线性代数与解析几何

期终模拟试题讲解（二）

一、填空题

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -8\end{pmatrix}$,则$\det(AA^T)$的值为? 100 .

解 $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -8\end{vmatrix}=-10,$

$$\det(AA^T)=\det(A)\det(A^T)=(\det(A))^2=100$$

2.设A、B均为可逆方阵,则$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$.

3.若线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+ax_3=1 \\ 2x_1+6x_2-8x_3=1 \end{cases}$无解,则常数$a=$ $\underline{-4}$.

解 线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+ax_3=1 \\ 2x_1+6x_2-8x_3=1 \end{cases}$无解$\Leftrightarrow r(A)\neq r(\bar{A})$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & 1 \\ 2 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & -8-2a & -1 \end{array}\right)$$

$r(A)\neq r(\bar{A})\Leftrightarrow -8-2a=0$, 即$a=-4$.

4.已知向量$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}5 & -3\\-3 & k\end{pmatrix}$的属于特征值$\lambda=2$的特征向量,则常数$k=$ <u>5</u>.

解 $A\xi=\lambda\xi$,即$\begin{pmatrix}5 & -3\\-3 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\-3+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\lambda=2,\quad k=5.$$

5. 方程组$x_1+x_2-x_3=0$的基础解系是

$\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(1,0,1)^T$.

解 $x_1=-x_2+x_3$

分别令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

二、单项选择题

1.设向量$\alpha=(1,3,-5,4)^T$,,矩阵$A=\alpha\alpha^T$,则$\det(A)$等于?

(a)0　　(b)1　　(c)51　　(d)$\sqrt{51}$　　【 a 】

解　$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$为4阶矩阵,

$r(A)\le r[\alpha]\le 1$,

故$\det(A)=0$.

2.设A为3阶方阵,$\det(A)=0$的充分必要条件是

(a) A的列向量组线性无关.? (b) A的行向量组线性相关.

(c) A的秩为3 (d) A中有两行对应成比例.?

【 b 】

解 A为3阶方阵,

$$\det(A)=0 \Leftrightarrow r(A)<3$$

$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组的秩<3

$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组线性相关

2.设A为3阶方阵,$\det(A)=0$的充分必要条件是

(a) A的列向量组线性无关.? (b) A的行向量组线性相关.

(c) A的秩为3 (d) A中有两行对应成比例.?

【 b 】

解 A为3阶方阵,

$$\det(A)=0 \Leftrightarrow r(A)<3$$

$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组的秩<3

$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组线性相关

3.设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$,其中$\alpha_i$为3维行向量$(i=1,2,3)$,

矩阵$B=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3-2\alpha_1\end{pmatrix}$,$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则必有

$(a)AP_1P_2=B$　$(b)AP_2P_1=B$　$(c)P_1P_2A=B$　$(d)P_2P_1A=B$

【 c 】

解

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+(-2)r_1}B,$$ 故$P_1P_2A=B.$

4.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性相关,而向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关,则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的极大无关组是?

(a)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(b)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(c)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　(d)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$

【 d 】

5.n阶方阵A正定的充要条件是

(a)$|A|>0$　　(b)A的n个特征值均大于零

(c)A有n个线性无关的特征向量　　(d)A为对称阵

【 b 】

三、求过三个平面$2x+y-z-2=0, x-3y+z+1=0$和$x+y+z-3=0$的交点，且平行于平面$x+y+2z-2=0$的平面方程。

解　过三个平面交点的平面束方程为

$$2x+y-z-2+\lambda(x-3y+z+1)+\mu(x+y+z-3)=0,$$

由平行于平面$x+y+2z-2=0$知法向量平行，

得$\lambda=-\dfrac{1}{4}, \mu=-\dfrac{19}{4}$,

即　$x+y+2z-4=0$

四、当a、b为何值时,线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有唯一解, 无解或有无穷多解？并在有无穷多解时, 求出结构式通解.

解 方程组的增广矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）$a \neq 1$时，原方程组有唯一的解。

（2）$a = 1, b \neq -1$时，原方程组无解。

（3）$a = 1, b = -1$时，原方程组有无穷多解。

此时 $$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应齐次方程组的基础解系为

$$\xi_0 = (-1,1,0,0)^T, \xi_1 = (1,-2,1,0)^T, \xi_2 = (1,-2,0,1)^T.$$

所求结构式通解为$x = \xi_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$，其中$k_1, k_2$为任意常数.

五、求向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)$，$\alpha_2=(-1,1,-6,6)$，$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)$，$\alpha_5=(2,4,4,9)$的极大线性无关组与秩，并将其余向量用极大无关组线性表示.

解 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$，其系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有（1）$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$;

（2）极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

（3）$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$; $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$

六、已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求$A^{50}$.

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4$

特征向量为$p_1=(1,-1,1)^T$，

$p_2=(-1,0,1)^T, p_3=(1,2,1)^T$

正交阵为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$A^{50}=P\mathrm{diag}(1,2,4)^{50}P^T$$

$=\cdots$ （自己完成）

七、判定下面的二次型是否正定

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

解 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&2&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$,

由于$A_1=5>0$, $A_2=\begin{vmatrix}5&2\\2&2\end{vmatrix}>0$, $A_3=\begin{vmatrix}5&2&-4\\2&2&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}>0$,

所以A是正定矩阵，从而二次型$f(x_1,x_2,x_3)$正定.

八、若三阶方阵A有三个互不相等的特征值$1, 2, 4$, 设$B = A^2 - 2A - I$，求$\det(B^*)$.

解 B的特征值为$-2, -1, 7$,

$$\det(B) = 14,$$

$$\det(B^*) = 14^2.$$

九、证明：n阶实对称矩阵A正定的充要条件是存在n个线性无关的实向量$\alpha_i=(m_{i1},m_{i2},\cdots m_{in}),i=1,2,\cdots,n,$使得$A=\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n.$

解 A正定的充要条件是存在可逆阵M使$A=M^TM,$

M可逆的充要条件是存在实的线性无关的行向量

$$\alpha_i=(m_{i1},m_{i2},\cdots m_{in}),i=1,2,\cdots,n,\quad 使M=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

即 $A=M^TM=\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n.$