西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第五章　线性空间与欧氏空间

5.1 线性空间的基本概念

数学与统计学院
李继成

主要内容

1 线性空间的定义

2 线性空间的基本性质

3 线性子空间的定义

4 基、维数和向量的坐标

5 基变换与坐标变换

1 线性空间的定义

定义（线性空间） 设V是一个非空集合，F是一个数域，

在V上定义一种(加法)运算：$\forall \alpha \in V, \beta \in V$，$\alpha+\beta \in V$，

在V与F之间定义一种(数乘)运算：$\forall \alpha \in V, k \in F$，$k\alpha \in V$；

满足：$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，$\forall k$，$l \in F$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) V中存在一个零元，

使得$\forall \alpha \in V$，有$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V, \exists$负元$-\alpha \in V$，

使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

则称V对此加法和数乘在数域F上做成一个线性空间，或称向量空间。V中的元素称为向量。

例1 几种常见的线性空间

(1) $F^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ |x_i\in F,i=1,2,\cdots,n\}$

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

$$k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$$

F^n是数域F上的线性空间.

类似地，R^n,C^n分别构成数域R,C上的线性空间.

(2) $F^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}|a_{ij}\in F,i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\}$

$$R^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}|a_{ij}\in R,i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\}$$

按照矩阵加法和数乘运 算，分别构成 F或R上的线性空间.

(3) $F[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \| a_i\in F, i=1,2,\cdots\}$

对多项式加法和数与多 项式的乘法构成数域 F上的线性空间 .

(4) $C[a,b]=\{f(x) | f(x)$是$[a,b]$上的连续函数$\}$

对函数的加法和实数与 函数的乘法构成线性空 间.

(5) $S=\{x\in R^n \mid A\in R^{m\times n}, Ax=0\}$

对向量的加法与数乘构 成线性空间 . 称为$Ax=0$的解空间

注意:$\{x\in R^n \mid A\in R^{m\times n}, Ax=b\}$

对向量的加法和数乘不 构成线性空间.

例2 判定下列集合对定义的加法和数乘运算是否构成线性空间？

$$(1)V=\{(a,b)\mid a,b\in R\},$$

加法：$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

数乘：$k(a,b)=(ka,0)$

---

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) V中存在一个零元，使得$\forall\alpha\in V$，有$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V,\exists$负元$-\alpha\in V$,使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

例2 判定下列集合对定义的加法和数乘运算是否构成线性空间？

$$(1) V=\{(a,b) \mid a,b\in R\},$$

$$\text{加法}:(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

$$\text{数乘}:k(a,b)=(ka,0)$$

$$(2) V=\{(x,y,z) \mid x+y+z=0,x,y,z\in R\},$$

$$\text{加法}:(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$\text{数乘}:k(x_1,y_1,z_1)=(kx_1,ky_1,kz_1)$$

主要内容

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性子空间的定义
4. 基、维数和向量的坐标
5. 基变换与坐标变换

2 线性空间的基本性质

性质5.1.1 线性空间的零元素是惟一的；

性质5.1.2 线性空间的任一元素的负元素是惟一的；

性质5.1.3 $0\alpha = 0$; $(-1)\alpha = -\alpha$; $k0 = 0$.

性质5.1.4 若$k\alpha = 0$, 则 $k = 0$ 或$\alpha = 0$

主要内容

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性子空间的定义
4. 基、维数和向量的坐标
5. 基变换与坐标变换

3 线性子空间的定义

定义5.1.2（子空间）设W是线性空间V的一个非空子集，

如果W按照V所定义的加法、数乘运算也构成一个线性空间，

则称W为V的**子空间**.

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) V中存在零元，使得$\forall\alpha\in V$，有$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V$，$\exists$负元$-\alpha\in V$，使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;　(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;　(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

3 线性子空间的定义

定义5.1.2（子空间） 设W是线性空间V的一个非空子集，

如果W按照V所定义的加法、数乘运算也构成一个线性空间，

则称W为V的子空间.

定理5.1.1 设W是线性空间V的非空子集，则：W为V的子空间当且仅当W对V中的加法、数乘(线性运算)封闭

例1 (1)线性空间V中的零向量做成的集合$\{0\}$是V的一个子空间，称为V的零(子)空间.

例2 设α_1，α_2是数域F上线性空间V中的两个向量，则

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \mid k_i\in F, i=1,2\}$$

对线性空间V上的加法与数乘运算封闭，是V的一个子空间.

一般地：称W为由向量α_1，α_2生成的V的子空间，记作：

$$span\{\alpha_1,\ \alpha_2\}=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \mid k_1,k_2\in F\}.$$

更一般地： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是线性空间$V$中的$m$个向量，

$$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m \mid k_i\in F, i=1,2,\cdots,m\}$$

为由向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$生成的$V$的子空间.

例3 判断R^3的下列子集是否构成R^3的子空间：

(1) $W_1=\{(x,2x,3y)^{\mathrm{T}} \mid x,y\in R\}$;

(2) $W_2=\{(1,x,y)^{\mathrm{T}} \mid x,y\in R\}$.

解 (1) $\forall\alpha\in W_1$，有

$$\alpha=(x,2x,3y)^T=x(1,2,0)^T+y(0,0,3)^T$$

因此 W_1是由$\alpha_1=(1,2,0)^T$和$\alpha_2=(0,0,3)^T$生成的R^3的子空间.

(2) $\forall\alpha=(1,x,y)^T\in W_2$，有$2\alpha=(2,2x,2y)^T\notin W_2$.

所以W_2不构成R^3子空间。

主要内容

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性子空间的定义
4. 基、维数和向量的坐标
5. 基变换与坐标变换

4 基、维数和向量坐标

定义5.1.3（基、维数和向量坐标）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间 V中的一组向量，满足 ：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；(2) $\forall\alpha\in V$，α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,(x_i\in F, i=1,2,\cdots,n)$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个基，基中所含向量个数$n$为$V$的维数，记为 $\dim(V)=n$(称V为n维线性空间).

称向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标 .

例1 F^n是n维向量空间，向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$就是$F^n$的一个基，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$在该组基下的坐标为$\alpha$.

标准基

4 基、维数和向量坐标

定义5.1.3（基、维数和向量坐标）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间 V中的-

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；(2) $\forall\alpha$

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, (x$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个基，基

记为 $\dim(V) = n$(称V为n维线性空

称向量 $x = (x_1, x_2,\cdots, x_n)^T$ 为α在基

设：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \alpha$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

α在此基下的坐标：

$$x = (k_1, k_2, k_3)^T = (-1,-1,3)^T$$

例2 证明：$\alpha_1 = (1,0,1)^T, \alpha_2 = (2,4,5)^T, \alpha_3 = (1,2,3)^T$是$R^3$的一个基，并求$\alpha = (0,2,3)^T$在此基下的坐标。

证明 $\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right| = 2 \neq 0$, $\dim(R^3) = 3$, $\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可作为$R^3$的基.

4 基、维数和向量坐标

定义5.1.3（基、维数和向量坐标）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间 V中的一组向量，满足 ：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；(2) $\forall\alpha\in V$，α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,(x_i \in F, i = 1,2,\cdots,n)$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的一个基，基中所含向量个数$n$为$V$的维数，记为 $\dim(V) = n$(称V为n维线性空间).

称向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为α在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标 .

- 零空间(维数为0)，有限维空间，无限维 线性空间
- 线性空间的基不惟一 ，但基所含向量的个数惟 一.
- n维线性空间V中任意n个线性无关的向量都可作为V的基.
- V中的向量用基线性表示时表示式惟一.

例3 证明：$F^{2\times 2}$中的向量组

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

是$F^{2\times 2}$的一个基，并求 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$在此基下的坐标。

证明 首先证明A_1，A_2，A_3，A_4线性无关

$$0=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=\begin{bmatrix}-k_1+k_2 & k_1+k_2\\ k_3 & k_4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0;$$

例3 证明：$F^{2\times2}$中的向量组

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

是$F^{2\times2}$的一个基，并求 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$在此基下的坐标。

证明 首先证明A_1，A_2，A_3，A_4线性无关

其次证明任一$A\in F^{2\times2}$，都可由A_1，A_2，A_3，A_4线性表出

设有x_1,x_2,x_3,x_4使得$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4=A$

$$x_1\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2 & x_1+x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

$F^{2\times2}$是4维线性空间。

例3 证明：$F^{2\times 2}$中的向量组

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

是$F^{2\times 2}$的一个基，并求 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$在此基下的坐标。

证明 首先证明A_1，A_2，A_3，A_4线性无关

其次证明任一$A\in F^{2\times 2}$，都可由A_1，A_2，A_3，A_4线性表出

设有x_1,x_2,x_3,x_4使得$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4=A$

$$x_1\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2 & x_1+x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=-1, x_2=1, x_3=-1, x_4=3$，$A$在此基下的坐标为$(-1,1,-1,3)^T$

主要内容

1 线性空间的定义

2 线性空间的基本性质

3 线性子空间的定义

4 基、维数和向量的坐标

5 基变换与坐标变换

5 基变换与坐标变换

定义5.1.4（过渡矩阵） 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$n$维线性空间$V$的两个基，且

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_2\\ \qquad\cdots\\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

其中$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$为常数，则称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵

"矩阵形式"表示：$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]AB$$

⇒ $AB=I$ 　　结论：基之间的过渡矩阵是可逆的.

定理5.1.2 设n维线性空间 V有两个基：

$$(\mathrm{I})\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\quad (\mathrm{II})\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;$$

且由基(I)到基(II)的过渡矩阵为A,设V中向量α在基(I)下的坐标为$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,在基(II)下的坐标为$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

则有：$x = Ay$或$y = A^{-1}x$ **（坐标变换公式）**

证明思路： $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即：$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]x$

同理：$\alpha=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]y=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]Ay$

由坐标的唯一性可知： $x = Ay$或$y = A^{-1}x$

例1 已知R^3的两个基：

$$(\mathrm{I}):\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$$

$$(\mathrm{II}):\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(2,3,4)^T,\beta_3=(3,4,3)^T$$

求：(1)由基(I)到基(II)的过渡矩阵A;

(2)求向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基(II)下的坐标.

解 (1) $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A \Rightarrow A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

例1 已知R^3的两个基：

$$(\mathrm{I}): \alpha_1=(1,1,1)^T, \alpha_2=(1,0,-1)^T, \alpha_3=(1,0,1)^T$$

$$(\mathrm{II}): \beta_1=(1,2,1)^T, \beta_2=(2,3,4)^T, \beta_3=(3,4,3)^T$$

求：(1)由基(I)到基(II)的过渡矩阵A;

(2)求向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基(II)下的坐标.

解 (2) 由$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$知$\alpha$在基(I)下的坐标为$x=(1,2,-1)^T$

若设其在基(II)下的坐标为$y=(y_1,y_2,y_3)^T$,

则由坐标变换公式得 $y=A^{-1}x$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

主要内容

6 线性空间的同构

7 子空间的交与和

引例：坐标映射

设V是数域F上的n维线性空间，$B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的一个基. 对$\forall\alpha\in V$，存在唯一的坐标向量$x$，使$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$；反之，对任意$x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in F^n$，$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$确定的向量$\alpha\in V$.

这样，确定了V到F^n的双射$f: f(\alpha)=x$，满足：

(1) $\forall\alpha,\beta\in V$，恒有$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;

(2) $\forall\alpha\in V,\forall k\in F$，恒有$f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

称此映射为坐标映射.

线性空间V和它的坐标空间F^n同构.

线性空间的同构

定义5.1.5（线性空间的同构）

设V_1,V_2是数域F上的线性空间,V_1,V_2的映射σ叫做同构映射(简称为同构),如果

(1) σ是V_1到V_2的双射;

(2) $\forall \alpha,\beta \in V_1$, 恒有$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;

(3) $\forall \alpha \in V_1, \forall k \in F$, 恒有$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

如果两个线性空间之间可以建立一个同构映射,则称两个线性空间同构.

线性空间到其坐标空间的坐标映射是同构映射.

注1 定义中的条件(2)(3)与如下等式等价

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, \forall k_1, k_2 \in K$ 有

$\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2).$

注2 如果 σ 是 V_1 到 V_2 的同构, 则 σ^{-1} 是 V_2 到 V_1 的同构.

注3 同构作为线性空间之间的关系,具有下列性质:

①自反性: V 与自身同构;

②对称性: V_1 与 V_2 同构 $\Rightarrow V_2$ 与 V_1 同构;

③传递性: V_1 与 V_2 同构, V_2 与 V_3 同构 $\Rightarrow V_1$ 与 V_3 同构.

同构映射的基本性质

定理5.1.3 设 T 是 V_1 到 V_2 的同构映射

(1) $T(0)=0$; (2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)$;

(4) V 中向量组 S 线性相关 $\Leftrightarrow T(S)$ 线性相关.

(5) B 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow T(B)$ 是 V_2 的基.

证 仅证(4). 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V_1$ 线性相关, 则有 $k_1,\ldots,k_r$ 不全为零, 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$, 从而

$$0=T(0)=T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)$$

所以, $T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_r)$ 是 W 中的线性相关组.

设 $T(S)$ 在 V_2 中线性相关,则 $S=T^{-1}(T(S))$ 在 V_1 中线性相关. ■

定理5.1.4 数域 F 上的两个线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.

证 若 V_1 与 V_2 同构, 它们之间的同构映射把 V_1 的基映成 V_2 的基, 所以, V_1 与 V_2 维数相同.

反之,若 $\dim(V_1)=\dim(V_2)=n$, 则它们都与 F^n 同构, 所以它们也同构. ■

维数是有限维线性空间的唯一本质特性.

基扩充定理

定理5.1.5 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是 n 维线性空间 V 中的一个线性无关组,且 $r<n$, 则存在 $\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n \in V$,使得 $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ 成为 V 的基.

证 任取 V 的基:$e_1,\dots,e_n$, 设 α_i 在此基下的坐标为 $x_i(i=1,\dots,r)$. 由于 V 与 F^n 之间的坐标映射是同构, 且 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关, 所以 $x_1,\dots,x_r$ 线性无关,从而存在 $x_{r+1},\dots,x_n\in F^n$, 使 $x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n$ 成为 F^n 的基. 令 $\alpha_j=[e_1,\dots,e_n]x_j$ $(j=r+1,\dots,n)$, 由 V 与 F^n 同构知: $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$ 是 V 的基. ■

主要内容

6 线性空间的同构

7 子空间的交与和

子空间的交与和也是子空间

定理5.1.6 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间，则它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

证 首先 $0 \in V_1 \cap V_2$，所以 $V_1 \cap V_2$ 非空.

其次，若 $\alpha, \beta \in V_1$ 且 $\alpha, \beta \in V_2$，则 $\alpha + \beta \in V_1$ 且 $\alpha + \beta \in V_2$，所以，$\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$，即 $V_1 \cap V_2$ 对 V 中加法封闭.

第三，类似可证，$V_1 \cap V_2$ 对数乘封闭.

故 $V_1 \cap V_2$ 是子空间.

子空间的并还是子空间吗?

在 R^3 中, 过原点的直线表示 R^3 的一维子空间, 但在任意交于 O 的两条直线 L_1, L_2 上分别取向量 α_1 和 α_2, $\alpha_1+\alpha_2$ 不在 $L_1 \cup L_2$ 中, $L_1 \cup L_2$ 对加法不封闭, 所以, $L_1 \cup L_2$ 不是 R^3 的子空间. 但由 L_1, L_2 决定的平面是 R^3 的子空间, 且其中任一向量 $\beta=\beta_1+\beta_2, \beta_i \in L_i$.

定义5.1.6 设 $V_1,\ldots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间, 定义

$$V_1+\cdots+V_s \triangleq \{\alpha_1+\cdots+\alpha_s \mid \alpha_i \in V_i, i=1,\ldots,s\}$$

称为子空间 $V_1,\ldots,V_s$ 的**和**.

定理5.1.7 设 $V_1,\ldots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间, 则

(1) $V_1+\cdots+V_s$ 是 V 的子空间;

(2) 取每个 V_i 的基 M_i (i=1,…, s), 则 $M_1\cup\cdots\cup M_s$ 的生成空间等于 $V_1+\cdots+V_s$;

(3) $\dim(V_1+\cdots+V_s)\le\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_s)$.

证 记 $W=V_1+\cdots+V_s$, $M=M_1\cup\cdots\cup M_s$

(1) 任取 $u=u_1+\cdots+u_s\in W$, $v=v_1+\cdots+v_s\in W$, 则 $u+v=(u_1+v_1)+\cdots+(u_s+v_s)$, 因 V_i 是子空间，所以 $u_i,v_i\in V_i\Rightarrow u_i+v_i\in V_i$ $\longrightarrow$ $u+v\in W$ $\longrightarrow$ W 对加法封闭.

类似可证, W 对数乘封闭. 从而, W 是 V 的子空间.

(2) 每个 V_i 是 M_i 的线性组合, 而 W 是 $V_1+\cdots+V_s$ 的线性组合, 因而 W 是 M 的线性组合, 等于 $\operatorname{span}(M)$.

(3) $W=\operatorname{span}(M)\Rightarrow$

$$\dim(W)\le M \text{ 中的向量个数} |M|$$

$$=|M_1|+\cdots+|M_s|=\dim(M_1)+\cdots+\dim(M_s).$$ ■

维数公式

定理5.1.8 设 V_1,V_2 都是线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2).$$

证 任取 $V_1\cap V_2$ 的基 $M_0=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$， 扩充成：

V_1 的基 $M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_m\}$,

V_2 的基 $M_2=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n\}$， 则

$$M=M_1\cup M_2=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_m,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n\}$$

生成 V_1+V_2, 所含元素个数为

$$|M|=|M_1|+|M_2|-|M_0|=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2).$$

下证 M 线性无关(从而是 V_1+V_2 的基).

设 $x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_n\beta_n=0 \quad (1)$

$$\alpha \triangleq \boxed{x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m}=\boxed{y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_n\beta_n}\triangleq \beta$$

$\alpha\in V_1 \quad \beta\in V_2$ 所以 $\alpha=\beta\in(V_1\cap V_2)$

β 可以被 $V_1\cap V_2$ 的基 M_0 线性表示，即$\exists y_1,\ldots,y_r$,使

$$y_1\alpha_1+\cdots+y_r\alpha_r=\beta=y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_n\beta_n$$

$$y_1\alpha_1+\cdots+y_r\alpha_r-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_n\beta_n=0$$

由于 $M_2=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n\}$ 是 V_2 的基, 线性无关,

所以, 诸 y_i 均为零,代入(1)式,得

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m=0$$

由于 $M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ 是 V_1 的基, 线性无关， 所以诸 x_i 均为零. 至此,

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_n\beta_n=0$$

成立当且仅当诸 x_i, y_j 均为零, 所以

$$M=M_1\cup M_2=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_m,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n\}$$

线性无关. ■

推论　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，则

(1) $\dim(V_1+V_2)\le\dim(V_1)+\dim(V_2)$

(2) $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

例1 设 $V_1 \triangleq \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}, V_2 \triangleq \mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$, 其中

$\alpha_1=(1,2,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,1,0)^T,\beta_1=(1,0,1,0)^T,\beta_2=(1,3,0,1)^T$

求 $V_1+V_2, V_1\cap V_2$ 的基与维数.

解 $V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq B$$

故 $\dim(V_1+V_2)=\mathrm{rank}(A)=3$, V_1+V_2 的基为: $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$.

$\because \dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1+V_2)=2+2-3=1$

又 $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\beta_1$, $\quad \alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=(2,3,1,1)^T\in V_1\cap V_2$

$\therefore V_1\cap V_2=\mathrm{span}\{(2,3,1,1)^T\}$ ■

子空间的直和

$W = W_1 + \cdots + W_t$ 中的每个向量 α 都能写成

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t \qquad \alpha_i \in W_i (i = 1, \ldots, t)$$

的形式, 什么条件下表达式唯一?

若 $0 \neq \alpha_0 \in W_1 \cap W_2$, 则 $\alpha \in W_1 + W_2$ 的分解就不唯一.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_2 - \alpha_0)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_0) \in W_1, (\alpha_2 - \alpha_0) \in W_2$$

定义5.1.6（子空间的直和）

设 $W_1,\dots,W_t$ 都是 V 的子空间，$W = W_1+\cdots+W_t$，如果 W 中的每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1+\cdots+\alpha_t \quad \alpha_i \in W_i (i=1,\dots,t)$$

都是唯一的，就称 W 是 $W_1,\dots,W_t$ 的直和，记为

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$$

类比：子空间 $W_1,\dots,W_t$ 的和是直和 $\Leftrightarrow \alpha \in W_1+\cdots+W_t$ 分解式唯一：$\alpha = \alpha_1+\cdots+\alpha_t$.

向量组 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性无关 $\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{span}(\beta_1,\dots,\beta_t)$ 分解式唯一：$\beta = x_1\beta_1+\cdots+x_t\beta_t$.

定理5.1.8 $W_1+\cdots+W_t$ 是直和的充要条件是

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_t=0\ \ (\alpha_i\in W_i,\ i=1,\ldots,t)\Rightarrow\alpha_i=0,\ \ (i=1,\ldots,t)$$

证 必要性($\Rightarrow$)若 $u_i=0\in W_i\ (i=1,\ldots,t)$, 则 $u_1+\cdots+u_t=0$;

另一方面,如果$W_1+\cdots+W_t$ 是直和, 由直和的定义,有

$$u_1+\cdots+u_t=0\Rightarrow u_i=0\in W_i\ (i=1,\ldots,t).$$

充分性($\Leftarrow$) 设 $w\in W_1+\cdots+W_t$有两个分解:

$$w=w_1+\cdots+w_t,\ \ w=u_1+\cdots+u_t\ \ (w_i,u_i\in W_i)$$

两式相减: $0=(w_1-u_1)+\cdots+(w_t-u_t),\ w_i-u_i\in W_i$

由假设条件知: $w_i=u_i,\ (i=1,\ldots,t)$, w 的分解式唯一,

所以 $W_1+\cdots+W_t$ 是直和. ■

定理5.1.9 W_1+W_2 是直和 $\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$.

证 $\forall u\in W_1\cap W_2$，有 $u+(-u)=0$，且 $u\in W_1,(-u)\in W_2$

由于向量分解唯一，所以，$u=0$. 从而，$W_1\cap W_2=\{0\}$.

设 $W_1\cap W_2=\{0\}$. $0=u_1+u_2, u_1\in W_1, u_2\in W_2$，则

$u_1=-u_2\in W_1\cap W_2$， 从而，$u_1=u_2=0$. ■

推论 W_1+W_2 是直和 $\Leftrightarrow \dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$.

定理5.1.10 $W_1+\cdots+W_t$ 是直和的充要条件是

$$\dim(W_1+\cdots+W_t)=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_t).$$

证明略.

第五章　线性空间与欧氏空间

5.2 欧氏空间的基本概念

数学与统计学院
李继成

主要内容

1. 内积及其基本性质
2. 范数和夹角
3. 标准正交基及其基本性质
4. Gram-Schmidt正交化方法
5. 正交矩阵

1 内积及其基本性质

定义(内积和欧氏空间) 设V是一个实线性空间, 如果对于V中任意两个向量α、β,都指定了一个实数与之对应(记为$\langle\alpha,\beta\rangle$),满足：$\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$， $\forall k \in R$,

对称性 (1) $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$; (2) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle = \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$; 可加性

齐次性 (3) $\langle k\alpha,\beta\rangle = k\langle\alpha,\beta\rangle$; (4) $\langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$, 且$\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 非负性

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$为$V$中元素$\alpha$与$\beta$的内积。

称定义了内积的实线性空间V为实内积空间或欧氏空间。

例1 在线性空间R^n中,任意向量 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$, $\beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^{\mathrm{T}}$

可以验证:$\langle\alpha,\beta\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha$

满足R^n上的内积定义, R^n按此内积构成一个欧氏空间.

1 内积及其基本性质

定义(内积和欧氏空间) 设V是一个实线性空间，如果对于V中任意两个向量α、β，都指定了一个实数与之对应(记为$\langle\alpha,\beta\rangle$)，满足：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$，$\forall k\in R$，

对称性 (1) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$； (2) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$； 可加性

齐次性 (3) $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$； (4) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$，且$\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=0$ 非负性

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$为$V$中元素$\alpha$与$\beta$的内积。

称定义了内积的实线性空间V为实内积空间或欧氏空间。

例2 在实线性空间$R^{n\times n}$中，对于矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$

定义：$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$

可以验证它满足内积定义，$R^{n\times n}$对此内积构成一个欧氏空间.

1 内积及其基本性质

定义(内积和欧氏空间) 设V是一个实线性空间，如果对于V中任意两个向量α、β，都指定了一个实数与之对应(记为$\langle\alpha,\beta\rangle$)，满足：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$，$\forall k\in R$，

对称性 (1) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$；　(2) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$； 可加性

齐次性 (3) $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$；(4) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$，且$\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=0$ 非负性

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$为$V$中元素$\alpha$与$\beta$的内积。

称定义了内积的实线性空间V为实内积空间或欧氏空间。

例3 $C[a,b]$，$\forall f(x),g(x)\in C[a,b]$

定义：$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$，

可以验证它满足内积定义，$C[a,b]$对此内积构成一个欧氏空间.

1 内积及其基本性质

定义(内积和欧氏空间) 设V是一个实线性空间, 如果对于V中任意两个向量α、β,都指定了一个实数与之对应(记为$\langle\alpha,\beta\rangle$),满足：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$， $\forall k\in R$,

对称性 (1) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$;　(2) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$; 可加性

齐次性 (3) $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$;　(4) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$, 且$\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=0$ 非负性

则称$\langle\alpha,\beta\rangle$为$V$中元素$\alpha$与$\beta$的内积。

称定义了内积的实线性空间V为实内积空间或欧氏空间。

$$\langle k\alpha+l\beta,\gamma\rangle=k\langle\alpha,\gamma\rangle+l\langle\beta,\gamma\rangle$$

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\beta\right\rangle=\langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{m}k_i\langle\alpha_i,\beta\rangle$$

1 内积及其基本性质

$$\forall \alpha_i, \beta_j \in V,\quad \forall k_i, l_j \in R, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n,$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j \right\rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m, l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_n\beta_n \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_i l_j \langle \alpha_i, \beta_j \rangle \qquad \boxed{c_{ij} = \langle \alpha_i, \beta_j \rangle}$$

$$\langle k\alpha + l\beta, \gamma \rangle = k\langle \alpha, \gamma \rangle + l\langle \beta, \gamma \rangle$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \beta \right\rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{m} k_i \langle \alpha_i, \beta \rangle$$

1 内积及其基本性质

$$\forall \alpha_i,\beta_j \in V,\ \ \forall k_i,l_j \in R, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n,$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j \right\rangle = \langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m, l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_n\beta_n \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_i l_j \langle \alpha_i,\beta_j \rangle \qquad \boxed{c_{ij}=\langle \alpha_i,\beta_j \rangle}$$

$$=(k_1\ k_2\ \cdots\ k_m)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

定理5.2.1（柯西–施瓦兹不等式）

设V是一个欧氏空间，$\forall \alpha,\beta \in V$，则有

$$\left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| \le \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关．

证明 如果α,β线性无关，则$\forall t \in R$，有$t\alpha+\beta \ne 0$，由内积的非负性：

$$\langle t\alpha+\beta, t\alpha+\beta \rangle > 0 \Rightarrow \langle \alpha,\alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha,\beta \rangle t + \langle \beta,\beta \rangle > 0$$

$$\Delta = 4\langle \alpha,\beta \rangle^2 - 4\langle \alpha,\alpha \rangle\langle \beta,\beta \rangle < 0 \Rightarrow \left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| < \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

如果α,β线性相关，不妨设：$\alpha = k\beta$ (k为实常数)，

$$\left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| = \left|\langle k\beta,\beta \rangle\right| = \left|k\langle \beta,\beta \rangle\right| = \sqrt{k^2\langle \beta,\beta \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle k\beta,k\beta \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle} = \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

定理5.2.1（柯西–施瓦兹不等式）

设V是一个欧氏空间，$\forall \alpha, \beta \in V$，则有

$$\left|\langle \alpha, \beta \rangle\right| \le \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta, \beta \rangle}$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关.

- R^n：$\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2 \cdots, b_n]^T$

$$\left|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n\right| \le \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

柯西–施瓦兹不等式
（Cauchy–Schwarz）

- $C[a,b]$：$\forall f(x), g(x) \in C[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

主要内容

2 范数和夹角

定义5.2.2（向量的范数） 在欧氏空间V中, 称$\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$为$\alpha$的范数(或长度), 记为$\|\alpha\|$, $\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

例: $\forall\alpha=(1,2,2)^T\in R^3$, 则$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

柯西-施瓦兹不等式: $|\langle\alpha,\beta\rangle|\le\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}\Leftrightarrow|\langle\alpha,\beta\rangle|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

范数性质:

(1) $\|\alpha\|\ge 0$, 且$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$

(2) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|\quad(k\in R)$

(3) $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$

证(3)
$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2&=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle\\&=\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle\\&\le\|\alpha\|^2+2|\langle\alpha,\beta\rangle|+\|\beta\|^2\\&\le\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2\\&=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2\end{aligned}$$

2 范数和夹角

定义5.2.2（向量的范数） 在欧氏空间V中, 称$\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$为$\alpha$的范数(或长度), 记为$\|\alpha\|$, $\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

例: $\forall\alpha=(1,2,2)^T\in R^3$, 则$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

柯西-施瓦兹不等式: $|\langle\alpha,\beta\rangle|\le\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle} \Longleftrightarrow |\langle\alpha,\beta\rangle|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

范数性质:

(1) $\|\alpha\|\ge 0$, 且$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$

(2) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\| \quad (k\in R)$

(3) $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$

零向量：范数为零的向量.

单位向量：范数为1的向量.

非零向量单位化: $\alpha\ne 0$, 单位化 $\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$

$\alpha=(1,2,2)^T$, $\alpha^0=(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})^T$

对于几何空间中的两个非零向量α,β,其内积为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cos\varphi,\qquad \varphi=\arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|},\ (0\le\varphi\le\pi)$$

定义5.2.3（非零向量的夹角） 对于欧氏空间V中两非零向量α,β,

定义α,β的夹角$\varphi=\arccos\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$, $(0\le\varphi\le\pi)$

- 若$\alpha\ne0,\beta\ne0,\langle\alpha,\beta\rangle=0$,则$\varphi=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$, 即$\alpha\perp\beta$.
- 若$\langle\alpha,\beta\rangle=0$,则称$\alpha$与$\beta$正交(或相互垂直),记为$\alpha\perp\beta$.
- 由于$\langle0,\beta\rangle=\langle0\alpha,\beta\rangle=0\langle\alpha,\beta\rangle=0$,故零向量与任何向量正交.
- 当$\alpha\perp\beta$,则$\|\alpha+\beta\|^2=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

m个两两正交的向量：$\|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\|^2=\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2+\cdots+\|\alpha_m\|^2$

定义5.2.4（距离）对于欧氏空间V中两个向量α,β,称$\|\alpha-\beta\|$为α与β的距离,记为$d(\alpha,\beta)$,即

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$$

基本性质:

(1)对称性：$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$;

(2)非负性：$d(\alpha,\beta)\geq 0$,且$d(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$;

(3)三角不等式：$d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

证（3） $$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|=\|(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)\|$$

$$\leq\|\alpha-\gamma\|+\|\gamma-\beta\|=d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$$

主要内容

1 内积及其基本性质

2 范数和夹角

3 标准正交基及其基本性质

4 Gram-Schmidt正交化方法

5 正交矩阵

$i=(1,0,0)^T, j=(0,1,0)^T, k=(0,0,1)^T$ 是R^3线性空间的一个基，任意向量$\alpha=(a,b,c)^T$在该基下的坐标为$x=(a,b,c)^T$.

分析： 基中向量都是单位向量；

基中向量两两正交；

任意向量在此基下的坐标是“本身”。

事实： 在这种基下，向量的坐标、内积、范数、距离的计算都变得很容易。

问题： 任意一个欧式空间是否一定存在满足此性质的基？

3 标准正交基及其基本性质

定义5.2.5（正交向量组与正交单位向量组）

对于欧氏空间V中的一个不含零向量的向量组，如果其中向量两两正交，则称它为一个**正交向量组**。

如果一个正交向量组中的每一个向量都是单位向量，则称其为一个正交单位向量组(**标准正交向量组**，**正交规范向量组**）。

例：

$$\text{在}R^3\text{中}\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\text{是一个正交向量组.}$$

3 标准正交基及其基本性质

定义5.2.5（正交向量组与正交单位向量组）

对于欧氏空间V中的一个不含零向量的向量组，如果其中向量两两正交，则称它为一个**正交向量组**。

如果一个正交向量组中的每一个向量都是单位向量，则称其为一个正交单位向量组（**标准正交向量组**，**正交规范向量组**）。

定理5.2.2 正交向量组必是线性无关向量组.

证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是一正交向量组：$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0, \forall i,j\in\{1,2,\cdots,m\}, i\neq j$

设有一组数$k_1,\cdots$，k_m，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

用α_1与上式两端作内积：$\langle\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\rangle=\langle\alpha_1,0\rangle=0$

$$\Rightarrow k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle=0\Rightarrow k_1=0$$

同理有 $k_2=\cdots=k_m=0$, 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

定义5.2.6（正交基与标准正交基）

在n维欧氏空间V中，由n个向量组成的正交向量组称为V的一组正交基，由n个向量组成的正交单位向量组称为V的**标准正交基**(或**规范正交基**)。

例1 $[1,1,1]^T,[0,1,-1]^T,[-2,1,1]^T$是$R^3$的一个正交基;

$[1,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T$是$R^3$的一个标准正交基;

$[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$, $[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]^T,[-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}]^T$是$R^3$的一个标准正交基

问题:

在标准正交基下, 向量的**坐标**、**内积**、**范数**、**距离**如何计算?

定理5.2.3 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维欧氏空间V的一个标准正交基

$\alpha,\beta\in V$，且：$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$；$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$，则有：

(1) $x_i=\langle\alpha,\alpha_i\rangle,(i=1,\cdots,n)$

(2) $\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

(3) $\|\alpha\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

(4) $d(\alpha,\beta)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

例2 在欧氏空间R^3中，求$\alpha=(1,2,3)^T$在标准正交基

$$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\alpha_3=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$$的坐标.

解 由于$\langle\alpha_1,\alpha\rangle=1$，$\langle\alpha_2,\alpha\rangle=\frac{5}{\sqrt{2}}$，$\langle\alpha_3,\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}$，故$\alpha$在该基下的坐标为$(1,\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

主要内容

1 内积及其基本性质

2 范数和夹角

3 标准正交基及其基本性质

4 Gram-Schmidt正交化方法

5 正交矩阵

4 Gram-Schmidt（格拉姆-斯密特）正交化方法

定理5.2.4 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维欧氏空间V的一个基,若令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2,$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{\langle\alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_n,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2+\cdots+\frac{\langle\alpha_n,\beta_{n-1}\rangle}{\langle\beta_{n-1},\beta_{n-1}\rangle}\beta_{n-1},$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$V$的一组正交基，且与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$等价

若再令$e_i=\dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则e_1，$e_2,\cdots,e_n$就是V的一组标准正交基

例1 用 $Gram-Schmidt$ 正交化方法把向量组 $\alpha_1=[1,0,1,0]^T$, $\alpha_2=[0,1,2,2]^T$, $\alpha_3=[-1,0,0,3]^T$, 化为正交单位向量组。

解 易证该向量组线性无关.

先正交化

令: $\beta_1=\alpha_1=[1,0,1,0]^T$, $\quad \beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=[-1,1,1,2]^T$,

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=[2,-1,-\frac{1}{2},1]^T$$

再单位化

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0]^T, \qquad e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=[-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}]^T,$$

$$e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=[\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}]^T$$

主要内容

1 内积及其基本性质

2 范数和夹角

3 标准正交基及其基本性质

4 Gram-Schmidt正交化方法

5 正交矩阵

5 正交矩阵

定义5.2.7 若实方阵A满足$AA^T = A^T A = I$，则称A为正交矩阵

性质： 设A,B为同阶正交矩阵，则

(1) $\det(A) = \pm 1$,即正交矩阵的行列式为1或-1;

(2) A^T, A^{-1}及A^*均为正交矩阵;

(3) AB为正交矩阵.

定理5.2.5 实方阵A为正交矩阵的充要条件是A的列（行）向量组为标准正交向量组。

证明思路：

$$A^T A = I$$

$$A = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n] \quad \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

例1 判断下列矩阵是否为正交矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

定义5.2.8 若P为正交矩阵，则称线性变换$y=Px$称为**正交变换**（亦称:**等距变换**）

例2 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 是R^2上的正交变换(旋转变换)

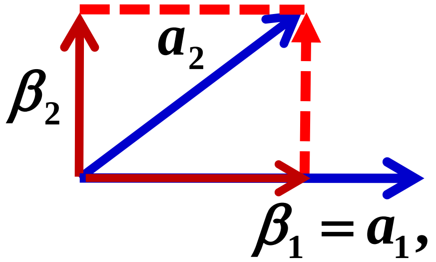
定理5.2.6 设P为n阶正交矩阵，x_1，$x_2 \in R^n$，则有：

(1) $\langle Px_1, Px_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$

(2) $\|Px\| = \|x\|$

4 Gram-Schmidt（格拉姆-斯密特）正交化方法

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是空间$V$的一个线性无关向量组，如何求一组与之等价的正交向量组$e_1,e_2,\ldots,e_r$？

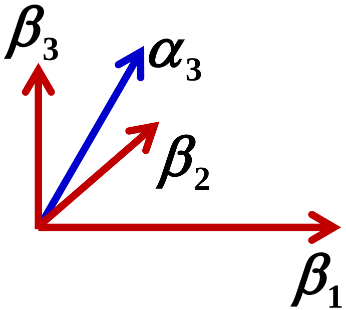


正交化

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$



……

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\alpha_r,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_r,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_r,\beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1},$$?

单位化： $e_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \ldots,\ e_r=\dfrac{1}{\|\beta_r\|}\beta_r.$

第五章　线性空间与欧氏空间

课后习题选讲

数学与统计学院

主要内容

例1-11：第5章习题

例12-15：

习题5.1，A 7，9，B 1，2

例16-27：

习题5.2，A 4，8，14，15，16，17，19， B 1，2，3，4，5

例1 设实方阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$满足$A^T=A^*, a_{11}=-1$,向量$b=(1,0,0)^T$,则线性方程组$Ax=b$的解为_.

解 由$A^T=A^*, a_{11}=-1$知$|A|^2=|A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1$,

$a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

所以线性方程组$Ax=b$的解为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$.

例2 设4×5矩阵A按列分块为$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5]$,已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关,且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4$,则齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的标准正交基为_.

解 由已知得$r(A)=3$,齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的维数是2.

由$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4$知

$\eta_1=(1,2,-1,0,0)^T,\eta_2=(2,-1,0,3,-1)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的两个正交的解向量.

$\frac{1}{\sqrt{6}}\eta_1,\frac{1}{\sqrt{15}}\eta_2$是齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的标准正交基.

例3 若$F[x]_2$中的向量组$f_1=x^2-2x+3,\ f_2=2x^2+x+a,$

$f_3=x^2+8x+7$线性相关,则常数$a=$_.

解 由于$x^2,x,1$是线性空间$F[x]_2$的一组基.

$$\text{而}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & a & 7 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}A$$

f_1,f_2,f_3线性相关，因此,$|A|=0$,即$a=8$

例4 R^4的子空间$W=\{(a+b,a-b+2c,b,c)^T \mid a,b,c\in R\}$的基为_.

解 R^4的子空间W中的任一元素α可以表示为:

$$\alpha=\begin{pmatrix} a+b \\ a-b+2c \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量$\eta_1=(1\quad 1\quad 0\quad 0)^T,\eta_2=(1\quad -1\quad 1\quad 0)^T,\eta_3=(0\quad 2\quad 0\quad 1)^T$

线性无关,就是子空间W的一组基.

例5 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的基,则从基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为_.

解

$$[\alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \alpha_3+\alpha_1]=\left[\alpha_1 \quad \frac{1}{2}\alpha_2 \quad \frac{1}{3}\alpha_3\right]\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$$

所以,过渡矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$

例6

记矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&2\\-1&3&0&2&-2\\0&1&1&3&4\\1&2&5&13&5\end{bmatrix}$的第$j$个列向量为$\alpha_j(j=1,\cdots,5)$,

(1)求向量空间$W=\{Ax|x\in F^5\}$的基与维数;(2)求α_3,α_4在该基下的坐标.

解

$$(1)W=\{Ax|x\in F^5\}=\left\{[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\middle|x_i\in F,i=1,\cdots,5\right\}$$

$$=\{x_1\alpha_1+\cdots+x_5\alpha_5|x_i\in F,i=1,\cdots,5\}$$

例6

记矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$的第$j$个列向量为$\alpha_j(j=1,\cdots,5)$,

(1)求向量空间$W=\{Ax \mid x\in F^5\}$的基与维数;

(2)求α_3,α_4在该基下的坐标.

解

(1)W就是由A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$生成的线性空间,所以,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$的极大无关组就是$W$的一组基,且$r(A)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)=\dim(W)$

容易得到:W的一组基是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$;$\dim(W)=3$

(2)$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$,坐标$(3,1,0)$;$\alpha_4=7\alpha_1+3\alpha_2$,坐标$(7,3,0)$.

例7 设$A_{m\times n}$和$B_{m\times n}$为行等价的两个矩阵,称$W_1=\{Ax \mid x\in F^n\}$和$W_2=\{Bx \mid x\in F^n\}$分别为A,B的列空间.(1)证明:$\dim(W_1)=\dim(W_2)$;

(2)$W_1=W_2$吗? 若是,给出证明;若不是,举出反例.

证明 (1)矩阵A与B行等价,则$r(A)=r(B)$.又$\dim(W_1)=r(A)$,

$\dim(W_2)=r(B)$.所以,$\dim(W_1)=\dim(W_2)$

(2)$W_1\neq W_2$.举例如下:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

A与B行等价,但$W_1\neq W_2$

例8 设矩阵$A_{m\times n}, B_{n\times m}$满足$AB=I_m$.证明矩阵A的列向量组生成$F^m$.

证明 由$A_{m\times n}B_{n\times m}=I_m$得$r(AB)=m; m=r(AB)\le r(A_{m\times n})\le m$

所以$r(A_{m\times n})=m. W=\{A_{m\times n}x \mid x\in F^n\}, \dim(W)=m$

故$W=F^m$

例9 设F^3有两个基(I):$(1,1,1)^T,(2,3,2)^T,(1,5,4)^T$;$(II)$:$(1,1,0)^T$,$(1,2,0)^T,(1,2,1)^T$.求从$(I)$到$(II)$的过渡矩阵及向量$\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$(II)$下的坐标.

解

设基(I)到基(II)的过渡矩阵为A.则$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&5\\1&2&4\end{bmatrix}A$;

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&5\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4&-10&-3\\4&7&3\\-1&-1&0\end{bmatrix}$$

例9 设F^3有两个基(I): $(1,1,1)^T,(2,3,2)^T,(1,5,4)^T$; (II): $(1,1,0)^T$, $(1,2,0)^T,(1,2,1)^T$.求从(I)到(II)的过渡矩阵及向量 $\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$(II)$下的坐标.

解

$$\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\-5\\3\end{bmatrix}$$

$\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$在基$(II)$下的坐标为$(8\quad -5\quad 3)^T$.

例10 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维欧氏空间V的标准正交基,证明:

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$也是V的标准正交基.

解

$$(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)A$$

$A^TA=I$,即A是正交矩阵.故$(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)$也是V的标准正交基.

例11 (1)设实矩阵$Q_{m\times n}$的列向量组为标准正交 向量组，证明：$Q^TQ=I_n$;(2)设矩阵$A=QR$,其中

$$Q=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-2&-4\\2&1&2\\2&-4&2\\4&2&-1\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}5&-2&1\\0&4&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

证明：线性方程组$Ax=b\Rightarrow Rx=Q^Tb$,当$b=(-1,1,1,2)^T$时，求方程组$Ax=b$的解.

证明

(1)设$Q=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}$,其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^m$的标准正交向量组,

$$Q_{n\times m}^{T}Q_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I_n$$

$$(2)Q=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix}, Q^TQ=I_3, A=QR$$

所以,线性方程组$Ax=b$即$QR=b$, 两端左乘Q^T得$Q^TQRx=Q^Tb$,

即$Rx=Q^Tb$, 所以,线性方程组$Ax=b$即$QR=b$

当$b=(-1,1,1,2)^T$时,非齐次线性方程组$Ax=b$的增广矩阵

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & -2 & 0 & -1.5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right]$$.方程组无解.

例12设R^3有两个基：$(I):\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(3,7,1)^T$；

$(II):\beta_1=(9,24,-1)^T,\beta_2=(8,22,-2)^T,\beta_3=(12,28,4)^T$.

(1)求由基(I)到基(II)的过渡矩阵A;

(2)若向量α在基(I)下的坐标为$x=(0,1,-1)^T$,求α在基(II)下的坐标y.

解 (1)$[\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]A$

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]^{-1}[\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\4&4&4\end{bmatrix}$$

$$(2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.25\end{pmatrix}$$

例13 设有R^4的两个向量组(I): $\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,1)^T$; (II): $\beta_1=(2,-1,3,3)^T,\beta_2=(0,1,-1,-1)^T$.证明: (I)和(II)是R^4的同一子空间的两个基,并求由基(II)到基(I)的过渡矩阵C.

解

$$(\beta_1\quad\beta_2\quad\alpha_1\quad\alpha_2)=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\-1&1&1&0\\3&-1&0&1\\3&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1/2&1/2\\0&1&3/2&1/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r(\alpha_1\quad\alpha_2)=r(\beta_1\quad\beta_2)=r(\beta_1\quad\beta_2\quad\alpha_1\quad\alpha_2)=2$$

所以$(\alpha_1\quad\alpha_2)$与$(\beta_1\quad\beta_2)$等价, $span(\alpha_1\quad\alpha_2)=span(\beta_1\quad\beta_2)$

例13 设有R^4的两个向量组(I): $\alpha_1=(1,1,0,0)^T, \alpha_2=(1,0,1,1)^T$; (II): $\beta_1=(2,-1,3,3)^T, \beta_2=(0,1,-1,-1)^T$.证明:$(I)$和$(II)$是$R^4$的同一子空间的两个基,并求由基$(II)$到基$(I)$的过渡矩阵$C$.

解

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{3}{2}\beta_2, \alpha_2=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2, \text{即}(\alpha_1 \quad \alpha_2)=(\beta_1 \quad \beta_2)\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

故(I)和(II)是R^4的同一子空间的两个基

基(II)到基(I)的过渡矩阵$C=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

例14 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{bmatrix}$,其中$\omega=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$,$i$为虚单位.

V是由A的全体实系数多项式组成的集合按照通常的矩阵线性运算所构成的线性空间.求V的基与维数.

解

$\omega=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right),\omega^2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right),\omega^3=1$;所以,$\omega^{3k+1}=\omega,\omega^{3k+2}=\omega^2$,

$\omega^{3k}=1$;因此,$A^{3k+1}=A,A^{3k+2}=A^2=diag\left(1,\omega,\omega^2\right),A^{3k}=I$.

故V中任一多项式都可由I,A,A^2线性表示,且知I,A,A^2线性无关.

所以:I,A,A^2是V的基.$\dim(V)=3$.

例15 设3维线性空间V有两个基(I): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; (II): β_1,β_2,β_3.

已知由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{bmatrix}$.

(1)求向量$\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$在基$(I)$下的坐标;

(2)求向量$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$在基$(II)$下的坐标;

(3)若向量γ在基(I)下的坐标为$(4,2,-3)^T$,试选择V的一个新基,使γ在这个新基下的坐标是$(1,0,0)^T$.

解 (1)$[\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]A$,

$$\alpha=[\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3][2\quad -1\quad 3]^T=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3][3\quad 4\quad 4]^T$$

$$(2)\beta=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$$
$$=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$$
$$=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11/2 & -5 & 13/2\end{bmatrix}^T$$

(3)设基(III): e_1, e_2, e_3满足要求，且设由基(I)到基(III)的过渡矩阵为$B=\left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$,则由坐标变换公式可得$B$的第1列为$\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\end{pmatrix}^T$,因$B$可逆,故可取$B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

因此得$e_1=4\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3, e_2=\alpha_2, e_3=\alpha_3$.

例16 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是欧氏空间$V$中的一组向量,令行列式

$$D=\begin{vmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_m\rangle \\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle\alpha_m,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_m,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_m,\alpha_m\rangle \end{vmatrix},$$

证明:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow D\neq 0$.

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$只有零解.

$D\neq 0\Leftrightarrow Dx=0$只有零解.

只要证明(I): $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$与$(II)$: $Dx=0$同解即可.

(I)两端分别与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$做内积,知$(I)$的解是$(II)$的解.

$$\text{若}\sum_{j=1}^{m}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle x_j=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{m}\langle\alpha_i,x_j\alpha_j\rangle=0\Rightarrow\left\langle\alpha_i,\sum_{j=1}^{m}x_j\alpha_j\right\rangle=0$$

$$\Rightarrow\left\langle x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{m}x_j\alpha_j\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{m}x_j\alpha_j\right\rangle=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i=0$$

知(II)的解是(I)的解.即(I)与(II)同解.证毕

例17 令线性空间$R[x]_2$的内积为$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$,应用$Gram-Schmidt$正交化方法，由$R[x]_2$的基$1,x,x^2$求$R[x]_2$的标准正交基.

解 设$\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$.

先正交化：$\beta_1=\alpha_1=1,\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=x,$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=x^2-\frac{4}{3},$$

再单位化：$\gamma_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\gamma_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x,\gamma_3=\dfrac{\sqrt{10}}{4}(x^2-1).$

例18 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧氏空间$V$的一个标准正交基,$\alpha$是$V$中任一非零向量,$\varphi_i$是$\alpha$与$\alpha_i$的夹角.

证明:$\cos^2\varphi_1+\cdots+\cos^2\varphi_n=1$

证明 设$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$.

$$\cos\varphi_i=\frac{\langle\alpha,\alpha_i\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\alpha_i\|};\cos^2\varphi_i=\frac{\langle\alpha,\alpha_i\rangle^2}{\|\alpha\|^2\cdot\|\alpha_i\|^2};i=1,2,\cdots,n.$$

$$\|\alpha\|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,\langle\alpha,\alpha_i\rangle^2=x_i^2;\|\alpha_i\|^2=1;i=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\varphi_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle\alpha,\alpha_i\rangle^2}{\|\alpha\|^2\cdot\|\alpha_i\|^2}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=1.$$

例19 设A,B为n阶正交矩阵,证明:(1)$[\det(A)]^2=1$;

(2)A^T, A^{-1}, A^*和AB都是正交矩阵;

(3)记A的(i,j)元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij},则$A_{ij}=\det(A)\cdot a_{ij}$.

证明 (1)A,B为正交矩阵,即$A^TA=I, B^TB=I$,由$A^TA=I \Rightarrow |A^T|\cdot|A|=|I|=0$

$$\Rightarrow |A|^2=1$$

(2)由$A^TA=I \Rightarrow (A^T)^T A^T=I \Rightarrow A^T$为正交矩阵.

由$A^TA=I \Rightarrow (A^T)^{-1}A^{-1}=I \Rightarrow (A^{-1})^T A^{-1}=I \Rightarrow A^{-1}$为正交矩阵.

$$由(A^{-1})^T A^{-1}=I \Rightarrow \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)^T \frac{1}{|A|}A^*=I \Rightarrow \frac{1}{|A|^2}(A^*)^T A^*=I$$

$$\Rightarrow (A^*)^T A^*=I \Rightarrow A^*为正交矩阵.$$

例19 设A,B为n阶正交矩阵,证明:(1)$[\det(A)]^2=1$;

(2)A^T,A^{-1},A^*和AB都是正交矩阵;

(3)记A的(i,j)元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij},则$A_{ij}=\det(A)\cdot a_{ij}$.

证明 $(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=I\Rightarrow AB$为正交矩阵.

$$(3)A^{-1}=A^T\Rightarrow\frac{1}{|A|}A^*=A^T\Rightarrow A^*=|A|A^T.\text{即}A_{ij}=\det(A)\cdot a_{ij}.$$

例20 设α为R^n中的单位列向量,I为n阶单位矩阵,

证明:矩阵$A=I-2\alpha\alpha^T$为正交矩阵.

证明 因为$\alpha^T\alpha=1, A=I-2\alpha\alpha^T$

$$A^TA=\left(I-2\alpha\alpha^T\right)^T\left(I-2\alpha\alpha^T\right)=\left(I-2\alpha\alpha^T\right)\left(I-2\alpha\alpha^T\right)$$

$$=I-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=I-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=I.$$ 证毕

例21 设分块矩阵$P=\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$是正交矩阵，其中$A,C$分别为$m$，$n$阶方阵，证明$A,C$是正交矩阵且$B=O$.

证明 $P=\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$，$P$为正交矩阵.

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix}=I=P^TP=\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^T & O \\ B^T & C^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A^TA & A^TB \\ B^TA & B^TB+C^TC \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} A^TA=I_m,\text{说明}A\text{为正交矩阵.} \\ A^TB=O,B^TA=O,\text{由}A\text{可逆知},B=O. \\ B^TB+C^TC=O,\text{得}C^TC=I,C\text{为正交矩阵.} \end{cases}$$

例22 设A是秩为$n-1$的n阶实方阵,α_i为A的第i个行向量$(i=1,\cdots,n)$.求一个非零向量$x\in R^n$,使x与$\alpha_1^T,\cdots,\alpha_n^T$都正交.

证明 由已知知:$|A|=0, A^*\neq O$.故A^*至少有一列向量$\xi\neq O$.

由$AA^*=|A|I=O$,因此知$\alpha_i^T\xi=0(i=1,\cdots,n)$.

故向量$\xi\in R^n$为所求向量.

例23 设A是反对称矩阵且$I+A$可逆.证明$(I-A)(I+A)^{-1}$是正交矩阵.

证明 由已知知：$A=-A^T$；且$(I-A)(I+A)=(I+A)(I-A)$.

$$\left[(I-A)(I+A)^{-1}\right]^T\left[(I-A)(I+A)^{-1}\right]$$

$$=\left[(I+A)^{-1}\right]^T(I-A)^T(I-A)(I+A)^{-1}$$

$$=\left[(I+A)^T\right]^{-1}(I-A)^T(I-A)(I+A)^{-1}$$

$$=\left(I+A^T\right)^{-1}(I+A)(I-A)(I+A)^{-1}$$

$$=(I-A)^{-1}(I-A)(I+A)(I+A)^{-1}$$

$$=I$$ 证毕.

例24 设$e_1,e_2,\cdots,e_5$是欧氏空间V的一个标准正交基.

$V_1=span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,其中$\alpha_1=e_1+e_5,\alpha_2=e_1-e_2+e_4,$

$\alpha_3=2e_1+e_2+e_3$.利用$Gram-Schmidt$正交化方法求V_1

的一个标准正交基.

解 先正交化: $\beta_1=\alpha_1=e_1+e_5,$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\frac{1}{2}e_1-e_2+e_4-\frac{1}{2}e_5,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=e_1+e_2+e_3-e_5,$$

再单位化:

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_5),\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(e_1-2e_2+2e_4-e_5),\ \gamma_3=\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_5).$$

例25 设$e_1,e_2,\cdots,e_k$是n维欧氏空间V中的标准正交向量组.

证明：对V中任何向量α成立不等式$\sum_{i=1}^{k}\langle\alpha,e_i\rangle^2\le\|\alpha\|^2$,

并且等号成立当且仅当$k=n$.

证明 因为$e_1,\cdots,e_k$是n维欧氏空间V中的标准正交向量组,利用扩充定理将$e_1,\cdots,e_k$扩充为V的一个标准正交基$e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},\cdots,e_n$.

因此,α可表示成：$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ke_k+x_{k+1}e_{k+1}+\cdots+x_ne_n$

$\langle\alpha,e_i\rangle^2=x_i^2,i=1,\cdots,n.\|\alpha\|^2=\langle\alpha,\alpha\rangle=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$

$\sum_{i=1}^{k}\langle\alpha,e_i\rangle^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2\le\|\alpha\|^2$.等号成立当且仅当$k=n$.

例26证明：欧氏空间V的标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反过来，如果V的两个基中有一个是标准正交基，而且过渡矩阵是正交矩阵，则另一个基也是标准正交基.

证明 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是欧氏空间$V$的两个标准正交基.

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

则$\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}A$

即$\beta_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n, i=1,2,\cdots,n.$

由定理5.2.3(2)知：$\langle \beta_i,\beta_j \rangle = a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+\cdots+a_{in}a_{nj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

故$A^TA=I$.即A为正交矩阵.

反过来,若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$的标准正交基;$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$为$V$的一个基.

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$

即$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]A$,$A$是正交矩阵.

则$\beta_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n,i=1,2,\cdots,n.$

由定理5.2.3(2)知：$\langle \beta_i, \beta_j \rangle = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

故：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$为$V$的标准正交基.

由于正交矩阵的逆矩阵也为正交矩阵.

所以,若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$为$V$的标准正交基;

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的一个基.

由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵为$A$,且$A$为正交矩阵.

同样可以证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$V$的标准正交基. 证毕.

例27 在线性空间$R^{2\times 2}$中,对于矩阵$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$.问

$\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4$是否满足内积公理?

解 否.不满足内积公理第四条.

例如:$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \langle A, A\rangle = -2 < 0.$

例28

设$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,问与A相乘可交换的3阶实方阵全体

$V=\{X\mid XA=AX\}$是否是$R^{3\times3}$的子空间.若是,求出它的维数和基.

解 任取$X,Y\in V,k\in R$,由$(X+Y)A=A(X+Y),(kX)A=A(kX)$知$V$是$R^{3\times3}$的子空间.

令$B=A-I_3=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$,则$XA=AX\Leftrightarrow XB=BX$.设$X=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$

则由$XB=BX$知有如下式子:

$$\begin{pmatrix} 2a_1+a_2-2a_3 & 0 & 0 \\ 2b_1+b_2-2b_3 & 0 & 0 \\ 2c_1+c_2-2c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ -2a_1 & -2a_2 & -2a_3 \end{pmatrix}$$

即$a_2=a_3=0, 2b_1+b_2-2b_3=a_1, 2c_1+c_2-2c_3=-2a_1$,于是必有:

$$X=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 2(b_3-b_1)+a_1 & b_3 \\ c_1 & 2(c_3-c_1)-2a_1 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+c_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

于是$dim V = 5$,基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$