第五章　定积分

5.1 定积分的概念与性质

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

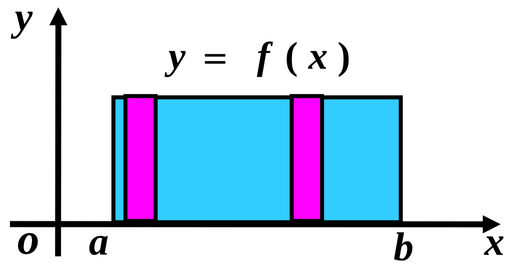
1 定积分问题举例

2 定积分的定义

3 定积分的性质

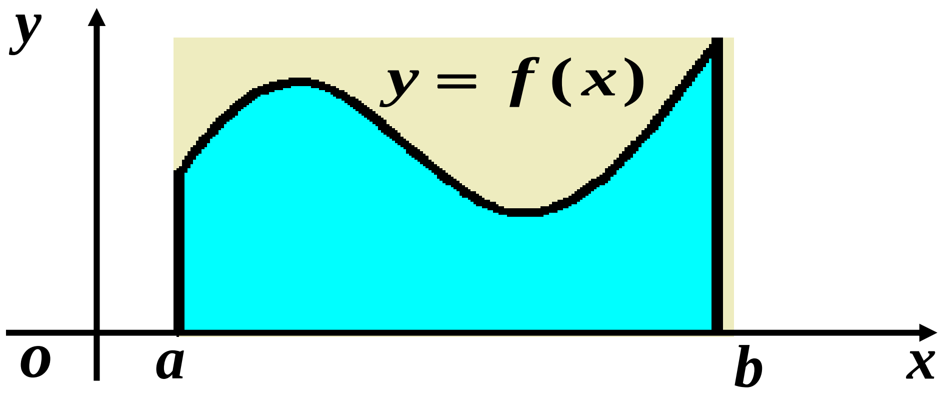
1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题



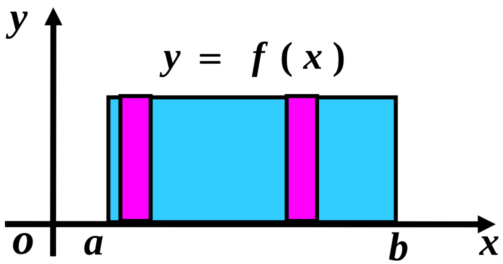
$f(x) \equiv k$, 面积 $A = k(b-a)$

$f(x) \not\equiv k$, (设f 是[a,b]上的非负连续函数)



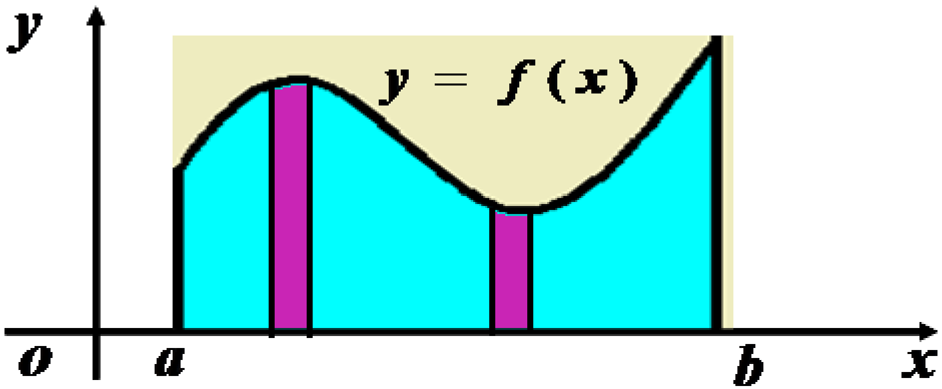
1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题



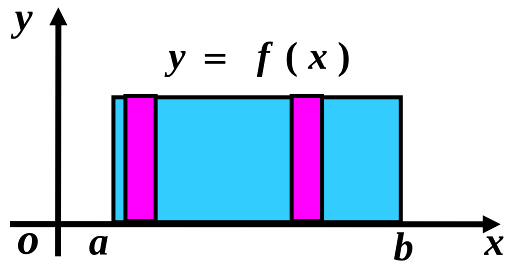
$f(x)\equiv k,$ 面积 $A=k(b-a)$

$f(x)\neq k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)



1 定积分问题举例

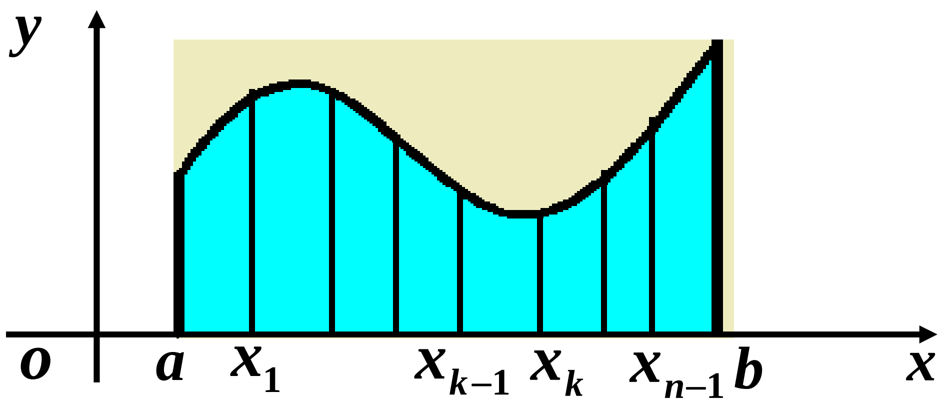
例1 曲边梯形的面积问题



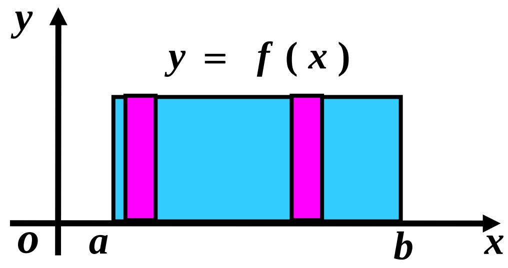
$f(x) \equiv k$, 面积 $A = k(b-a)$

$f(x) \not\equiv k$, (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$



1 定积分问题举例



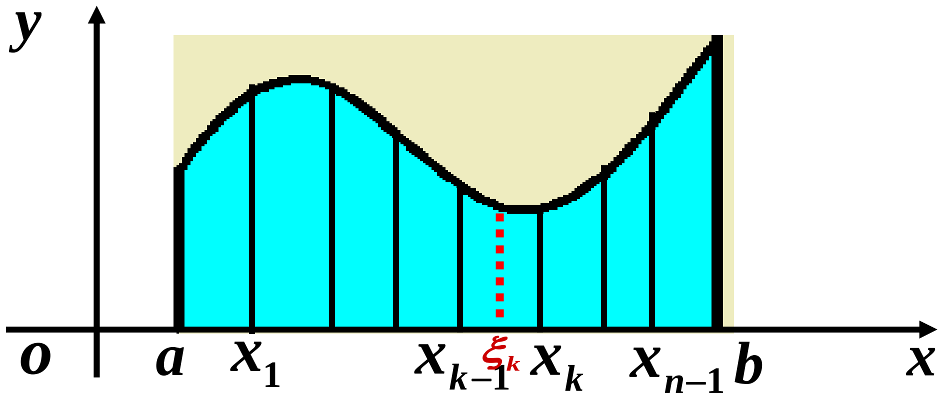
例1 曲边梯形的面积问题

$f(x)\equiv k,$ 面积 $A=k(b-a)$

$f(x)\not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

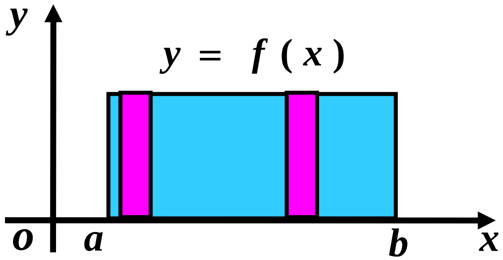
1) 分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

2) 匀 $\Delta A_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k\ (\Delta x_k=x_k-x_{k-1})$ 任取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$



1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题



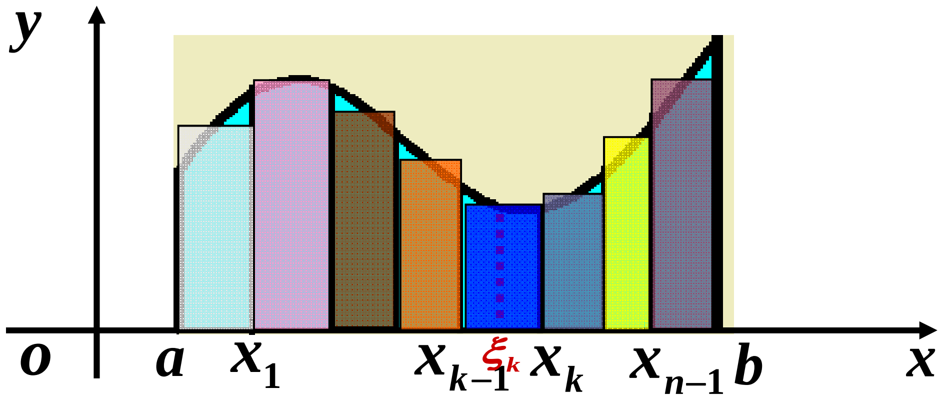
$f(x)\equiv k,$ 面积 $A=k(b-a)$

$f(x)\not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

1) 分 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

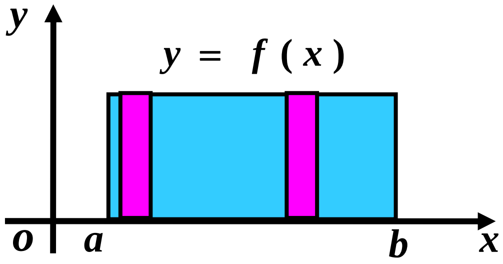
2) 匀 $\Delta A_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k\ (\Delta x_k=x_k-x_{k-1})$ 任取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$

3) 合 $A\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$



1 定积分问题举例

例1 曲边梯形的面积问题



$f(x) \equiv k,$ 面积 $A = k(b-a)$

$f(x) \not\equiv k,$ (设f 是$[a,b]$上的非负连续函数)

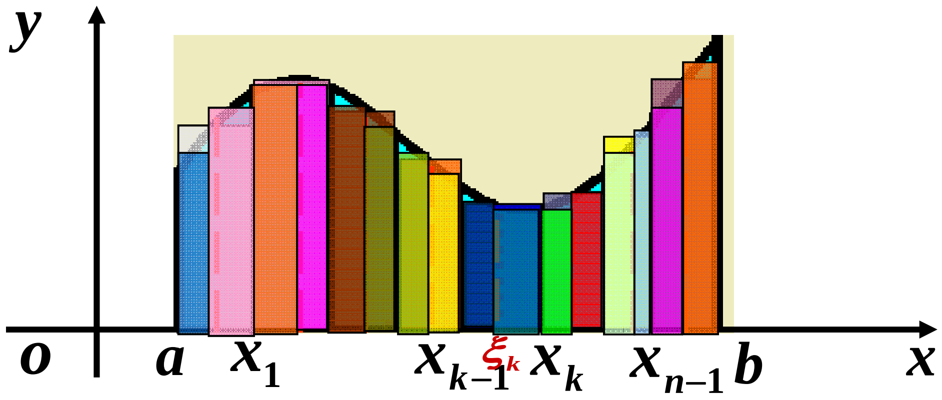
1) 分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2) 匀 $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k \ (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ 任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

3) 合 $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

4) 精 $A = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

$d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$



例2 变速直线运动的位移问题

匀速： 位移 $s = v(b-a)$ 乘法

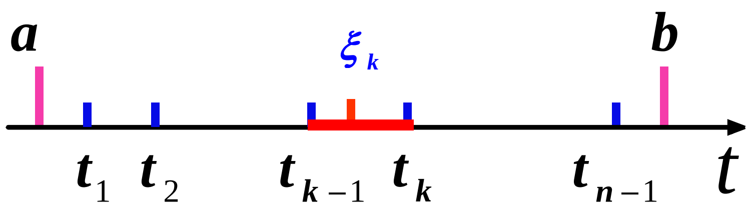
非匀速： (设$v(t)$ 是$[a,b]$上的连续函数)

1) 分 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$

2) 匀 $\Delta s_k \approx v(\xi_k)\Delta t_k \; (\Delta t_k = t_k - t_{k-1}) \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$

3) 合 $$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$$

4) 精 $$s = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$$



两个问题的共性：

1) 求解具有同样特征的量

体现在两个方面：

（1） 都是分布在区间上的量，且对区间具有可加性；

（2） 量是非均匀分布在区间上的.

2) 解决问题的思想方法和步骤相同

思想方法都是四步：分、匀、和、精，

核心都是匀、精，在均匀分布时都采用积运算.

3) 都归结为同样数学结构的和式极限的计算

都是乘积的和式的极限，只是函数的表示不同罢了.

主 要 内 容

2 定积分的定义

1）定义（定积分）设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数,

1）分　任意划分$[a,b]$，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

2）匀　任取$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，做乘积 $f(\xi_k)\Delta x_k$.

3）合　$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

4）精　如果无论$[a,b]$怎样划分,ξ_k怎样选取,$d \to 0$时

$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$趋于同一常数，则称 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$[a,b]$称为积分区间.

积分上限

积分下限

$$\int_a^b \boxed{f(x)\mathrm{d}x} = \lim_{d\to 0} \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}$$

被积函数　积分变量　被积式　积分和

注:

1）$d\to 0$与$n\to+\infty$不等价,所以不能用$n\to\infty$代替$d\to 0$;

2）两个任意性;　3）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$仅与$f(x)$和$[a,b]$有关.

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

积分是处理均匀量的积运算在处理相应非均匀量中的发展

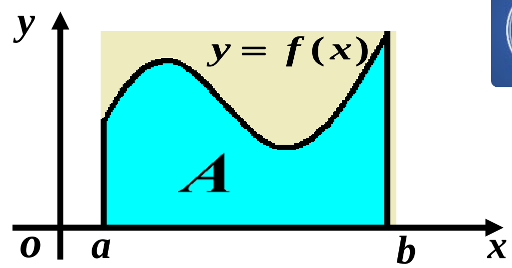
补充规定：

① $a > b$时， $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

② $a = b$时， $\int_a^b f(x)dx = 0$

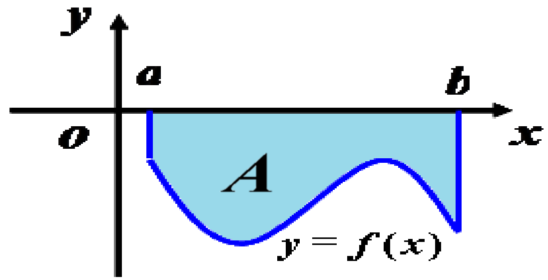
2）定积分的几何意义

$f(x) > 0, \int_a^b f(x)dx = A$　曲边梯形面积

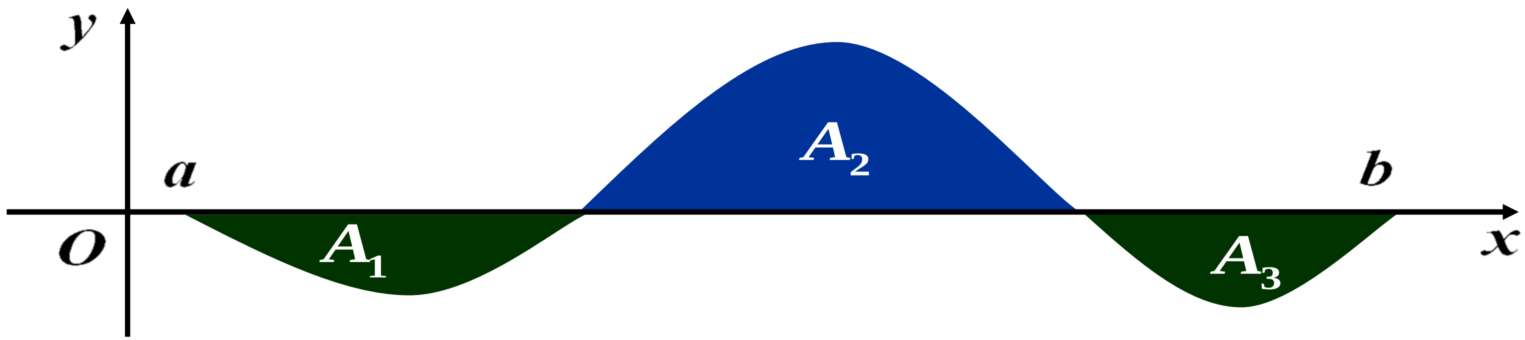


$f(x) < 0, \int_a^b f(x)dx = -A$

曲边梯形面积的负值



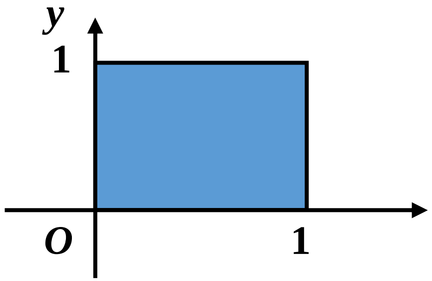
$f(x)$变号，$\int_a^b f(x)dx = A_2 - A_1 - A_3$



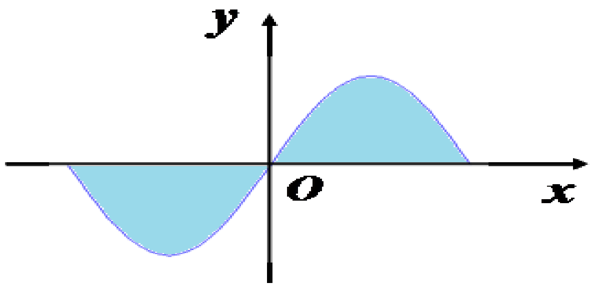
例3 利用定积分的几何意义求下列积分的值.

(1) $\int_0^1 dx$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$;　　(3) $\int_{-1}^{1}|x|dx$.

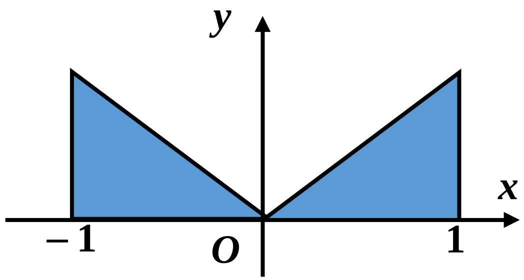
解 (1) $\int_0^1 dx = 1\cdot 1 = 1.$



(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0.$



(3) $\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_0^1 x dx = 1.$



3）定积分存在的条件

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

可积性

计算

可积 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 有界

可积的充分条件

1) $f(x)$在$[a,b]$上连续；

2) $f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点.

例4 计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 由于 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以可积. 将 $[0,1]$ 分为 n 等份，并取 ξ_k 为第 k 个子区间的右端点，则有

$$\Delta x_k=\frac{1}{n},\xi_k=\frac{k}{n}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

主要内容

1 定积分问题举例

2 定积分的定义

3 定积分的性质

3. 定积分的性质　　Riemann积分　　$R[a,b]$

1）线性性质：设 $f,g\in R[a,b],\alpha,\beta\in R$，则 $\alpha f+\beta g\in R[a,b]$

且 $$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

2) 对区间的可加性：设 I 是有限闭区间，$a,b,c\in I$

且 $f\in R(I)$，则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

证　设 $a<c<b$,

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{[a,c]}f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{[c,b]}f(\xi_k)\Delta x_k$$

3) 积分不等式：设 $f, g \in R[a,b]$

（1）若 $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$

则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(3) 若 $m \le f \le M$，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

4）积分中值定理

设 $f\in C[a,b]$, 则 $\exists\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

证 由于 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $m\le f(x)\le M$,

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M \qquad f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

函数的平均值　n 个数 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 的平均值

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

设 $f(x) \in C[a,b]$, 将 $[a,b]$ 区间 n 等分，$\xi_k = x_k$

$$\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

$$\boxed{\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \overline{f}}$$

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章
一元函数积分学及其应用

3.2 微积分基本公式与基本定理

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

1 微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

两个基本问题

1. 定积分的存在性

1）必要条件 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

2）充分条件 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点

2. 定积分的计算 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

1 微积分基本公式

定义1（原函数） 如果在区间 I 上，$F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

定理1（Newton-Leibniz公式） 设 $f\in R[a,b], F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b}$$

微积分基本公式

例1 计算下列积分

1） $\int_0^{\pi} \sin x dx$　　　　2） $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$

解　1） $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$

2） $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1$

主要内容

2 微积分基本定理

定理 2（微积分学第一基本定理） 设 $f\in C[a,b]$，则

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)}$$

推论1 设 $f\in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$上必有原函数.

例2 1）设 $\Phi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ ，求 $\Phi'(x)$

2）设 $F(x)=\int_{e^{3x}}^{0}\sin t^2 dt$，求 $F'(x)$.

解 1）$\Phi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$

$g(u)=\int_0^{u} e^{-t^2}dt$ 与 $u=\varphi(x)=x^2$ 的复合

$$\Phi'(x)=g'(u)\varphi'(x)=e^{-u^2}(2x)=2xe^{-x^4}$$

2） $F(x)=\int_{e^{3x}}^{0}\sin t^2dt=-\int_0^{e^{3x}}\sin t^2dt$

$$F'(x)=-\sin e^{6x}(3e^{3x})=-3e^{3x}\sin e^{6x}$$

$$\left(\int_{e^x}^{x^2}\sin t^2dt\right)'=\left(\int_0^{x^2}\sin t^2dt+\int_{e^x}^{0}\sin t^2dt\right)'$$

$$=2x\sin x^4-e^x\sin e^{2x}$$

一般的：若 $\varphi(x),\psi(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，则

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

若 $F'(x)=f(x)$ 则 $\left[F(x)+C\right]'=f(x)$

若 $G'(x)=f(x)$ 则 $\left[G(x)-F(x)\right]'=0$

$G(x)-F(x)=C$ $\boxed{G(x)=F(x)+C}$

定理3（微积分第二基本定理）设 $F(x)$是 $f(x)$在 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$在 I 上的所有原函数.

例4　设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ e^x & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)dx$

解　$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 e^x dx = \frac{1}{3} + e^2 - e$

主要内容

1 微积分基本公式

2 微积分基本定理

3 不定积分

3 不定积分

定义 2（不定积分） $f(x)$ 在区间 I 上所有原函数的

一般表达式 $\boxed{\int f(x)dx =} F(x)+C$

性质1 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ $d\int f(x)dx = f(x)dx$

$\int f'(x)dx = f(x)+C$ $\int df(x) = f(x)+C$

性质2 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

基本积分表

$$1.\int k\,dx = kx + C$$

$$2.\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$3.\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$4.\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$5.\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$6.\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$7.\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$8.\int \sec^{2} x\,dx = \tan x + C$$

$$9.\int \csc^{2} x\,dx = -\cot x + C$$

$$10.\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$11.\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$12.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$$

$$13.\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \arctan x + C$$

例5 求下列不定积分

$$1)\int \frac{1+x^2}{x\sqrt{x}}dx \qquad 2)\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

$$3)\int \tan^2 x dx$$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章
一元函数积分学及其应用

3.3 两种基本积分法

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 换元积分法

2 分部积分法

3 初等函数的积分问题

1 换元积分法

不定积分的第一换元法

设 $F'(u)=f(u)$　　　　$\int f(u)du=F(u)+C$

若 $u=\varphi(x)$

则 $\{F[\varphi(x)]\}'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$　　　　$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$

定理1 设 f 为连续函数，$\varphi(x)$ 有连续导数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left(\int f(u)du\right)_{u=\varphi(x)}$$

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = (\int f(u)du)_{u=\varphi(x)}}$$

例1 求 $\int e^{\sin x}\cos x dx$

解 $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x}(\sin x)' dx = \int e^{\sin x} d\sin x$

$$\overset{\sin x = u}{=} \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C$$

例2 求 $\int (1+3x)^{100} dx$

解 $\int (1+3x)^{100} dx = \frac{1}{3}\int (1+3x)^{100} d(1+3x) = \frac{1}{303}(1+3x)^{101} + C$

例3 求 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (a>0)$

解 $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例4 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$

解 $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

例5 求 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

解 $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(-\int \frac{1}{a-x}d(a-x) + \int \frac{1}{a+x}d(a+x)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(-\ln|a-x| + \ln|a+x|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

例6 求 $\int \tan x dx$

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

例7 求 $\int \cot x dx$

解 $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

例8 求 $\int \cos^2 x dx$

解 $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C$

例9 求 $\int \cos^3 x dx$

解 $\int \cos^3 x dx = \int (1-\sin^2 x) d\sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

例10 求 $\int \frac{1}{\cos x} dx$

解 $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$$= \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

例11 求 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

例12 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x} + C$

例13 求 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

解 $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d \arctan x = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$

例14 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x} + C$

例15 求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

解 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x}$

$$= 2\int \arcsin\sqrt{x} d \arcsin\sqrt{x} = (\arcsin\sqrt{x})^2 + C$$

不定积分的第二换元法

第一换元法 $\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = (\int f(u)du)_{u=\varphi(x)}}$

定理 2 设 f 连续，φ 有连续导数，φ' 定号，则

$$\int f(x)dx = (\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

证 $$\frac{d}{dx}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

例1 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$

解 令 $x = a\sin t\ (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a\cos t dt$,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin t \cdot \cos t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例2 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \quad (a>0)$

解 令 $x = a\tan t\ (-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2})$，则 $dx = a\sec^2 t dt$,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a\sec^2 t dt}{a^3 \sec^3 t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\tan t \cdot \frac{1}{\sec t} + C$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

例3 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$

解 令 $x = a\sec t \ (0<t<\frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a\sec t\tan t dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \sec t dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

一般地，如果被积函数中含有

1）$\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$（或 $x=a\cos t$ ）

2）$\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$（或 $x=asht$ ）

3）$\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$（或 $x=acht$ ）

例4 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

解 令 $\sqrt{1+x}=t$, 则 $x=t^2-1, dx=2tdt,$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2[t-\ln(1+t)]+C$$

$$=2[\sqrt{1+x}-\ln(1+\sqrt{1+x})]+C$$

例5 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

解 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx=d(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

定积分换元法

引例 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \quad (a > 0)$

解 令 $x = a\sin t \ (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a\cos t dt$,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin t \cdot \cos t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

定理3.3 设函数 f 在有限区间 I 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，且，$R(\varphi)\subseteq I$ ，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$ 其中 $a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)$

证 设 $F'(x)=f(x)$，则

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)]=F'(x)\varphi'(t)=f(x)\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F(b)-F(a)$$

例1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证

1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

特别的 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

2） $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

并利用此结论计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

例2 设 $f(x)$ 为连续的周期函数，其周期为 T, 试证

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

证1 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx \overset{x=u+T}{=} \int_0^a f(u)du$$

证2 令 $F(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$

$$F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

$$F(a) = C \qquad F(0) = \int_0^T f(x)dx$$

例3 计算 $\int_0^{n\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

小结 $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$

(1) 变量代换选取是关键;

(2) 换变量同时要换积分上下限.

主要内容

1. 换元积分法
2. 分部积分法
3. 初等函数的积分问题

2 分部积分法

设函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 有连续导数，则

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

例1 求下列不定积分

1） $\int xe^x dx$　　2) $\int x\sin x dx$

3） $\int e^x \sin x dx$　　4） $\int x\ln x dx$

小结 $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$

(1) 何时用？ 两类不同函数相乘

(2) 如何用？ $\int \mathrm{p}_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}\,x, \int \mathrm{p}_n(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\,x, \int \mathrm{p}_n(x)\cos\alpha x dx;$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx, \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx;$$

$$\int P_n(x)\ln x dx, \int P_n(x)\arctan x dx, \int P_n \arcsin x dx;$$

定积分分部积分公式

设函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 有连续导数，则

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

例1 计算 $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

例2 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

例3 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

解 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

当 n 为奇数 $$I_n=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1$$

当 n 为偶数 $$I_n=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0$$

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

例4 计算 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

例5 计算 $\int_0^\pi x\sin^n x\,dx$

主要内容

1. 换元积分法
2. 分部积分法
3. 初等函数的积分问题

3. 初等函数的积分问题

第五章
一元函数积分学及其应用

5.4 反常积分

数学与统计学院
武忠祥

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}$$

1) 区间 $\boxed{[a,b]}$ 有限

2) 函数 $\boxed{f(x)}$ 有界

主要内容

1 无穷区间上的积分

2 无界函数的积分

3 Γ 函数

1 无穷区间上的积分

定义 设 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，$\forall b>a$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，

1）$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$

2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx$

3）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx$

例1 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$

例2 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

解 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x} = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

例3 判定 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (a > 0)$ 的敛散性

解 当 $p = 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

因此,当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leq 1$ 时发散.

主要内容

1 无穷区间上的积分

2 无界函数的积分

3 Γ 函数

2 无界函数的反常积分

定义 设 $f(x)$ 定义在 $(a,b]$ 上，且在 a 附近无界，

$\forall \varepsilon > 0, f(x)$ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上Riemann可积，

1）$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

2）$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

3）$$\int_a^b f(x)dx \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

例1 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

解 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1\right) = 2$

例2 计算反常积分 $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

解 $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{1+\delta}^{2} = 3(x-1)^{1/3}\Big|_0^2 = 6$$

例3 判定 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 和 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 的敛散性 $(a<b, p>0)$.

解 当 $p=1$ 时,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b = +\infty$$

当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b = \begin{cases} +\infty, & p>1, \\ \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & 0<p<1. \end{cases}$$

因此,当 $p<1$ 时收敛,当 $p\geq 1$ 时发散.

主要内容

1 无穷区间上的积分

2 无界函数的积分

3 Γ 函数

3 Γ 函数

定义 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad \alpha>0$

递推公式 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha}de^{-x}$$

$$= -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= n!\Gamma(1) = n!$$

第五章
一元函数积分学及其应用

5.5 单元小结

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 定积分的概念与性质

2 微积分基本公式与基本定理

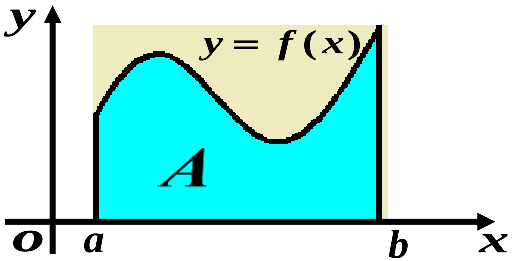
3 两种基本积分法

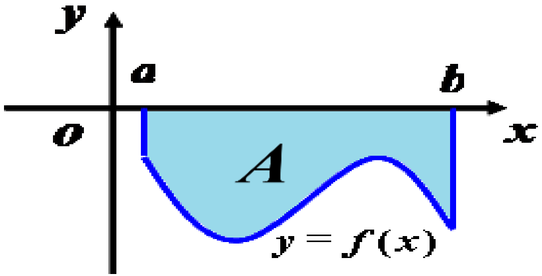
（一）定积分的概念与性质

1. 定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

2. 定积分的几何意义





3. 定积分的存在条件

1）必要条件　$f(x)$ 有界；

2）充分条件

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

（2）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点；

4. 定积分的性质

1）不等式：

（1）若 $f(x) \le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

（3） $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

2）中值定理： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a) \quad (a < c < b)$$

主要内容

1 定积分的概念与性质

2 微积分基本公式与基本定理

3 两种基本积分法

（二）微积分基本公式与基本定理

1. 微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$　　（Newton-Leibniz公式）

2. 微积分基本定理

定理　（微积分学第一基本定理） 设 $f \in C[a,b]$，则

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$$

定理（微积分第二基本定理） 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数.

3. 不定积分

定义 （不定积分） $f(x)$ 在区间 I 上所有原函数的一般表达式 $\boxed{\int f(x)dx =} F(x)+C$

性质1 $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ $\qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$

$$\int f'(x)dx = f(x)+C \qquad \int df(x) = f(x)+C$$

性质2 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

基本积分表

【例1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$.

【解】

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

【注】 $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$

【例2】设 $f(x)$ 连续，试求下列函数的导数

1）$\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt$;　　2）$\int_0^x (t-x)f(t)dt$;

3）$\int_0^x \sin(x-t)^2 dt$　　4）$\int_1^2 f(x+t)dt$.

【解】1）$(\int_{e^x}^{x^2} f(t)dt)' = 2xf(x^2) - e^x f(e^x)$

2）$\int_0^x (t-x)f(t)dt = \int_0^x tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$

$$(\int_0^x (t-x)f(t)dt)' = xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$$

3）$\int_0^x \sin(x-t)^2 dt \overset{x-t=u}{=} \int_0^x \sin u^2 du$

4) $\int_{1}^{2} f(x+t)dt \overset{x+t=u}{=} \int_{x+1}^{x+2} f(u)du$

$$(\int_{1}^{2} f(x+t)dt)' = f(x+2) - f(x+1)$$

变上限求导的三个类型：

(1) $(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$

(2) $(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt)'$

(3) $(\int_{a}^{b} f(x,t)dt)'$

【例3】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{{}^1\!/_3\, x^4}$

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x\ln(1+\sin^2 x)}{x^3}$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^3}=\frac{3}{2}$$

【例4】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【解】 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du \qquad (x-t=u)$

原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(c)}{xf(c)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

【例5】试证：$F(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt$ 在 $x\ge 0$ 上最大值不超过 $\dfrac{1}{(2n+2)\cdot(2n+3)}$.

【证】 令 $F'(x)=(x-x^2)\sin^{2n} x=0$ 得

$$x=1, x=k\pi, (k=1,2,\cdots)$$

$x=k\pi$ 不是 $F(x)$ 的极值点，

$F(x)$ 在 $x=1$ 取极大值，唯一的极值点，则为最大值.

$$F(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt \le \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

主要内容

1 定积分的概念与性质

2 微积分基本公式与基本定理

3 两种基本积分法

（三）两种基本积分法

1. 换元积分法

1) 不定积分的第一换元法

定理1 设 f 为连续函数，$\varphi(x)$ 有连续导数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = (\int f(u)du)_{u=\varphi(x)}$$

2) 不定积分的第二换元法

定理2 设 f 连续，φ 有连续导数，φ' 定号，则

$$\int f(x)dx = (\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

3) 定积分换元法

定理3 设函数 f 在有限区间 I 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，且，$R(\varphi)\subseteq I$ ，则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

其中 $a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)$

2. 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_a^b u \, \mathrm{d} v = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, \mathrm{d} u.$$

(1) 何时用？　两类不同函数相乘

(2) 如何用？　$\int \mathrm{p}_n(x) e^{\alpha x} \, \mathrm{d} x, \int \mathrm{p}_n(x) \sin \alpha x \, \mathrm{d} x, \int \mathrm{p}_n(x) \cos \alpha x dx;$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx;$$

$$\int P_n(x) \ln x dx, \int P_n(x) \arctan x dx, \int P_n arc \sin x dx;$$

几个常用公式：

（1） $$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\ \text{为奇函数时,} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x)\ \text{为偶函数时.} \end{cases}$$

（2） $$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n\text{偶} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{奇} \end{cases}$$

(4) $$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

【例1】 $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

解法1 $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$

解法2 $I=\int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$

【例2 】 $I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}$.

解 $I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin x}}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x\sqrt{\sin x}}$

$$=\int\frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}}=2\int\frac{d\sqrt{\sin x}}{1-\sin^2 x}$$

$$\underline{\underline{令\sqrt{\sin x}=t}}\ 2\int\frac{dt}{1-t^4}=2\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)}=\int(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1+t^2})dt$$

【例 3】 $I=\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

解 $I=2\int xd\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx$

$$\int\sqrt{e^x-1}dx=\int\frac{2t^2}{1+t^2}dt \qquad (\sqrt{e^x-1}=t)$$

$$=2t-2\arctan t+C$$

【例4】 $$I=\int\frac{1+x^4}{1+x^6}dx$$

解 $$I=\int\frac{1+x^4}{1+x^6}dx=\int\frac{1+x^4-x^2+x^2}{1+x^6}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{1+x^6}$$

【例5】若 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，求 $I=\int\frac{1}{f(x)}dx$.

解 由 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$ 知

$$xf(x)=(\arcsin+C)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

则 $$I=\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C$$

【例6 】设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geq 0$ 时，

$$F(x)f(x)=\frac{xe^{x}}{2(1+x)^{2}}.$$ 已知 $F(0)=1, F(x)>0.$ 求 $f(x).$

解法1 由 $F(x)f(x)=\frac{1}{2}(F^{2}(x))'=\frac{xe^{x}}{2(1+x)^{2}}$

$$\therefore\ F^{2}(x)=\int\frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}dx=\int\frac{(x+1)-1}{(1+x)^{2}}e^{x}dx=\int\frac{e^{x}}{1+x}dx-\int\frac{e^{x}}{(1+x)^{2}}dx$$

$$=\int\frac{de^{x}}{1+x}-\int\frac{e^{x}}{(1+x)^{2}}dx=\frac{e^{x}}{1+x}+C$$

解法2

$$F^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\int(xe^x)d\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{xe^x}{(1+x)}+\int\frac{e^x(1+x)}{1+x}dx$$

【例7】 设 $f'(e^x)=\sin x$, 求 $f(x)$.

解法1　令 $e^x=t$, 则 $f'(t)=\sin\ln t$

$$f(t)=\int \sin\ln t\,dt$$

$$=t\sin\ln t-\int t\cos\ln t\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=t\sin\ln t-t\cos\ln t-\int t\sin\ln t\cdot\frac{1}{t}dt$$

则 $f(t)=\dfrac{t}{2}[\sin\ln t-\cos\ln t]+C$

解法2 由 $f'(e^x)=\sin x$ 知 $\int f'(e^x)de^x=\int \sin x de^x$

$$f(e^x)=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int \sin x\,de^x$$

【例8】求不定积分 $\int e^{-|x|}dx$.

解 $\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} -e^{-x}+C_1, & x \geq 0, \\ e^{x}+C_2, & x < 0. \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+}(-e^{-x}+C_1) = -1+C_1$$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \lim_{x\to 0^-}(e^{x}+C_2) = 1+C_2 \qquad \therefore \ -1+C_1 = 1+C_2$$

令 $C_1 = C$，则 $C_2 = -2+C$.

故 $\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} -e^{-x}+C, & x \geq 0, \\ e^{x}-2+C, & x < 0. \end{cases}$

【例9】 $$I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx;$$

解 $$I=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^1[1-\sqrt{1-x^2}]dx$$

$$=4-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=4-\pi$$

【例10】 $I=\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

解 令 $x=\sin t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t\,dt}{(2-\sin^2 t)\cos t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

【例11】设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

解法1 $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dt - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

解法2 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$

$$=(x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{(x-\pi)\sin x}{\pi-x}dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

【例12】 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\sin^{4}xdx$;

解 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\sin^{4}x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^{4}t\,dt \qquad (x=-t)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{t}}\sin^{4}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\sin^{4}x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{x}}\sin^{4}x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

【例13】已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 令 $x-t=u$, 得 $\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

从而有 $\int_0^x f(u)du = \sin x$

令 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 得: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第六章 定积分的应用

6.2 定积分在几何上的应用

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 直角坐标系下面积的计算

2 极坐标系下面积的计算

3 旋转体体积的计算

4 平面截面积已知的立体体积的计算

5 平面曲线弧长的计算

1. 直角坐标系下面积的计算

例1 求曲线 $y^2 = x$ 与 $y = x^2$ 所围成平面图形的面积. $[\frac{1}{3}]$

例2 求曲线 $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 围成平面图形的面积. $[18]$

例3 求摆线一拱 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围成平面图形的面积. $[3\pi a^2]$

主要内容

1 直角坐标系下面积的计算

2 极坐标系下面积的计算

3 旋转体体积的计算

4 平面截面积已知的立体体积的计算

5 平面曲线弧长的计算

2. 极坐标系下面积的计算

例 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围成图形的面积. $[\frac{3}{2}\pi a^2]$

主要内容

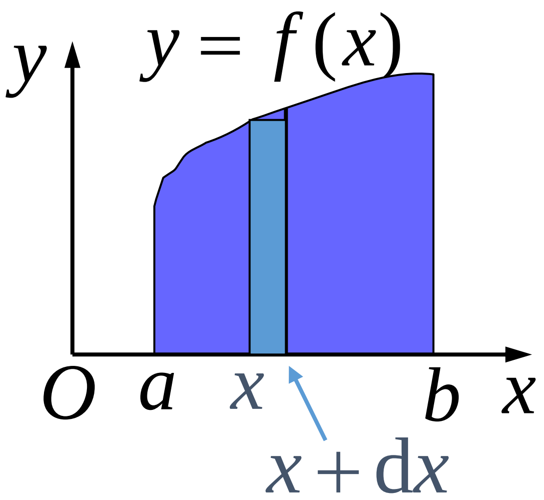
1. 直角坐标系下面积的计算
2. 极坐标系下面积的计算
3. 旋转体体积的计算
4. 平面截面积已知的立体体积的计算
5. 平面曲线弧长的计算

3. 旋转体体积的计算

1) 绕 x 轴旋转

$$dV_x = \pi f^2(x)dx$$

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$



2) 绕 y 轴旋转

$$dV_y = 2\pi x f(x)dx$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

例 求曲线 $xy=a\ (a>0)$ 与 $x=a,\ x=2a$ 及 x 轴所围成平面图形分别绕下列直线旋转一周所产生的旋转体的体积.

1） x 轴 $[\dfrac{\pi a}{2}]$

2） $y=1$ $[\pi a(2\ln 2-\dfrac{1}{2})]$

3） y 轴 $[2\pi a^2]$

主要内容

1 直角坐标系下面积的计算

2 极坐标系下面积的计算

3 旋转体体积的计算

4 平面截面积已知的立体体积的计算

5 平面曲线弧长的计算

4. 平面截面积已知的立体体积的计算

例 求圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围体积. $[\frac{16}{3}R^3]$

主要内容

1 直角坐标系下面积的计算

2 极坐标系下面积的计算

3 旋转体体积的计算

4 平面截面积已知的立体体积的计算

5 平面曲线弧长的计算

5. 平面曲线弧长的计算

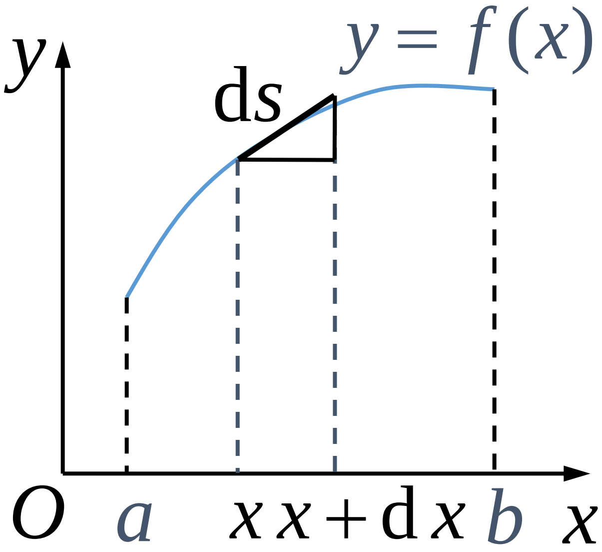
弧长微元 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

1) $y=f(x)\quad(a\le x\le b)$

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

2) $x=x(t),y=y(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}dt.$$



3) $\rho=\rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

例 求下列曲线段的弧长：

1）曲线 $y=2x^{\frac{3}{2}}\ \ (0\le x\le 1)$;

2）摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$;

3）心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$.

解 1）$s=\int_0^1\sqrt{1+[3\sqrt{x}]^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+9x}dx=\frac{2}{27}[10^{3/2}-1]$

2）$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}dt=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a$$

3）$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+(a\sin\theta)^2}d\theta=8a$

第六章　定积分的应用

6.3 定积分在物理上的应用

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 变力沿直线做功的计算

2 液体压力的计算

3 引力的计算

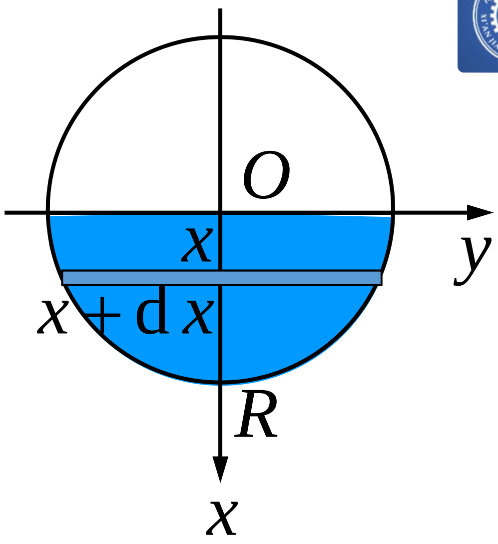
1. 变力沿直线做功的计算

例1 在 x 轴的坐标原点处有一电量为 q 的正电荷， 求在该电场力作用下将一单位正电荷从 $x=a$ 处沿 x 轴移动到 $x=b$ 处所作的功 $(0<a<b)$.

解
$$dW = F(x)dx = k\frac{q}{x^2}dx$$

$$W = \int_a^b k\frac{q}{x^2}dx = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

例2 一个半球形容器，其半径为 $R(m)$, 容器中盛满了水，若将容器中水全部从容器口抽出，问需作功多少？



解 $dV = \pi y^2 dx \ = \pi(R^2 - x^2)dx$

$$dW = (x)(\rho g dV) = xg\pi y^2 dx$$

$$= xg\pi(R^2 - x^2)dx$$

$$W = \int_0^R dW \ = \pi g \int_0^R x(R^2 - x^2)dx = \frac{\pi R^4}{4} \cdot 10^4 (J)$$

主要内容

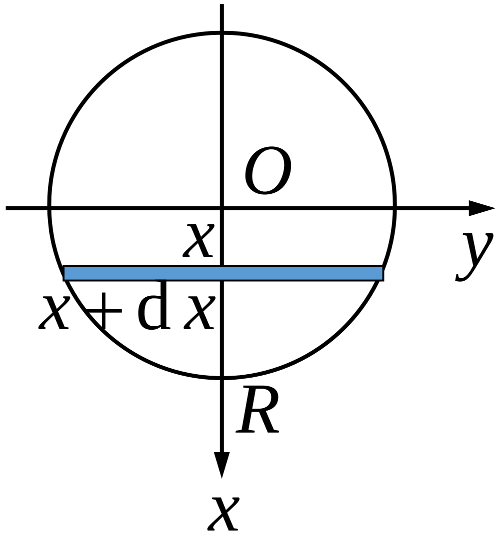
1 变力沿直线做功的计算

2 液体压力的计算

3 引力的计算

2. 液体压力的计算

例 将半径为 R 的薄圆片垂直插入入水中一半，问圆片一侧所受压力.



解 $dF = PdA = \rho g x \cdot 2ydx$

$$= 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

$$F = \int_0^R dF = \int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{2}{3}\rho g R^3$$

主要内容

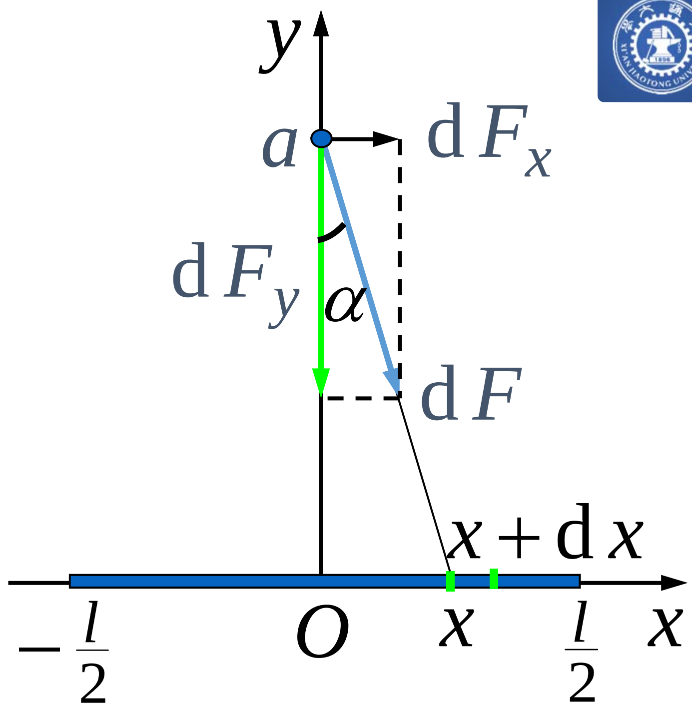
1 变力沿直线做功的计算

2 液体压力的计算

3 引力的计算

3. 引力的计算

例 有一长为 l 的均匀带电直导线，电荷线密度为 δ, 在其中垂线上且与导线距离为 a 处放置一个电量 q 的点电荷，求它们之间的作用力.



解 $$dF=\frac{k\delta q dx}{a^2+x^2}$$

$$dF_y=dF\cos\alpha=\frac{k\delta q a dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F_y=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{k\delta q a dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}=\frac{2k\delta q l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

第六章　定积分的应用

6.4 单元小结

数学与统计学院
武忠祥

主要内容

1 内容小结

2 典型例题

1 定积分的元素法

能用定积分解决的问题特征

1）非均匀连续分布在 $[a,b]$ 上的量.

2）所求量对区间有可加性.

元素法：

1) 确定区间 $[a,b]$

2) 找微元 $dU = f(x)dx$

3) 积分 $U = \int_a^b f(x)dx$

2. 平面图形的面积

（1）若平面域 D 由曲线 $y = f(x), y = g(x)(f(x) \geq g(x))$,

$x = a$, $x = b$ $(a < b)$ 所围成，则

$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

（2）若平面域 D 由曲线 $\rho = \rho(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta(\alpha < \beta)$

所围成，则

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

3. 旋转体体积

若平面域 D 由曲线 $y = f(x), (f(x) \geq 0),$

$x = a, x = b\ (a < b)$ 所围成，则

1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

3. 曲线的弧长

1) $C: y=y(x),\quad a\le x\le b.\quad s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

2) $C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\ \alpha\le t\le\beta.\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

3) $C: \rho=\rho(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta.\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

4. 物理应用

1. 压力；　　2. 变力做功；　　3. 引力。

主要内容

1 内容小结

2 典型例题

【例1】设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，求区域 D 的面积.

【解1】 $$S=\int_{-2}^{-1}(2+x)dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(2+\frac{1}{x})dx$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2$$

【解2】 $$S=\int_{1}^{2}(-\frac{1}{y}+y)dy$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2$$

【例2】设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta \ (-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6})$,

求 L 所围平面图形的面积.

【解】 $$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

【例3】设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定, 求图形 A 绕 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解1】 $dV=2\pi(\sqrt{2x-x^2}-x)(2-x)dx$

$$V=2\pi\int_0^1(\sqrt{2x-x^2}-x)(2-x)dx=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

【解2】 $dV=[\pi(2-x)^2-\pi(2-y)^2]dy$

$$=[\pi(2-(1-\sqrt{1-y^2}))^2-\pi(2-y)^2]dy$$

$$V=\int_0^1[\pi(2-(1-\sqrt{1-y^2}))^2-\pi(2-y)^2]dy=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

【例4】求曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \dfrac{\pi}{4})$ 的弧长.

【解】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx$

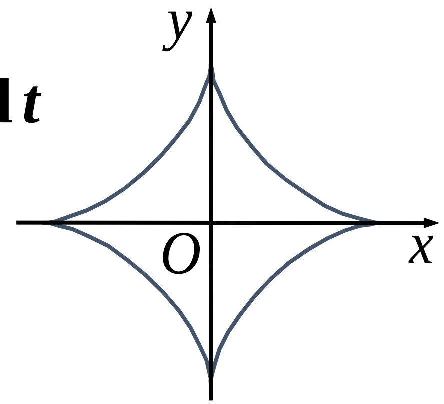
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$

$$=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})$$

【例5】设星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$. 求 1) 它所围的面积；

2）它的周长；3）它所围区域绕 x 轴旋转而成旋转体的体积.



【解】 $$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t(-3a\sin t\cdot\cos^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\sin^4 t - \sin^6 t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi a^2}{8}$$

2) 弧长 $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = 6a$

3) 体积 $V_x = 2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^8 t(-3a\sin t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{32}{105}\pi a^3$

【例6】 一容器的内侧是由曲线 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转而成的曲面，其容积为 $72\pi\ m^3$，其中盛满水，若将容器中的水从容器的顶部抽出 $64\pi\ m^3$，至少需做多少功？

（长度单位：m 重力加速度为 $g\ m/s^2$，水的密度 $10^3\ kg/m^3$）

【解】设容器深度为 h

$$dV=\pi x^2 dy=\pi y dy \qquad V=\pi\int_0^h y dy=\frac{\pi}{2}h^2$$

当 $V=72\pi$ 时，$72\pi=\dfrac{\pi}{2}h^2$，$h=12$

当 $V=72\pi-64\pi=8\pi$ 时，$8\pi=\dfrac{\pi}{2}h^2$，$h=4$

$$dW = 10^3 g(12 - y)\pi y dy$$

$$W = 10^3 g\pi \int_4^{12} y(12 - y) dy = \frac{640 \times 10^3}{3} \pi g$$