高等数学下册期末试题 2021年06月28日

西安交通大学 数学与统计学院

主讲：张芳

一. 填空题（每小题3分，共15分）

1. 曲面 $\sin^2 x+\cos(y+z)=\frac{3}{4}$ 在点 $(x,y,z)=(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},0)$ 处的切平面的方程为________.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{n})x^n$ 的收敛半径等于________.

3. 若 R^2 上的可微函数 $u(x,y)$ 的梯度 $\mathrm{grad}\,u=(2x+e^x\sin y,e^x\cos y)$，且 $u(0,\pi)=2$，则 $u(x,y)=$________.

一. 填空题（每小题3分，共15分）

4. 设$L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2t (0 \le t \le \pi)$,则$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2} ds =$ ______.

5. 设$f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \le x < 0 \\ x^2+1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$将$f(x)$展开成以2为周期的傅里叶级数，其和函数 记为$S(x)$,则$S(-\frac{15}{2}) =$ ______.

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在原点(0,0)处(　　　).

A. 连续且偏导数存在；

B. 沿各个方向的方向导数 都存在，但不可微；

C. 可微；

D. 连续但偏导数不存在 .

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

2. 设空间区域$\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\right\}$，则$\Omega$的体积等于(　　).

A. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}dr$;

B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}dr$;

C. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}dr$;

D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}dr$;

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

3. 设Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0,$ 在以下四组积分中，一组中两个积分同时为零的是(　　).

A. $\iint_{\Sigma} z^2 dx\Lambda dy, \iint_{\Sigma} z dx\Lambda dy$　　B. $\iint_{\Sigma} x^2 dy\Lambda dz, \iint_{\Sigma} xz dy\Lambda dz$

C. $\iint_{\Sigma} y^2 dx\Lambda dz, \iint_{\Sigma} y dx\Lambda dz$　　D. $\iint_{\Sigma} y^2 dx\Lambda dz, \iint_{\Sigma} 1 dx\Lambda dz$

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

4. 二次积分$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^1 ye^{xy}dy$的值为(　　).

A. e^2-e;　　B. $\frac{1}{2}e^2-e$;　　C. e^2+e;　　D. $\frac{1}{2}e^2+e$.

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

5. 下列命题中正确的是 (　　).

A. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$;

B. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，必存在$N\in N_+$，当$n>N$时,恒有$a_n>\frac{1}{n}$.

C. 设$f(x)=x-\sin x$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{\sqrt{n}})$收敛;

D. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

三. 计算题（每题6分，共18分）

1. 设函数$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$z = xf(xy, \dfrac{x}{y})$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xz dS$，其中$\Sigma$是圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$被柱面$x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$所截部分.

3. 求函数$z = \dfrac{x^3}{3} - xy + \dfrac{y^2}{2} - 2y$的极值.

四. 计算题（每题7分，共21分）

1. 计算曲线积分 $\int_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + [2x + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$，其中有向曲线 $(C): y = x\sin x$，方向从 $A(\pi,0)$ 到 $O(0,0)$.

四. 计算题（每题7分，共21分）

2. 计算第二型面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^3 dy\wedge dz - 3x^2 y dz\wedge dx + (z^3-2)dx\wedge dy$

其中Σ是曲面$z=x^2+y^2 (0\le z\le 1)$的下侧.

四. 计算题（每题7分，共21分）

3. (1)将函数$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$展开成麦克劳林级数；

(2)利用(1)中所得级数，求积分$\int_0^1 f(x)dx$的值（注：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$）.

五. （本题8分）

将函数$f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}+\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|,(0\le x\le\pi)$展成余弦级数 .

六. （本题8分）

求幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$的和函数，并求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

七. （本题9分）

函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，

L_t是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算积分

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

并求$I(t)$的最小值.

八. 证明题（本题6分）

设函数$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续，且单调增加有 上界，证明：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx]$收敛.