t-2,-1-t)\cdot(-2,-1,1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{6},\ P_1\text{点坐标为}(\frac{4}{3},-\frac{5}{6},-\frac{1}{6}).$$

例12 设有点$P_0(2,-3,-1)$，直线$L_1: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z.$

(2) 求过P_0且与L_1垂直相交的直线的对称式方程；

(3) 求P_0关于L_1的对称点P_2.

解 (2) 过$P_0(2,-3,-1)$且与L_1垂直相交的直线，与直线L_1相交于点P_1

由本题(1)知，$P_1(\dfrac{4}{3},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{6})$.

该直线方向向量为：$\overrightarrow{P_1P_0}=(\dfrac{2}{3},-\dfrac{13}{6},-\dfrac{5}{6})$

所求直线的对称式方程为：$\dfrac{x-2}{\frac{2}{3}}=\dfrac{y+3}{-\frac{13}{6}}=\dfrac{z+1}{-\frac{5}{6}}$，即：$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{13}=\dfrac{z+1}{5}$.

例12 设有点$P_0(2,-3,-1)$,直线$L_1: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z$.

(3) 求P_0关于L_1的对称点P_2.

解 (3) P_0到L_1的垂足点P_1是线段P_0P_2的中点. 而点$P_0(2,-3,-1)$,

由本题(1)知, $P_1(\dfrac{4}{3},-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{6})$. 设$P_0$关于$L_1$的对称点为$P_2(x,y,z)$,则:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{y-3}{2}=-\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z-1}{2}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

解得P_2坐标为$(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3})$.

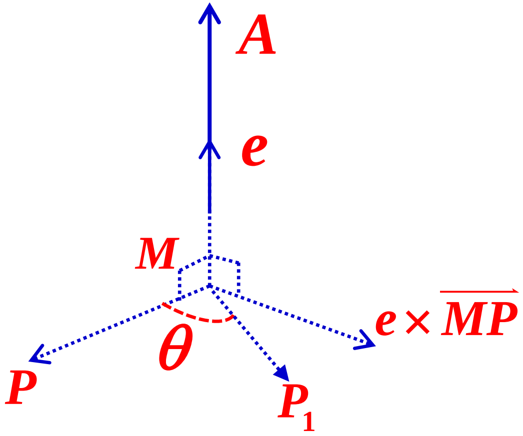
例13 (1) 已知$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$,将$\overrightarrow{MP}$绕$\overrightarrow{MA}$右旋角度$\theta$得$\overrightarrow{MP_1}$,

记$e=\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|}$,试用$e,\overrightarrow{MP}$及$\theta$表出$\overrightarrow{MP_1}$.

解 (1) 取$e,\overrightarrow{MP},e\times\overrightarrow{MP}$可构成空间直角坐标系,由题易知$\overrightarrow{MP_1}$位于$\overrightarrow{MP},e\times\overrightarrow{MP}$所在的坐标面上,故必可由它们线性表示

$\because\ \overrightarrow{MP_1}$与$\overrightarrow{MP}$夹角为$\theta$,

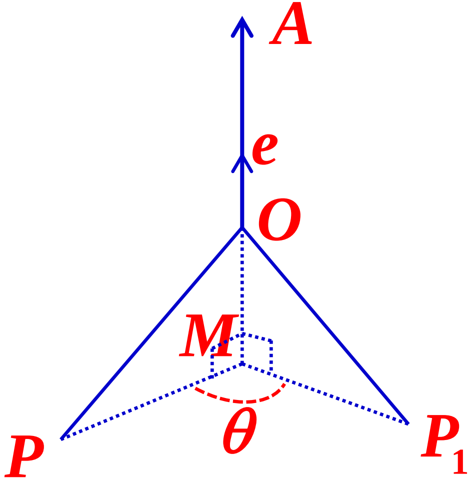
$$\therefore\ \overrightarrow{MP_1}=\left\|\overrightarrow{MP_1}\right\|\cos\theta\frac{\overrightarrow{MP}}{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|}+\left\|\overrightarrow{MP_1}\right\|\sin\theta\frac{(e\times\overrightarrow{MP})}{\left\|e\times\overrightarrow{MP}\right\|}$$



整理化简，即得: $\overrightarrow{MP_1}=\cos\theta\overrightarrow{MP}+\sin\theta(e\times\overrightarrow{MP})$.

例13 (2) 设O,P,A是3个不同点，将$\overrightarrow{OP}$绕$\overrightarrow{OA}$右旋角度θ得$\overrightarrow{OP_1}$，

记$e=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}$，试用$e,\overrightarrow{OP}$及$\theta$表出$\overrightarrow{OP_1}$。



解(2) 设P到$\overrightarrow{OA}$的垂足点为M，则：

$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}\cdot e)e\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$，故由本题(1)的结论知：

$\overrightarrow{MP_1}=\cos\theta\overrightarrow{MP}+\sin\theta(e\times\overrightarrow{MP})$，将(3)代入其中，得

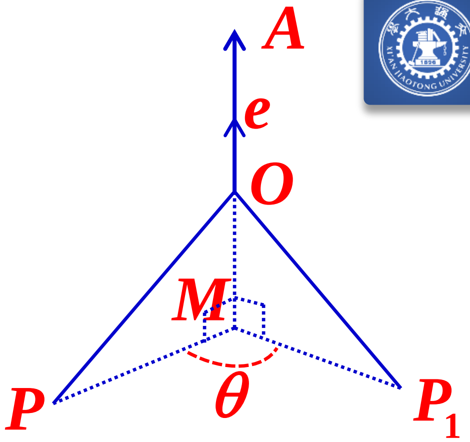
$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}\cdot e)e\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$,故由本题(1)的结论知:

$\overrightarrow{MP_1}=\cos\theta\overrightarrow{MP}+\sin\theta(e\times\overrightarrow{MP})$,将(3)代入其中,得



$\overrightarrow{MP_1}=\cos\theta(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})+\sin\theta(e\times(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}))$,注意到$e\times\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O}$,可得

$$\overrightarrow{MP_1}=\cos\theta(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})+\sin\theta(e\times\overrightarrow{OP})\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

将(2)(4)代入(1),得 $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP_1}$

$$=(\overrightarrow{OP}\cdot e)e+\cos\theta\cdot\overrightarrow{OP}-\cos\theta\cdot(\overrightarrow{OP}\cdot e)e+\sin\theta(e\times\overrightarrow{OP})$$

$$=(1-\cos\theta)(\overrightarrow{OP}\cdot e)e+\cos\theta\cdot\overrightarrow{OP}+\sin\theta(e\times\overrightarrow{OP}).$$

例14 已知向量$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

解 两个向量垂直的充要条件是：两个向量的内积等于零.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\left\|\vec{a}\right\|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\left\|\vec{b}\right\|^2=0.$$

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\left\|\vec{a}\right\|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\left\|\vec{b}\right\|^2=0.$ 二式相减得：$\left\|\vec{b}\right\|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}.$

再代入第一式得 $\left\|\vec{a}\right\|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}.$

$\therefore \left\|\vec{a}\right\|=\left\|\vec{b}\right\|.$ $\quad \cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}=\dfrac{\frac{1}{2}\left\|\vec{b}\right\|^2}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}=\dfrac{1}{2},$ $\quad \therefore (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}.$

例15 若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$,

证明:$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$,并作几何解释.

证明: $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$,

$\therefore \vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0}$, 即$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}\cdot$

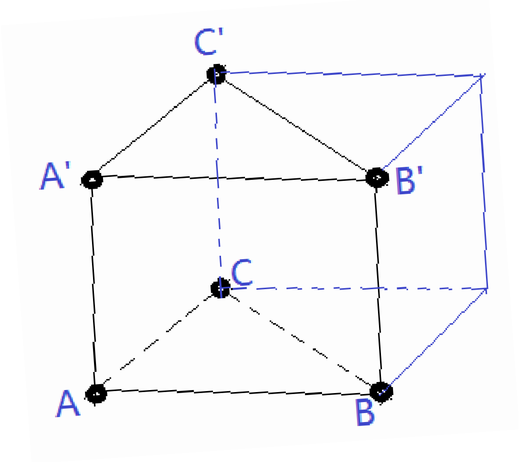
类似可证$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

几何解释:

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$,时,$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构成一个三角形,

$\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$三个向量模长相等且同向,故相等.

例16 证明：以$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$为顶点的三角形的面积等于$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$的绝对值.



证明： 设 $A(x_1,y_1,0),B(x_2,y_2,0),C(x_3,y_3,0)$

$A'(x_1,y_1,1),B'(x_2,y_2,1),C'(x_3,y_3,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA'}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,0)\cdot(0,0,1)$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA'}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,0)\cdot(0,0,1)$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{\Delta ABC}=\mathrm{V}_{\mathrm{ABCA'B'C'}}=\frac{1}{2}\mathrm{V}_{长方体}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$$

注：$|\ \ |$表示绝对值

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

例17 (1)证明：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$;

(2)利用(1)证明：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

(3)利用(1)证明：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0.$$

$$(1)\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

证 设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$,

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,

$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$,

$\vec{b}\times\vec{c}=(d_1,d_2,d_3)$,

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(h_1,h_2,h_3)$

$$\begin{aligned}h_1&=a_2d_3-a_3d_2\\&=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\&=b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3)\\&=b_1(\vec{a}\cdot\vec{c}-a_1c_1)-c_1(\vec{a}\cdot\vec{b}-a_1b_1)\\&=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_1-(\vec{a}\cdot\vec{b})c_1\end{aligned}$$

同理，$h_2=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_2-(\vec{a}\cdot\vec{b})c_2$

$h_3=(\vec{a}\cdot\vec{c})b_3-(\vec{a}\cdot\vec{b})c_3$

故得证.

(1)证明 :$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$;

(2)利用(1)证明:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c});$$

证 (2) 由混合积性质知:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\left[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})\right]\cdot\vec{a}$$

$$\underline{\underline{\text{由(1)的结论}}}\left[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}\right]\cdot\vec{a}$$

$$=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{d}\cdot\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

(1)证明 :$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$;

(3)利用(1)证明:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}.$$

证 (3) 由(1)的结论知,
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$\therefore \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}.$$

例18 求过点$M(-3,5,9)$，且与直线$L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$都相交的直线的方程.

解 设过点$M(-3,5,9)$及直线L_1的平面为π_1,

过点$M(-3,5,9)$及直线L_2的平面为π_2，则π_1与π_2的交线即为所求.

直线L_1的方向向量为$\overrightarrow{a_1}=(3,-1,0)\times(2,0,-1)=(1,3,2)$,

直线L_2的方向向量为$\overrightarrow{a_2}=(4,-1,0)\times(5,0,-1)=(1,4,5)$.

在L_1上取一点$M_1(0,5,-3)$，则π_1的法向量可取作$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{a_1}$,

$$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{a_1}=(3,0,-12)\times(1,3,2)=(36,-18,9),$$

$$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{MM_1}\times\overrightarrow{a_1}=(3,0,-12)\times(1,3,2)=(36,-18,9),$$

在L_2上取一点$M_2(0,-7,10)$,则π_2的法向量可取作$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{MM_2}\times\overrightarrow{a_2}$,

$$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{MM_2}\times\overrightarrow{a_2}=(3,-12,1)\times(1,4,5)=(-64,-14,24),$$

因点$M(-3,5,9)$在π_1上,则平面π_1的点法式方程为:

$$36(x+3)-18(y-5)+9(z-9)=0,\quad \text{即}: 4x-2y+z+13=0.$$

因点$M(-3,5,9)$在π_2上,则平面π_2的点法式方程为:

$$-64(x+3)-14(y-5)+24(z-9)=0,\ \text{即}: 32x+7y-12z+169=0.$$

则π_1与π_2的交线:$\begin{cases}4x-2y+z+13=0\\32x+7y-12z+169=0\end{cases}$ 即为所求.

例19 求原点$O(0,0,0)$关于平面π:$6x+2y-9z+121=0$的对称点.

解 设该对称点为$O'(a,b,c)$, 直线OO'的方程为: $\dfrac{x-0}{a-0}=\dfrac{y-0}{b-0}=\dfrac{z-0}{c-0}$,

即: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, 由题可知,$(a,b,c)\parallel(6,2,-9)$, 故: $\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-9}$.

令$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-9}=t$, 得$a=6t, b=2t, c=-9t$.

故$O'(6t,2t,-9t)$.

而原点$O(0,0,0)$到平面π的距离为: $d=\dfrac{|6\cdot 0+2\cdot 0-9\cdot 0+121|}{\sqrt{6^2+2^2+(-9)^2}}=11$.

原点$O(0,0,0)$到平面π的距离为：

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 0-9\cdot 0+121|}{\sqrt{6^2+2^2+(-9)^2}}=11.$$

故$O'(6t,2t,-9t)$到平面π的距离也为11，即：

$$\frac{|6\cdot 6t+2\cdot 2t-9\cdot(-9t)+121|}{\sqrt{6^2+2^2+(-9)^2}}=11,$$

解得$t=0$，或$t=-2$.

而O'坐标为$(6t,2t,-9t)$，

$\therefore$ 所求对称点为$O'(-12,-4,18)$或$O'(0,0,0)$(舍去).

例20 设平面S过3点$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$,直线L过原点,与S的夹角为$\frac{\pi}{4}$,且位于平面$x=y$上,求直线L的方程.

解 设直线L与S的交点为(a,b,c), 因直线L位于平面$x=y$上,故$a=b$.

又直线L过原点,故直线L的方程为:$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-0}{a-0}=\frac{z-0}{c-0}$.

即:$\frac{x}{a}=\frac{y}{a}=\frac{z}{c}$, 其方向向量为$(a,a,c)$.

设平面S的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,

将$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$代入,

可得平面S的方程为$x+y+z-1=0$, 其法向量为$(1,1,1)$.

由直线L与平面S的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$知,

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|a+a+c|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2+c^2}}.$$

两边平方,整理可得, $2a^2+8ac=c^2$.

即: $(c-4a)^2=18a^2$, $c-4a=\pm3\sqrt{2}a$, $c=(4\pm3\sqrt{2})a$,

直线L的方程为: $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{c}$, 即: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4\pm3\sqrt{2}}$.

例21 已知一平面平行于平面$6x+3y+2z+21=0$且与半径为1,中心在原点的球面相切,求该平面的方程.

解 设切点坐标为(a,b,c),

因切点在球面上,故:$a^2+b^2+c^2=1.$

由题可知,$(a,b,c)\parallel(6,3,2)$,故:$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{2}.$

令$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{2}=t$,代入$a^2+b^2+c^2=1$,解得$t=\pm\dfrac{1}{7}.$

$\therefore$切点(a,b,c)为$(\dfrac{6}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{2}{7})$,或$(-\dfrac{6}{7},-\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7})$.

$\therefore$ 切点(a,b,c)为$(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7})$,或$(-\frac{6}{7},-\frac{3}{7},-\frac{2}{7})$.

所求平面过切点(a,b,c),法向量可取为$(6,3,2)$,方程为:

$$6(x-\frac{6}{7})+3(y-\frac{3}{7})+2(z-\frac{2}{7})=0 \text{或} \ 6(x+\frac{6}{7})+3(y+\frac{3}{7})+2(z+\frac{2}{7})=0,$$

即: $6x+3y+2z-7=0$或$6x+3y+2z+7=0$.

例22 证明直线$L_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$与$L_2: x-4=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$位于同一平面上，并求这两条直线的交点坐标及所在平面的方程.

解 直线L_1的方向向量$\overrightarrow{a_1}=(3,2,1)$，$L_2$的方向向量$\overrightarrow{a_2}=(1,-3,2)$，显然不平行，下面检查是否共面.

取直线L_1上的点$P_1(-1,-1,-1)$，L_2上的点$P_2(4,-5,4)$，由于混合积

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{a_2}\right]=(5,-4,5)\times(3,2,1)\cdot(1,-3,2)=\begin{vmatrix}5 & -4 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=0.$$

故L_1、L_2共面. 为求直线L_1、L_2的交点，可将其都写成参数方程：

$L_1: x = 3t - 1, y = 2t - 1, z = t - 1;$

$L_2: x = s + 4, y = -3s - 5, z = 2s + 4.$

在交点处, 应有: $3t - 1 = s + 4,\ 2t - 1 = -3s - 5,\ t - 1 = 2s + 4.$

解得: $t = 1, s = -2$, 于是交点为$(2,1,0)$.

最后求这两条直线所在平面的方程. 该平面过点$(2,1,0)$,因

$$\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2} = (3,2,1) \times (1,-3,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (7,-5,-11),$$

取该平面的法向量为$(7,-5,-11)$, 则其点法式方程为:

$7(x-2) - 5(y-1) - 11(z-0) = 0$, 即: $7x - 5y - 11z - 9 = 0.$

例23 求两个平行平面$x+y-z+1=0$与$2x+2y-2z-3=0$之间的距离.

解 在平面$x+y-z+1=0$上取一点$(0,0,1)$,

该点到平面$2x+2y-2z-3=0$距离为:

$$d=\frac{|2\times 0+2\times 0-2\times 1-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{12}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

此即为所求两个平行平面之间的距离.

例24

设有点$M(1,0,-1)$,直线$L_1:\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$,直线$L_2: x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

(1) 求L_1的对称式方程;

(2) 求点M到L_1的距离;

(3) 求L_1与L_2之间的距离.

解 (1)在直线L_1上取一点$P(3,0,-8)$,

直线L_1的方向向量为$(1,-1,0)\times(3,-1,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & -1 & 0\\3 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$.

直线 L_1 的对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}$.

解 (2) $M(1,0,-1)$,直线L_1上取点$P(3,0,-8)$, L_1的方向向量a为$(-1,-1,2)$

$\overrightarrow{PM}=(-2,0,7)$, L_1的方向向量a为$(-1,-1,2)$

$$\overrightarrow{PM}\times\vec{a}=(-2,0,7)\times(-1,-1,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 7\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(7,-3,2)$$

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{PM}\times\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}=\frac{\sqrt{7^2+(-3)^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{93}}{3}$$

例24

设有点$M(1,0,-1)$,直线$L_1:\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$,直线$L_2:x+1=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

(3) 求L_1与L_2之间的距离.

解 (3) 由(1)知直线 L_1 的对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}$,

在L_1上取点$P_1(3,0,-8)$, L_1的方向向量$\overrightarrow{a_1}$为$(-1,-1,2)$

在L_2上取点$P_2(-1,1,0)$, L_2的方向向量$\overrightarrow{a_2}$为$(1,-2,2)$

在L_1上取点$P_1(3,0,-8)$, L_1的方向向量a_1为$(-1,-1,2)$

在L_2上取点$P_2(-1,1,0)$, L_2的方向向量a_2为$(1,-2,2)$

$$\left[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \overrightarrow{P_1P_2}\right]=(-1,-1,2)\times(1,-2,2)\cdot(-4,1,8)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ -4 & 1 & 8\end{vmatrix}=20.$$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=(-1,-1,2)\times(1,-2,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=(2,4,3).$$

$$d=\frac{\left\|\left[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right\|}{\left\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right\|}=\frac{20}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{29}}.$$

例25 求常数k的值，使下列3个平面过同一条直线：

$\pi_1: 3x+2y+4z=1; \pi_2: x-8y-2z=3, \pi_3: kx-3y+z=2$

并求此直线的对称式方程.

解 平面π_1、π_2的交线为：$\begin{cases} 3x+2y+4z=1 \\ x-8y-2z=3 \end{cases}$，令$x=0$，得$\begin{cases} 2y+4z=1 \\ -8y-2z=3 \end{cases}$，

解之，可得该直线上的一点为$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

该直线的方向向量为平面π_1、π_2的法向量的外积向量，即：

$$(3,2,4)\times(1,-8,-2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -8 & -2 \end{vmatrix}=(28,10,-26)\parallel(14,5,-13).$$

$$(3,2,4)\times(1,-8,-2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & -8 & -2\end{vmatrix}=(28,10,-26)\parallel(14,5,-13).$$

$\therefore \pi_1$与π_2的交线L的对称式方程为：$\dfrac{x-0}{14}=\dfrac{y-(-\frac{1}{2})}{5}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-13}$

L的方向向量与π_3的法向量垂直,即：$(14,5,-13)\cdot(k,-3,1)=0,$

$14k-15-13=0$，得$k=2.$

经检验$k=2$时,L的参数方程满足π_3的方程,故π_3通过$L.$

$\therefore k=2$时,三平面通过同一直线L,其对称式方程为：$\dfrac{x}{14}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-13}.$

例26 将直线 L 的一般式方程 $\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ 化成对称式方程.

解 在直线 $\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ 上，令 $y=0$，得 $\begin{cases} 4x-z=-5 \\ 3x+2z=-1 \end{cases}$，

解得 $x=-1, z=1$ 故 $M(-1,0,1)$ 是直线 L 上一点.

直线L的方向向量可取作:

$$(4,3,-1)\times(3,2,2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8\vec{i}-11\vec{j}-\vec{k},\text{即}(8,-11,-1).$$

直线L的方向向量可取作：

$$(4,3,-1)\times(3,2,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8\vec{i}-11\vec{j}-\vec{k},\text{即}(8,-11,-1).$$

所求对称式方程为：$\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-1}.$