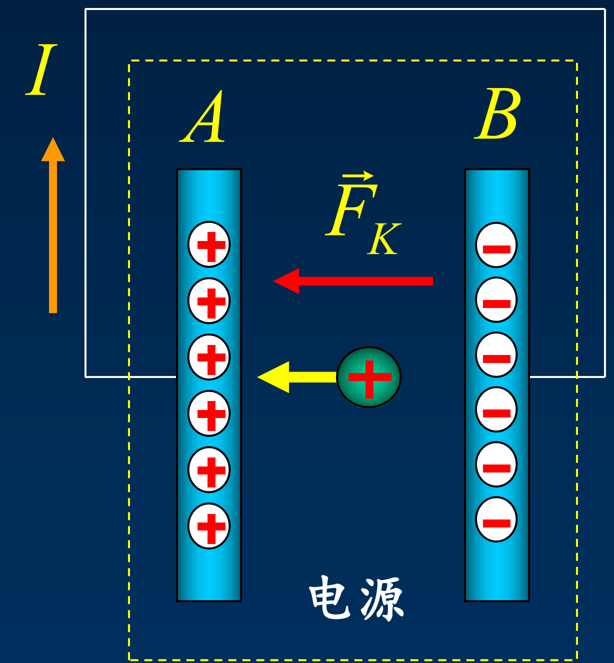
第十章　变化的电磁场

电流的磁效应 → 电生磁 → 磁的电效应 ?

10-1 电磁感应定律

一、电动势

定义：$\boxed{\varepsilon = \dfrac{A_K}{q}} \longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}A_K}{\mathrm{d}q}}$



$$u_{AB} = u_A - u_B$$

将单位正电荷从电源负极推向电源正极的过程中，非静电力所作的功

非静电性场强 $\boxed{\vec{E}_K = \vec{F}_K / q}$

$$A_K = \int_B^A \vec{F}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\int_B^A \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} \Rightarrow \varepsilon = \int_B^A \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

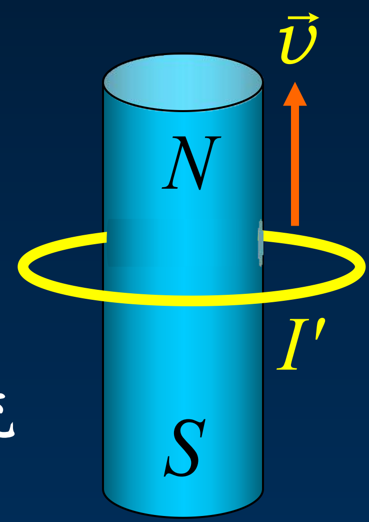
对闭合电路 $\varepsilon = \oint \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

- 表征了电源非静电力作功本领的大小
- 反映电源将其它形式的能量转化为电 能本领的大小

二、电磁感应定律

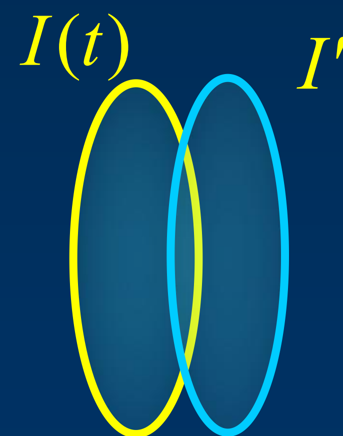
法拉第的实验：

- 磁铁与线圈有相对运动，线圈中产生电流
- 一线圈电流变化，在附近其它线圈中产生电流



电磁感应实验的结论

> 当穿过一个闭合导体回路所限定的面积的磁通量发生变化时，回路中就出现感应电流



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int B\cos\theta \, \mathrm{d}S$$

B、S、θ 变 ⟹ Φ 变 ⟹ 产生电磁感应

法拉第的实验规律

感应电动势的大小与通过导体回路的磁通量的变化率成正比

$$\varepsilon \propto \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{在国际单位制中}} \boxed{\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t}}$$

负号表示感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因

—— 楞次定律

讨论:

(1) 若回路是 N 匝密绕线圈

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(N\phi_m)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}t}$$

磁通链

(2) 若闭合回路中电阻为R

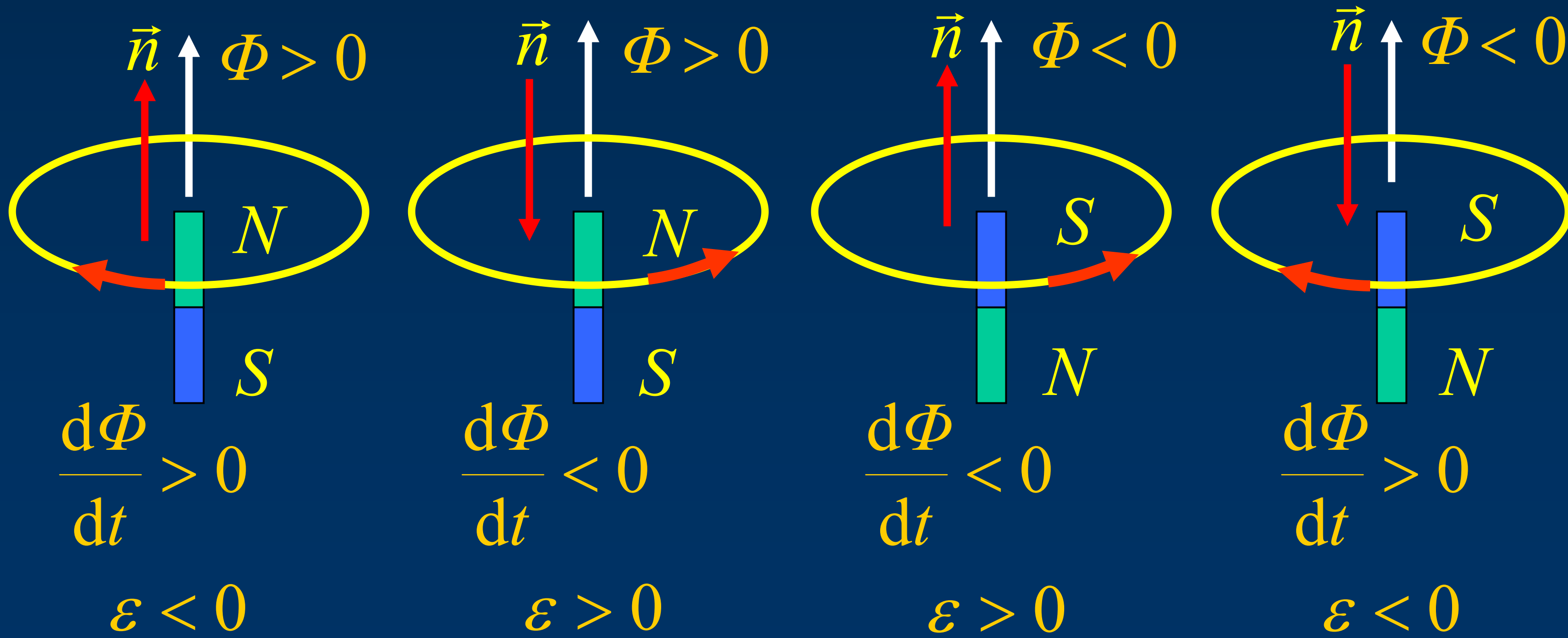
$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{R\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$$

则，感应电荷为

$$q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i \mathrm{d}t = \int_{\phi_{m1}}^{\phi_{m2}} -\frac{1}{R}\mathrm{d}\phi_m = (\phi_{m1} - \phi_{m2})/R$$

(3)关于感应电动势的方向

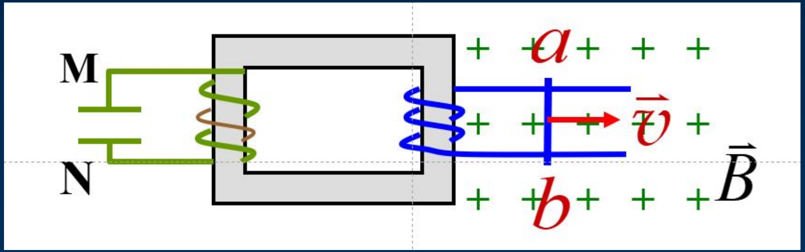
- 任意选定回路绕行方向，并用右手螺旋法则根据这个绕行方向确定回路面积的正法线方向；
- 沿正法线方向穿过回路面积的磁通量为正，反之为负；
- 与回路绕行方向一致的感应电动势为正，反之为负。



单选题 1分

设置

如图所示导体棒 ab 在均匀磁场中沿金属导轨向右作匀加速运动，（导轨电阻不计，铁心磁导率为常量）则达稳定后在电容器的 M 极板上



A 有一定量的正电荷

B 有一定量的负电荷

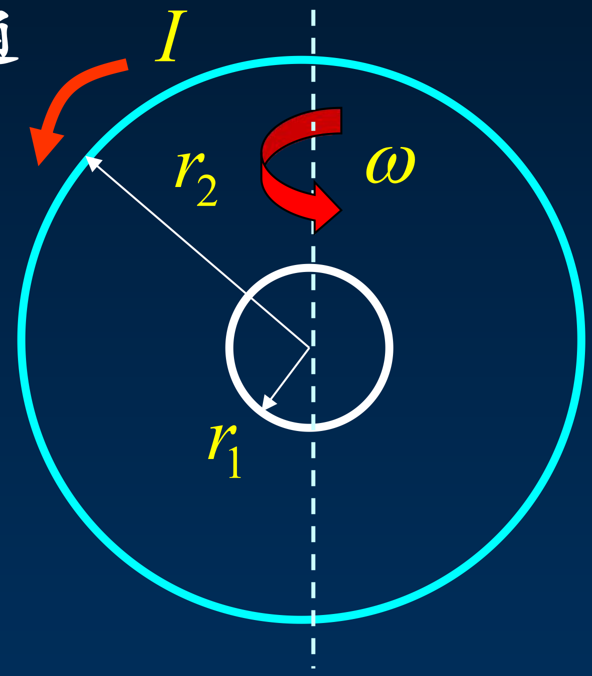
C 带有越来越多的正电荷

D 带有越来越多的负电荷

提交

例1：两个同心圆环，已知 $r_1 << r_2$,大线圈中通有电流I,当小圆环绕直径以ω 转动时，

求：小圆环中的感应电动势



解：大圆环在圆心处产生的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_2}$$

通过小线圈的磁通量

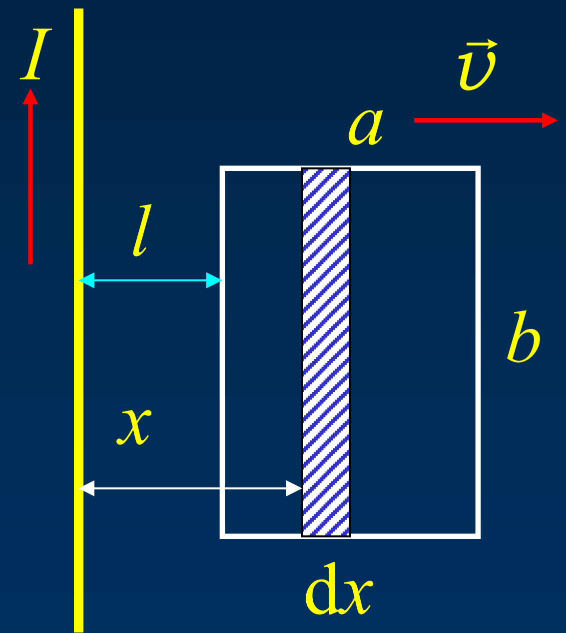
$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2r_2} \pi r_1^2 \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{2r_2} \pi r_1^2 \cos\omega t$$

感应电动势 $$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I \pi r_1^2 \omega}{2r_2} \sin\omega t$$

例2： 在无限长直载流导线的磁场中，有一运动的导体线框，导体线框与载流导线共面，

求： 线框中的感应电动势

解： 通过面积元的磁通量



$$\mathrm{d}\phi_m = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b\mathrm{d}x$$

$$\phi_m = \int \mathrm{d}\phi_m = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{l}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}l/\mathrm{d}t}{l+a} - \frac{\mathrm{d}l/\mathrm{d}t}{l}\right] = \frac{\mu_0 I a b \upsilon}{2\pi l(l+a)}$$

（方向顺时针方向）

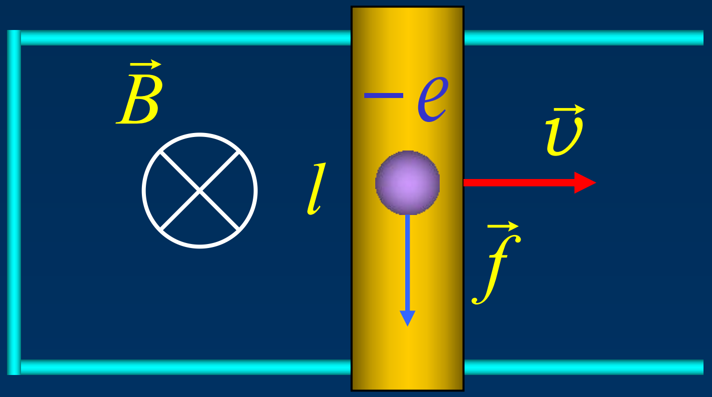
10-2 感应电动势

两种不同机制 $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t}$

- 相对于实验室参照系，若磁场不变，而导体回路运动（切割磁场线）— 动生电动势

- 相对于实验室参照系，若导体回路静止，磁场随时间变化—感生电动势

一、动生电动势



$$\varepsilon_i=\left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=Blv$$

单位时间内导线切割的磁场线数

- 电子受洛伦兹力

$\vec{f}=-e(\vec{v}\times\vec{B})$ —— 非静电力 $\vec{F}_K$

- 非静电场

$$\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

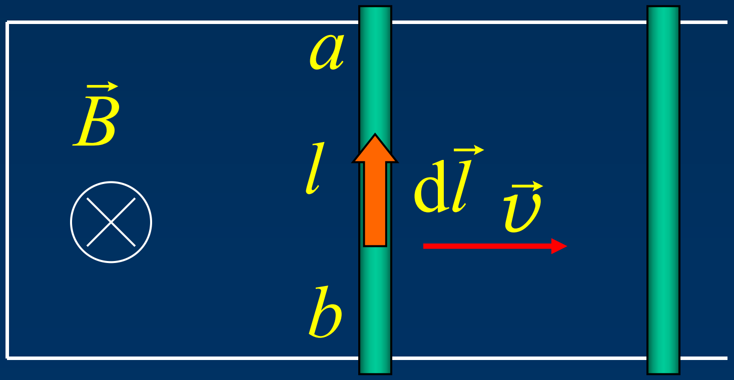
- 动生电动势

$$\boxed{\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

应用：匀强磁场，导体匀速运动

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{b}^{a} vB\mathrm{d}l = vBl$$



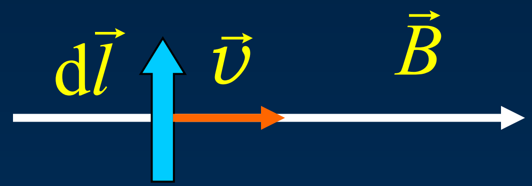
磁场中的运动导线成为电源，非静电力是洛伦兹力

讨论：

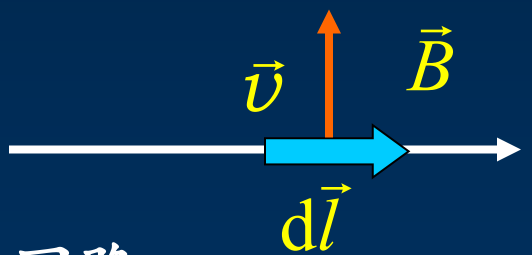
(1) 动生电动势只产生在运动的一段导体上，不动的部分无电动势，只提供电流的回路

(2) 如果只有一段在磁场中运动，即无闭合回路，则上只有动生电动势，而无感应电流

(3) 注意矢量之间的关系



$$\varepsilon_i = 0 \begin{cases} \vec{v}\times\vec{B} = 0 \\ \vec{v}\times\vec{B} \neq 0 \quad (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \end{cases}$$



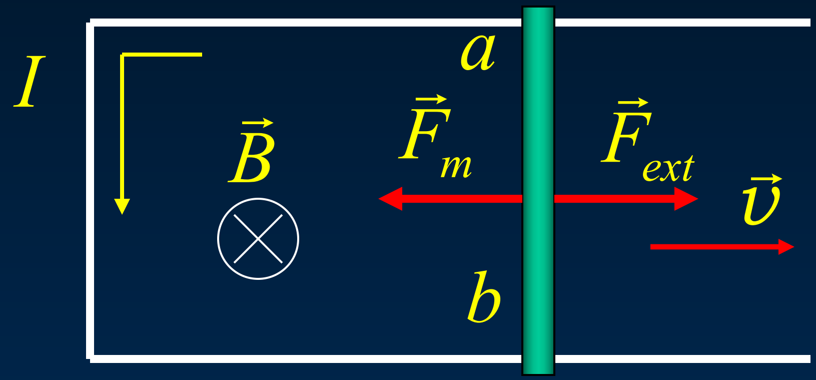
(4) 对于运动导线回路，电动势存在于整个回路

$$\varepsilon_i = \oint (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint \vec{B}\cdot(\vec{v}\times \mathrm{d}\vec{l}\,)$$

$$= -\oint \vec{B}\cdot(\vec{v}\Delta t\times \mathrm{d}\vec{l}\,)/\Delta t$$

$$= -\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}'/\Delta t = -\Delta\Phi/\Delta t$$ (法拉第电磁感应定律)

(5) 感应电动势的功率



设电路中感应电流为I

$$P = I\varepsilon_i = IBlv$$

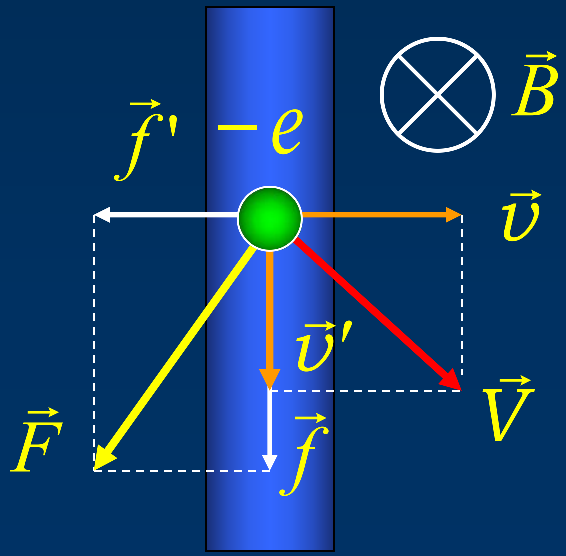
导线受安培力 $F_m = IBl$

导线匀速运动 $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m$

$$P_{ext} = F_{ext}v = IBlv = P$$

电路中感应电动势提供的电能是由外力做功所消耗的机械能转换而来的

(6) 感应电动势做功，洛伦兹力不做功？



$$\vec{F}\cdot\vec{V} = (\vec{f}+\vec{f}')\cdot(\vec{v}+\vec{v}')$$

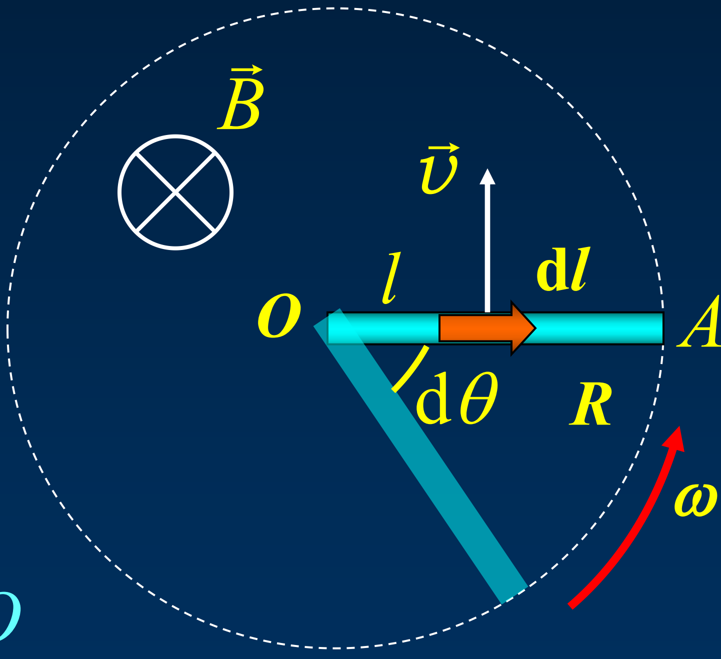
$$= \vec{f}\cdot\vec{v}' + \vec{f}'\cdot\vec{v}$$

$$= -evBv' + ev'Bv = 0$$

洛伦兹力做功为零

例1：在匀强磁场 B 中，长 R 的铜棒绕其一端 O 在垂直于 B 的平面内转动，角速度为 ω

求：棒上的电动势



解：方法一 (动生电动势)：

$$\varepsilon_i = \int_O^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_O^R vB\mathrm{d}l = -\int_O^R l\omega B\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{BR^2}{2}\omega$$ 方向 $A \to O$

方法二(法拉第电磁感应定律)：

在 dt 时间内导体棒切割磁场线 $|\mathrm{d}\Phi| = \frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\theta\ B$

$$\varepsilon_i = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}BR^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}BR^2\omega$$ 方向由楞次定律确定

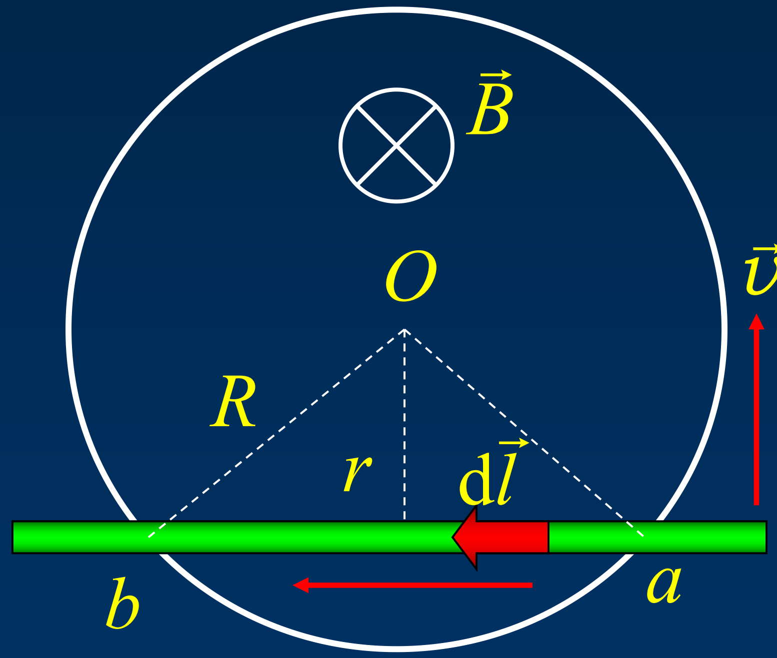
例2：在半径为R的圆形截面区域内有匀强磁场B，一直导线垂直于磁场方向以速度v扫过磁场区。

求：当导线距区域中心轴垂直距离为r时的动生电动势

解：方法一：动生电动势

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \upsilon B \mathrm{d}l$$

$$= \upsilon B(ab) = 2\upsilon B\sqrt{R^2 - r^2}$$



方法二：法拉第电磁感应定律

在 $\mathrm{d}t$ 时间内导体棒切割磁场线

$$|\mathrm{d}\Phi| = \left|2\sqrt{R^2 - r^2}\mathrm{d}rB\right|$$

$$\varepsilon_i = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \left|2B\sqrt{R^2 - r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right| = 2B\upsilon\sqrt{R^2 - r^2}$$

方向由楞次定律确定

多选题 1分

设置

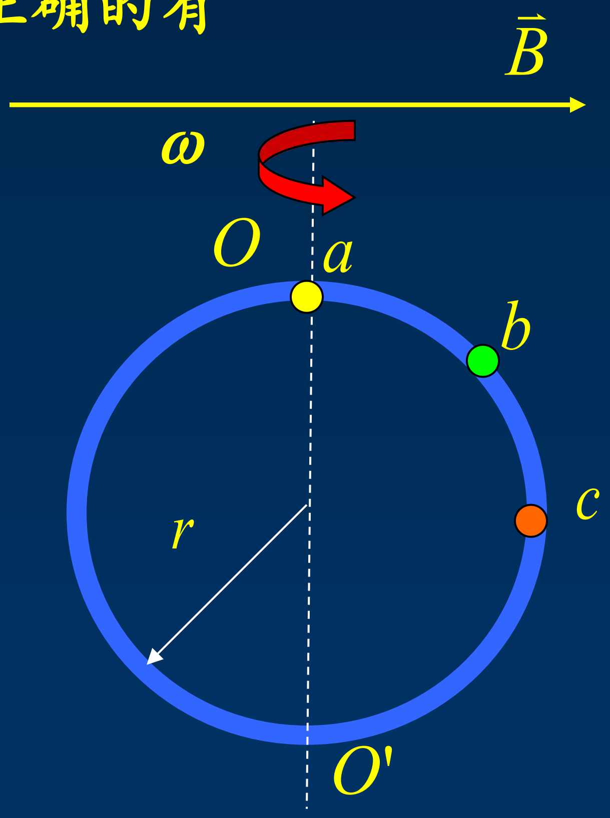
例3：一圆形均匀刚性线圈，总电阻为R，半径为r，在均匀磁场B中以ω绕其轴OO'转动，转轴垂直于B。当线圈平面转至与B平行时，则下列说法正确的有

A $\varepsilon_i = \pi r^2 B\omega$

B $\varepsilon_{ab} = \pi r^2 B\omega / 8$

C $\varepsilon_{ac} = \pi r^2 B\omega / 4$

D 以上结果都不对



提交

例3：一圆形均匀刚性线圈，总电阻为R，半径为r，在均匀磁场B中以ω绕其轴OO'转动，转轴垂直于B。当线圈平面转至与B平行时，试求：$\varepsilon_{ab},\varepsilon_{ac}$

解：由Faraday Law，线圈总电动势

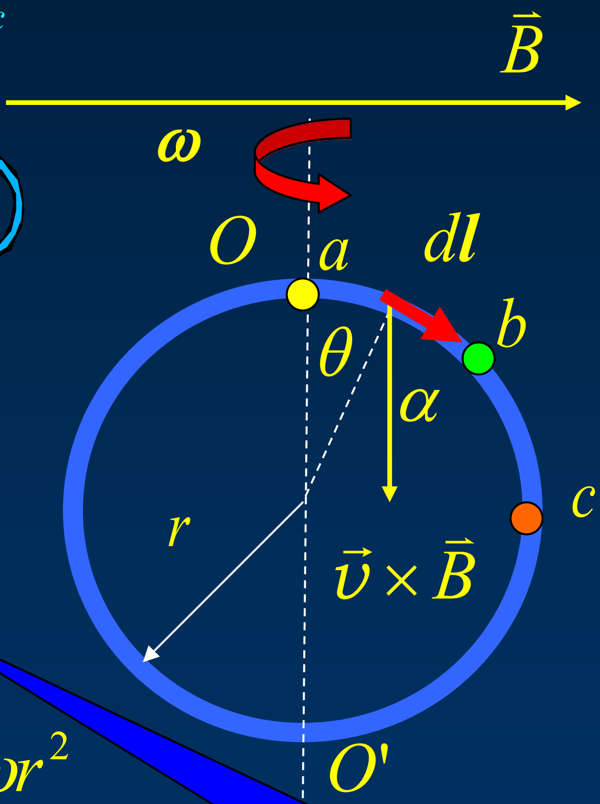
$$\varepsilon_i = \pi r^2 B\omega \qquad \varepsilon_{ab} = \pi r^2 B\omega/8$$

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b vB\cos\alpha dl = \int_a^b vB\sin\theta dl$$

$$= \int_0^{\pi/4} \omega r^2 B\sin^2\theta d\theta = \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)B\omega r^2$$

$$\varepsilon_{ac} = \int_0^{\pi/2} \omega r^2 B\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}B\omega r^2$$



$$v = \omega r\sin\theta$$

$$dl = rd\theta$$

二、感生电动势

- **实验证明:** 当磁场变化时，静止导体中也出现感应电动势仍是洛伦兹力充当非静电力？麦克斯韦 提出：

> 无论有无导体或导体回路，变化的磁场都将在其周围空间产生具有闭合电场线的电场，并称此为感生电场或有旋电场

电场力充当非静电力

感生电动势 $\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$　　$\vec{E}_V$ 是感生电场

闭合回路中 $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

- 感生电场与变化磁场之间的关系

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

讨论：

(1) 动生电动势的本质：来源于洛伦兹力

感生电动势的本质：来源于感生电场

(2) 不论是动生还是感生电动势，都是感应电动势，法拉第电磁感应定律总结了这一共性

(3) 感生电场是无源有旋场

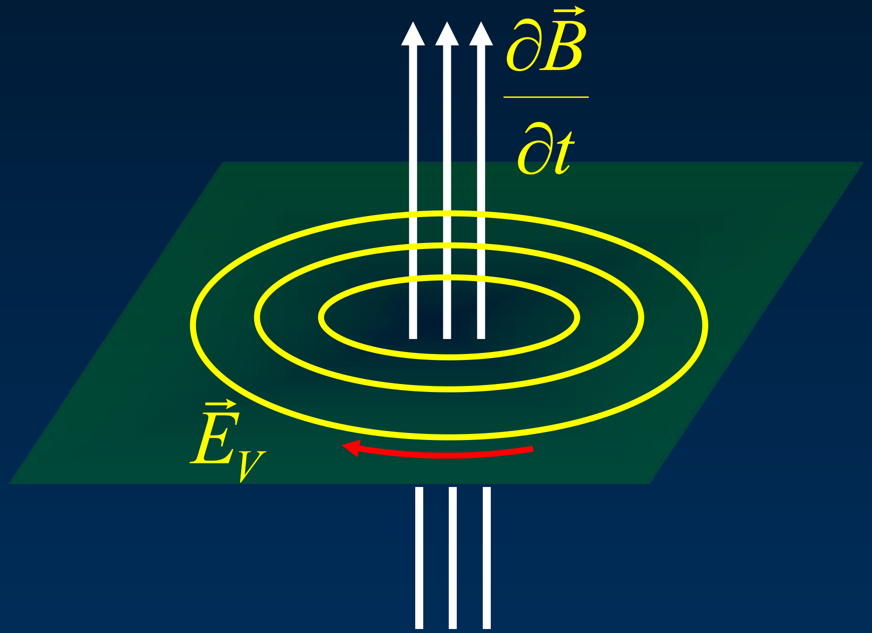
感生电场与静电场的比较

- 场源
  - 静电荷
  - 变化的磁场(磁生电)
- 场线
  - 有头有尾
  - 闭合曲线　涡旋状
- 环流
  - 静电场为保守场
  - 感生电场为非保守场
- 通量
  - 静电场为有源场
  - 感生电场为无源场(闭合电场线)

(4) 感生电场与磁场的变化率成左螺旋关系

空间存在变化磁场 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

在空间存在感生电场 $\vec{E}_V$



(5) 当问题中既有动生、又有感生电动势，则总感应电动势为

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ (导体不闭合)

$$\varepsilon_i = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ (导体闭合)

(6) 轴对称分布的变化磁场产生的感应电场

单选题 1分

设置

若用条形磁铁竖直插入木质圆环，则环中

A 产生感应电动势，也产生感应电流

B 产生感应电动势，不产生感应电流

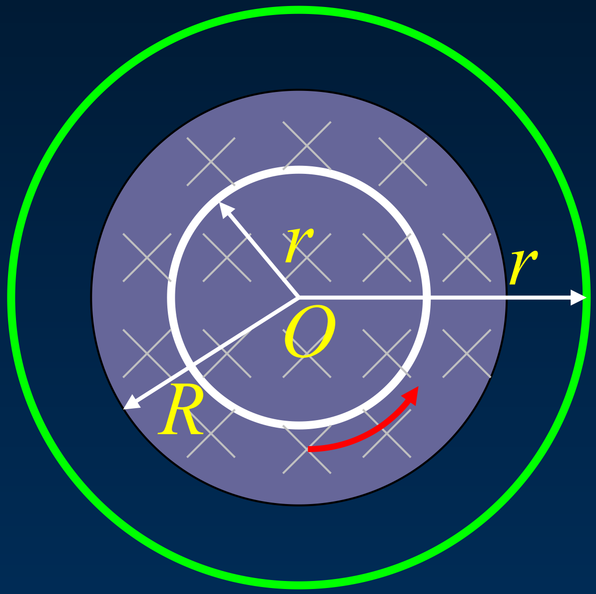
C 不产生感应电动势，也不产生感应电流

D 不产生感应电动势，产生感应电流

提交

例1： 设一个半径为R的长直载流螺线管，内部磁场强度为$\vec{B}$，若$\partial\vec{B}/\partial t$为大于零的恒量。

求： 管内外的感应电场。



解： $r < R$ $\quad \varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = E_V \oint_L dl$

$$= E_V 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2 \cos\pi$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2 \Rightarrow E_V = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$$

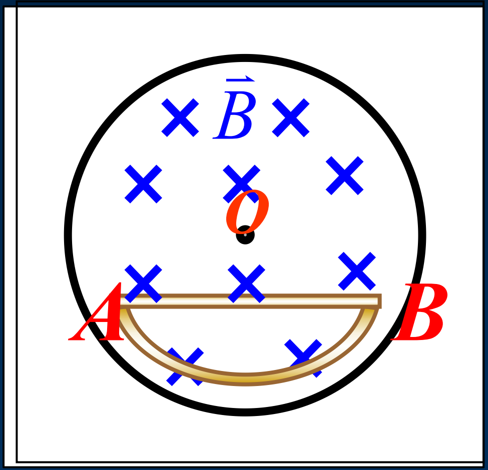
$r > R$ $\quad \varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = E_V 2\pi r$

$$= -\frac{\partial B}{\partial t}\pi R^2 \cos\pi \Rightarrow E_V = \frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}$$

单选题 1分

设置

圆柱形空间内有一磁感强度为B的均匀磁场，B的大小以恒定速率变化.在磁场中有A、B两点，其间可放直导线或弯曲的导线



A 电动势只在直导线中产生

B 电动势只在曲线中产生

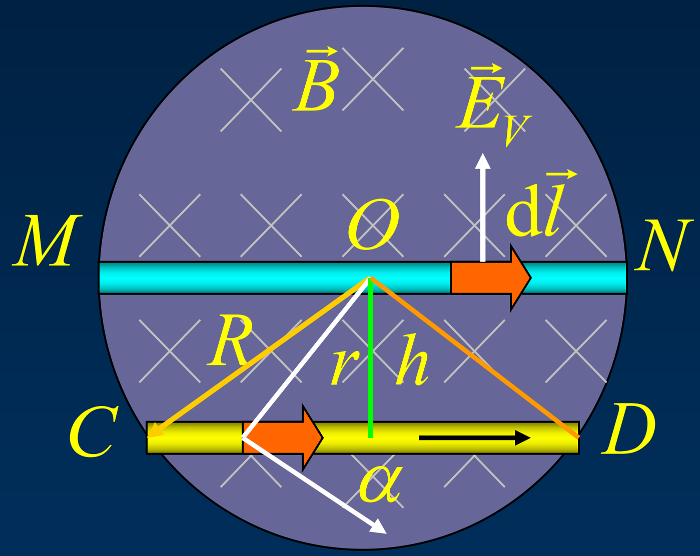
C 电动势在直导线和曲线中都产生，且两者大小相等

D 直导线中的电动势小于弯曲的导线

提交

例2：一被限制在半径为 R 的无限长圆柱内的均匀磁场 B，B 均匀增加，B 的方向如图所示。

求：导体棒MN、CD的感生电动势



解：方法一(用感生电场计算):

$$E_V = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(r < R)$$

$$\varepsilon_{MN} = \int_M^N \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon_{CD} = \int_C^D \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_C^D E_V \cos\alpha \mathrm{d}l = \int_o^L \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{h}{r}\mathrm{d}l = \frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

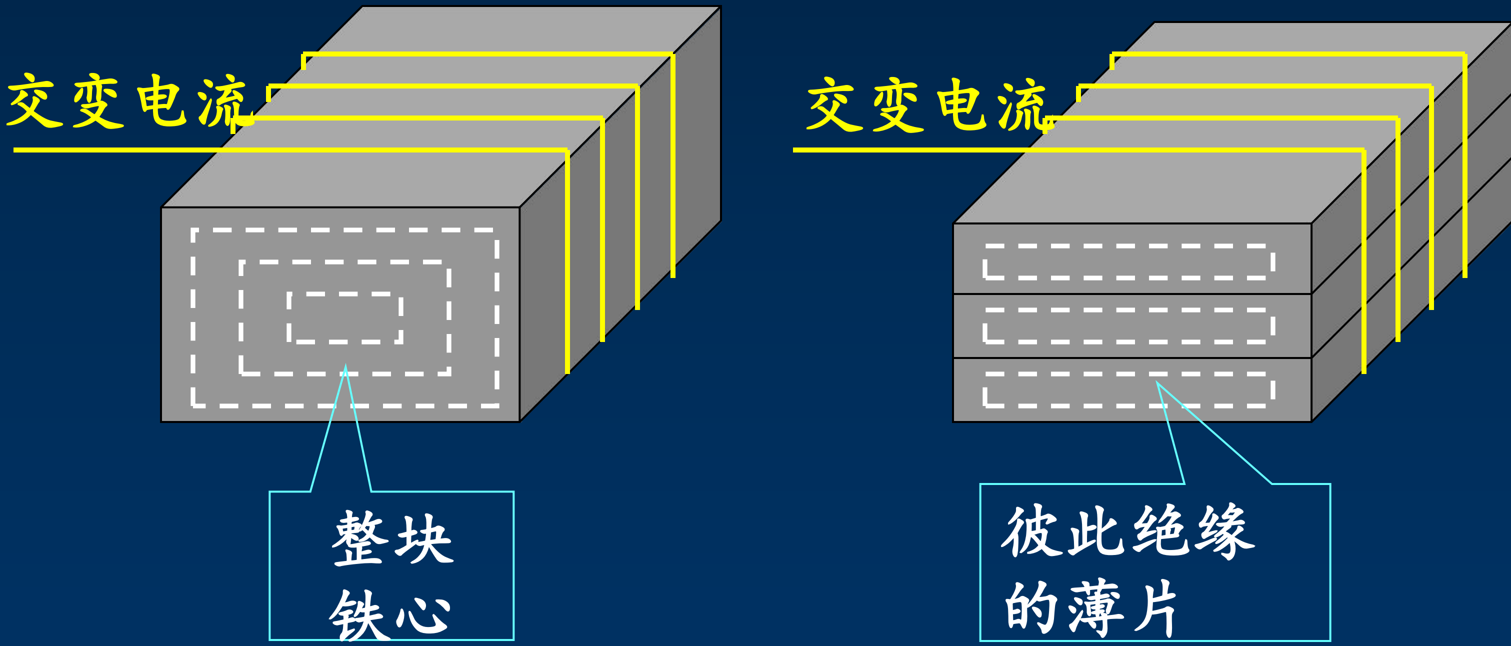
方法二(用法拉第电磁感应定律): (补逆时针回路 $OCDO$)

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(BLh/2)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{OC} + \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{DO} = \varepsilon_{CD} = \frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

三、涡流

由于变化磁场激起感生电场，则在导体内产生感应电流。

这些感应电流的流线呈闭合的涡旋状，故称涡电流(涡流)

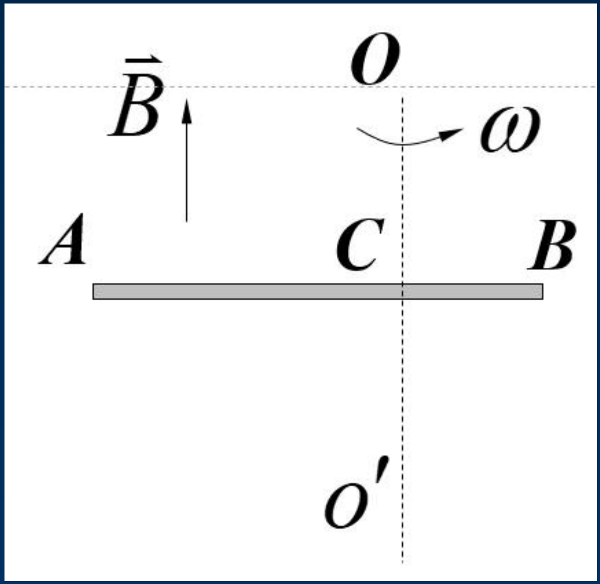


- 高频感应加热原理
- 减小电流截面，减少涡流损耗
- 电磁阻尼

单选题 1分

设置

如图所示，导体棒 AB 在均匀磁场中绕通过 C 点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴OO'转动，BC 的长度为棒长的1/3，则



A A点比B点电势高

B A点与B点电势相等

C A点比B点电势低

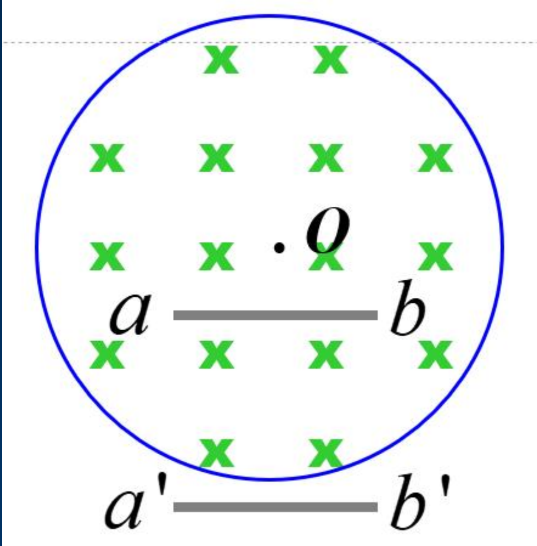
D 有稳恒电流从A点流向B点

提交

单选题 1分

设置

在圆柱形空间内有一磁感应强度为$\vec{B}$的匀强磁场，如图。$\vec{B}$的大小以速率$\frac{dB}{dt}$变化，有一长度为 l 的金属棒先后放在磁场的两个不同位置1(ab)和2($a'b'$)，则该棒放在这两个位置时棒内的感应电动势满足



A $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$

B $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

C $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$

D $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

提交

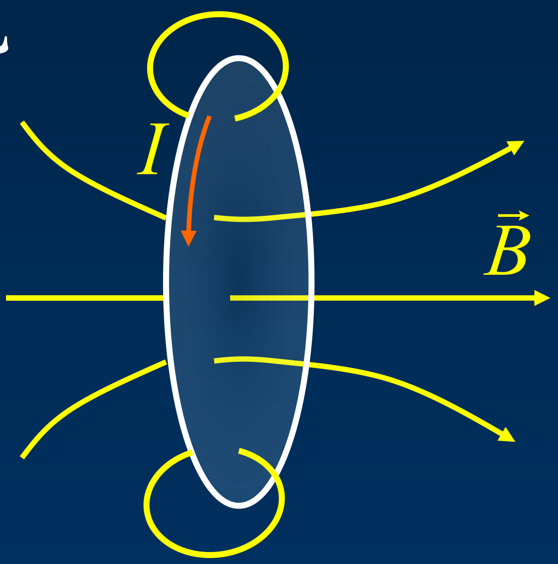
10-3 自感 互感

一、自感现象 自感系数 自感电动势

1. 自感现象

线圈电流变化 $\Longrightarrow$ 穿过自身磁通变化

$\Longrightarrow$ 在线圈中产生感应电动势



即

$$I = I(t) \Longrightarrow \vec{B} = \vec{B}(t)$$

$$\Phi(t) = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$ —自感电动势遵从法拉第定律

2. 自感系数

根据毕—萨定律穿过线圈自身总的磁通量与电流 I 成正比

$$\boxed{\Psi = LI} \qquad L \quad \text{自感系数}$$

如果回路周围不存在铁磁质，自感L是一个与电流I无关，仅由回路的匝数、几何形状和大小以及周围介质的磁导率决定的物理量

3. 自感电动势

自感电动势 $\varepsilon_L = -\dfrac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

若自感系数是一不变的常量 $\boxed{\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$

讨论：

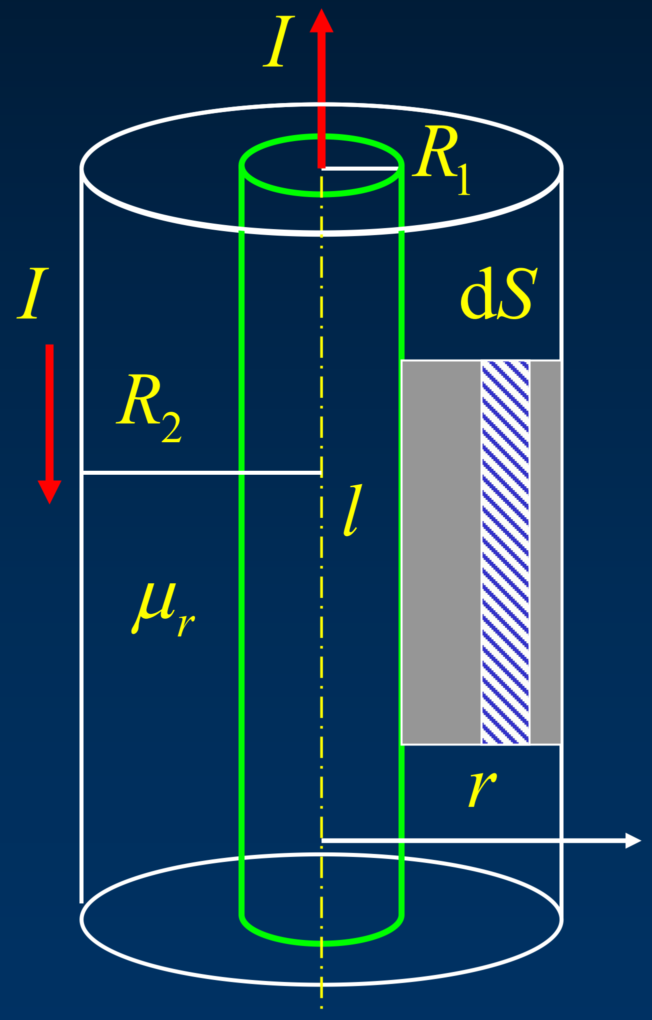
(1) 负号：楞次定律

(2) 自感具有使回路电流保持不变的性质 —— 电磁惯性

(3) 自感的单位：亨利（H）

例1： 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴圆筒状导体组成。

求： 无限长同轴电缆单位长度上的自感



解： 由安培环路定理可知

$$R_1 < r < R_2 \qquad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r < R_1, r > R_2 \qquad B = 0$$

$$\mathrm{d}\phi_m = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\, r} l\mathrm{d}r$$

$$\phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi\, r} l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\longrightarrow \quad L = \frac{\phi_m}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

小结：设 $I \longrightarrow B \longrightarrow \boxed{\phi_m} \longrightarrow L$ —— 与电流无关

例2：设一载流回路由两根平行的长直导线组成。

求：这一对导线单位长度的自感L

解： 由题意，设电流回路 I

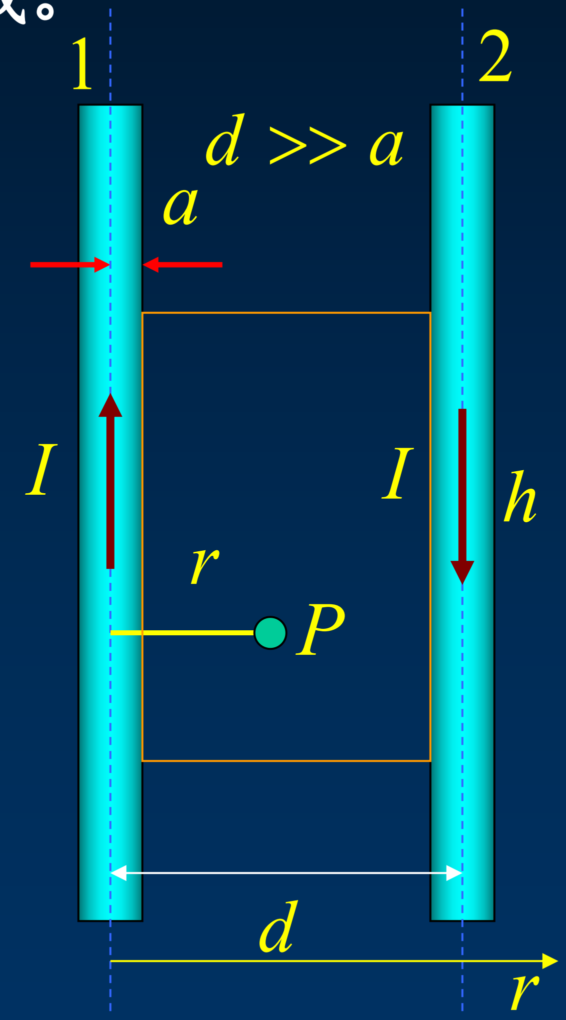
$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

取一段长为 h 的导线

$$\Phi = \int_a^{d-a} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right] h \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \Longrightarrow L = \frac{\Phi}{Ih} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



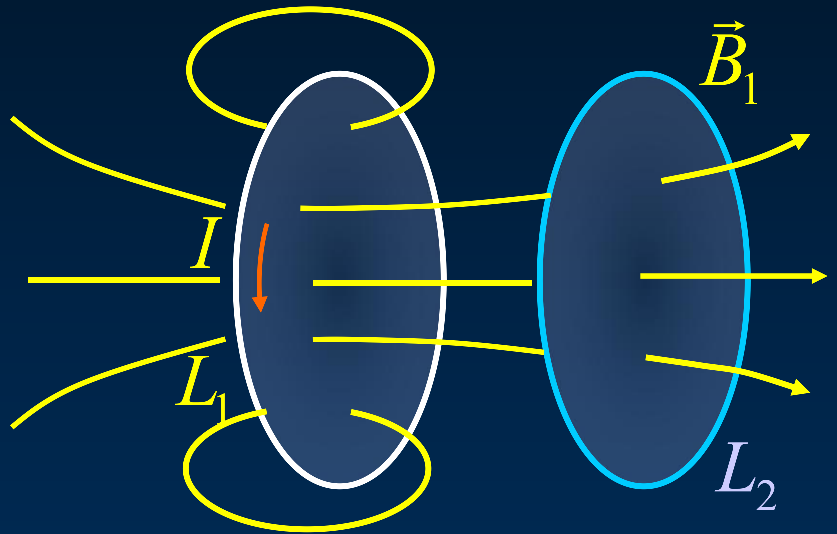
二、互感

线圈 1 中的电流变化

引起线圈 2 的磁通变化

线圈 2 中产生感应电动势

根据毕 — 萨定律



穿过线圈 2 的磁通量正比于线圈1 中电流 I

$$\boxed{\Psi_{21} = M_{21} I_1}$$

M_{21}是回路1对回路2的互感系数

$$\boxed{\Psi_{12} = M_{12} I_2}$$

互感系数与两线圈的大小、形状、相对位置及周围的介质有关（与通电与否无关）

- 互感电动势 $\varepsilon_{21} = -\dfrac{\mathrm{d}(M_{21} I_1)}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - I_1\dfrac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t}$

若回路周围不存在铁磁质且两线圈结构、相对位置及其周围介质分布不变时

$$\boxed{\varepsilon_{21}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon_{12}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}$$

讨论：

(1)可以证明：$M_{21}=M_{12}=M$

(2)互感同样反映了电磁惯性的性质

(3) 互感的单位：亨利（H）

单选题 1分

设置

两个相距不太远的平面圆线圈，怎样可使其互感系数近似为零？设其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心

A 两线圈的轴线互相垂直放置

B 两线圈并联

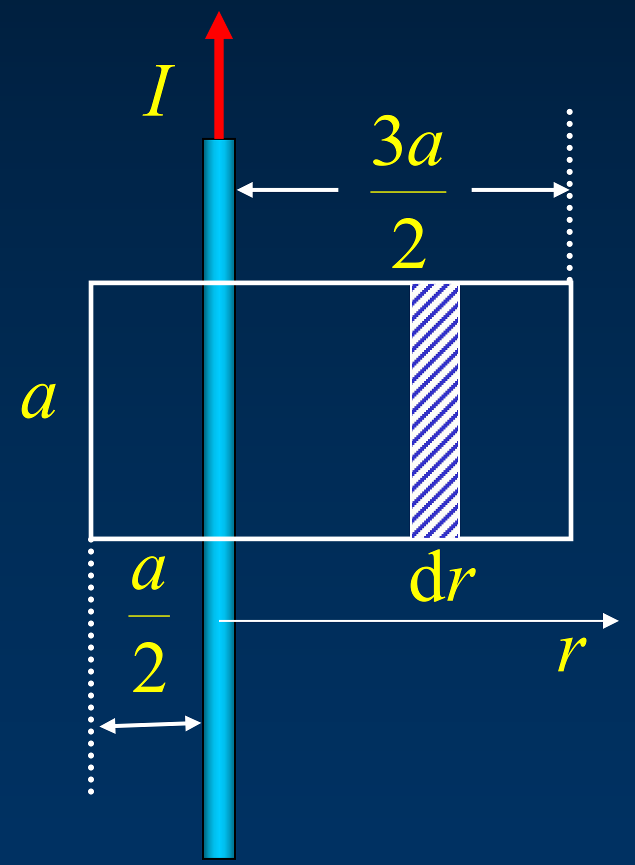
C 两线圈的轴线互相平行放置

D 两线圈串联

提交

例1： 一无限长导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ 现有一矩形线框与长直导线共面。（如图所示）

求： 互感系数和互感电动势



解： $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

穿过线框的磁通量

$$\Phi = \int_{a/2}^{3a/2} B \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

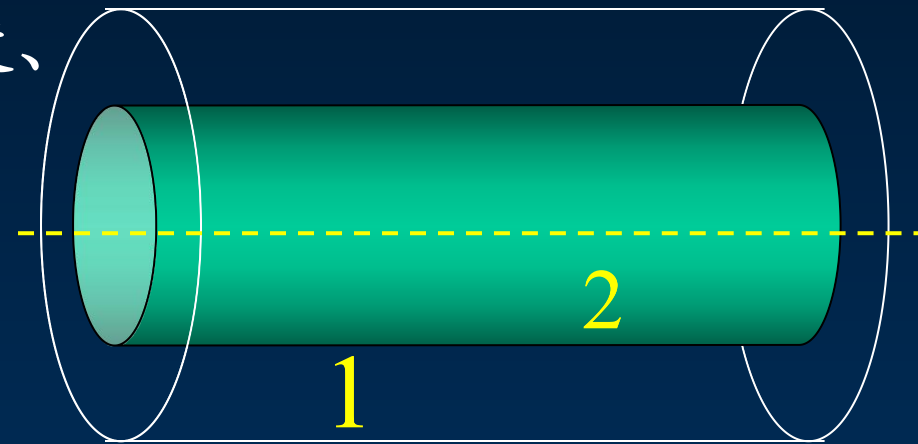
互感系数 $M = \dfrac{\Phi}{I} = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$

互感电动势 $\varepsilon = -M \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3 I_0 \omega \cos \omega t$

例2： 计算共轴的两个长直螺线管之间的互感系数

设两个螺线管的半径、长度、匝数为 $R_1, R_2, l_1, l_2, N_1, N_2$

$l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$



解： 设 $I_1 \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 \pi R_2^{\ 2}$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\ 2} I_1$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\ 2}$$

设 $I_2 \Rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$

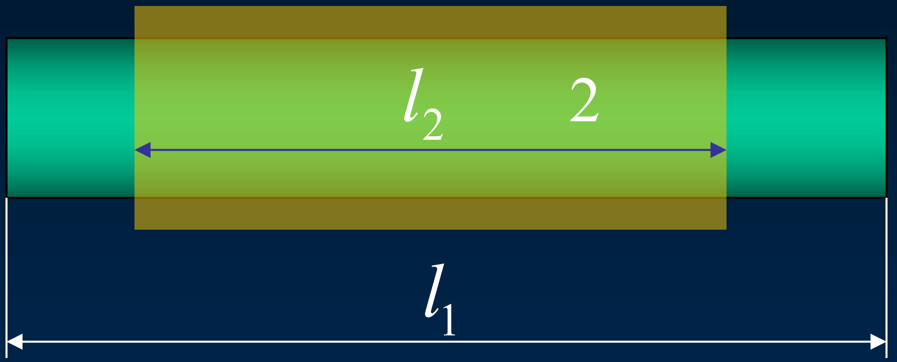
$$\Psi_{12} = N_1 B_2 \pi R_2^{\ 2}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\ 2}$$

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

思考、证明：

$R_1 = R_2 = R,\ l_1 > l_2$



$\longrightarrow$ $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$

解：(1) 设螺线管1中通有电流I_1 $\quad B_1 = \mu n_1 I_1$

$$\Phi_{21} = B_1 S_2 = \mu n_1 I_1 \pi R^2 \qquad \psi_{21} = n_2 l_2 \Phi_{21} = \mu n_1 n_2 l_2 \pi R^2 I_1$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \mu n_1 n_2 l_2 \pi R^2 = \mu n_1 n_2 V_2$$

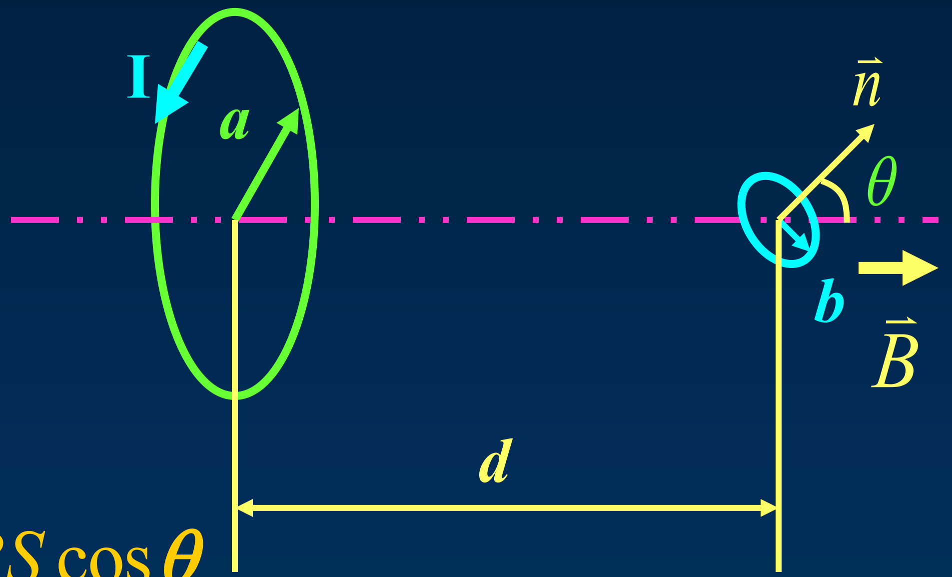
(2) 设螺线管2中通有电流I_2 $\quad B_2 = \mu n_2 I_2$

$$\Phi_{12} = B_2 S_1 = \mu n_2 I_2 \pi R^2 \qquad \psi_{12} = n_1 l_2 \Phi_{12} = \mu n_1 n_2 l_2 I_2 \pi R^2$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \mu n_1 n_2 l_2 \pi R^2 = \mu n_1 n_2 V_2$$

例3：在半径为a 的N 匝线圈的轴线上d 处，有一半径为b 匝数为 N_2 的圆线圈 $b << a$ 且两线圈法线间夹角为θ

求：互感系数



解：$$B = \frac{N\mu_0 I a^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}}$$

由于 $b << a$

$$\psi = N_2(\vec{B}\cdot\vec{S}) = N_2 BS\cos\theta$$

$$\psi = \frac{N_2 N\mu_0 I a^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2 \cos\theta$$

$$M = \frac{\psi}{I} = \frac{N_2 N\mu_0 a^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2 \cos\theta$$

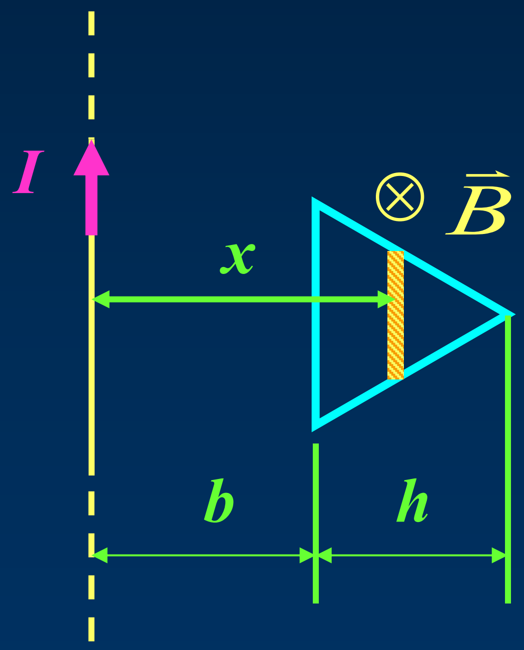
例4：一等边三角形与长直导线共面放置

求：它们之间的互感系数。

解：
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \mathrm{d}S=\frac{(h+b-x)}{\sqrt{3}/2}\cdot \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{(h+b-x)}{\sqrt{3}/2}\cdot \mathrm{d}x \qquad \phi=\int_b^{b+h}\mathrm{d}\phi$$

$$M=\frac{\phi}{I}=\frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi}\left[(h+b)\ln\frac{h+b}{b}-h\right]$$



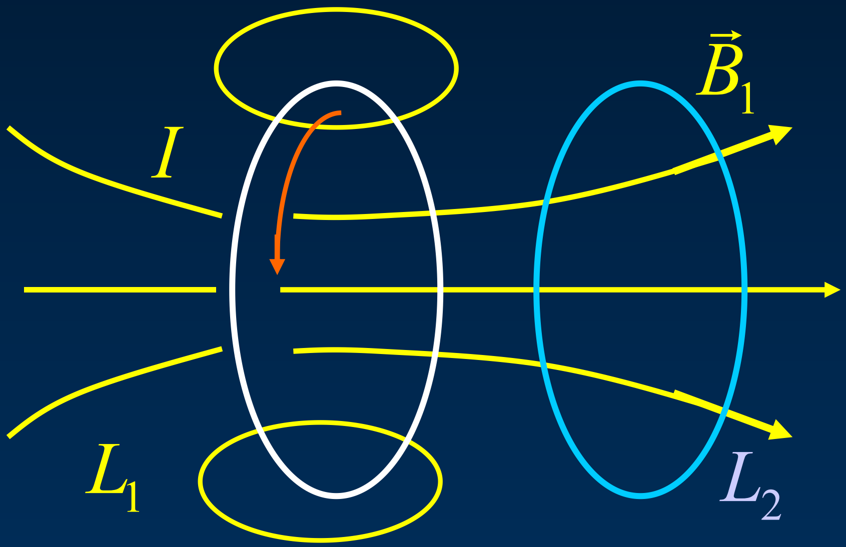
三、自感与互感的关系

$$\Psi_{21} \le \Psi_1$$

$$\Psi_{21} = K_1 \Psi_{11}, K_1 \le 1$$

$$\Psi_{12} = K_2 \Psi_{22}, K_2 \le 1$$

$$\Psi_{21} = K_1 L_1 I_1 = M_{21} I_1$$



$$K_1 L_1 = M_{21} \qquad K_2 L_2 = M_{12}$$

$$M_{12} M_{21} = K_1 K_2 L_1 L_2$$

$$M = \sqrt{K_1 K_2}\sqrt{L_1 L_2} = K\sqrt{L_1 L_2}$$

耦合系数 $K = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \Rightarrow \begin{cases} K < 1 & \text{有漏磁存在} \\ K = 1 & \text{无漏磁存在} \end{cases}$

例如长直螺线管，如 $l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$

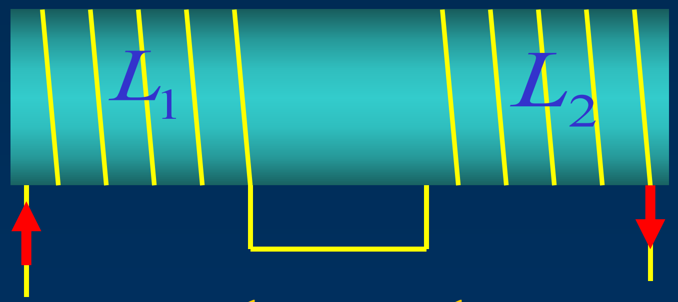
$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^{\ 2} \qquad \sqrt{L_1 L_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1 R_2}{l}$$

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{R_2}{R_1} < 1$$

K 小于 1 反映有漏磁存在

如 $l_1 = l_2, R_1 = R_2 \Longrightarrow K = 1$ K 等于1 反映无漏磁的情况

四、线圈的串接



- 线圈的顺接 (首尾相接)

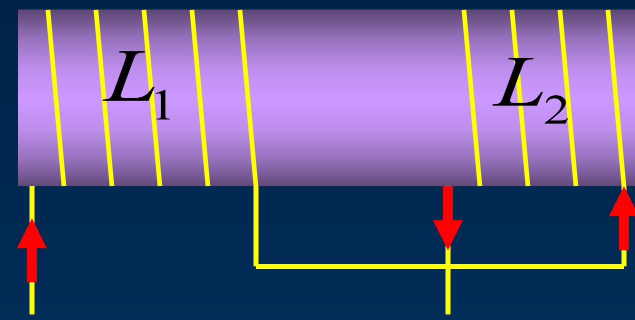
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_{12} = -M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_{12} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_{21} = -M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_{21} = -L_2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_2 + \varepsilon_{21} = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

线圈顺接的等效总自感 $\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M}$

- 线圈的反接 (首首，尾尾各相连)



当 I 增加时 ε_1 ε_{12} 方向相反

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_{12} = -L_1\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

ε_2 ε_{21} 方向相反 $\varepsilon_2 - \varepsilon_{21} = -L_2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

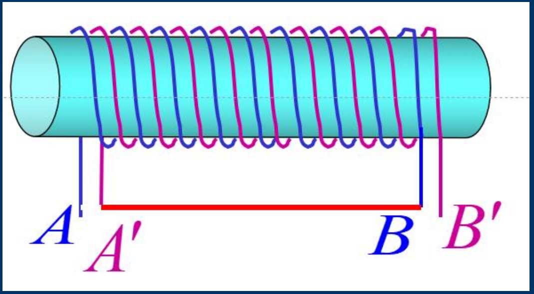
$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_{12} + \varepsilon_2 - \varepsilon_{21} = -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$$

单选题 1分

设置

如图所示，在一轴上绕有两相同的线圈 AB 和$A'B'$，每个线圈的自感均为 L，求(1)A 和 A'相连；(2) A' 和 B 相连时的总自感



A $L_{AA'} = 0$ $L_{A'B} = 0$

B $L_{AA'} = 0$ $L_{A'B} = 2L$

C $L_{AA'} = 0$ $L_{A'B} = 4L$

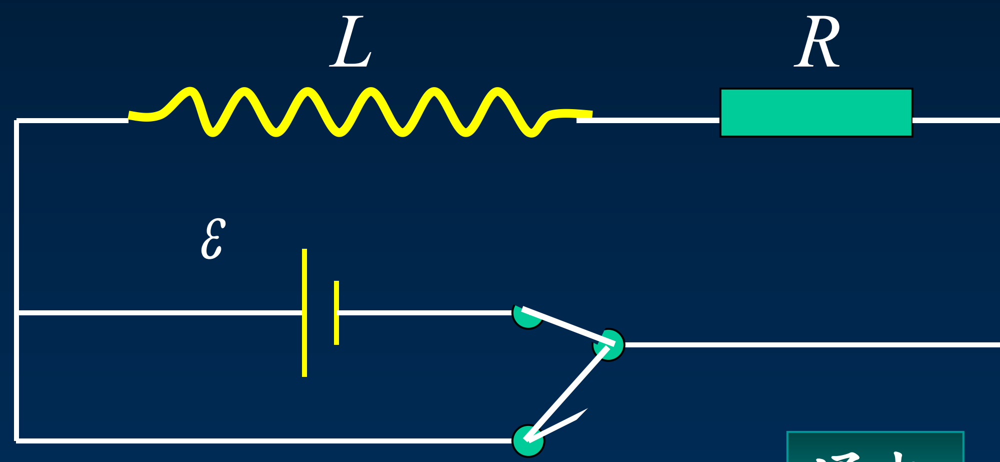
D $L_{AA'} = 2L$ $L_{A'B} = 4L$

提交

10-4 磁场能量

一、磁能的来源

- 分析 *LR* 电路



当接通K_1时(通电)

$$\varepsilon + \varepsilon_L - IR = 0$$

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - IR = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow I = 0 \longrightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

通电时电流的滋长

当K_1断开、 K_2接通时

$$0 + \varepsilon_L - IR = 0 \qquad -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - IR = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow I = \varepsilon / R \longrightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

放电时电流的衰减

结论：在原通有电流的线圈中存在能量 —— 磁能

- 自感为 L 的线圈中通有电流 I_0 时所储存的磁能

$\longrightarrow$ 电流 I_0 消失时自感电动势所做的功

设在 dt 内通过灯泡的电量 $\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}q\Delta u = \mathrm{d}q\,\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}I\mathrm{d}t = -LI\mathrm{d}I$$

电流 I_0 消失过程中，自感电动势所做的总功

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{I_0}^{0} -LI\mathrm{d}I = \boxed{\frac{1}{2}LI_0{}^2 = W_m}$$

自感磁能公式

讨论：

(1) 在通电过程中

$$\varepsilon+\varepsilon_L-IR=0 \Rightarrow \varepsilon I\mathrm{d}t=-\varepsilon_L I\mathrm{d}t+I^2R\mathrm{d}t$$

其中 $\varepsilon I\mathrm{d}t$ 为电源做的功

$-\varepsilon_L I\mathrm{d}t$ 为自感电动势反抗电流所作的功

$I^2R\mathrm{d}t$ 为电阻消耗的焦耳热

$A'=\int_0^{I_0}-\varepsilon_L I\mathrm{d}t=\int_0^{I_0}LI\mathrm{d}I$ 为电源的功转化为磁场的能量

(2) 与电容储能比较

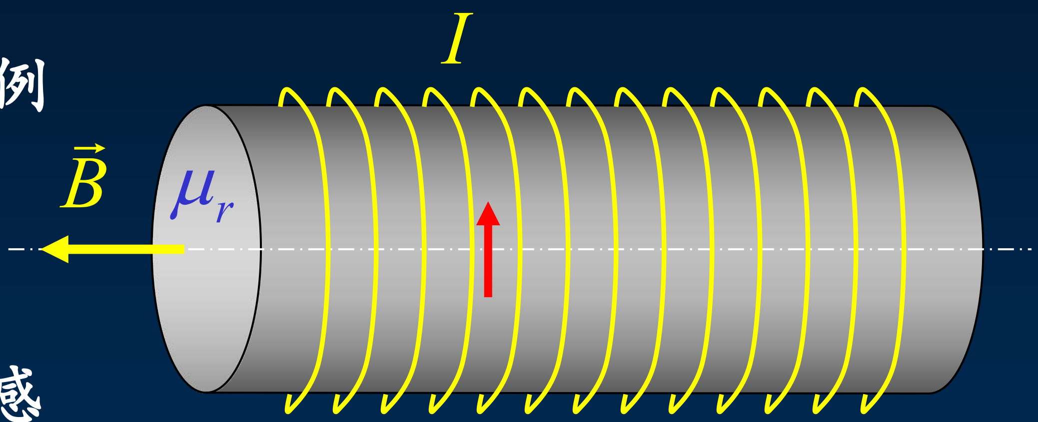
$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \Leftrightarrow W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

自感线圈也是一个储能元件，自感系数反映线圈储能的本领

二、磁能的分布

- 以无限长直螺线管为例

$$B = \mu_0 \mu_r n I$$



已知，长直螺线管的自感

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

磁能

$$W_m = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V \frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu} V$$

$$\boxed{W_m = \frac{BH}{2} V = w_m V}$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2}$$

说明

上式不仅适用于无限长直螺线管中的均匀磁场,也适用于非均匀磁场,其一般是空间和时间的函数

- 在有限区域内

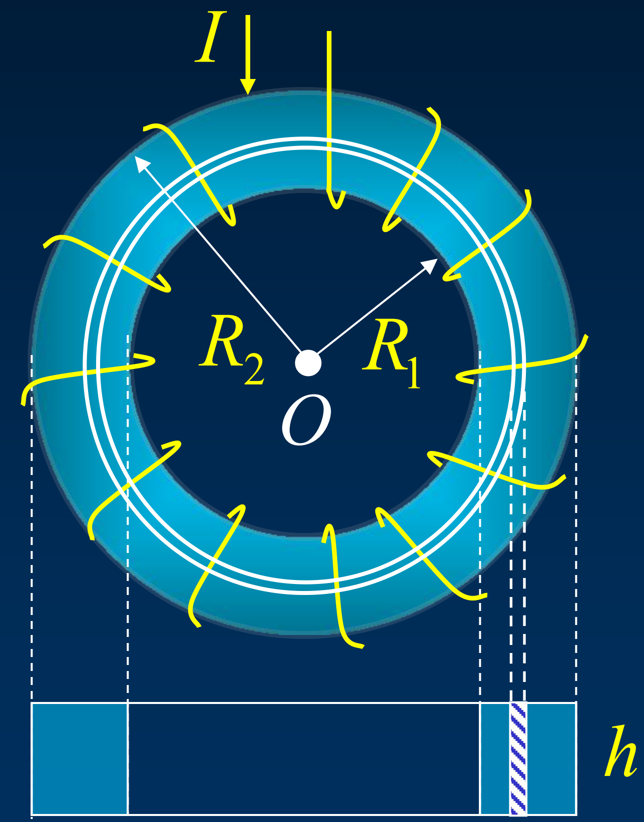
$$\boxed{W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V}$$

积分遍及磁场存在的空间

- 磁场能量密度与电场能量密度公式比较

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad \Longleftrightarrow \quad w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

例1：一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I，其中充有均匀磁介质



求：磁场能量W_m

解：根据安培环路定理，螺绕环内

$$H=\frac{NI}{2\pi r} \quad \Longleftrightarrow \quad B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

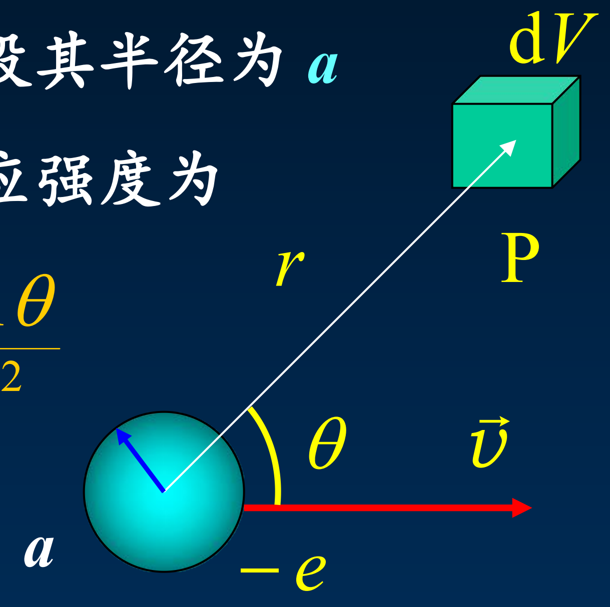
取体积元 $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

$$W_m=\int_V w_m \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

与上式对照，也可求出螺绕环的自感系数，这又提供了一种计算自感系数的方法

例2：计算低速运动的电子的磁场能量，设其半径为 a



解：低速运动的电子在空间产生的磁感应强度为

$$B=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\upsilon\sin\theta}{r^2} \Rightarrow H=-\frac{e\upsilon\sin\theta}{4\pi\, r^2}$$

$$w_m=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 e^2\upsilon^2\sin^2\theta}{16\pi^2 r^4}$$

取体积元 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ （球坐标）

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V$$

整个空间的磁场能量

$$=\int_{R_0}^{\infty}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{e^2\upsilon^2\sin^2\theta}{16\pi^2 r^4}\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 e^2\upsilon^2}{12\pi\, a}$$

- 计算磁场能量的两个基本点

(1) 求磁场分布 ⟶ $\vec{B},\vec{H}$ ⟶ 建立磁场能量密度

(2) 定体积元 $\mathrm{d}V$ ⟶ 遍及磁场存在的空间积分

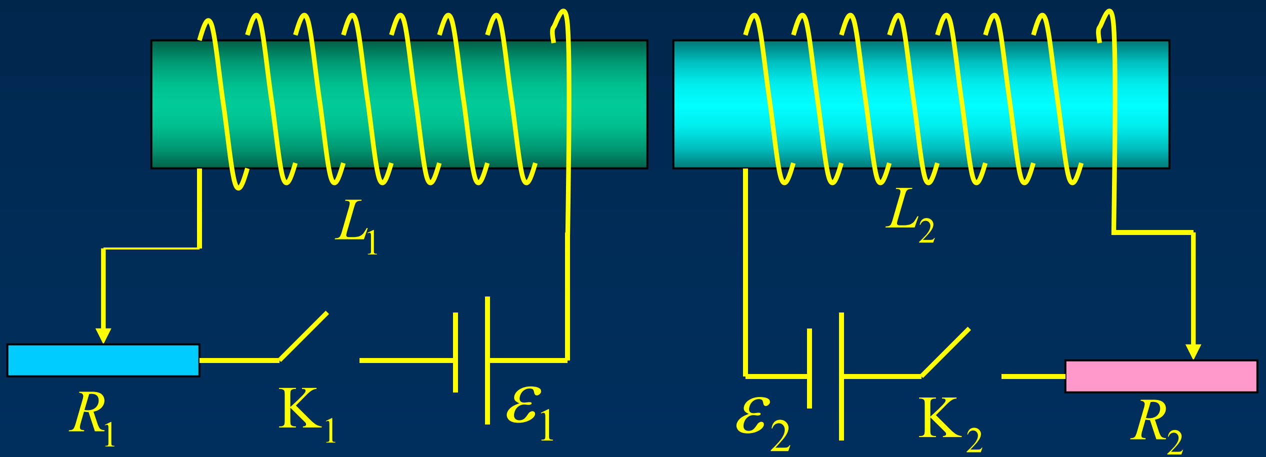
三、互感磁能

先闭合 K_1

$i_1 : 0 \to I_1$

⇓

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1{}^2$$



再闭合 K_2 $\quad i_2 : 0 \to I_2$ ⟶ $W_2 = \dfrac{1}{2} L_2 I_2{}^2$

$W = W_1 + W_2$ ？ 需要考虑互感的影响

当回路 2 电流增加时，在回路 1 中产生互感电动势

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$ 将使电流 I_1 减小

若保 I_1 不变，电源 1 提供的能量应等于互感电动势所做的功

$$W_{12} = -\int_0^t \varepsilon_{12} I_1 \mathrm{d}t = \int_0^{I_2} M I_1 \mathrm{d}i_2 = M I_1 I_2$$ （互感能量）

总磁能

$$\boxed{W = \frac{1}{2}L_1 I_1^{\ 2} + \frac{1}{2}L_2 I_2^{\ 2} + M I_1 I_2}$$

注意

两载流线圈的总磁能与建立 I_1，I_2 的具体步骤无关

单选题 1分

设置

有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为r_1和r_2，管内充满均匀介质，其磁导率分别为μ_1和μ_2，设$r_1:r_2=1:2$，$\mu_1:\mu_2=2:1$当将两只螺线管串联的电路中通电稳定后，其自感系数之比$L_1:L_2$与磁能之比$W_{m1}:W_{m2}$分别为

A $L_1:L_2=1:1$ $W_{m1}:W_{m2}=1:1$

B $L_1:L_2=1:2$ $W_{m1}:W_{m2}=1:1$

C $L_1:L_2=1:2$ $W_{m1}:W_{m2}=1:2$

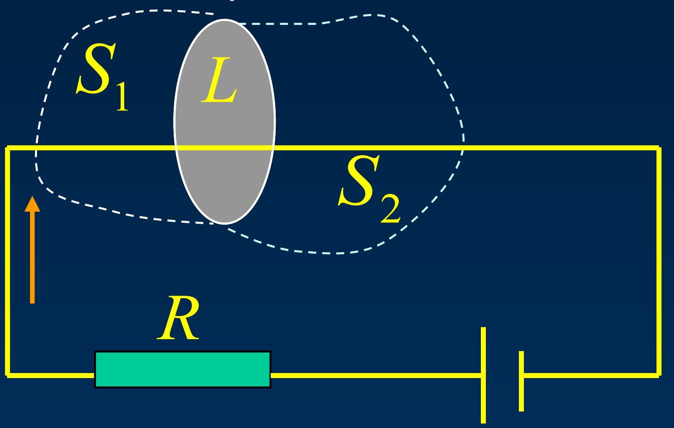
D $L_1:L_2=2:1$ $W_{m1}:W_{m2}=2:1$

提交

10-5 麦克斯韦电磁场理论简介

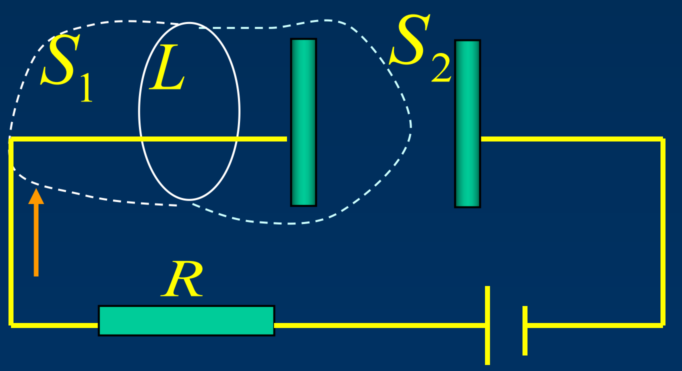
变化磁场 ⟶ 产生感生电场　　变化电场 ⟶ 产生磁场

一、问题的提出



对稳恒电流 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{对}S_1\text{面：} & \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I \\ \text{对}S_2\text{面：} & \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \end{array}\right\} \text{矛盾}$$



稳恒磁场的安培环路定理已不适用于非稳恒电流的电路

二、位移电流假设

- 非稳恒电路中，在传导电流中断处必发生电荷分布的变化

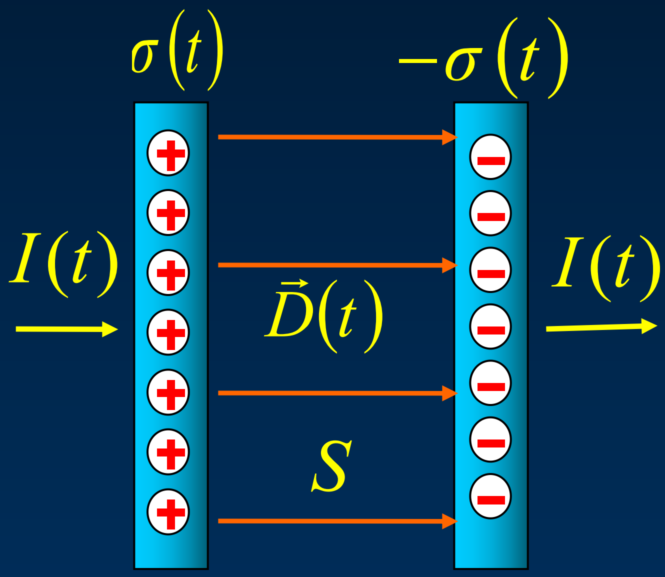
$\mathrm{d}t : I = \mathrm{d}q / \mathrm{d}t$　极板上电荷随时间变化率等于传导电流

- 电荷分布的变化必引起电场的变化 (以平行板电容器为例)

电位移通量

$$\Phi_D = DS = \Phi_D(t)$$

$$D = \sigma$$



$$\Phi_D(t) = \sigma(t)S = q(t)$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = I_D$$ —位移电流(电场变化等效为一种电流)

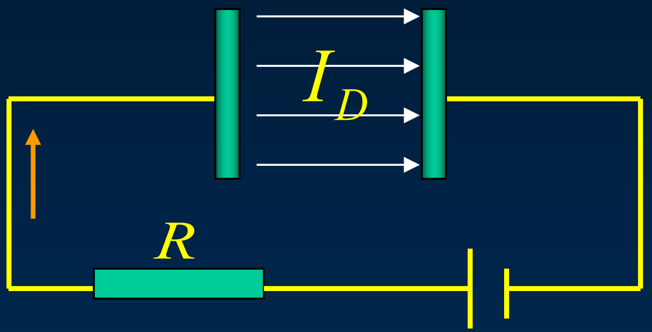
电位移通量的变化率等于传导电流强度

一般情况位移电流 $$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

. 位移电流与传导电流连接起来恰好构成连续的闭合电流

麦克斯韦提出全电流的概念

$$\boxed{I_{全} = I_{传导} + I_{位移}}$$



在普遍情形下，全电流在空间永远是连续不中断的，并且构成闭合回路

麦克斯韦将安培环路定理推广

位移电流 密度 $\vec{j}_D$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{全} = I_{传导} + I_{位移} = I_{传导} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(全电流安培环路定理)

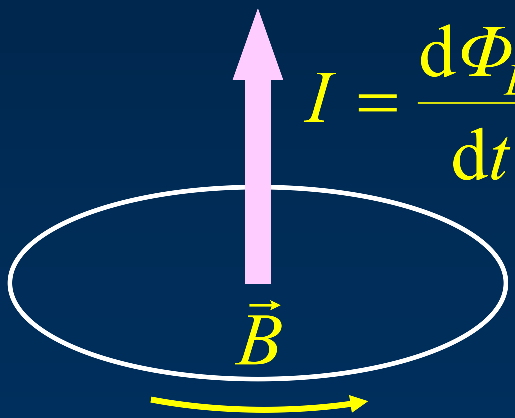
若传导电流为零 $\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 变化电场产生磁场的数学表达式

三、位移电流、传导电流的比较

1. 位移电流具有磁效应 —— 服从右螺旋关系

—与传导电流相同

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$



2. 位移电流与传导电流不同之处

(1) 产生机理不同

(2) 存在条件不同

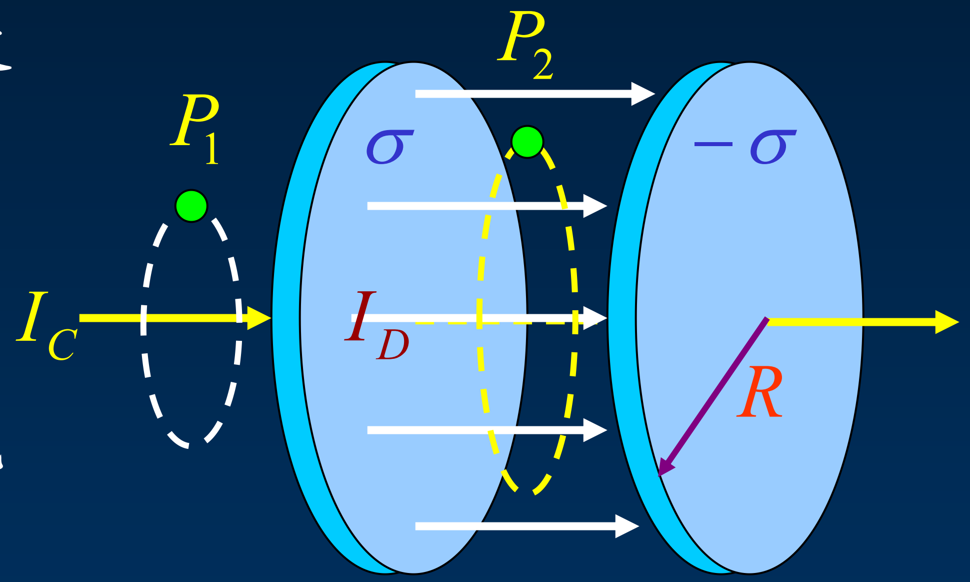
位移电流可以存在于真空中、导体中、介质中

3. 位移电流没有热效应，传导电流产生焦耳热

例1： 设平行板电容器极板为圆板，半径为R，两极板间距为d，用缓变电流 I_C 对电容器充电

求： P_1 ,P_2 点处的磁感应强度

解： 任一时刻极板间的电场



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0}$$

极板间任一点的位移电流

$$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{I_C}{\pi R^2}$$

由全电流安培环路定理

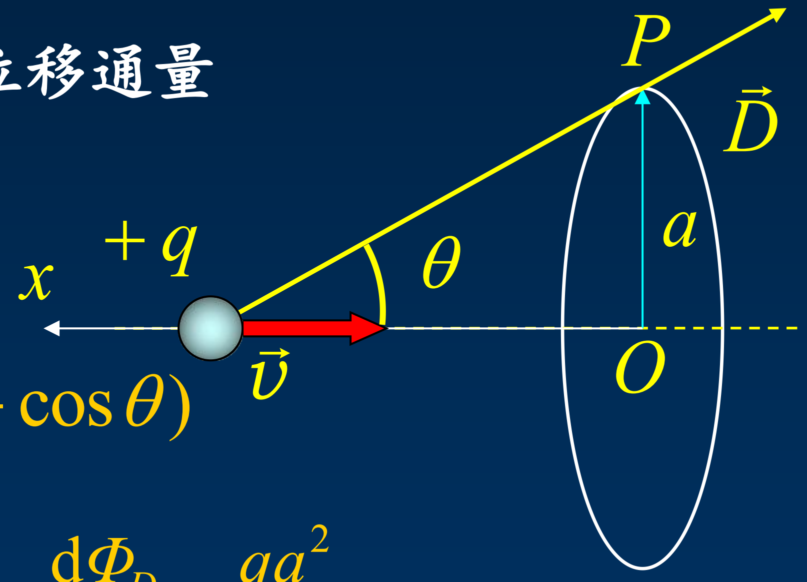
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{cases} P_1 \quad H_1 2\pi r_1 = I_C \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi r_1} \\ P_2 \quad H_2 2\pi r_2 = \pi r_2^2 j_D \\ \qquad B_2 = \dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi R^2} r_2 \end{cases}$$

例2： 电荷 $+q$ 以速度 v 向O点运动。在O点处作一半径为 a 的圆，圆面与速度方向垂直。

求： 通过该圆面的位移电流和圆周上各点处的磁感应强度？

解： 在任一时刻，穿过圆面的电位移通量



$$\phi_D = \int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = DS_{球冠}$$

$$= \frac{q}{4\pi r^2}\cdot 2\pi rh = \frac{q}{2r}r(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{q}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \Rightarrow I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \frac{qa^2}{2r^3}v$$

由全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_D \Rightarrow H 2\pi a = I_D \qquad H = \frac{qva}{4\pi r^3} = \frac{qv\sin\theta}{4\pi r^2}$$

运动电荷的磁场

四、麦克斯韦方程组

1. 电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S (\vec{D}_1 + \vec{D}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i + 0$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i \ \left(= \int_V \rho \mathrm{d}V\right)}$$

静电场是有源场、感应电场是涡旋场

2. 磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场

3. 电场的环路定理—— 法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

静电场是保守场，变化磁场可以激发涡旋电场

4. 全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_\mathrm{L} (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_\mathrm{L} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_\mathrm{S} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

传导电流和变化电场可以激发涡旋磁场

5. 电磁物态方程

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$　　$\vec{B} = \mu \vec{H}$　　$\vec{j} = \sigma \vec{E}$　σ 为电导率

- 四个方程称为麦克斯韦方程组的积分形式。麦克斯韦方程组能完全描述电磁场的动力学过程