XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第七章　二次曲面与二次型

7.1 曲面与空间曲线

主要内容

1 曲面与空间曲线的方程

2 柱面、锥面、旋转面

3 五种典型的二次曲面

4 曲线在坐标面上的投影

5 空间区域的简图

1 曲面与空间曲线的方程

曲面的实例： 水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成一个动点或者动曲线按一定的条件或者规律运动而产生的几何轨迹.

定义（曲面的方程）

如果曲面S与三元方程 $f(x,y,z)=0$ 有下述关系

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足该方程；

(2)满足方程的任一点都在曲面 S 上.

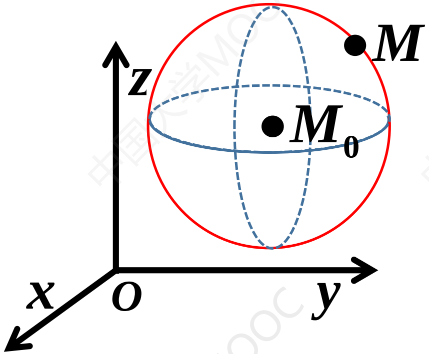
则称方程 $f(x,y,z)=0$ 为曲面S的方程，曲面 S 为该方程的几何图形

例1 建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面的方程

解 设$M(x,y,z)$是球面上的任一点 根据题意有 $|MM_0|=R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

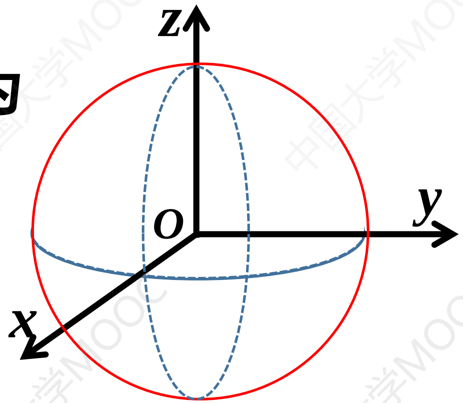
球面方程：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



特别地：

球心在原点时方程为

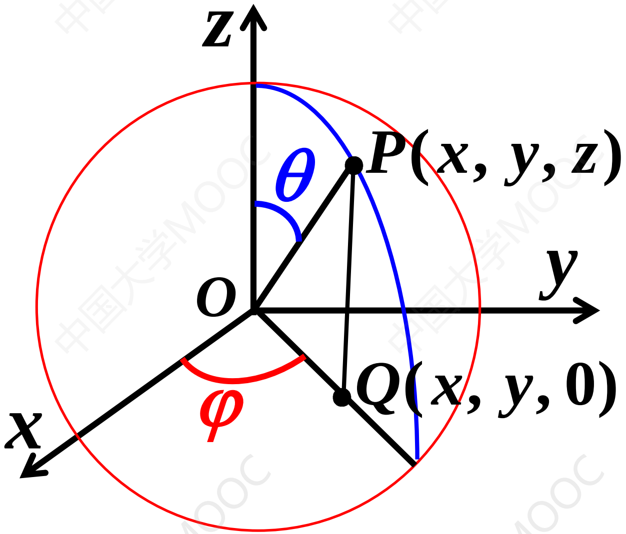
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



建立球心在原点、半径为R的球面的参数方程

从正z轴转到$\overrightarrow{OP}$的角度记为$\theta\ (0\le\theta\le\pi)$, 从正$x$轴转到$\overrightarrow{OQ}$的角度记为$\varphi\ (0\le\varphi\ge 2\pi)$, 则球面参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}.$$



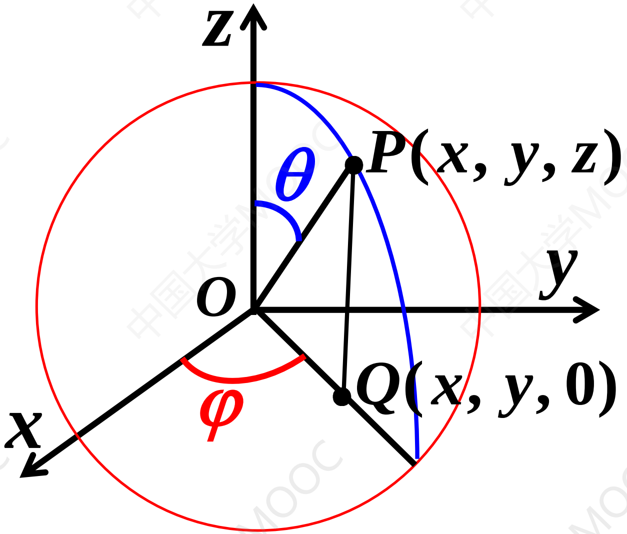
球心不在原点而在(x_0, y_0, z_0)时

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}.$$

建立球心在原点、半径为R的球面的参数方程

从正z轴转到$\overrightarrow{OP}$的角度记为$\theta\,(0\le\theta\le\pi)$, 从正$x$轴转到$\overrightarrow{OQ}$的角度记为$\varphi\,(0\le\varphi\ge 2\pi)$, 则球面参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}.$$



一般地, 曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v)\in D. \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

例2 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的?

解 根据题意有 $z\geq -1$

用平面$z=c$去截图形得圆

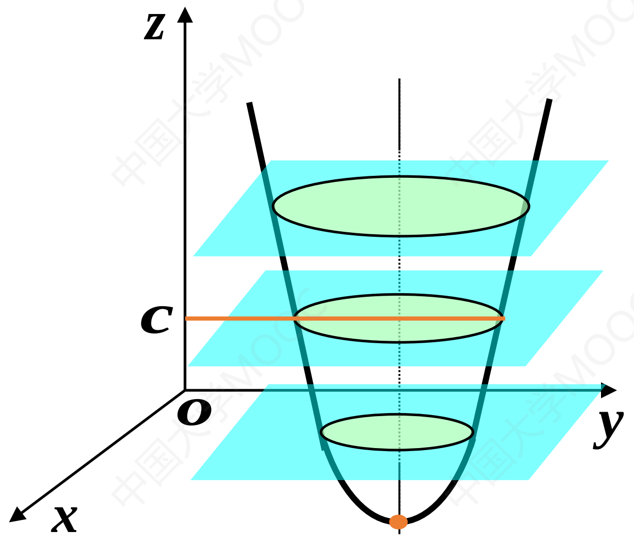
$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c\geq -1)$$

当平面$z=c$上下移动时，得到

圆心在$(1,2,c)$半径为$\sqrt{1+c}$的一系列圆.

半径随c的增大而增大.

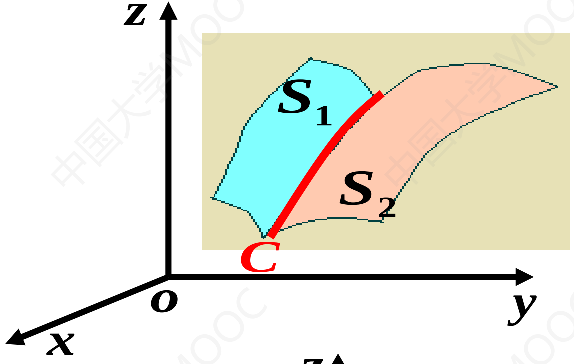
图形上不封顶，下有底.



定义（曲线的方程）空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

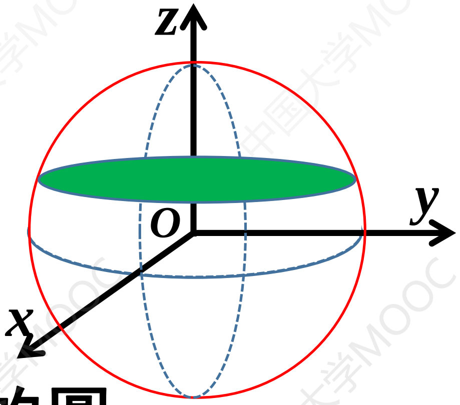
空间曲线的**一般方程**或**直角坐标方程**可表示为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



曲线上的点坐标同时满足两个方程,
满足方程的点都在曲线上.

例1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

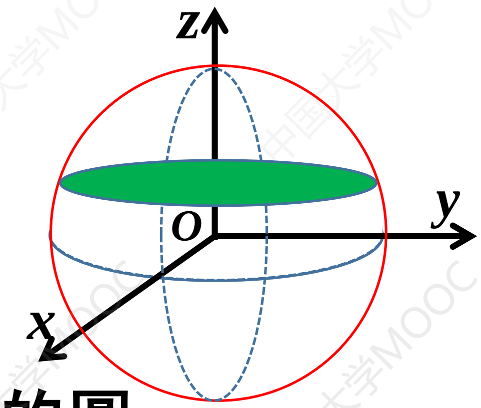


解 方程组等价于 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$

表示平面 $z=1$ 上以(0,0,1）为中心，半径为2的圆。

该曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \ 0 \le t < 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$

例1 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases}$ 表示怎样的曲线



解 方程组等价于 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

表示平面 $z = 1$ 上以(0,0,1）为中心，半径为2的圆。

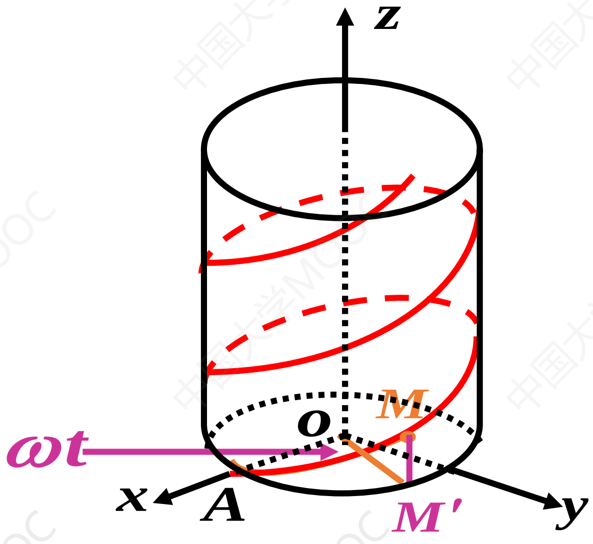
该曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \ 0 \le t < 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$

空间曲线的参数方程： $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$

是实数域R的某个区间I到R^3的一个映射.

例2 如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω, v是常数)，试求动点M形成轨线的参数方程

解



取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

M在xoy面上的投影$M'(x, y, 0)$.则

$$x = a\cos\omega t$$

$$y = a\sin\omega t$$

$$z = vt$$

螺旋线的参数方程

若令：$\theta = \omega t, b = \dfrac{v}{\omega}$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

主要内容

1 曲面与空间曲线的方程

2 柱面、锥面、旋转面

3 五种典型的二次曲面

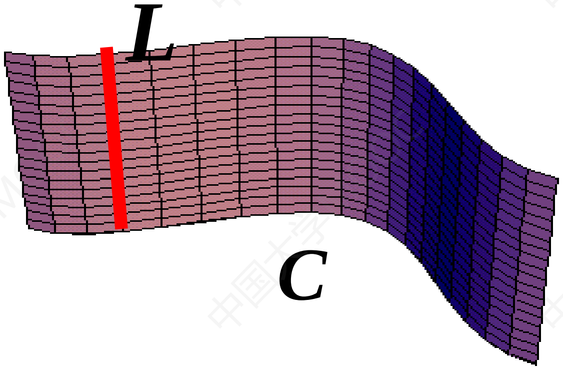
4 曲线在坐标面上的投影

5 空间区域的简图

2 柱面、锥面、旋转面

定义(柱面) 平行于定直线并沿定曲线 C移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线C叫柱面的准线,
动直线L 叫柱面的母线.



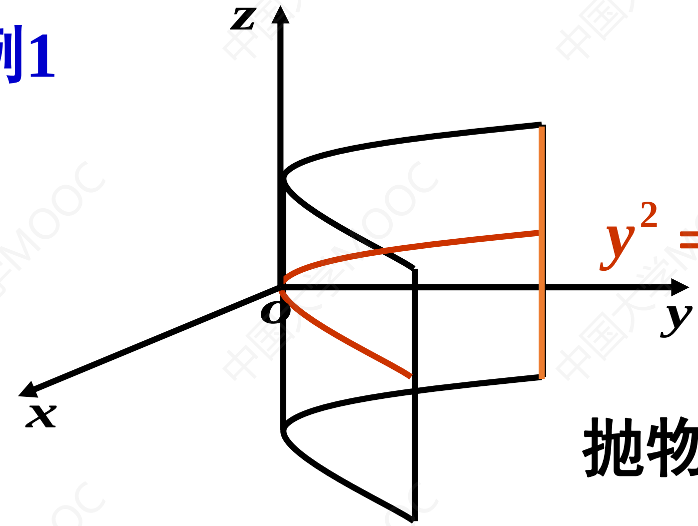
设柱面S的母线平行于z轴，准线为Oxy面的曲线

$$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

则柱面S的方程为 $f(x,y)=0$

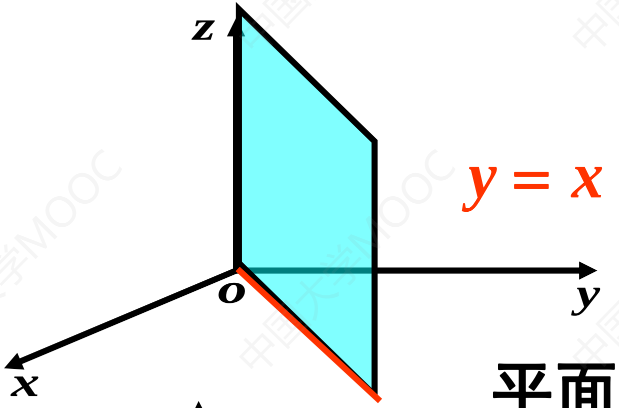
(1)曲面S上任一点的坐标都满足方程;
(2)满足方程的任一点都在曲面S上.

例1



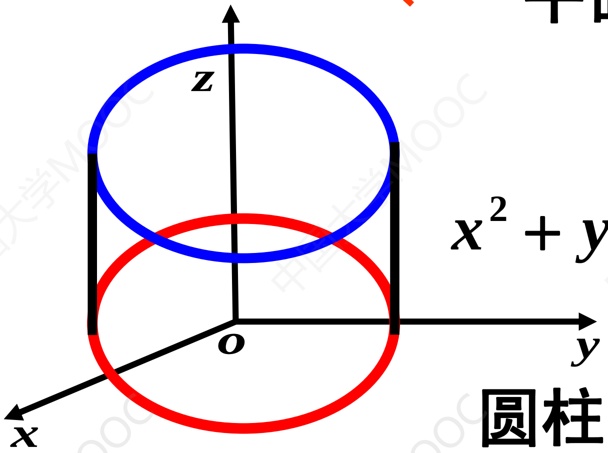
$y^2 = 2x$

抛物柱面



$y = x$

平面



$x^2 + y^2 = a^2$

圆柱面

母线平行于z轴的柱面的方程：

$$f(x, y) = 0$$

同理 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于x轴的柱面

其准线方程为 $\begin{cases} g(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$h(z,x)=0$ 表示母线平行于y轴的柱面

其准线方程为 $\begin{cases} h(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例2 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 母线 // z 轴的双曲柱面

$x^2=2pz$ 母线 // y 轴的抛物柱面

例3 建立母线平行于$C: x=y=z$,且准线为

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ 的柱面方程.

解 设$M(x,y,z)$为柱面上任一点 则由母线的方向向量$\vec{a}=(1,1,1)$,可知过点M的母线的参数方程为

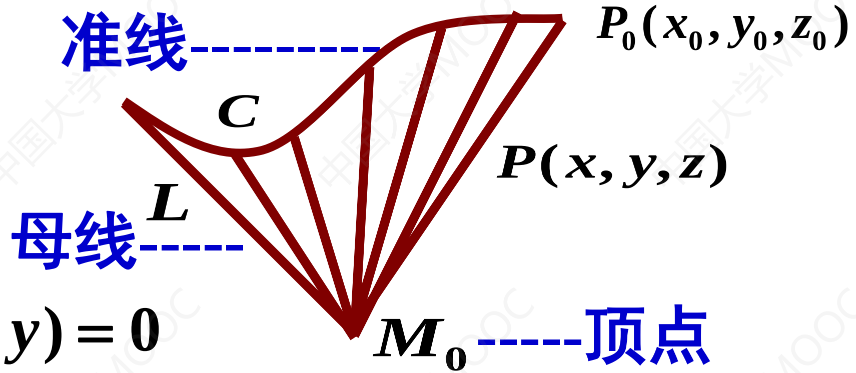
$$X=x+t, Y=y+t, Z=z+t$$

这条母线必与 Γ相交， 故它们的交点的坐标(X,Y,Z)必满足Γ的方程，即有

$$\begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2=a^2 \\ (x+t)+(y+t)+(z+t)=0 \end{cases}$$

消去t得 $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=3a^2$ 即为所求

定义(锥面) 设动直线L沿定曲线C移动，移动时L始终通过定点M_0，由动直线L移动所形成的曲面称为锥面。



例1 求顶点为原点准线为$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=z_0 \end{cases}$的锥面方程.

设P是锥面上的点，母线与准线交于P_0，母线方程：$\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}$

$$\Rightarrow x_0=\frac{z_0x}{z}, y_0=\frac{z_0y}{z} \Rightarrow f\left(\frac{z_0x}{z},\frac{z_0y}{z}\right)=0$$ --------锥面方程

例2 求顶点为原点准线为椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$ 的锥面方程.

解

$$f\left(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{z}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{z}\right)^2=1$$

例1 求顶点为原点准线为 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0\\ z=z_0\end{cases}$

的锥面方程.

设P是锥面上的点，母线与准线交于P_0, 母线方程： $\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z}{z_0}$

$$\Rightarrow x_0=\frac{z_0x}{z},y_0=\frac{z_0y}{z}\quad\Rightarrow f\left(\frac{z_0x}{z},\frac{z_0y}{z}\right)=0$$ --------锥面方程

例2 求顶点为原点准线为椭圆 $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$ 的锥面方程.

解

$$f\left(\frac{cx}{z},\frac{cy}{z}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{z}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{z}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$ --------椭圆锥面

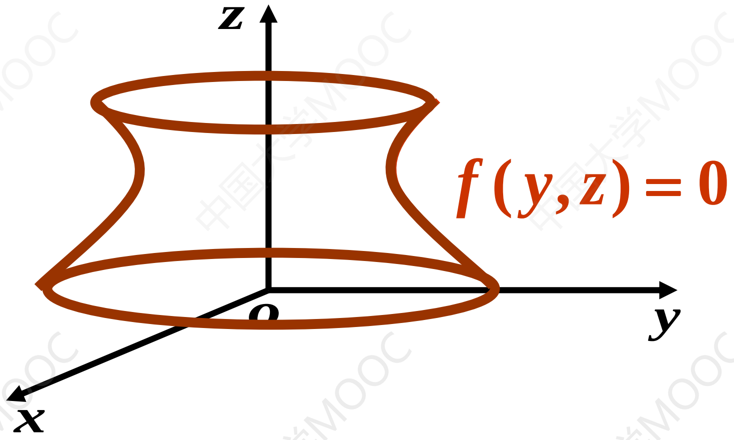
当 $a=b$ 时，

$x^2+y^2=k^2z^2$，其中 $k=\dfrac{a}{c}$ --------圆锥面

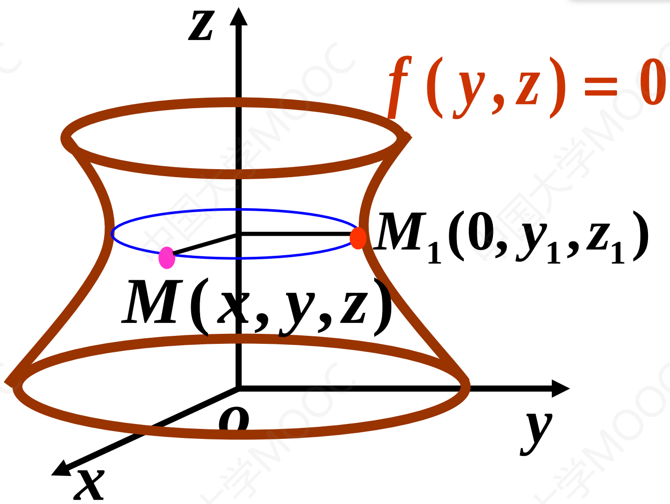
定义（旋转面）

一条平面曲线绕其所在平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转面**.

这条定直线叫**旋转面**的轴.



例1 设曲线$L:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，求该曲线绕$z$轴一周生成旋转面$S$的方程.



解 设 $M(x,y,z)\in S$，则

(1) $z=z_1$，(2)点M到z轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

$z_1=z, y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$应满足方程$f(y_1,z_1)=0$，即

$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$，------所求旋转面方程

同理：

该曲线绕y轴旋转一周生成旋转面的方程为 $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$

曲线 $\begin{cases} g(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，

绕x轴一周生成旋转面方程 $g\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕y轴一周生成旋转面方程 $g\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$

曲线 $\begin{cases} h(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，

绕x轴一周生成旋转面方程 $h\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕z轴一周生成旋转面方程 $h\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

主要内容

1 曲面与空间曲线的方程

2 柱面、锥面、旋转面

3 五种典型的二次曲面

4 曲线在坐标面上的投影

5 空间区域的简图

3 五种典型的二次曲面

(1)椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0)$

$|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$，对称于各坐标轴与原点.

与各坐标面的交线:

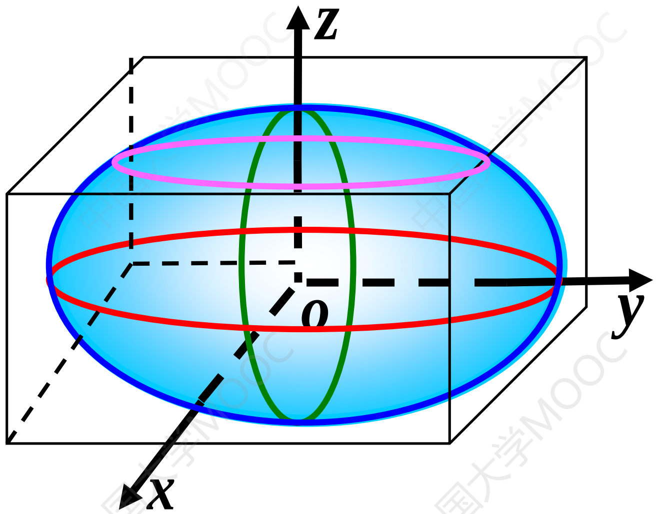
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}.$$

中心、轴、主平面、顶点

***a*>*b*>*c*:半长轴、半中轴、半短轴**

***a*,*b*,*c*有两个相等：旋转椭球面**

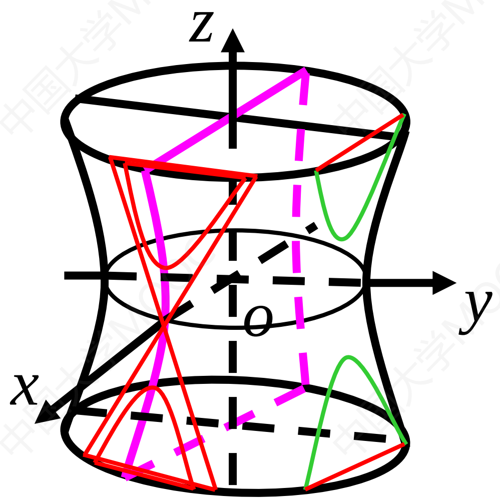
***a*,*b*,*c*三个相等：球面**



(2)单叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0, b>0, c>0)$

与平面$z=z_1$的交线是椭圆:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^{\ 2}}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$



与平面$y=y_1$的交线是双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

(3)双叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\ (a>0, b>0, c>0)$

对称于各坐标轴与原点, 且 $|z|\geq c$.

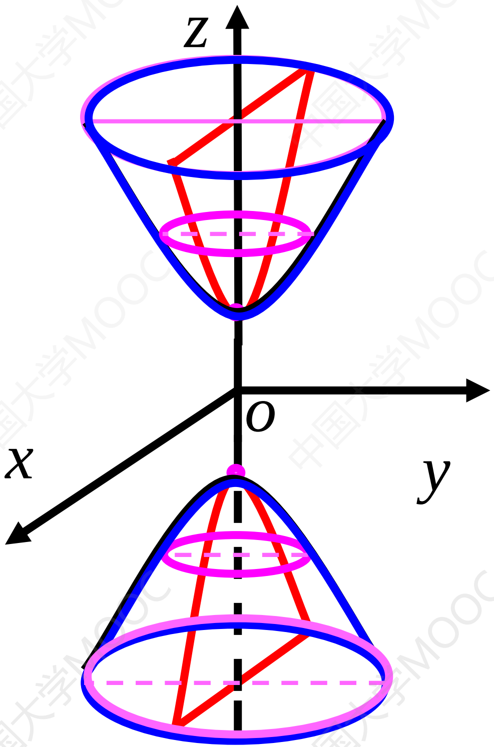
与 $z=h$ 的交线是椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}$.

与 yoz, xoz 面的交线是双曲线,

且有共同的实轴 z.

旋转双叶双曲面: $a=b$.

有心二次曲面: 唯一的对称中心.



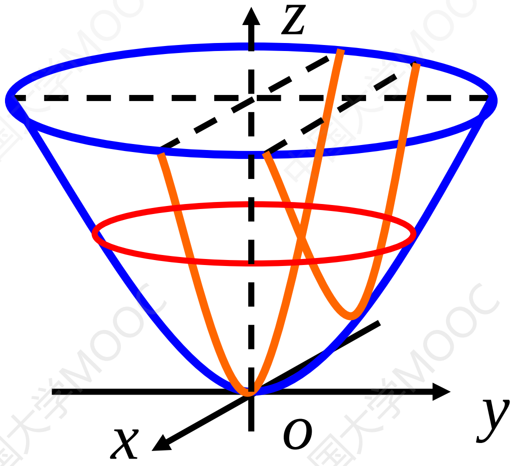
(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$，（$p>0$，$q>0$）

曲面在 xoy 平面上方，过坐标原点 $O(0,0,0)$ ------顶点.

与平面 $z=z_1(z_1>0)$ 的交线为椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1\\ z=z_1\end{cases}$

与坐标面 $y=0$ 的交线为抛物线 $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$

与坐标面 $x=0$ 的交线为抛物线 $\begin{cases}y^2=2qz\\ x=0\end{cases}$

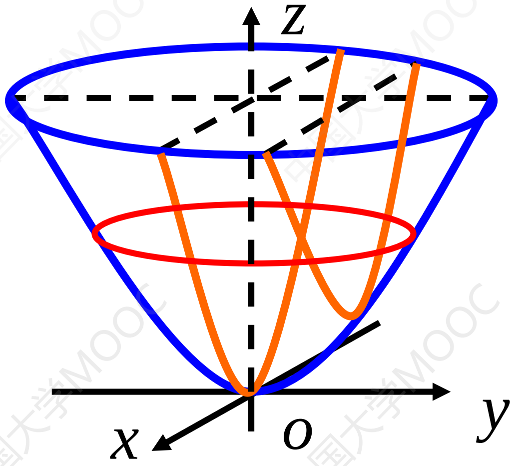


(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$, $(p>0,\ q>0)$

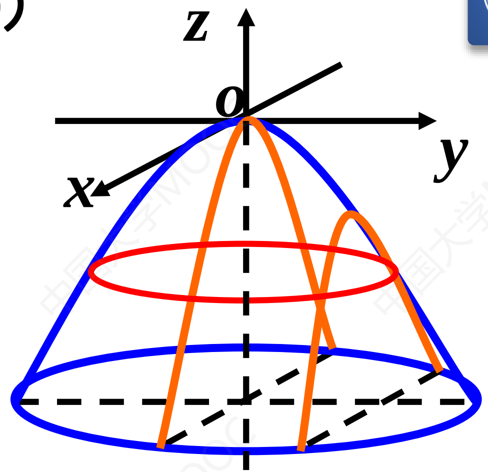
说明:

(1)当$p<0,\quad q<0$时,

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$,



(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$，$(p>0,\ q>0)$



说明:

(1)当$p<0,\quad q<0$时，

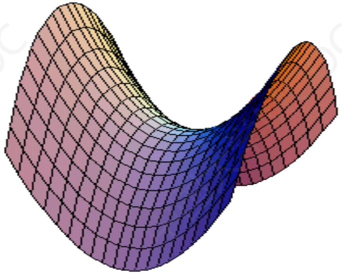
椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$，

(2)当$p=q$时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z\ \ (p>0)$$ -----旋转抛物面

由xoz面上的抛物线$x^2=2pz$绕z轴旋转而成.

(5) 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,q>0)$

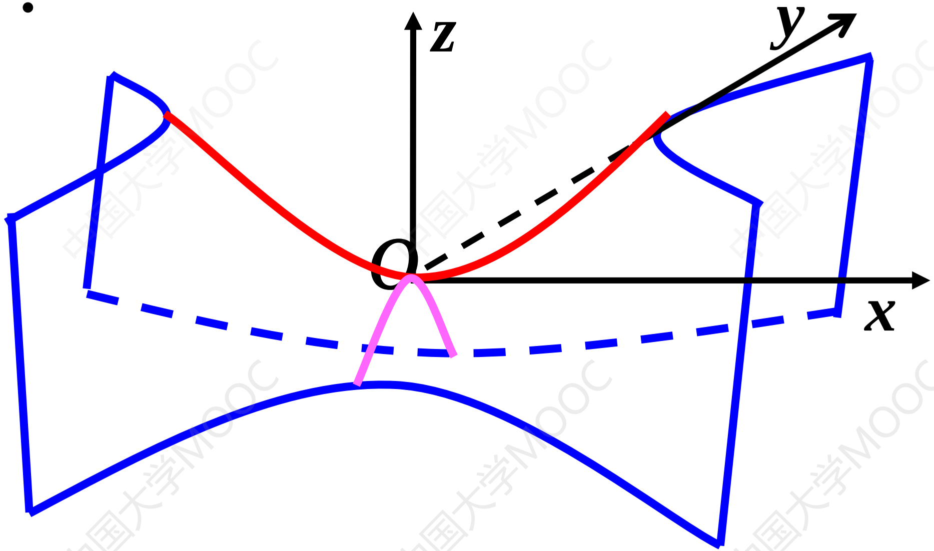


对称于Ozx和Oyz，关于z轴对称，但没有对称中心.

与$z=h$的交线 $\begin{cases}\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h \\ z=h\end{cases}$.

与Oxz的交线 $\begin{cases}x^2=2ph \\ y=0\end{cases}$.

与Oyz的交线 $\begin{cases}y^2=-2qh \\ y=0\end{cases}$.



无心二次曲面

主要内容

1 曲面与空间曲线的方程

2 柱面、锥面、旋转面

3 五种典型的二次曲面

4 曲线在坐标面上的投影

5 空间区域的简图

4 曲线在坐标面上的投影

定义（投影、投影柱面）

设Γ是一条曲线, Π是一个平面, 过Γ上每点做Π的垂线,

连接这些垂足形成的曲线称为Γ在Π上的**投影**,

这些垂线构成一个柱面, 称为Γ到Π的**投影柱面**.

显然, Γ到Π上的投影就是投影柱面与Π的交线.

问题：设曲线Γ方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，如何求$\Gamma$在$Oxy$的投影.

消去变量 z 后得投影柱面 $h(x,y)=0.$

Γ在Oxy的投影方程为$\begin{cases}h(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$

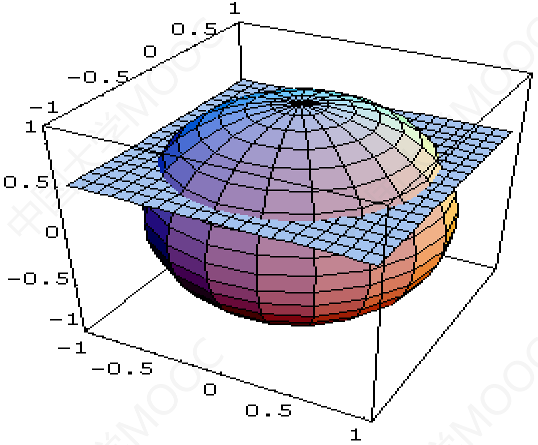
若曲线方程中有一个不含z，它就是所求的投影柱面.

类似地，可求空间曲线在其他坐标面上的投影

Oyz 面上的**投影** $\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}$

Oxz 面上的**投影** $\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}$

例1 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标平面上投影曲线的方程。



解 (1) 消去变量z后得: $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$,

在xoy面上的投影为: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$

(2) 因为曲线在平面$z=\dfrac{1}{2}$上,

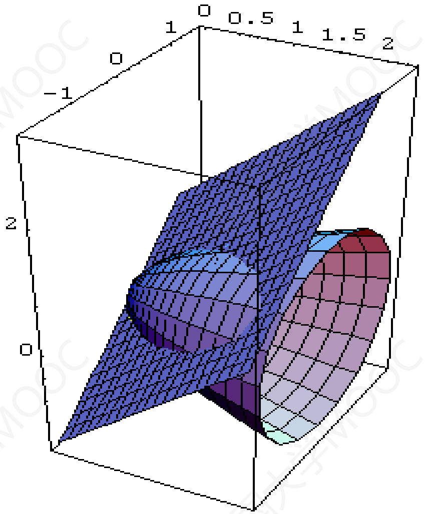
所以在xoz面上的投影为

线段: $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases}$ $\quad |x|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(3)同理，在yoz面上的投影为

线段: $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases}$ $\quad |y|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

例2 求抛物面$y^2+z^2=x$与平面$x+2y-z=0$的交线在各坐标平面上投影曲线的方程。



解 交线方程为$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

（1）消去z得投影曲线：$\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$,

（2）消去y得投影曲线：$\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$,

（3）消去x得投影曲线：$\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

主要内容

1 曲面与空间曲线的方程

2 柱面、锥面、旋转面

3 五种典型的二次曲面

4 曲线在坐标面上的投影

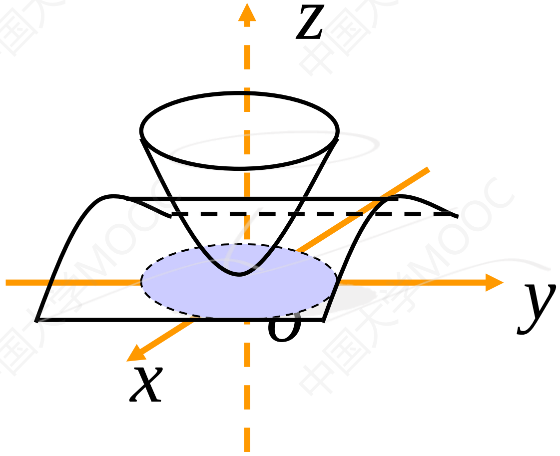
5 空间区域的简图

5 空间区域的简图

例1 空间区域Ω是由曲面$z=3x^2+y^2$与$z=1-x^2$围成，画出该区域的简图。

解

(1) 曲面$z=3x^2+y^2$表示顶点在原点开口朝上的椭圆抛物面



(2) 曲面$z=1-x^2$表示以抛物线

$$\begin{cases} z=1-x^2 \\ y=0 \end{cases}$$

为准线，母线平行于y轴抛物柱面。

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第七章　二次曲面与二次型

7.2 实二次型

数学与统计学院
李继成

主 要 内 容

1 二次型及其矩阵表示

2 二次型的标准形

3 合同变换与惯性定理

4 正定二次型

1 二次型及其矩阵表示

定义7.2.1 称含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+$$
$$a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

为二次型．若a_{ij}是复数（实数）时，f称为复（实）二次型．

令$a_{ji}=a_{ij}$，则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{n1}x_nx_1+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x_1(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$

令 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，于是

$$f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots+a_{n1}x_nx_1+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x_1(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$
$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x^TAx,$$

其中$A=(a_{ij})$为实对称矩阵.

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx \qquad A=(a_{ij})\text{实对称矩阵}$$

二次型f $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 实对称矩阵A

实对称矩阵A称做二次型 f 的矩阵，A的秩称做 f 的秩.

f 称做实对称矩阵A的二次型.

例1 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+7x_3^2+6x_1x_2-2x_2x_3 \qquad A=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&0&-1\\0&-1&7\end{pmatrix}$

例2 $f=x^TBx, B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&0\\1&4&2\end{pmatrix}$, f 是二次型,

但B不是 f 的矩阵. f 对应的矩阵 $A=\dfrac{1}{2}(B+B^T)$.

主要内容

1 二次型及其矩阵表示

2 二次型的标准形

3 合同变换与惯性定理

4 正定二次型

2 二次型的标准形

二次型的标准形: 只含平方项的二次型,

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 = y^T D\, y, \quad D = diag(k_1, \cdots, k_n).$$

问题: 对$f = x^T Ax$, 寻找可逆线性变换$x = Qy$, 使得

$$f = x^T Ax \xlongequal{x = Qy} y^T (Q^T AQ) y \text{为标准形}$$

定理7.2.1 对 $f = x^T Ax$, 存在正交变换 $x = Qy$ 化 f 为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 f 的矩阵$A = (a_{ij})$的全部特征值.

用正交变换化二次型为标准形

步骤：

1. 求二次型对应矩阵A的全部特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

2. 求特征值对应的n个线性无关的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$;

3. 将$\xi_1,\cdots,\xi_n$标准正交化得$e_1,\cdots,e_n$,记$Q=\left(e_1,\cdots,e_n\right)$;

4. 取正交变换 $x=Qy$, 则 f 的标准形为 $f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

例3 求正交变换 $x=Qy$，化 $f=3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形.

解 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&2&3\end{pmatrix}$,

前面例子中已有计算， 存在正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\text{使 } Q^TAQ=D=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

Q不唯一

正交变换 $x=Qy$ 化二次型 f 为标准形 $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

例4 已知 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$经正交变换 $x=Qy$化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求a及所用的正交变换,并说明二次型f的秩.

解 二次型f及标准形的矩阵分别为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

存在正交阵Q, $Q^TAQ=D$. A的特征值为1,2,5.

由$|A|=10$解得$a=2$. A的特征值1,2,5对应的单位特征向量为

$$e_1=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T, e_2=(1,0,0)^T, e_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

令$Q=(e_1,e_2,e_3)$,则所求正交变换为$x=Qy$.

二次型f的秩就是对应矩阵A的秩,也就是D的秩,等于3.

用配方法化二次型为标准形

例5 化 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并求所用的可逆变换矩阵.

解 先把含 x_1 的项配方：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3)^2-x_2^2-3x_3^2-2x_2x_3$$

再把含 x_2 的项配方：

$$=(x_1+2x_3)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2$$

作可逆变换

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-2y_3 \\ x_2=y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}, \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y=Cy.$$

标准形：$f=y_1^2-y_2^2-2y_3^2$.

例6 化二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形，并求所用的变换矩阵.

解 在 f 中不含平方项，而含有 x_1x_2 乘积项，可以令

$$x_1=y_1+y_2,\ x_2=y_1-y_2,\ x_3=y_3,\qquad x=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}y=Py$$

得：$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$

再配方：$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$

令 $\begin{cases}z_1=y_1-y_3,\\z_2=y_2-2y_3,\\z_3=y_3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=z_1+z_3,\\y_2=z_2-2z_3,\\y_3=z_3,\end{cases}\qquad y=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}z=Qz$

f 的标准形：$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$ 可逆变换：$x=PQz$

主要内容

3 合同变换与惯性定理

定义7.2.2（合同矩阵） 设 A 和 B 是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 C, 使得 $B = C^T AC$, 则称 A 与 B 合同, 记作 $A \simeq B$.

性质 (1) 自反性： $A \simeq A$.

(2) 对称性： 若 $A \simeq B$, 则 $B \simeq A$.

(3) 传递性： 若 $A \simeq B$, $B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.

定理7.2.2 若 A 和 B 合同, 则 $r(A) = r(B)$.

二次型经可逆线性变换后, 其秩不变, 因此, 二次型 的标准型中所含非零项的个数唯一确定, 它就是 f 的秩.

定理7.2.3 (惯性定理)

正惯性指数　负惯性指数

设 $f = x^T Ax$ 的秩为 r, 则不论用怎样的可逆变换化 f 为标准形, 标准形中系数为正的项的个数 p 和系数为负的项的个数 $r-p$ 由 f 本身唯一确定, 并不依赖所用的可逆线性变换.

设 $r(f)=r$, 其标准形为

$$f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,\ d_i > 0.$$

再令 $y_1 = 1/\sqrt{d_1}\, z_1, \cdots, y_r = 1/\sqrt{d_r}\, z_r,$　$y_{r+1} = z_{r+1}, \cdots, y_n = z_n,$

则 $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$　唯一!

二次型的规范形: 标准形中的系数只在1, -1, 0中取值.

二次型的规范形是唯一的; 等价的二次型有相同的规范形.

主要内容

1 二次型及其矩阵表示

2 二次型的标准形

3 合同变换与惯性定理

4 正定二次型

4 正定二次型

定义7.2.3（正定二次型与正定矩阵）

设二次型 $f(x)=x^TAx$，如果对任何 $x\neq 0$，$x\in R^n$，都有 $f(x)>0$，则称 f 为正定二次型，称该二次型的矩阵(实对称矩阵) A 为正定矩阵.

例1 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型,

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 非正定，因 $f(0,1,0)=-1<0$.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2$ 非正定.

定理7.2.4 二次型经可逆线性变换，其正定性不变.

证 设$f(x)=x^T Ax \xlongequal{x=Cy,C\text{可逆}} y^T(C^T AC)y$

若 $f(x)=x^T Ax$正定,即$\forall x\in R^n, x\neq 0$, 恒有 $x^T Ax>0$,

对$\forall y\in R^n, y\neq 0$, 有$Cy\neq 0$,

$$y^T(C^T AC)y=(Cy)^T A(Cy)>0$$

所以,二次型 $y^T(C^T AC)y$正定.

同理可证,当$y^T(C^T AC)y$正定时,有 $x^T Ax$正定.

定理7.2.5 n阶实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的特征值都大于零.

证 **必要性**：设A为正定矩阵，λ为A的任意一个特征值，x为对应于λ的特征向量，则有：$Ax=\lambda x$, 且 $x \neq 0$.

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda > 0$$

充分性：如果A的所有特征值都大于零，则A的最小特征值$\lambda_n > 0$，取A的n个标准正交实特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则对$\forall x \in R^n, x \neq 0$，有：$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \|x\|^2 > 0$

$$x^T Ax = (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)^T (k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_n\lambda_n\alpha_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 > 0.$$ 所以A为正定阵.

定理7.2.5 n阶实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的特征值都大于零.

推论 如果A为正定矩阵, 则$\det(A)>0$. (必要条件)

推论 n元二次型 f 为正定二次型当且仅当 f 的正惯性指数为n.

例2 设A为n阶正定矩阵, 证明: 行列式$D=|A+I|>1$

证 A正定, A的所有特征值均大于零, $\lambda_i>0, i=1,\cdots,n,$

$A+I$的特征值是$\lambda_1+1, \lambda_2+1, \cdots, \lambda_n+1,$

$$|A+I|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

定理7.2.6 实对称阵 A 为正定矩阵当且仅当 A 与单位阵合同. 即存在可逆阵 M，使得 $A = M^T M$.

证 设 A 正定，则 A 的特征值都大于0，且存在正交阵 P，

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^T = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})P^T$$

令 $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})P^T$，则 M 可逆，且 $A = M^T M$.

反之，如果存在可逆矩阵 M，使得 $A = M^T M$， 显然：$A^T = A$，

对 $\forall x \in R^n, x \neq 0$，有 $Mx \neq 0$，

$$x^T A x = x^T M^T M x = (Mx)^T Mx = \|Mx\|^2 > 0,$$ 即A正定.

定理7.2.7 实对称矩阵$A_n=(a_{ij})$为正定矩阵的充要条件是A的各阶顺序主子式都大于零，即：

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\quad \Delta_n=|A|>0.$$

例3 试确定实数t的取值范围，使得二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$为正定二次型.

解 f 对应的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

为使得f正定，须有

$$\Delta_1>0,\quad \Delta_2=1-t^2>0,\quad \Delta_3=-t(5t+4)>0 \quad \Rightarrow -\frac{4}{5}<t<0$$

其它类型的二次型

定义7.2.4 一个n阶实对称矩阵A和二次型$x^T Ax$称为

半正定的： 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax \geq 0,$

且存在$x_0 \neq 0,$ 使得$x_0{}^T Ax_0 = 0;$

负定的： 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax < 0;$

半负定的： 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax \leq 0,$

且存在$x_0 \neq 0,$使得$x_0{}^T Ax_0 = 0;$

不定的： 如果存在x使得$x^T Ax$为正，也存在x使得$x^T Ax$为负.

第七章　二次曲面与二次型

7.2 课后习题选讲

数学与统计学院
赵小艳

例1 设实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 不是对称矩阵, $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n$.

问 $f=x^TAx$ 是否为关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型? x^TAx 是否为 f 的矩阵表示? $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 是否为 f 的矩阵?

解

$$f=x^TAx=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$f=x^TAx$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型,

但 x^TAx 不是 f 的矩阵表示. $\frac{1}{2}(A+A^T)$ 是 f 的矩阵.

例2 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$是否相似？

是否合同？

解 由$|A-\lambda I|=0$，得A的三个特征值$\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=0.$

所以A与B相似. 由于A是实对称矩阵, 所以A与B也合同.

A与D不相似, 因为它们的特征值不同. B与D不相似.

令$C=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$，则$C^TBC=D$, B与D合同.

利用合同的传递性, A与D合同.

相似：$P^{-1}AP=D$　　合同：$C^TAC=D$

例3 设 A 是正定阵, c_i 为非零实常数 $(i=1,\cdots,n)$, 令 $b_{ij}=a_{ij}c_ic_j$,

证明: $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵.

解 $$B=\begin{pmatrix} a_{11}c_1c_1 & \cdots & a_{1n}c_1c_n \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1}c_nc_1 & \cdots & a_{nn}c_nc_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

$$=C^TAC \qquad \text{且 } C \text{ 可逆.}$$

所以 A 与 B 合同. 而合同矩阵具有相同的正定性, 所以 B 正定.

证明 A 是正定矩阵: (1) 定义; (2) 特征值都大于零;

(3) 与单位阵(正定阵)合同; (4) 各阶顺序主子式都大于零.

例4 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵, $B=\lambda I+A^TA$. 证明: 当 $\lambda>0$ 时, B 为正定矩阵.

解 $\forall x\in R^n$, $x\neq 0$, $x^TBx=x^T(\lambda I+A^TA)x$

$$=\lambda x^Tx+x^TA^TAx$$

$$=\lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax)=\lambda\|x\|^2+\|Ax\|^2$$

当 $\lambda>0$ 时, $x^TBx>0$, B 对应的二次型是正定二次型,

所以 B 是正定矩阵.

证明 A 是正定矩阵: (1) 定义; (2) 特征值都大于零;

(3) 与单位阵(正定阵)合同; (4) 各阶顺序主子式都大于零.

例5 实数 a_1,a_2,a_3 满足什么条件时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$ 为正定二次型？

解法一 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$

$$=(1+a_3^2)x_1^2+(1+a_1^2)x_2^2+(1+a_2^2)x_3^2+2a_1x_1x_2+2a_3x_1x_3+2a_2x_2x_3$$

对应的实对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1+a_3^2 & a_1 & a_3 \\ a_1 & 1+a_1^2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & 1+a_2^2 \end{pmatrix}$

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序都主子式大于零

解得： $1+a_1a_2a_3\neq 0.$

例5 实数 a_1,a_2,a_3 满足什么条件时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_1)^2$ 为正定二次型？

解法二 令 $\begin{cases} y_1=x_1+a_1x_2 \\ y_2=x_2+a_2x_3, \\ y_3=x_3+a_3x_1 \end{cases}$ 则 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

此二次型是正定二次型. 要使得原来的 f 是正定二次型，只需所用的变换是可逆变换.

而 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，所以 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+a_1a_2a_3\neq 0$.

例6 设 A, B都是 n 阶实对称矩阵. 证明:

(1) 若对 $\forall x \in R^n$, 都有 $x^T A x = 0$, 则 $A = 0$;

(2) 若对 $\forall x \in R^n$, 都有 $x^T A x = x^T B x$, 则 $A = B$.

解 (1) 设 $x = e_1 = (1,0,\cdots,0)^T$,

$$x^T A x = (1,\cdots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} = 0.$$

令 $x = e_i$, 则 $a_{ii} = 0 (i = 2,\cdots,n)$. 令 $x = e_1 + e_2$, 则 $a_{12} = 0$.

令 $x = e_i + e_j (i \neq j)$, 则 $a_{ij} = 0$.

(2) 对 $\forall x \in R^n$, $x^T (A-B) x = 0$, 则 $A - B = 0$, 所以 $A = B$.

例7 已知m阶矩阵A正定，B为$m\times n$实矩阵.

试证：B^TAB 正定 $\Leftrightarrow r(B)=n.$

解 **必要性** 设B^TAB正定，则$\forall x\in R^n$，$x\neq 0$，$x^TB^TABx>0$，

即$(Bx)^TA(Bx)>0$. 由于A正定，所以$Bx\neq 0$. 故$r(B)=n.$

充分性 $(B^TAB)^T=B^TAB$，所以B^TAB是实对称矩阵.

设$r(B)=n$，则$\forall x\in R^n$，$x\neq 0$，$Bx\neq 0$，$x^TB^TABx=(Bx)^TA(Bx)>0$，

B^TAB对应的是正定二次型，所以B^TAB正定. (因为A正定)

证明A是正定矩阵：(1) 定义； (2) 特征值都大于零；

(3) 与单位阵合同； (4) 各阶顺序主子式都大于零.

例8 设A为正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵S,使得$A=S^2$.

解 设A正定, 则∃正交矩阵Q, 使得$Q^TAQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,

且$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$都大于零.

$$A=Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}Q^T=Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T\underbrace{\boxed{Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T}}_{S}$$

$$=S^2$$

其中S与$\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}$合同, 所以也是正定阵.

第七章　二次曲面与二次型

总习题

数学与统计学院
赵小艳

例1 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为____.

解 $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3.$

对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix},\quad r(A)=2.$

所以二次型 f 的秩为2.

例2 若 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为2, 则 $a=$ ______.

解 f 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

二次型的秩即A的秩, 所以 $r(A)=2$,

由$|A|=0$解得 $a=0$.

例3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的特征值 λ_1, λ_2 满足 $\lambda_1\lambda_2<0$, 则曲线 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 的名称是________.

解 二次型 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 经正交变换化为标准形

$$f=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$$

$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=1$ 的图形是双曲线, 所以原曲线是双曲线.

例4 若n阶矩阵A是正定矩阵且是正交矩阵, 则二次型$x^T Ax$经正交变换$x = Py$化成的标准形为__________.

解 若A是正交矩阵, 则A的特征值的模是1.

若A又是正定矩阵, 则A是实对称矩阵, 特征值都是1.

所以二次型$x^T Ax$经正交变换$x = Py$化成的标准形为

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

例5 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的，则实数t的取值范围是 ______.

解 f 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

A正定$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式都大于零.

即 $1>0,\ 4-t^2>0,\ t^2+t-2<0,$

$\therefore\quad -2<t<1.$

例6 矩阵$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$（　　）.

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同也不相似.

解 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$.

A是实对称矩阵, 所以这两个矩阵不相似, 但是合同.

应选 B.

例7 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 8 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ （　　）.

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同也不相似.

解 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 解得 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 8,\ \lambda_3 = 0.$

这两个矩阵相似且合同. 应选 A.

例8 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 下列矩阵中与 A 合同的矩阵是（　）.

(A) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

解

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

解得 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3.$

只要看四个选项中哪个矩阵的特征值是一个正一个负.

应选D.

例9 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 经正交变换化成的标准形为 $5y_1^2+by_2^2-y_3^2$, 则(　　).

(A) $a=1, b=1.$　　　　(B) $a=1, b=-1.$

(C) $a=-1, b=1.$　　　　(D) $a=-1, b=-1.$

解 f 对应 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&a&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$. 标准形对应 $D=\begin{pmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{pmatrix}$,

则 A 与 D 相似 $\Rightarrow\begin{cases}1+a+1=5+b-1\\a+8+8-4a-4-4=-5b\end{cases}.$

解得 $a=1, b=-1.$ 应选B.

例10 设 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

(1) 求 f 的矩阵 A 的特征值;(2) 若 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求a.

解 (1) f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-1-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(a+1-\lambda)(a-2-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=a-2,\ \lambda_2=a,\ \lambda_3=a+1.$$

(2) 若 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 则A有一个零特征值,

其余特征值大于零，因此 $a=2$.

例11 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b<0)$, 其中 f 的矩阵 A 的特征值之和为1, 特征值之积为 -12.
(1) 求 a,b; (2) 求一个正交变换, 把 f 化为标准形.

解 (1) f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $a=1,\ -4a-2b^2=-12.$
$\Rightarrow b=-2.$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 解得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-3.$

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 由 $(A-2I)x=0$ 得 $\xi_1=(0,1,0)^T, \xi_2=(2,0,-1)^T$.

对 $\lambda_3=-3$, 由 $(A+3I)x=0$ 得 $\xi_3=(1,0,2)^T$.

令 $Q=(\xi_1,\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_2,\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_3)$, 则 $x=Qy$ 为正交变换, $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_2^2$.

例12 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 化成的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且Q的第3列为 $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$. 求矩阵 A，并证明 $A+I$ 为正定矩阵.

解 f 对应的矩阵 A 的特征值为1, 1, 0, 且0对应的特征向量为 e_3.

而1对应的特征向量与 e_3 正交. 求解 $e_3^Tx=0$ 得

$\xi_1=(1,0,-1)^T,\xi_2=(0,1,0)^T$，单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1$，$e_2=\xi_2$.

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)$，则 $x=Qy$ 是正交变换.

$$Q^TAQ=D=diag(1,1,0)\Rightarrow A=QDQ^T=e_1e_1^T+e_2e_2^T=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&1/2\end{pmatrix}$$

$A+I=Q(D+I)Q^T$，即 $A+I$ 与 $D+I=diag(2,2,1)$ 合同，所以 $A+I$ 正定.

例13 设A为$m\times n$阶实矩阵. 证明: A^TA正定$\Leftrightarrow r(A)=n$.

解 **必要性** 设A^TA正定, A^TA的特征值全部大于零,

所以$r(A^TA)=n$. $n=r(A^TA)\le r(A)\le n$, 故$r(A)=n$.

充分性 $(A^TA)^T=A^TA$, 所以A^TA是实对称矩阵.

设$r(A)=n$, 则$\forall x\in R^n$, $x\neq 0$, $Ax\neq 0$,

$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0$,

A^TA对应的是正定二次型, 所以A^TA正定.

证明A是正定矩阵: (1) 定义; (2) 特征值都大于零;

(3) 与单位阵合同; (4) 各阶顺序主子式都大于零.