期末考试模拟题（五）答案 2024.1

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$对任意的正整数n满足$a_n \le b_n \le a_{n+1}$，则【 C 】.

   A. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$均收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

   B. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$均发散，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$；

   C. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$具有相同的敛散性；

   D. 数列$\{a_n\},\{b_n\}$具有不同的敛散性.

2. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt,\ g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则【 B 】.

   A. $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数； B. $f(x)$与$g(x)$均为奇函数；

   C. $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数； D. $f(x)$与$g(x)$均为周期函数.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 跳跃间断点的个数为【 A 】.

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2f(x^2)}{x^2}=$【 C 】

   A. 0 B. $f'(0)$ C. $-f'(0)$ D. $-2f'(0)$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处【 D 】.

   A. 不可导； B. 可导且 $f'(0)\ne 0$； C. 取得极大值 D. 取得极小值

6. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式为【 A 】.

   A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$；

   B. $y^*=ax(ax^2+bx+c)+A\sin x+B\cos x$；

   C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$；

   D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 当 $x\to 0^+$ 时，$\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\ln\left(1+x^3\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$ ___2______.

2. 设 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=2}=$ ___-6______.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为__$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$______.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1}=$ __$e-1$______.

5. $\int_{-1}^{1}(x^2\sin x+\sqrt{1-x^2})dx=$ __$\dfrac{\pi}{2}$______.

6. 微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 满足 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解为___$\arctan y=x^2+x$____.

三、计算下列各题（1-5 题每题 6 分，6-9 题每题 7 分，共计 58 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(e^x-1\right)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{1-x}+\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1+(1-x)\cos x}{2x(1-x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1+(1-x)\cos x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-(1-x)\sin x}{1}=-\frac{1}{2}.$$

2. 计算 $\int\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$.

解 $\int\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}dx=-\int\ln\left(1+e^x\right)de^{-x}=-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\int\dfrac{1}{1+e^x}dx$

$$=-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)-\ln\left(1+e^{-x}\right)+C$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+xe^y=\arctan y$ 所确定，求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

解 $\dfrac{-\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x+2}}}+e^{y}+xe^{y}y'=\dfrac{y'}{1+y^{2}}$， $x=0, y=1,$ 代入得 $y'(0)=2e-\dfrac{1}{2}$，故切线方程为

$$y=\left(2e-\frac{1}{2}\right)x+1.$$

4. 计算 $I=\int_0^2 f(x-1)dx,$ 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, x<0\end{cases}$.

解 令 $x-1=t,$ 则

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=-2\sqrt{1-t}\Big|_{-1}^{0}+\ln(1+t)\Big|_0^1=-2+2\sqrt{2}+\ln 2.$$

5. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}+e^{-x}\cos x\right)dx$ 的敛散性.

解： $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}+e^{-x}\cos x\right)dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x}\cos xdx$

对于 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ 同敛散，故 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ 收敛;

对于 $\int_1^{+\infty}e^{-x}\cos xdx$， $\left|e^{-x}\cos x\right|\leq e^{-x}$，且 $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}e^{-x}\cos xdx$ 绝对收敛

综上，原反常积分收敛.

6. 设 $f(x)$ 为可微函数，解方程 $f(x)=e^{x}+\int_0^{x}e^{x}\left[f(t)\right]^{2}dt$.

解：两边求导， $f'(x)=e^{x}+\int_0^{x}e^{x}\left[f(x)\right]^{2}dt+e^{x}\left[f(x)\right]^{2}$， $f'(x)=f(x)+e^{x}\left[f(x)\right]^{2}$.

$\dfrac{f'(x)}{f^{2}(x)}-\dfrac{1}{f(x)}=e^{x}$ $\quad\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'+\dfrac{1}{f(x)}=-e^{x}$,

$\dfrac{1}{f(x)}=e^{\int -dx}\left[\int -e^{x}e^{\int xdx}dx+C\right]=e^{-x}\left(-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)$，从而 $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{2C-e^{2x}}$.

又 $f(0)=1\Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$，故所求方程的解为 $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{3-e^{2x}}$.

7. 试问 $f\left(x\right)=\int_0^1 e^{x^2t^2}dt$ 在 $x=0$ 处是否取得极值，若取得极值，是极大值还是极小值？

解：令 $xt=u$， $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x e^{u^2}du, x\neq 0\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$ ，

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x e^{u^2}du-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{u^2}du-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x}=0,$$

$$x\neq 0, f'\left(x\right)=\frac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{u^2}du}{x^2}=\frac{x\left(e^{x^2}-e^{\xi^2}\right)}{x^2}=\frac{e^{x^2}-e^{\xi^2}}{x},$$

$x<0, f'<0$； $x>0, f'>0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

8. 设直线 $y=ax\left(0<a<1\right)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形记为 D_1，其面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围图形记为 D_2，其面积为 S_2.

（1）确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）当 S_1+S_2 取得最小值时，求平面图形 D_2 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

解：（1） $S=S_1+S_2=\int_0^a\left(ax-x^2\right)dx+\int_a^1\left(x^2-ax\right)$(1 分)$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\left(0<a<1\right)$，

$S'\left(a\right)=a^2-\frac{1}{2}=0$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，因为驻点唯一，故最小值为 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，

（2） $V_x=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left[x^4-\frac{1}{2}x^2\right]dx$(4 分)$=\frac{\pi}{60}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，

$V_y=2\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)dx$ （6 分） $=2\pi\left(\frac{13}{48}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

9. 求方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-3y-e^t\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y-e^t\end{cases}$ 的通解.

解：方法 1 $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，由 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$，得特征根为 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=-1$.

$\lambda_1=1, A-E=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\vec{r}_1=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-1,\ A+E=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\vec{r}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

从而得齐次的通解为 $C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}\left(C_1,C_2\text{为任意常数}\right)$.

取 $x=e^t, y=0$，满足方程组，从而得到原方程组的特解为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t$，.

故原方程组通解为 $C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t\left(C_1,C_2\text{为任意常数}\right)$.

备注：（1）可用公式求特解，$X(t)=\begin{pmatrix}3e^t & e^{-t}\\ e^t & e^{-t}\end{pmatrix}$，$X^{-1}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t} & -e^{-t}\\ -e^t & 3e^t\end{pmatrix}$

$$x^{\bullet}=X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3e^t & e^{-t}\\ e^t & e^{-t}\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-\tau} & -e^{-\tau}\\ -e^{\tau} & 3e^{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{\tau}d\tau=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}$$

故原方程组通解为 $C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix}\left(C_1,C_2\text{为任意常数}\right)$.

（2）也可用消元法求通解

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-3y-e^t\ (1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y-e^t\ (2)\end{cases}$，由（2）得，$x=y'+2y+e^t(3)$，两边求导 $x'=y''+2y'+e^t(4)$

将（3）（4）代入（1），得 $y''-y=0\Rightarrow\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm1\Rightarrow y=C_1e^t+C_2e^{-t}$（5）

将（5）代入（4）得，$x'=3C_1e^t-C_2e^{-t}+e^t\Rightarrow x=3C_1e^t+C_2e^{-t}+e^t$

从而所求方程组的通解为 $\begin{cases}x=3C_1e^t+C_2e^{-t}+e^t\\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}\end{cases}$，

或 $C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t\left(C_1,C_2\text{为任意常数}\right)$

四、证明题（本题 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$，求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2>\int_0^1 f^3(x)dx.$$

证明: 令$F(x)=[\int_0^x f(t)dt]^2-\int_0^x f^3(t)dt$,只要证$F(1)>0$,又$F(0)=0$

由$f(0)=0, 0<f'(x)<1$,知$f(x)>0, x\in(0,1]$

$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)]$

令$\varphi(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$ $\quad \varphi'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$

则$\varphi(x)$单调增,又$\varphi(0)=0$,则$\varphi(x)>0$

从而$F'(x)>0$,则$F(x)$单调增,从而$F(1)>0$,原题得证.