$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&10\\0&1&0&0&-15\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_5=10\boldsymbol{\alpha}_1-15\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4$.

(2)$W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5\}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 W 的一组基，$\dim(W)=4$.

23. **解** (1)f 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=14,\lambda_2=\lambda_3=0$.

对 $\lambda_1=14$，解方程组 $(14\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_2=\lambda_3=0$，解方程组 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，正交化、单位化后得 $\boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=\left(-\frac{3}{\sqrt{70}},-\frac{6}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}}\right)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $14y_1^2$.

(2)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 及(1)得 $y_1=0$. 即 $x_1+2x_2+3x_3=0$. 解得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

24. **证法 1**　设 $r(\boldsymbol{A})=r$，当 $r(\boldsymbol{A})=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，可对角化；当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，也可对角化.

当 $0<r(\boldsymbol{A})<n$ 时，记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]$，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，则由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\alpha}_j$，且 $\boldsymbol{\alpha}_j\neq 0(j=1,2,\cdots,r)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1$，属于特征值 1 有 r 个线性无关特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$.

而 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且属于 0 有 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r$ 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 也可相似对角化.

证法 2　当 $r(\boldsymbol{A})=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，可对角化；当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，可对角化.

当 $0<r(\boldsymbol{A})<n$ 时，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\leqslant n$. 又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{I})=n$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

从而 $[n-r(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]+[n-r(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 也可相似对角化.

期末考试自测题二参考答案及解答

一、单项选择题

1. D　2. B　3. A　4. B

二、填空题

1. $(-1)^{mn}ab$.　2. 6.　3. $c>6$.　4. $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&2\\0&1&3\end{bmatrix}$, $(3,-5,2)^{\mathrm{T}}$.

三、解　$D_n \xlongequal[i\geqslant 2]{r_i-2r_1} \begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&-2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&-2\end{vmatrix} \xlongequal{c_1+\sum\limits_{j\geqslant 2}\frac{1}{2}c_j} \begin{vmatrix}\frac{n-1}{2}&1&\cdots&1\\&-2&&\\&&\ddots&\\&&&-2\end{vmatrix}$

$=\dfrac{n-1}{2}(-2)^{n-1}$.

四、解　设过 L 与 π 垂直的平面方程为 $\pi_1: x+y-z-1+\lambda(-x+y-z-1)=0$，由于 π_1 与 π 垂直，解得 $\lambda=1$，即 $\pi_1: y-z-1=0$. 故所求投影直线方程为 $\begin{cases}x+y+z=0\\y-z-1=0\end{cases}$.

五、解　显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\geqslant 2$，因 $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3|=0$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，得 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，从而 $|\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3|=0$，即 $\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a=0$.

又因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)$，由

$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{array}\right]$，得 $\dfrac{5-b}{3}=0$，故 $b=5$，$a=15$.

六、解　系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a+4$，故 (1) 当 $a\neq-4$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\1&1&2&b\\4&5&10&2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-2&-4&1\\0&-1&-2&b+1\\0&0&0&3-3b\end{array}\right],$$

当 $b\neq1$ 时，则 $r(\boldsymbol{A})=2<r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=3$，方程组无解；

(3) 当 $a=-4, b=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=2<3$，此时方程组有无穷多解，由

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得非齐次线性方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\eta}^*=(3,-2,0)^{\mathrm{T}}$，对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}$. 故非齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$，$c$ 为任意实数.

七、证　由伴随矩阵的性质有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，此时 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，且方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有一个线性无关的

解，又 $\boldsymbol{A}^*$ 的每个列向量是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

当 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$ 时，由矩阵的秩的定义，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，即 $A_{ij}=0$，由伴随矩阵的定义，有 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，此时 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

八、解　所给二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&2\\2&2&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-2\\1&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-4$.

对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对应于特征值 $\lambda_3=-4$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 单位化，得正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，二次型经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$. 二次型不是正定的.

九、解答见第 8 章典型例题例 8 - 15.

期末考试自测题三参考答案及解答

一、单项选择题

1. A　2. B　3. B　4. D

二、填空题

1. 0.　2. $x-y+z=0$.　3. $(-12,24,-24)^{\mathrm{T}}$.　4. $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

三、解　将前 n 列加到最后一列，再按最后一列展开得 $D_{n+1}=(n+1)(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$.

四、解　L_1 过点 $P_1(-1,-3,2)$，方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=(3,-2,-1)$，$L_2$ 过点 $P_2(2,-1,1)$，方向向量为 $\boldsymbol{l}_2=(2,3,-5)$. 由 M 及 L_1 所确定的平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{P_1M}\times\boldsymbol{l}_1=(4,0,12)$，故此平面方程为 $\pi_1:x+3z-5=0$.

由 M 及 L_2 所确定的平面 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{P_2M}\times\boldsymbol{l}_2=(14,\ -26,\ -10)$，故此平面方程为 $\pi_2:7x-13y-5z-22=0$. 所求直线为 π_1,π_2 的交线，即 $\begin{cases}x+3z-5=0\\7x-13y-5z-22=0\end{cases}$.

五、解　对增广矩阵实施初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right]$$