西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期末考试模拟题（二）

一. 填空题（每小题3分，共15分）

1. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}\sin x+\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)=$______.

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$______.

3. 设函数$f(x)=(x^2+x+2)\sin x$, 则 $f^{(10)}(0)=$______.

4. 当$x\to 0$时, 两个函数$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt, g(x)=x^k(e^x-1)$,

是同阶无穷小量, 则$k=$______.

5. 曲线$y = x + \dfrac{1}{e^x - 1}$的渐近线有____条.

二. 计算题（每小题7分，共56分）

1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{\ln(1+x^2)}$.

2. $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, x\le 0 \\ e^{-2x}, x>0 \end{cases}$, 计算$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

3. 设曲线L的参数方程为方程$\begin{cases} x = t^2 - t \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$,

求该曲线在$t=0$处的切线方程.

4. 设函数$f(x)$连续, 且满足$\int_0^x (x-t)f(t)dt = x(x-2)e^x + 2x$.求:

（1）$f(x)$的表达式;(2) $f(x)$的单调区间与极值.

5. 计算反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

6. 求微分方程$y'' + 2y' + y = e^{-x} + x$的通解.

7. 求初值问题$\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y(0)=1, y'(0)=3 \end{cases}$的解.

8. 求微分方程组$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} x$的通解.

三. (9分) 求函数$f(x)$在$[0,1]$连续, 在$(0,1)$内大于0,并且满足$xf'(x)=f(x)-3x^2$,曲线$y=f(x)$与直线$x=1,y=0$所围图形D的面积为2,求(1) 函数$f(x)$;(2)D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

四. (9分) 已知$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$

(1) 证明$f(x)$是以π为周期的函数;

(2)求$f(x)$的值域;

(3)求由$y=f(x),x=0,x=\pi,y=0$围成图形的面积.

五. (6分) 设函数 $f(x)$在$[0,2]$上具有二阶连续导数,且$f(1)=0$,

证明:存在$\xi\in[0,2]$,使$f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

六. (5分)(1)设n是正整数, 计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$;

(2)证明对任意正实数p,函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\,dt$存在.

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY