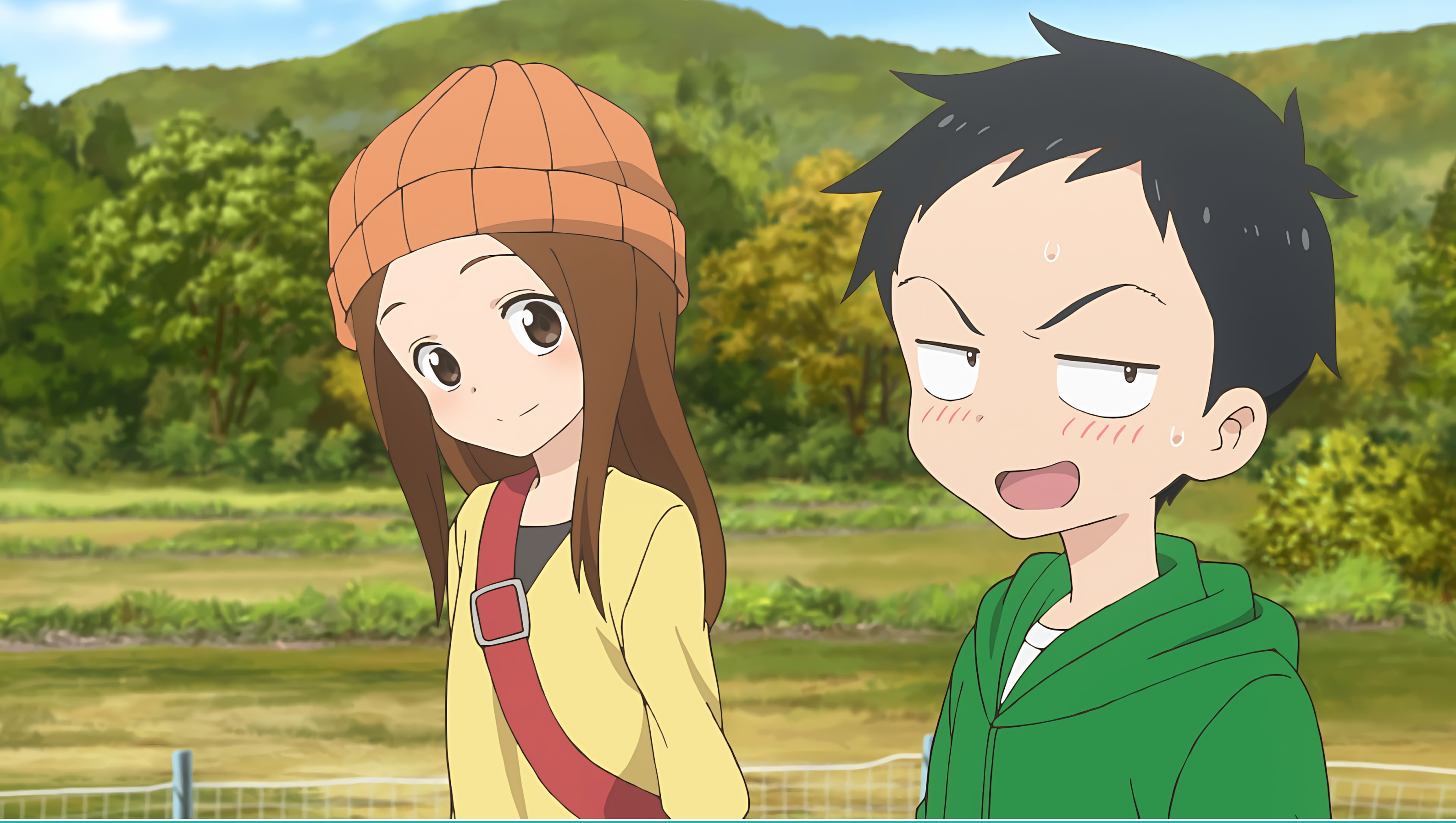


工科数学分析基础

一元函数积分学与常微分方程复习资料

作者：24 级钱学组, AI 学组, 钱院学辅

组织：Qian Xuesen Honor College, XJTU

时间：December 17, 2024

版本：1.0.1

功崇惟志　业广惟勤

前言

这是由 24 级钱学组，AI 学组共同编写的一份期末工科数学分析基础复习资料. 也是由钱院学辅学研部主导下的 2024 秋季学期的第三本系列资料.

这份资料编写的想法由两个学组的两位主要负责人共同提出，目的有二：一是帮助同学们复习好这门大一最重要的课程，二是促进两学组之间的联动以及交流.

本资料主要聚焦于期中考试以后的两个部分：一元函数积分学以及 ODE 初步. 其中一元函数积分学由钱学组的志愿者编写，ODE 部分则由 AI 学组的志愿者编写. 志愿者们对资料的编写，纠错与排版付出了很多时间与心血，在此对他们表示由衷的感谢！

同时，为帮助同学们进行数学学习的拓展，本资料的第一章为数学软件 Mathematica 的使用入门，最后一章介绍了 Jordan 标准形与其在解常系数线性微分方程组中的应用. 希望能够帮助到期末复习时的你.

本资料编写匆忙，且参与编写者均为 24 级本科生，笔误在所难免. 若读者发现资料存在问题，请与我们取得联系，笔者感激不尽.

日拱一卒，功不唐捐. 希望同学们都能在期末考试中取得理想的成绩.

钱学组，AI 学组
2024 年 12 月

参与编写本资料的志愿者名单及其编写章节如下：

- 钱学组：
  - 张云泽：Mathematica 使用入门、不定积分
  - 周洪涛：定积分
  - 石骥弘：定积分的应用、反常积分
- AI 学组：
  - 韩子慕：一阶常微分方程
  - 郭泽伟：高阶常微分方程
  - 石皓文：Jordan 标准形与常系数线性微分方程组
  - 闫涵：常微分方程组

注意

由于编写资料的志愿者众多，且每位志愿者使用数学符号的习惯不同，故本版本 (2024_v.1.0.1) 的符号并未统一，如 $x \to 1^+$ 与 $x \to 1 + 0$ 等，会同时存在于本资料中，希望读者见谅.

目录

第 1 章 Mathematica 使用入门

♠ 本章节以作者使用的 Mathematica 14 为例，本章节主要介绍积分计算，作图以及解方程的命令.

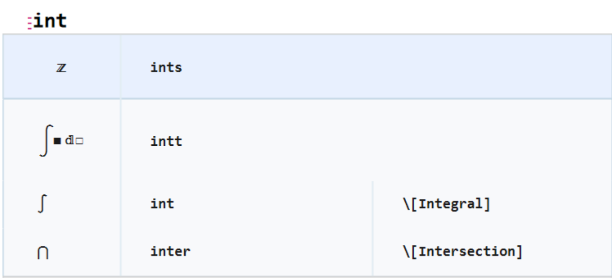
内容提要

- ❑ 积分计算
- ❑ 绘图
- ❑ 解方程

1.1 积分计算

实现积分计算可以有两种方法：快捷键或函数指令.

- 首先，新建笔记本；
- 方法一：快捷键
  - 先按 Esc 键，再输入 `int`，出现如下界面：



  - 选择 `intt`, 输入被积表达式与积分变量，`Shift+Enter` 即可计算结果.

$$\text{In[2]:=}\quad \int \sqrt{x+\sqrt{x}}\, dx$$

$$\text{Out[2]=}\quad \frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{x}+x}\left(-3+2\sqrt{x}+8x\right)+\frac{1}{4}\,\text{ArcTanh}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{x}+x}}{\sqrt{x}}\right]$$

  - 也可以 `ctrl + -`输入下限，`ctrl + 5` 输入上限，变为定积分.

$$\text{In[4]:=}\quad \int_0^1 \sqrt{x+\sqrt{x}}\, dx$$

$$\text{Out[4]=}\quad \frac{1}{12}\left(7\sqrt{2}+3\,\text{ArcCoth}\left[\sqrt{2}\right]\right)$$

- 方法二：函数指令

- 调用 Integrate 函数，具体指令如下：

Integrate[f, x]
给出不定积分 $\int f\,dx$.

Integrate[f, {x, x_{min}, x_{max}}]
给出定积分 $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f\,dx$.

Integrate[f, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}, …]
给出多重积分 $\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx \int_{y_{min}}^{y_{max}} dy \ldots f$.

1.2 解方程

解微分方程最常用的命令为：
Dsolve[Equation 1, Equation 2, . . . , Function 1, Function 2, …, x].

```
In[5]:= DSolve[y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[x], x]
        求解微分方程              正弦
```

Out[5]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{-x}\, c_1 + \frac{1}{2} a\,(-\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x])\right\}\right\}$

其余类型的命令为

DSolve[*eqn*]
求解微分方程 *eqn*. DSolve[*eqn*, u, x]
为函数 u 求解微分方程，x 为独立变量.

DSolve[*eqn*, u, {x, x_{min}, x_{max}}]
为位于 x_{min} 和 x_{max} 之间的 x 求解微分方程.

DSolve[{eqn_1, eqn_2, …}, {u_1, u_2, …}, …]
求解微分方程组.

DSolve[*eqn*, u, {x_1, x_2, …}]
求解一个偏微分方程.

DSolve[*eqn*, u, {x_1, x_2, …}∈Ω]
在区域 Ω 上求解偏微分方程 *eqn*.

1.3 绘图

Plot

Plot[f, {x, x_{min}, x_{max}}]
绘制函数 f 的图线，其自变量 x 的范围为从 x_{min} 到 x_{max}.

Plot[{f_1, f_2, …}, {x, x_{min}, x_{max}}]
绘制多个函数 f_i.

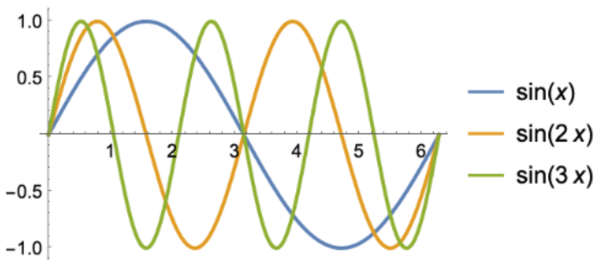
Plot[{…, w[f_i], …}, …]
绘制 f_i，其特征由符号封装 w 所定义.

Plot[…, {x}∈reg]
变量 x 从几何区域 reg 取值.

范例如下：

```
In[1]:= Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, 0, 2 Pi}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[1]=



第 1 章 练习

1. 使用 Mathematica 解方程

$$y'' + y = x^2 - x + 2$$

2. 使用 Mathematica 计算积分

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} \mathrm{d}x$$

第 2 章　不定积分

♠ 不定积分的计算无疑是后两章内容的基础，也是必须要熟练掌握的内容. 如果说整个微积分学是一座万仞之峰，那么积分的计算就是攀登它的基本工具. 本章节从不定积分的基本概念辨析入手，主要讲解不定积分的计算方法，希望能帮助读者减少因计算积分而带来的学习微积分的烦恼.

内容提要

- ❑ 不定积分基本概念
- ❑ 不定积分的基本计算方法
- ❑ 常见可积函数的计算方法
- ❑ 不定积分的计算技巧

2.1　不定积分基本概念

2.1.1　原函数与不定积分

定义 2.1 (原函数)

若函数 $F(x)$ 的导数 $F'(x)=f(x)$, 对于 $\forall x\in(a,b)$ 都成立, 则称 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的一个原函数. ♣

定义 2.2 (不定积分)

对于一个给定的函数 $y=f(x)$, 其原函数的一般表达式称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

称 $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式. ♣

笔记 只要满足 $F'(x)=f(x)$ 即为 $f(x)$ 的一个原函数，而不定积分是一簇原函数.

练习 2.1 判断下列式子是否正确.

1. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$;
2. $\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}f(x)$.

解

1. 错误. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;
2. 正确. $\mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}[f(x)+C]=\mathrm{d}f(x)$

下面介绍函数的**连续性**, **可积性**以及**原函数的存在性**之间的关系. 首先是连续性与可积性的关系.

结论 函数连续必定可积，但函数连续仅是函数可积的充分条件. 因为有有限第一类间断点的函数也是可积的.

此二者间关系较易理解. 下面介绍二者分别与原函数存在性之间的关系.

结论 连续函数必定存在原函数 (由变上限积分求导定理可得到). 此条件也仅为充分条件，一个常见的例子如下.

例题 2.1 设

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

可求得其导函数

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

故函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内存在原函数 $F(x)$, 但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

结论 $f(x)$ 存在原函数，但 f 不一定可积；反过来，f 可积但其原函数不一定存在.

结论前半句由例题 2.1 易得 $f(x)$ 在包含点 $x=0$ 的任意区间上均不可积. 下面简要说明后半句.

证明 首先引入 Darboux 定理，也可称之为导函数在闭区间上的介值性.

定理 2.1 (Darboux 定理)

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$, μ 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间，则至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=\mu$.

♡

利用反证法，我们可以证出如下定理.

命题 2.1

区间 I 上的导函数不存在第一类间断点.

♠

设导函数 f' 在区间 I 上有定义，$x_0\in I$ 为第一类间断点. 根据定义，导函数在 x_0 处的两个单边极限 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 中至少有一个不等于 $f'(x_0)$.

这里不妨只讨论 $f'(x_0)\neq f'_+(x_0)$ 的情况. 取 $\varepsilon=\dfrac{|f'(x_0)-f'_+(x_0)|}{2}$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)$ 的取值除了 $f'(x_0)$ 之外，只能落在区间 $(f'_+(x_0)-\varepsilon, f'_+(x_0)+\varepsilon)$ 内. 可以看出，f' 在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 上的值域不是区间，与 Darboux 定理矛盾. 故可以得到区间 I 上的导函数不存在第一类间断点这一结论.

回到结论的后半句，我们发现，某些存在第一类间断点的函数是可积的，而其必然不存在原函数.

综上所述，我们将函数的连续性，可积性与原函数存在性的关系表示如下.

$$\begin{tikzcd} & 连续 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 可积 \arrow[ur, "/" marking] \arrow[rr, shift left, "/" marking] & & 原函数存在 \arrow[ul, "/" marking] \arrow[ll, shift left, "/" marking] \end{tikzcd}$$

2.1.2 不定积分基本计算方法

这里介绍两种换元法，以及分部积分法的形式.

- 第一换元法 (凑微分法).

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C$$

- 第二换元法 (代入换元法).

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t = F(t(x)) + C$$

- 分部积分法.

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

将 $v'(x)$ 换入微分部分的顺序遵循 “反对幂三指” 的倒序.

例题 2.2 计算 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 这里我们使用多种解法.

- 解法一.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

- 解法二.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1})^2+1} = \arctan\sqrt{x^2-1} + C$$

- 解法三. 令 $\sqrt{x^2-1} = x - t$, 得到 $x = \dfrac{t^2+1}{2t}$, 有

$$I = \int \frac{2t\cdot 2t(t^2-1)}{(t^2+1)(1-t^2)2t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{-2\mathrm{d}t}{1+t^2} = -2\arctan t + C = -2\arctan\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) + C$$

读者可以从上述方法感受换元在积分计算中的作用.

下面，我们对一些常见的可积函数进行分类，通过解题的方式讲解计算不定积分的思路.

2.2 有理函数的积分

命题 2.2 (有理函数的部分分式法)

有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解为如下几种函数的和：

- $\dfrac{A}{x-a}$;
- $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;
- $\dfrac{mx+n}{x^2+px+q}$;
- $\dfrac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$.

进行分解后可以进行积分计算.

例题 2.3

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}$$

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

例题 2.4

$$\int \frac{x^5+x^4-2x^3-x+3}{x^2-x+2}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+x^4-2x^3-x+3}{x^2-x+2}\mathrm{d}x&=\int(x^3+2x^2-2x-6)\mathrm{d}x+\int\frac{-3x+15}{x^2-x+2}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-x^2-6x+\int\frac{-3x+15}{x^2-x+2}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-x^2-6x-\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+2}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{27}{2}}{x^2-x+2}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-x^2-6x-\frac{3}{2}\ln(x^2-x+2)+\frac{27}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.\end{aligned}$$

笔记 对于本题中的假分式形式积分，一般可以利用长除法化为多项式与最简分式的和，最简分式积分参考部分分式法.

2.3 三角函数的积分与三角换元

命题 2.3 (三角换元法)

本部分读者在高中/预科就应已熟练掌握，这里简要提及.

- $\sqrt{a^2-x^2}$, 令 $x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
- $\sqrt{x^2-a^2}$, 令 $x=a\sec x, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$;
- $\sqrt{x^2+a^2}$, 令 $x=a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

当然，在涉及到反三角函数，且被积函数中同时存在上面对应的换元情况时，也可以考虑将 x 换为相对应的三角函数，以同时消去反三角函数和根式. 下面的例题2.6就是这样一种情况.

例题 2.5

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

解 令 $x=a\tan t$, 得到原积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t&=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C\\&=\frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{x^2+a^2}\right)+C.\end{aligned}$$

笔记 即利用三角换元，消去较为复杂的 x^2+a^2 项.

例题 2.6 计算不定积分:

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

解 令 $x=\tan t$, 得到原积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{\tan^2 t\cdot\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{t(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int t\mathrm{d}t\\&=\ln|\sin t|-t\cot t-\frac{t^2}{2}+C\\&=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\arctan x}{x}-\frac{(\arctan x)^2}{2}+C.\end{aligned}$$

笔记 当然，本题不属于不好利用分部积分法进行计算的类型，该方法留给读者尝试.(提示：可以先进行分项，将分母拆解为 $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$ 的形式，再进行分部积分或凑微分).

下面的练习2.2利用直接换入反三角函数对应的三角函数的做法会较为简单.

练习 2.2 计算不定积分:

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$$

解 令 $x=\sin t$, 得到原积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\cos^3 t}\cos t\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}(\tan t)\\ &= t\tan t - \int \tan t\mathrm{d}t\\ &= t\tan t + \ln|\cos t| + C\\ &= \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C.\end{aligned}$$

命题 2.4 (三角有理式 $R(\sin x, \cos x)$ 的积分方法)

我们将三角有理式的积分方法归结为以下四种，本质上是对换元规则的利用.

- 万能变换: 令 $t=\tan\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$;
- 当 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 时，即 R 为 $\sin x$ 的奇函数，令 $t=\cos x$;
- 当 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 时，即 R 为 $\cos x$ 的奇函数，令 $t=\sin x$;
- 当 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ 时，即 R 是二元自变量的偶函数，令 $t=\tan x$.

例题 2.7

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}\sin x = \int \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t\\ &= -\int \mathrm{d}t + \int \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t\\ &= -t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C\\ &= -\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C\end{aligned}$$

笔记 本例中被积函数的形式属于 $R(\sin x, -\cos x)$ 类型，故考虑令 $t=\sin x$.

例题 2.8

$$\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{2(2\sin x + \cos x) + (-\sin x + 2\cos x)}{2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x\\ &= \int 2\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}(2\sin x + \cos x)}{2\sin x + \cos x}\\ &= 2x + \ln|2\sin x + \cos x| + C.\end{aligned}$$

笔记 此例清楚反映了一种类型的积分：即分式上下均为 $\sin x, \cos x$ 的线性组合. 根据线性方程组的知识可得分子必能分解为分母及其导数的线性和, 从而可以分离进行计算.

例题 2.9

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$$

解 万能代换：令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\ &= \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln|1+u|+C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

笔记 虽然对于三角函数有理式来说，万能代换具有普遍性，但解题过程较为复杂. 故首先考虑使用凑微分等换元方法，而对于本例中无特点的积分，可直接使用万能代换. 或者，可以尝试利用辅助角公式，详见小节 2.8.2.

例题 2.10

$$\int \frac{\sin 10x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

解 考虑和差化积公式, 首先将分子变形

$$\begin{aligned}\sin 10x &= (\sin 10x-\sin 8x)+\cdots+\sin 2x\\ &= 2\sin x(\cos 9x+\cdots+\cos x).\end{aligned}$$

故原积分结果易得到，为

$$2\left(\frac{\cos x}{9}+\cdots+\sin x\right)+C.$$

笔记 由上面的例题，我们不难总结出如下公式，以供使用

$$\frac{\sin 2nx}{\sin x} = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$$

2.4 分部积分法

例题 2.11

$$\int \arcsin x\arccos x\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\arccos x\mathrm{d}x &= x\arcsin x\arccos x-\int\frac{x(\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\arcsin x\arccos x-\int(\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\\ &= x\arcsin x\arccos x-(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}+\int 2\mathrm{d}x\\ &= x\arcsin x\arccos x-(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}+2x+C.\end{aligned}$$

笔记 显然，本例中被积函数较为复杂 (反三角函数). 对于此种被积表达式，一般直接使用分部积分法，求取其微分作为新的被积函数.

例题 2.12

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\arctan x = \int \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故原积分结果为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.$$

笔记 对于函数中涉及幂三指函数的，分部积分法后很可能出现相同的表达式，这时可以通过解方程的方式计算原积分，称为循环法.

2.5 无理函数的积分

例题 2.13

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$

解 一般而言，需要先进行倒代换，再进行高次项代换.

倒代换: $t=\dfrac{1}{x}$, 得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1-t^4}}$$

继续代换：$u=\sqrt[4]{1-t^4}$

$$\begin{aligned}-\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt[4]{1-t^4}} &= \int \frac{4u^3}{u(1-u^4)}\mathrm{d}u = \int \frac{4u^2}{1-u^4}\mathrm{d}u\\ &= 2\int\left(\frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= 2\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + 2\arctan u + C.\end{aligned}$$

笔记 倒代换是计算无理函数积分中的一种常用的代换方法，当上下次数相差过大时，可以考虑使用倒代换. 下面的例子也是倒代换，读者可以自行感受.

例题 2.14

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

解 利用倒代换即可. 结果为

$$-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

下面我们讨论简单根式的有理式积分.

命题 2.5 (简单根式的有理式积分方法)

我们仅讨论下面两种简单根式的有理式积分:

- $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $ad-bc\neq 0$, 可令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;
- $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, $a\neq 0,\ b^2-4ac>0$.
  - $a>0$, 则利用 Euler 第一代换: 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$;
  - $a<0$, $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 利用 Euler 第二代换: 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$ 或 $t(\mu-x)$.

  当然, 利用 Euler 代换进行计算较为繁琐, 在章节 2.7 中会详细对 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 类型积分进行讨论.

2.6 幂三指函数的积分

幂三指函数的循环性在例题2.4中已经介绍, 这里主要探究 $P(x)e^{\lambda x}$ 形式的运算封闭性. 将形如 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 的函数全体记为 $U(n)$, 其中 $\lambda\neq 0$, $P_n(x)$ 为次数不超过 n 的多项式函数.

命题 2.6 (U_n 对微积分运算的封闭性)

- 如果 $f(x)\in U_n$, 则 $f'(x)\in U_n$;
- 如果 $f(x)\in U_n$, 则存在 $f(x)$ 的原函数 $F(x)\in U_n$.

证明

- 设 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}\in U_n$, 则 $f'(x)=[P_n'(x)+\lambda P_n(x)]e^{\lambda x}$. 因为 $P_n'(x)+\lambda P_n(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 故 $f'(x)\in U_n$. 此性质称为 U_n 对求导运算的封闭性.
- 数学归纳法. 当 $n=0$ 时显然成立. 假设结论对 $n-1$ 成立, 考虑 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}\in U_n$, 因为 $P_n'(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 可知 $P_n'(x)e^{\lambda x}\in U_{n-1}$. 由归纳假定, 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $Q_{n-1}(x)$, s.t.$Q_{n-1}(x)e^{\lambda x}$ 是 $P_n'(x)e^{\lambda x}$ 的原函数. 令 $F(x)=\dfrac{1}{\lambda}P_n(x)e^{\lambda x}-\dfrac{1}{\lambda}Q_{n-1}(x)e^{\lambda x}$, 则 $F(x)\in U_n$, 且
$$F'(x)=P_n(x)e^{\lambda x}+\frac{1}{\lambda}P_n'(x)e^{\lambda x}-\frac{1}{\lambda}\left[Q_{n-1}(x)e^{\lambda x}\right]'=P_n(x)e^{\lambda x}$$
即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 由数学归纳法知结论成立. 该结论称为 U_n 对积分运算的封闭性.

利用该性质, 我们可以使用待定系数法解 U_n 中函数的积分运算.

练习 2.3

$$\int x^3(\ln x)^4\mathrm{d}x$$

解 可先设 $u=\ln x$.

$$\int x^3(\ln x)^4\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{4u}\cdot u^4\mathrm{d}u$$

设原函数为 $F(x)=(a_1u^4+a_2u^3+a_3u^2+a_4u+a_5)\mathrm{e}^{4u}$, 待定系数解方程即可.

2.7 补充 1：$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 类型积分的其他方法

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ 类型的积分是无理函数积分中的一种特殊形式，因为其一般有三种较为固定的, 相较 Euler 代换更为简单的计算方式：

- 倒代换, $t=\dfrac{1}{x}$;
- 三角代换;
- 配方法.

这几种想法的产生是非常显然的，本质上都是为了利用已有积分或消去根号，这里不再细讲，取而代之，用几道例题来进行说明.

例题 2.15

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

解

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t-4t^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-(2t-1)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{2}t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{2}}+C$$

笔记 倒代换，解决上下次数相差过大问题.

例题 2.16

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

解 三角代换 $x=\sin t$, 得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}&=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t-\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int\cot^2 t\mathrm{d}t=-\csc t+\cot t+t+C\\&=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C.\end{aligned}$$

2.8 补充 2：不定积分中的小技巧

2.8.1 凑微分法

有一些积分直接暴力计算较为麻烦，这时可以考虑**凑微分**, 可能能直接得到积分结果. 下面首先举一个常见的实例: $\mathrm{e}^x f(x)$ 形式.

例题 2.17 计算不定积分：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

解

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{1+\cos x}$$

因此，本题中的积分构成了

$$\int \mathrm{e}^x(f(x)+f'(x))\mathrm{d}x$$

的形式，此类积分的结果应为

$$\mathrm{e}^x f(x) + C$$

因此，本题的结果为

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{1+\cos x} + C$$

笔记 本题的解法是一个比较常见的技巧，在分子含有 e^x 时，尝试把一个积分拆分为两个积分，然后利用凑微分进行求解. 下面的练习2.4, 2.5也是这种类型的题目.

练习 2.4 计算不定积分：

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

解

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

因此，本题的结果为

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C$$

练习 2.5 计算不定积分：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

解

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{e}^x(-2x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

因此，本题的结果为

$$\int \frac{\mathrm{e}^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} + C$$

一些非常复杂的积分也可以先尝试凑成微分，例题2.18就是一个很好的例子. 尝试练习2.6.

例题 2.18 计算不定积分

$$\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\ln x}{x^{-x}+x^x}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^x(\ln x+1)}{1+x^{2x}}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{1+x^{2x}}\mathrm{d}(x^x) = \arctan x^x + C.\end{aligned}$$

练习 2.6 计算不定积分

$$\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

解 由积分公式，我们有

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\mathrm{d}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

2.8.2 辅助角公式

例题 2.19

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}$$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \sec^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right) + C.\end{aligned}$$

笔记 本题的三角函数变换方法已在例题2.9进行讲解，相似地，我们可以用两种方法解答本章

练习题 1，这里不给出具体过程，希望读者可以自己动手尝试.

第 2 章 练习

1. 求积分

$$\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} \mathrm{d}x$$

解

$$-\frac{2}{3} \arctan \left(\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1} \right| + C.$$

2. 求积分

$$\int \frac{6^x}{9^x - 4^x} \mathrm{d}x$$

解

$$\frac{1}{2\ln(\frac{3}{2})} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.$$

3. 计算不定积分：

$$\int \frac{\alpha + \beta x^2}{x^4 + 1} \mathrm{d}x$$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{\alpha}{x^2} + \beta}{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(\beta + \alpha)(\frac{1}{x^2} + 1) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(-\frac{1}{x^2} + 1)}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(\beta + \alpha)(\frac{1}{x^2} + 1)}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)(-\frac{1}{x^2} + 1)}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(\beta + \alpha)}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} \mathrm{d}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \int \frac{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} \mathrm{d}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\beta + \alpha}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\beta - \alpha}{4\sqrt{2}} \ln \frac{|x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}|}{|x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}|} + C
\end{aligned}$$

笔记 以上解答展示了此类问题的一个技巧性很强的解法，分子分母同时除以 x^2，然后分成两个积分，分别凑微分求解.

注 诚然，此类积分仍属于有理分式的积分，可以用分解为部分分式的办法解决，但由于次数较高，可能比较繁琐，这里不再展示.

4. 计算不定积分：

$$\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} \mathrm{d}x$$

解

$$\int \frac{x(x \cos x)}{\cos x (x \sin x + \cos x)^2} \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(x\sin x+\cos x) \\
&= -\int \frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \tan x + C
\end{aligned}
$$

笔记 当分母次数较高时，除了可以考虑倒代换，还可以考虑通过凑微分再分部积分的方式对分母降幂.

5. 计算不定积分：

$$\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

解

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)x+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ln|\sin x+\cos x|+C
\end{aligned}
$$

笔记 本题为练习 2.7 的拓展形式，方法仍旧是凑微分.

6. 计算不定积分：

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x$$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，代入得

$$\int \ln(1+t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$$

再利用分部积分，得

$$
\begin{aligned}
&\ln(1+t)\frac{1}{t^2-1}+\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+t)\frac{1}{t^2-1}+\int \frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}-\frac{1}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+t)\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(t+1)}+C
\end{aligned}
$$

注 本题是换元法和分部积分法的综合，换元后马上就用分部积分法时，可以先考虑不要把 $\mathrm{d}x$ 换成 $\mathrm{d}t$，而是直接利用分部积分法，否则换为 $\mathrm{d}t$ 之后积分可能更加繁琐.

下面两道练习比较有趣，可以尝试挑战.

(题目来源：数学分析习题课讲义, 谢惠民，恽自求等)

7. 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 为 x 到离其最近的整数的距离.

解 由题设可知

$$f(x)=\min\{x-[x],-x+[x]+1\}=\frac{1}{2}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sgn}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)$$

而

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$$

考虑 $n\le x\le n+\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{N}_+$ 时

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t&=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k-\frac{1}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}+\frac{x^2}{2}-nx+\frac{n^2}{2}\\&=\frac{n}{4}+\frac{1}{2}x^2-nx+\frac{1}{2}n^2\end{aligned}$$

取 $n=[x]$，就得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{[x]}{4}+\frac{x^2}{2}-[x]x+\frac{[x]^2}{2}+C$$

若 $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$，我们只需要改变最后一项为

$$\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_n^{n+\frac{1}{2}}(t-n)\,\mathrm{d}t+\int_{n+\frac{1}{2}}^x(n-t+1)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}n^2+n(x-1)-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{4}$$

补上前面的项并令 $n=[x]$，则得

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{3[x]}{4}-\frac{x^2}{2}+[x]x-\frac{[x]^2}{2}+x+C$$

我们可以配凑出一个统一的形式，即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{[x]}{4}-\frac{1}{2}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)^2\operatorname{sgn}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)+C$$

8. Liouville 在 19 世纪 30 年代对初等函数的不定积分在什么条件下是初等函数进行过深入研究，得到的结果是

定理 2.2 (Liouville 第三定理)

设 f,g 为有理函数, g 不是常值函数, 如果 $\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x$ 是初等函数, 则存在有理函数 h, 使得

$$\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{e}^{g(x)}+C.$$

试用这个定理证明: $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$ 都是非初等不定积分.

证明 我们这里只证明 $\int e^{-x^2}dx$ 是非初等不定积分. 第二问与其相似.
假设 e^{-x^2} 的原函数为有理函数，则有

$$\int e^{-x^2}dx = h(x)e^{-x^2} + C.$$

其中 $h(x)$ 为有理函数. 两边求导得到

$$e^{-x^2} = h'(x)e^{-x^2} - 2xh(x)e^{-x^2}$$

即

$$1 = h'(x) - 2xh(x) \tag{2.1}$$

设 $h(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 互素，代入上式则为

$$1 = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} - \frac{2xP(x)}{Q(x)}$$
$$P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) = 2xP(x)Q(x) + Q^2(x)$$

由左右均应为整式，故 $Q|PQ'$, 又因 P, Q 互素, 故 $Q|Q'$, 从而 Q 仅能为零次多项式, 进而 $h(x)$ 为零次多项式. 而 $2xh(x)$ 的次数显然高于 $1 - h'(x)$, 故式2.1不可能成立. 进而 $\int e^{-x^2}dx$ 是非初等不定积分.
判断原函数是否为初等函数的定理还有 Liouville 第四定理，Chebyshev 定理等.

第 3 章 定积分

内容提要

- 定积分的概念
- 定积分的性质
- 变限积分与微积分基本定理
- 定积分的计算

3.1 定积分的概念

研究曲边梯形的面积和变力沿直线做功, 通过 “分割, 近似求和, 取极限” 的思想方法, 从类似的问题抽象出定积分的概念.

定义 3.1 (定积分的定义)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 在 $[a,b]$ 内任取 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间分割为 $n-1$ 个小区间

$$[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$$

长度记为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$, 令 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$.
若当 $\lambda\to 0$ 时, 和式的极限存在, 且此极限值不依赖于对区间 $[a,b]$ 的分割, 也不依赖于 $\{\xi_i\}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的取法, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

其中, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, a,b 分别称为积分下限和积分上限, $[a,b]$ 称为积分区间, $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分和. ♣

对定义中的分割, λ 称为分割细度, $\{\xi_i\}$ 称为属于此分割的一个介点集. 实际上, 积分和的极限与一般函数的极限区别很大, 在 $\lambda\to 0$ 的变化过程中, 同一个分割细度 λ 对应着无穷多个积分和, 这使得求积分和的极限比求函数的极限困难得多. 但是, 在已知函数可积的前提下, 可以选择特殊的分割和介点集 (如等分分割), 化为求数列的极限, 从而求出定积分.

笔记 [定积分的几何意义] 对闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有这样的几何意义: 若

$f(x) \geqslant 0$，表示 x 轴上方曲边梯形的面积；若 $f(x) \leqslant 0$，表示 x 轴下方曲边梯形的面积的相反数，称为负面积；若 $f(x)$ 既取正值又取负值，表示 x 轴上方所有曲边梯形的面积与 x 轴下方所有曲边梯形的负面积的代数和.

规定:

1. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;
2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

3.2 定积分的性质

本节只列出最重要的两个积分中值定理，介绍一般书中不放在正文中的两个基本性质.

3.2.1 积分中值定理

定理 3.1 (积分第一中值定理)

设 $f, g \in R[a,b]$, 且 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in f([a,b]) = [m, M]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

如果 $f \in C[a,b], g \in R[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别是, 如果 $f \in C[a,b]$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

♡

注 与微分中值定理作比较，自然会提出一个问题：$\xi \in [a,b]$ 能否改进为 $\xi \in (a,b)$？答案是肯定的. 需要读者去思考如何证明.

定理 3.2 (积分第二中值定理)

设 $f \in R[a,b], g$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

特别是, 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调增加且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b) \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果 g 在 $[a,b]$ 上单调减少且 $g(x) \geqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

♡

例题 3.1 设非负函数 $f \in R[a,b]$，且存在子区间 $[c,d] \subset [a,b]$，使得在 $[c,d]$ 上 $f(x) > 0$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$

证明 只要对于 $[c,d] = [a,b]$ 证明即可，因此假设在 $[a,b]$ 上 $f(x) > 0$.

用反证法. 这时已知 f 在 $[a,b]$ 上的定积分非负. 如果有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

则可如下导致矛盾. 首先，已知有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow \exists [c,d] \subset (a,b)$$

使得 $f(x) > 0,\ \forall x \in [c,d]$

对于 $\varepsilon > 0$, 用 $\varepsilon - f$ 代入 f, 就可以得到

$$0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon(b-a) \Longrightarrow \exists [c,d] \subset (a,b)$$

使得 $0 < f(x) < \varepsilon,\ \forall x \in [c,d]$

当然这时 f 在 $[c,d]$ 上的积分也是 0. 现在用实数系的闭区间套定理.

令 $\varepsilon_n = 1/n, n \in \mathbb{N}_+$, 改记 $[c,d] = [a_1,b_1]$, 并对它归纳地得到 $\{[a_n,b_n]\}$，使得对每个 n，在区间 $[a_n,b_n]$ 上成立不等式

$$0 < f(x) < \frac{1}{n}$$

根据闭区间套定理，存在属于每个闭区间的点 $\xi \in (a,b)$，也就是说对每个 n 成立

$$0 < f(\xi) < \frac{1}{n}$$

但这样的 $f(\xi)$ 是不存在的，引出矛盾.

3.2.2 积分号下求极限

如果一列函数 $f_n(x) \in R[a,b], n \in \mathbf{N}_+$, 又在 $[a,b]$ 上处处有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，而且极限函数 $f \in R[a,b]$，这时经常会问下列等式是否成立:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这就是所谓积分号下取极限的问题，也就是 $n \to \infty$ 的极限过程和积分（它也是一种极限）是否可交换顺序的问题. 这类问题在数学分析和其他许多领域中都很重要. “不幸”的是，对于此问题的答案是“不一定”.

例如，设

$$
f_n(x)=\begin{cases} n, & 0<x\leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1 \text{ 或} x=0, \end{cases}
$$

则对一切 $x\in[0,1]$ 有

$$
f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0
$$

但容易验证

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x
$$

这说明在考虑积分号下求极限问题时，我们不能随意将求极限运算与求积分运算交换顺序，对于这种交换极限顺序问题的一般性讨论，需要函数项级数和多元微积分的知识. 下面将通过一些例题，说明利用定积分的性质和一些技巧在目前已经可以解头其中的较简单问题.

例题 3.2 证明:

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0
$$

证明

由于本题的积分是定积分的重要结果, 因此可将本题变为普通的数列极限问题. 但这种方法过分地依赖于定积分计算，积不出怎么办？所以我们下面要介绍新的方法

按照数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义写出证明对于给定的 $\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<\pi$, 可以将积分分拆如下:

$$
0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{(\pi-\varepsilon)/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\quad\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}
$$

由 $0<\sin\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}<1$, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}=0$. 从而对上述 $\varepsilon,\exists N$, 使 $n>N$ 时，成立

$$
0<\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}
$$

因此 $n>N$ 时, 就有 $0\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

注

1. 利用上、下极限工具还可将证明写得简洁一些. 在不等式中直接令 $n\to\infty$, 就得到

$$
0\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.
$$

   利用 $\varepsilon>0$ 的任意性, 可见上、下极限相等且为 0 .

2. 在分拆积分时可以采取动态方法, 例如在拆分时按照区间

$$\left[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right] \text{ 和 } \left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\frac{\pi}{2}\right]$$

拆成两个积分, 然后分别证明它们 (作为数列) 当 $n\to\infty$ 时的极限都是 0. 读者可以一试.

笔记 本题的常见错误如下:

证: 由积分第一中值定理, $\exists\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 使得

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sin^n\xi.$$

不难看出一定有 $0<\sin\xi<1$ 成立, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=0$$

错误分析: 错误在于 ξ 不是常数, 而是随着 n 的变化而变化的, 应该记为 ξ_n. 当 $n\to\infty$ 时, 不难证明有 $\xi_n\to\pi/2$, 因此 $\sin^n\xi_n$ 是 1^∞ 型的不定式. 回忆数列极限的内容, 我们知道, 从一个数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足 $0<a_n<1$ 是得不出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=0$ 的 (试举例).

3.3 变限积分与微积分基本定理

本节的例题以变限积分方法为中心, 而将以 Newton-Leibniz 公式为主的内容放在下一节中.

3.3.1 主要命题

关于变限积分的主要结果是下面两个命题:

命题 3.1

设 $f\in R[a,b]$, 则变上限积分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与变下限积分 $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

命题 3.2

设 $f\in R[a,b], x\in[a,b]$ 是 f 的连续点, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

由此就给出了原函数存在的一个充分条件:

定理 3.3 (原函数存在定理)

设 $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上存在原函数.

命题 3.3 (微积分基本公式)

设 F 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 则对每个 $x \in [a,b]$ ， 成立 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

更一般的是:

命题 3.4

设 $f \in R[a,b], F$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则对每个 $x \in [a,b]$ ，成立 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

3.3.2 例题

在命题中出现的变限积分不仅在建立微积分基本定理时有用，而且是一种非常有效的工具. 对于 $f \in C[a,b]$ 引入变限积分 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 因此，我们就有可能同时用微分学和积分学的工具去研究它.

例题 3.3 设 $f \in C[0,+\infty), a > 0$, 证明:

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

证明 将 a 看成非负变量, 等式两边就成为变上限积分. 当 $a=0$ 时两边都等于 0, 然后将两边对 a 求导, 右边求导后得到

$$\left(\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x\right)' = \left(a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - \int_0^a xf(x)\mathrm{d}x\right)' = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

与左边求导结果相同, 从 Newton-Leibniz 公式就得到所求的等式.

下一题虽然不难，但是很容易出错，先来看正确做法.

例题 3.4 设 $f \in R[A,B], a,b \in (A,B)$ 是 f 的两个连续点, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

证明 要点是利用变量代换改变积分限, 然后利用命题. 计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{b}^{b+h} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

笔记 [错误证法分析] 下面的" 证法" 是很有诱惑力的:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

注上面的三步推导中的每一步都是错误的，即犯了三个错误:

1. 没有根据就将求极限与求积分运算交换顺序;
2. 对差商求极限时忘记了题中 f 只在两点连续, 并无可导条件;
3. 即使 f 在 $[a,b]$ 上可导, 但导函数也不一定可积，因此不能用 Newton-Leibniz 公式.

3.4 定积分的计算

一般来说，从定义出发来计算定积分是不切实际的. 本节以 Newton-Leibniz 公式为基础，在前三小节中介绍定积分计算，在最后一小节则与定积分计算相结合介绍积分中值定理的应用.

3.4.1 计算公式与法则

与不定积分的计算法则相对应, 定积分的计算法则有以下两个.

命题 3.5 (积分的分部积分法)

设 $u'(x), v'(x)\in R[a,b]$, 则

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

注 在应用上述公式时，如果 $u(a)v(a)$ 或 $u(b)v(b)$ 不存在，或者 $u(x)v(x)$ 在点 $x=a$ 或 $x=b$ 不连续, 则可以将 $u(x)v(x)\big|_a^b$ 理解为 $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - \lim\limits_{x\to a^+} u(x)v(x)$. (虽然这时 $u'(x)v'(x)$ 在点 $x=a$ 或 $x=b$ 不存在, 但是由于函数在一个区间上的可积性以及积分值与其在有限点处的定义无关, 因此这不会影响 $u'(x)v'(x)$ 的可积性以及积分值.)

命题 3.6 (定积分的换元积分法)

设 $f \in R[a,b], x = g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调增加, $g'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且满足 $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

3.4.2 对称性在定积分计算中的应用

设积分区间关于原点对称, 例如为 $[-a,a](a>0)$. 则容易知道, 当被积函数 f 是奇函数, 即其图像关于原点中心对称时, 就有 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$; 而当被积函数 f 是偶函数, 即其图像关于 y 轴对称时, 就有 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

3.4.3 用递推方法求定积分

设有一列函数 $f_n(x) \in R[a,b]$, 其中下标 $n \in \mathbf{N}_+$ 为参数. 为了计算积分 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$, 我们可用各种方法将下标为 n 的积分 $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 化成与下标 $k<n$ 的积分 $\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ 有关的表达式（即递推公式）. 继续如此做下去, 就有可能将问题化为求下标最小的一个或几个积分. 计算定积分的这种方法, 称为递推方法.

例题 3.5

计算 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$

解

两个积分相等可以由换元 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 得到. 由定积分的分部积分法,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}\left(\sin^{n-1} x\right) \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n, \end{aligned}$$

移项后得递推公式:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} (n \geqslant 2).$$

重复使用上述公式并由于

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$$

就得到 Wailis 公式:

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{ 为奇数;}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

注 请初学者注意，在定积分的计算中，该公式经常有用，因此需要记住这个公式并能熟练应用. 此外，I_n 在 n 为奇数和偶数时的表达式不同是导出 Wailis 公式的关键.

3.4.4 例题

例题 3.6 计算 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 [1]

被积函数在 $x=0$ 时没有定义，但是从 $\sin x\sim x\left(x\to0^+\right)$ 和 $x\ln x\to0\left(x\to0^+\right)$ 可以知道被积函数在 $x=0$ 右侧有界.

如果如下分部积分，则有

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\ln\sin x|_{0+}^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}\ln\sin x$$

由于右边第一项为无穷大，因此不能解决问题. 克服这个困难的方法也很简单，只要将上面的 $\mathrm{d}(-\cos x)$ 改为 $\mathrm{d}(1-\cos x)$ 即可. 利用 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$, 即可计算如下:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x)\\&=(1-\cos x)\ln\sin x|_{0+}^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x)\\&=-\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi/2}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&=[\cos x-\ln(1+\cos x)]|_0^{\pi/2}=\ln2-1.\end{aligned}$$

解 [2]

从作代换 $x=2t$ 开始可计算如下:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}2\sin2t\ln\sin2t\,\mathrm{d}t\\&=2\ln2\int_0^{\pi/4}\sin2t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}2\sin2t\ln\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/4}2\sin2t\ln\cos t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对第一个积分作代换 $2t=x$, 对最后一个积分作代换 $s=\dfrac{\pi}{2}-t$

$$= \ln 2 + \int_0^{\pi/4} 2\sin 2t \ln \sin t \, \mathrm{d}t + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin 2s \ln \sin s \, \mathrm{d}s$$

利用定积分与积分变量无关的特点合并两个积分

$$= \ln 2 + \int_0^{\pi/2} 4 \sin t \cos t \ln \sin t dt$$

对积分再作代换 $\sin t = u$

$$\begin{aligned} &= \ln 2 + \int_0^1 4u \ln u \, \mathrm{d}u \\ &= \ln 2 + 2u^2 \ln u\big|_{0^+}^1 - \int_0^1 2u \, \mathrm{d}u = \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

笔记

1. 本题解 1 中处理分部积分的方法具有普遍意义，因此要再强调一下. 具体来说，由于两个不同的原函数之间只差一个常值函数，因此在分部积分公式中左边的 $u(x)\mathrm{d}v(x)$ 可改为 $u(x)\mathrm{d}(v(x)+c)$ ，其中 c 待定. 利用这一点灵活性可以解决不少问题.
2. 有的文献将本题与广义积分中的 Euler 积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, \mathrm{d}x$ 相联系. 实际上本题是常义积分，且有初等原函数，这与 Euler 积分的情况并不相同.

下面是一个简单的题，但其中还是有不少知识点需要注意.

例题 3.7 设 n 为大于 1 的自然数，求 $\displaystyle\int_0^n (x-[x])\mathrm{d}x$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

解

由于被积函数在积分区间上只有有限个间断点，积分的存在性没有问题. 但由于这有限个间断点是跳跃间断点，被积函数在整个区间上的原函数不存在，需分段计算积分. 在区间 $[0,1]$ 上，$x-[x]$ 与函数 $f(x)=x$ 仅在点 $x=1$ 处有不同的值，因此它们的可积性和积分值相同，这样就有

$$\int_0^1 (x-[x])\mathrm{d}x = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

又由于 $x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数，它在每个长度为 1 的区间上的积分相同，所以就可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^n (x-[x])\mathrm{d}x &= \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_{n-1}^n \right) (x-[x])\mathrm{d}x \\ &= n \int_0^1 (x-[x])\mathrm{d}x = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

下面的例题说明，与计算不定积分一样，熟练地掌握初等代数或三角函数的运算公式，对于定积分的计算也是十分重要的.

例题 3.8 在区间 $(0,\pi)$ 上定义 $D_n(x)=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, n\in\mathrm{N}_+$, 计算 $\displaystyle\int_0^\pi D_n(x)\mathrm{d}x$.

解

虽然 $D_n(x)$ 在 $x=0$ 时无定义，但容易证明 $\lim\limits_{x\to0^+}D_n(x)=(2n+1)/2$，因此 $D_n(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积. 直接对 $D_n(x)$ 积分是困难的, 我们作如下变换. 利用三角恒等式

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)=\sin\frac{(2n+1)x}{2}$$

就可以将 D_n 分解如下:

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

逐项积分就得到

$$\int_0^\pi D_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x\quad=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

注

以上积分有时也称为 Dirichlet 积分, 其中的被积函数 D_n 称为 Dirichlet 核，积分式又可写成

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Dirichlet 核与公式在积分理论与级数理论中有重要的应用.

第 3 章 练习

1. 求定积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,\mathrm{d}x$.

   解

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\left(\sec^2x-1\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}\end{aligned}$$

   即

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}$$

   由于 $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$, 于是, 利用上述递推公式即可求得

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-3} - I_{n-2}\right) = \cdots = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \cdots + (-1)^n I_0$$
$$= (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$$

2. 求定积分 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \ \mathrm{d}x$.

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \ \mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

3. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cos 2nx \ \mathrm{d}x$.

解 利用分部积分法，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cos 2nx dx = \frac{1}{2n}\sin 2nx \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \sin x}{\cos x}dx$$
$$= 0 + \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx - \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-1)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} \\ &= 2\left[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \cdots + (-1)^{n-2}\cos 2x\right] \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} \\ &= 2\left[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots + (-1)^{n-1}\cos 2x\right] + (-1)^n.\end{aligned}$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx \ \mathrm{d}x \quad (k \in \mathbb{N}_+)$$

的值恒等于零, 所以, 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} \ \mathrm{d}x \text{ 及 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} \ \mathrm{d}x$$

分别等于 $(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$ 及 $(-1)^n\frac{\pi}{2}$. 这样, 我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cos 2nx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2} - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$$

注 在 $x = 0$ 处, $\sin 2nx \ln\cos x = 0$; 而在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处, 为 “$0 \cdot \infty$” 型, 采用 L'Hospital 法则进行定值:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin 2nx\ln\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\sin^2 2nx}{\cos x\cos 2nx}$$
$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x\sin^2 nx+4n\sin x\sin 2nx\cos 2nx}{-\sin x\cos 2nx-2n\cos x\sin 2nx}=0.$$

4. 利用多次的分部积分法, 计算欧拉积分:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

式中 m 及 n 为正整数.

解

$$B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$$

继续利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1\\&=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}\end{aligned}$$

5. 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\mathrm{d}x$.

解 令 $I_{m,n}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$. 显然有

$$I_{m,0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$
$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n-1}x\,\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}x\,\mathrm{d}\left(\sin^{2m+1}x\right)\\&=\frac{1}{2m+1}\cos^{2n-1}x\sin^{2m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,\mathrm{d}\left(\cos^{2n-1}x\right)\\&=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}x\,\mathrm{d}x=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\left(1-\cos^2x\right)\cos^{2(n-1)}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n-1}-\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n}\end{aligned}$$

整理后得

$$I_{m,n}=\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}$$

由此不难得到

$$I_{m,n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}I_{m,0}=\frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

6. 弃掉高阶无穷小量，求下列和的极限值：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$$

.

解 由于对一切 $k<n,3<n$ 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\tan\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\tan\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)\\&\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n^2}}{\cos\frac{k\pi}{n^2}}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)\leqslant\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}0&\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\leqslant 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\to 0\quad(n\to+\infty)\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k-1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{k^2\pi}{n^2}\right)=\int_0^1\pi\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

7. 弃掉高阶无穷小量，求下列和的极限值：

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

解 由于 $\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$，式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 于是，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}&=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\\&=\left(\lim_{n\to 1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\\&=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

8. 弃掉高阶无穷小量，求下列和的极限值：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0).$$

解 由于

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}-\left(x+\frac{k}{n}\right) \\
&=\frac{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-\left(x+\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}+\left(x+\frac{k}{n}\right)} \leqslant \frac{1}{2x}\left(x+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{\sum_{k-1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2xn^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4x}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 (x+t)\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}.
$$

9. 证明：偶函数的原函数中的一个为奇函数，而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证明 设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上存在定义 *, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 当 $f(-x)=f(x)$ 时, 由于

$$
f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \quad 及 \quad f(-x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(-x),
$$

故有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)+F(-x)]=0$. 从而可得 $F(x)+F(-x)=C_1$, 且 $C_1=2F(0)$. 于是, $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)-F(0)$ 是奇函数.

当 $f(-x)=-f(x)$ 时, 类似地可得 $F(x)-F(-x)=C_2$, 且 $C_2=0$. 于是, $F(-x)=F(x)$, 即 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 也为偶函数.

注 * 如果 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可积, 则由 $F_c(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (C 是任意常数) 也可获证, 其中 $F_c(x)$ 为 $f(x)$ 的全部原函数.

10. 引人新变量 $t=x+\frac{1}{x}$, 计算积分

$$
\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.
$$

解 设 $t=x+\frac{1}{x}$, 则 $t^2-4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2, x=\frac{1}{2}\left(t\pm\sqrt{t^2-4}\right)$,

于是,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left(1+\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}^t\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)\right]+\int_{\frac{5}{2}}^{2}\left(1-\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}^t d\left[\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{t^2-4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left(1+\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left(1-\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\mathrm{e}^t\left[\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right]\mathrm{d}t=\int_{2}^{\frac{5}{2}}\left[\sqrt{t^2-4}d\left(\mathrm{e}^t\right)+\mathrm{e}^t\mathrm{d}\sqrt{t^2-4}\right]$$

$$=\left(\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}\Big|_{2}^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}.$$

11. 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}[-\arctan(\cos x)]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

12. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求积分 $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x\\&=\arctan f(x)|_{-1}^{0}+\arctan f(x)|_{0}^{2}+\arctan f(x)|_{2}^{3}\\&=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\arctan\frac{4^2\cdot 2}{3^3\cdot 1}-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.\end{aligned}$$

13. 证明: 若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty<x<+\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数, 则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

式中 a 为任意的数.

证明

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

对上述等式右端的第三个积分, 设 $x-T=t$, 则

$$\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

于是,

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

第 4 章 定积分的应用

♠ 在科学技术与现实生活中，我们往往无法简单直接地计算一些量，或仅通过初等运算直接表示变量之间的关系. 但是，借助定积分的思路，我们可以很好地解决这些问题. 本节将重点阐述建立这些量的积分表达式的基本方法——微元法，通过几何与物理方面的例子来说明这种方法的思想和步骤.

内容提要

- ❑ 定积分的几何应用
- ❑ 定积分的物理应用

4.1 建立积分表达式的微元法

我们在应用定积分解决问题时需要解决以下两个问题：

1. 具备哪些特征的量能用定积分来表达?
2. 怎么建立计算这些量中的表达式?

我们知道，曲边梯形的面积 S、细棒的质量 m、做变速直线运动物体的位移 s 等都能用定积分来表达. 观察发现，它们具备如下特征：

1. 在区间 $[a,b]$ 上连续分布；
2. 具有对区间的可加性，即分布在区间 $[a,b]$ 上的总量可以表示为分布在 $[a,b]$ 各子区间上的量之和.

一般而言，只要具备上述两个特征，我们都可以通过适当的方法，利用定积分来描述这个量.

我们来回顾一下我们建立上述各量的表达式的步骤

1. 分割：将区间 $[a,b]$ 分割成若干部分，即向区间中插入 $n-1$ 个分点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，从而有

   $$[a,b]=[a,x_1)\cup[x_1,x_2)\cup[x_2,x_3)\cdots\cup[x_{n-1},b]$$

   各区间的长度为

   $$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$$

2. 取近似：所求量在整个区间 $[a,b]$ 上的分布是不均匀的，在我们第一步分割得到的每一个小区间上也不是均匀的. 但是，假设我们插入了很多个分点，也就是我们分割所得的每个区间都很小. 根据我们的假设，所求量在区间上是连续的，从而所求量在每一个小区间 $[x_i,x_{i+1}], i=1,2,\cdots,n-1$ 上的变化也都很小，因此我们可以近似认为所求量在小区间上的分布是均匀的，并用小区间上任意一点的值来代表这个量在这个小区间上的值，不妨设这点是区间的左端点：

   $$\Delta S_i\approx f(x_i)\Delta x_i$$

3. 作和：将第 2 步中所得到的近似值全部加起来，得到所求总量的近似值
$$S \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$
4. 取极限：将每个小区间长度取得无限小，步骤 3 中的和式所得到的极限就是 S 的精确值. 令 $d = \max \Delta x_i$，则
$$S = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

学习过定积分的相关知识后，我们可以将上述四个步骤简化为两步：

1. 任意分割 $[a,b]$ 为若干子区间，任取一个子区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，写出 S 在该子区间上局部量 ΔS 的近似值
$$\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$$
2. 以 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积式，在 $[a,b]$ 上作积分就可以得到 S 的精确值
$$S = \int_a^b \mathrm{d}S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这种建立积分表达式的方法，通常称为**微元法**.

我们将分布在区间 $[a,x]$ 上的量 S 记作 $S(x)$，则
$$S(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$
从而函数 $S(x)$ 的微分为
$$\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$$
而 ΔS 就是 $S(x)$ 在区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的改变量，从而 ΔS 的近似值就是 $S(x)$ 的微分. 因此，我们只要能找到与 $\mathrm{d}x$ 呈线性关系，且与 ΔS 之差为 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小的量 $\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$，它就是 ΔS 所需的近似值.

下面我们将通过一些实例来说明微元法.

4.2 定积分在几何中的应用

例题 4.1 求由 $x=1, x=2, y=0, y=\dfrac{1}{x}$ 围成的图形面积.

解 容易看出，所求面积 S 是非均匀分布在区间 $[1,2]$ 上且对区间具有可加性的量，因此可以通过定积分来计算.

根据微元法，为求面积微元 $\mathrm{d}S$，任意分割区间 $[1,2]$ 并任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，在此区间上，图形的面积 ΔS 可以近似由点 x 所对应的，高为 $f(x)$，宽为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形代替，即
$$\Delta S \approx (\frac{1}{x} - 0)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
可以证明，小区间上图形的面积 ΔS 与小矩形面积之差是关于 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小，因此它就是所求的面积微元 $\mathrm{d}S$，即
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

将面积微元在区间 $[1,2]$ 上作积分，就可以求得图形面积

$$S=\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

例题 4.2 求由 $y=f(x)=-x^2+1$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转围成的回转体体积 V.

解 容易算出，$y=-x^2+1$ 与 x 轴的交点为 ± 1.

任意分割区间 $[-1,1]$，取任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，则回转体在这一区间上的体积，可近似认为是一个半径为 $y=f(x)$，厚度为 $\mathrm{d}x$ 的“薄圆盘”的体积 $\pi y^2\mathrm{d}x$ ，即

$$\Delta V\approx \pi y^2\mathrm{d}x$$

因此所求体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(-x^2+1)^2\mathrm{d}x$$

积分求得

$$V=\pi\int_{-1}^1(-x^2+1)^2\mathrm{d}x=\pi(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x)\Big|_{-1}^1=\frac{16}{15}\pi$$

例题 4.3 计算由参数方程 $x=\phi(t),y=\psi(t)$ 确定的曲线，当 $t\in[a,b]$ 时对应的曲线段长度 S.

解 设该区间对应的 x 轴上的区间为 $[c,d]$，任意分割，并取任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，则曲线在这一区间上可近似看成一条直线，其长度

$$\Delta S\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

，因此所求弧长微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

由微分和导数的关系，可得

$$\mathrm{d}x=\phi^{'}(t)\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=\psi^{'}(t)\mathrm{d}t$$

从而

$$\mathrm{d}S=\sqrt{[(\phi'(t)\mathrm{d}t)^2+(\psi'(t)\mathrm{d}t)^2]}=\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

作积分，得

$$S=\int_a^b\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

4.3 定积分在物理中的应用

例题 4.4 一质点沿 x 轴运动，其速度 v(m/s) 与时间 t(s) 的关系为 $v=t^3+2t+1$，求该质点在 $0\sim 1$s 内的位移 x(m)

解 在时间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，质点可近似看成作匀速直线运动，即

$$\Delta x\approx v(t)\mathrm{d}t$$

因此其位移微元可表示为 $\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t = (t^3 + 2t + 1)\mathrm{d}t$ 积分求得

$$x = \int_0^1 (t^3 + 2t + 1)\mathrm{d}t = (\frac{1}{4}t^4 + t^2 + t)\Big|_0^1 = \frac{9}{4}(\mathrm{m})$$

第 4 章 练习

1. 计算曲线 $y = \mathrm{e}^x, y = \mathrm{e}^{2x}$ 与直线 $y = 2$ 围成的平面图形的面积.

   解 容易算出，$y = \mathrm{e}^x$ 与 $y = 2$ 交于点 $(\ln 2, 2)$，$y = \mathrm{e}^{2x}$ 与 $y = 2$ 交于点 $(\frac{1}{2}\ln 2)$ 所以这图形的面积为

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} (\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}\ln 2}^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$

$$= (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x)\Big|_0^{\frac{1}{2}\ln 2} + (2x - \mathrm{e}^x)\Big|_{\frac{1}{2}\ln 2}^{\ln 2}$$

$$= [(2 - \sqrt{2}) - (\frac{1}{2} - 1)] + [(2\ln 2 - 2) - (\ln 2 - \sqrt{2})]$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

2. 两质点的质量分别为 M 与 m，相距为 a. 现将质点 m 沿两质点连线向外移动 l，求克服引力所作的功.

   解

$$W_{引} = -\int_a^{a+l} \frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r = GMm(\frac{1}{r})\Big|_a^{a+l} = GMm(\frac{1}{a+l} - \frac{1}{a})$$

$$W_{克} = -W_{引} = GMm(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l})$$

第 5 章 反常积分

♠ 在许多理论和实际问题中，我们经常需要将定积分的概念进行推广，研究无穷区间或无界函数的积分.

内容提要

- ❑ 无穷积分
- ❑ 无界积分
- ❑ 反常积分的审敛原则
- ❑ Γ 积分

5.1 无穷区间上的积分

定义 5.1 (无穷积分)

设函数 f 定义在区间 $[a,+\infty)$ 上. 若对任何 $b>a$，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则称 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 f 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的积分，简称无穷积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上的积分收敛，此时称该极限为 f 在 $[a,+\infty)$ 上积分的值，否则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上积分发散. 收敛性与发散性统称敛散性.

类似地，可定义 f 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 及其敛散性.

f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分定义如下：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

，其中 c 为任意实数，a 与 b 相互独立，分别趋向于 $-\infty$ 或 $+\infty$. 若极限

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

同时存在，则称 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分收敛，否则称积分发散. ♣

注 无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 的积分的定义中，a,b 必须相互独立地趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$. 例如，以下做法是错误的.

问题 5.1 判断积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x=\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} x\mathrm{d}x=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-l}^{l}=0$$

从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 收敛

其错误原因在于，趋于 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的变量不是相互独立的.

通常称 $\lim\limits_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 的 Cauchy **主值**.

例题 5.1 证明积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散.

解 当 $p\neq 1$ 时，

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{-p+1}\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1)$$

所以

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1)$$

从而当 $p<1$ 时，该极限为正无穷大，积分发散；当 $p>1$ 时，该极限为 $\frac{1}{p-1}$，故积分收敛，并且

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}(p>1)$$

当 $p=1$ 时，由于

$$\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln b$$

所以，当 $b\to+\infty$ 时，它的极限为 $+\infty$，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散.

综上，该积分在 $p>1$ 时收敛，$p\leq 1$ 时发散. 通常称此积分为 p 积分.

例题 5.2 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 的值.

解 选取 $c=0$，则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}&=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\&=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi\end{aligned}$$

为书写简便，通常省略极限符号，直接将 $+\infty$ 或 $-\infty$ 作上（下）限代入，按照这样的做法，上题的运算过程可改写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$$

5.2 无界函数积分

定义 5.2 (无界函数积分)

设函数 f 在区间 $(a,b]$ 上有定义，f 在 a 附近无界（此时称 a 为 f 的奇点），并且 $\forall\varepsilon>0$，f 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上 Riemann 可积，则称 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 为无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

若极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的积分收敛，否则称积分发散.

若 f 定义在 $[a,b)$ 上，b 为 f 的奇点，可类似地定义无界函数 f 在 $[a,b)$ 上的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 及其敛散性.

设 f 定义在区间 $[a,c)\cup(c,b]$ 上，c 为 f 的奇点，定义 f 在 $[a,b]$ 上的积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_{c+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

同时存在，则称无界函数 f 在 $[a,b]$ 上的积分收敛，否则称积分发散.

无穷区间上的积分与无界函数的积分统称为反常积分. ♣

例题 5.3 求积分 $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$ 的值.

解 由于 a 是 $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的奇点，所以题中的积分是无界函数积分，由定义得

$$\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon})=\frac{\pi}{2}$$

例题 5.4 讨论积分 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}(a<b,p>0)$ 的敛散性.

解 当 $p=1$ 时，$\forall\varepsilon>0$，

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln x-a\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\ln(b-a)-\ln\varepsilon$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，这极限不存在，从而 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x-a}$ 发散.

当 $p\neq1$ 时，由于

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}]=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}-\frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}]$$

$$\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p},p<1$$

$$+\infty,p>1$$

从而当 $p<1$ 时，积分收敛，其值为 $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$；当 $p\geq 1$ 时，积分发散.
通常称该积分为无界函数的 p 积分.

我们也可以用类似定积分的 **Newton-Leibniz** 公式的表达形式来讨论无界函数积分的敛散性，并计算收敛积分的值. 设 $f\in C[a,b)$,$x=b$ 是它的奇点，F 为 f 的一个原函数. 由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(F(x)\big|_a^{b-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(b-\varepsilon)-F(a)$$

所以 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(b-\varepsilon)$ 存在. 特别地，若原函数 F 在 $x=b$ 处左连续，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

例题 5.5 计算 $\displaystyle\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$

解 容易求得 $\ln x$ 的一个原函数为 $x\ln x-x$，它在 $x=0$ 处没有定义. 但是利用 L'Hospital 法则可知

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x-x)=0$$

故

$$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)\big|_0^1=-1$$

如果函数 f 在 $[a,b]$ 内有一个或多个奇点，除这些奇点外均连续，只要 f 的原函数 F 在这些点上都连续，则仍然可以用以上方法计算反常积分的值.

例题 5.6 计算 $\displaystyle\int_{-1}^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$

解 $x=0$ 是被积函数的奇点，但由于原函数 $F(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在该点连续，故

$$\int_{-1}^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^8=\frac{9}{2}$$

5.3 无穷区间上积分的审敛准则

通过定义来判断反常积分的敛散性往往是比较困难的，因为这种方法不但要求计算被积函数的原函数，还要求极限，当原函数不能用初等函数表示时这种方法就更无能为力了，因此，需要另外寻找判定反常积分敛散性的简便方法.

定理 5.1 (比较准则 1)

设 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且

$$0\leq f(x)\leq g(x),\forall x\in[a,+\infty)$$

则

1. 当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
2. 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明

1. 对大于 a 的任意实数 b，由 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$
由于不等式右边积分收敛，因此函数 $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，又因为 $f(x) \geq 0$，所以 $F(b)$ 是 b 的单调递增函数，从而由单调有界定理，极限
$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
存在，即 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. 用反证法，可以由结论 1 得到结论 2.

例题 5.7 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由于 $x > 1$ 时，$0 < \mathrm{e}^{-x^2} < \mathrm{e}^{-x}$，而积分
$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1}$$
收敛，所以无穷积分
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
也收敛.

定理 5.2 (比较准则 2)

如果 f,g 为 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，且 $g(x) > 0$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$，那么

1. 当 $\lambda > 0$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散；
2. 当 $\lambda = 0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
3. 当 $\lambda = +\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明

1. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$，所以存在正数 $c > a$，使当 $x \geq c$ 时，恒有
$$-\frac{\lambda}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \frac{\lambda}{2}$$

注意到 $g(x)>0$，从而有

$$0<\frac{\lambda}{2}g(x)<f(x)<\frac{3}{2}\lambda g(x)$$

由比较准则 1 容易得出，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

2. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)=0}$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists c\geq a,s.t.\forall x\geq c$

$$-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon$$

从而有

$$-\varepsilon g(x)<f(x)<\varepsilon g(x)$$

即

$$0<f(x)+\varepsilon g(x)<2\varepsilon g(x)$$

由于 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故由比较准则 1 知积分 $\int_a^{+\infty}[f(x)+\varepsilon g(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛，又因为

$$\int_a^{+\infty}f(x)=\int_a^{+\infty}[f(x)+\varepsilon g(x)]\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\varepsilon g(x)\mathrm{d}x$$

所以 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 由反证法、结论 2 及比较准则 1 可得.

由于 p 积分的敛散性已经知道，因此在利用比较准则 2 时，可以取 $\frac{1}{x^p}$ 为 $g(x)$

例题 5.8 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$ 的敛散性.

解 设 $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2},g(x)=\frac{1}{x^2}$. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1$$

又 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ 也收敛，从而知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$$

收敛.

以上两个准则只适用于 f 在 $[a,+\infty)$ 上定号的情形，下面我们再考虑 f 变号的情形.

定理 5.3 (绝对收敛准则)

设 $f\in C[a,+\infty)$，如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，此时称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛

证明 由于 $0 \le |f(x)| - f(x) \le 2|f(x)|$，又已知

$$\int_a^{+\infty} 2|f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

收敛，由比较准则 1 知 $\int_a^{+\infty} [|f(x)| - f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，所以

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} [|f(x)| - f(x)]\mathrm{d}x$$

也收敛.

例题 5.9 判断 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由于 $\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right| \le \mathrm{e}^{-x}$，而 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，从而 $\int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x$ 收敛，即原积分绝对收敛.

5.4 无界函数积分的审敛准则

无界函数积分与无穷区间上的积分也有类似的审敛准则，现分别叙述如下，证明方式与无穷区间上的积分的审敛准则完全类似.

定理 5.4 (比较准则 1)

设 f, g 在 $(a, b]$ 上连续，a 是它们的奇点，且

$$0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in (a, b]$$

则

1. 当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
2. 当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 5.5 (比较准则 2)

如果 f, g 为 $(a, b]$ 上的非负连续函数，a 是它们的奇点，且 $g(x) > 0$，设 $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$，那么

1. 当 $\lambda > 0$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散；
2. 当 $\lambda = 0$ 时，若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
3. 当 $\lambda = +\infty$ 时，若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 5.6 (绝对收敛准则)

设 $f \in C(a,b]$，如果 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，此时称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛

5.5 Γ 函数

下面，我们来介绍一个在工程技术中常用的特殊函数——Γ 函数，它是用含参反常积分定义的非初等函数.

定义 5.3 (Γ 函数)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \alpha > 0$$

Γ 函数具有如下性质:

性质 Γ 函数在 $\alpha > 0$ 时收敛.

证明 注意到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} = 0$$

又积分 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big|_1^{+\infty} = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 所以由无穷区间上积分的比较准则 2，可得积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}$ 收敛. 当 $\alpha \geq 1$ 时，$\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 为定积分，当 $0 < \alpha < 1$ 时，它是无界函数积分. 注意到，积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$ 收敛（它是之前讨论过的无界函数 p 积分），又

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1$$

从而由无界函数比较准则 2 可知，$\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述，当 $\alpha > 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

收敛.

性质 递推关系：$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

证明

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

性质 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \Gamma(n+1) = n!$

证明 $n=1$ 时，$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty}=1=0!$
将递推关系式连续使用 n 次，得 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n!\Gamma(1)=n!$
性质 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
注 此性质在统计物理学中很常用，它的证明需要用到二重积分，感兴趣的读者可以自己证明.

第 5 章 练习

1. 讨论积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 取 $g(x)=x^{-\frac{3}{4}}$，则

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0+}x^{\frac{1}{4}}\ln\sin x$$

由 L′Hospital 法则得

$$\lim_{x\to0+}x^{\frac{1}{4}}\ln\sin x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}}=0$$

由 p 积分知，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$

收敛，从而由比较审敛准则 2 知，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

也收敛.

注 实际上，这积分是可以用初等方法计算的，留给读者作为练习.

2. 证明，当 $p>0,q>0$ 时，反常积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

解

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

令

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

$$I_2=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

当 $0<p<1$ 时，I_1 是奇点为 0 的无界函数积分，令 $g(x)=(1-x)^{q-1}$，则由 p 积分与比较审敛准则 2，I_1 收敛.
同理可证，当 $0<q<1$ 时，I_2 收敛.
当 $p\geq1$ 且 $q\geq1$ 时，这积分为定积分. 综上所述，当 $q>0,p>0$ 时，积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

第 6 章 一阶常微分方程

内容提要

- 换元法求解一阶常微分方程
- 可降阶求解的高阶微分方程
- 一阶常微分方程的物理应用

编者按：常微分方程一章套路性很强，因此，备考期间建议先熟练掌握各个类别的一阶微分方程的基础解法（这可以通过复习课本掌握）. 本章专门总结常微分方程中的一些常用技巧，以例题和练习的形式进行，可以把这一章当作是一本习题集，建议在已掌握基本解法的基础上学习本章节.

在读者开始本章节的练习之前，可以通过以下的清单检查是否掌握了基础知识.

定义 6.1 (微分方程的定义)

一个微分方程是含有自变量、未知函数及其导数的等式. 通常，微分方程可以表示为

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

其中，y 是未知函数，$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ 是它的各阶导数. ♣

定义 6.2 (微分方程的阶数)

微分方程的阶数是方程中最高阶导数的阶数. 即，在微分方程

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

中，阶数为 n. ♣

定义 6.3 (微分方程解的定义)

满足微分方程的函数称为该微分方程的解. ♣

定义 6.4 (通解的定义)

含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解称为微分方程的通解. ♣

注

1. 通解并不等价于所有解.
2. 独立是指常数之间不是线性相关的（不能通过运算合并为一个）.

定义 6.5 (特解的定义)

确定了通解中任意常数以后的解称为特解. ♣

注

1. 通解中的任意常数可以通过定解条件确定，在常微分方程中，这一般是初始条件. n 阶常微分方程的特解需要确定 n 个任意常数，因此需要 n 个初始条件.
2. 任意常数的确定是求解微分方程中很重要的一步，在偏微分方程组中，除了初始条件，往往还需要边界条件才能确定.

命题 6.1 (可分离变量的一阶微分方程的解法)

可分离变量的一阶微分方程是指能够通过代数变换将变量分离开来的微分方程. 这类方程通常可以通过直接积分得到解. 形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

其中，$f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是关于 x 和 y 的已知函数. 将 y 和 x 的函数分离. 然后对两边同时积分，通解为：

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

定理 6.1 (一阶线性微分方程的通解公式)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

的一阶微分方程的称为一阶线性微分方程. 其通解公式为：

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)dx}dx + C)$$

命题 6.2 (Bernoulli 方程的解法)

Bernoulli 方程是指形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n$$

的一阶微分方程. 其解法为：令 $z = y^{1-n}$，然后转化为一阶线性微分方程，代入通解公式求解.

6.1 换元法在一阶常微分方程中的应用

6.1.1 将 x 与 y 耦合的项作整体换元

若方程中有一项的 x 与 y 难以分离，而其他项较为整齐时，不妨尝试将这一项整体换掉，简化方程.

练习 6.1 求解微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(x+2y)}$$

解 令 $u=x+2y$，则 $\dfrac{du}{dx}=1+2\dfrac{dy}{dx}$，代入得到：

$$u'=1+\frac{2}{u}$$

分离变量积分：

$$\int \mathrm{d}x=\int \frac{u\mathrm{d}u}{u+2}$$

故微分方程的通解为：

$$x=u-2\ln|u+2|+C$$

注 本题中 $\dfrac{1}{x+2y}$ 这一项中，x 与 y 难以分离，可以尝试直接整体换元解决.

当然本题还有另一种解法，即两边同时取倒数，将 x 看作 y 的函数，然后利用一阶线性微分方程的通解公式解决. 注意：这种解法依赖于等式右边分母是 x 的一次函数，下面这道题中，这一前提不能满足，只能选择整体换元.

练习 6.2 求解微分方程满足 $y(0)=1$ 的特解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$$

解 令 $u=x+y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入得到：

$$u'=1+\frac{1}{u^2}$$

分离变量积分：

$$\int \mathrm{d}x=\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

故微分方程的通解为：

$$y=\arctan u+C$$

代入 $y(0)=1$ 得到 $C=1-\dfrac{\pi}{4}$，故特解为：

$$y=\arctan(x+y)+1-\frac{\pi}{4}$$

练习 6.3 求解微分方程：

$$y'=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}$$

解 令 $u=xy$，则

$$y'=\frac{u'x-u}{x^2}$$

代入得到

$$u'=\frac{1}{\sin^2 u}$$

分离变量积分

$$\int \mathrm{d}x=\int \sin^2 u\mathrm{d}u$$

故微分方程的通解为

$$x=\frac{xy}{2}-\frac{1}{4}\sin(2xy)+C$$

6.1.2 从导数关系入手换元

对原方程做适当变形，如果观察到某一项是另一项的导数，那么可以作整体换元对其进行化简.

练习 6.4 求解微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan y+x\mathrm{e}^x\sec y$$

解 对原方程做适当变形，得到:

$$\cos yy'=\sin y+x\mathrm{e}^x$$

观察到 $(\sin y)'=\cos yy'$，故作换元，令 $u=\sin y$，则有:

$$u'=u+x\mathrm{e}^x$$

按照一阶线性常微分方程的通解公式，得到:

$$u=\frac{x^2\mathrm{e}^x}{2}+C\mathrm{e}^x$$

代入 $u=\sin y$，得到:

$$\sin y=\frac{x^2\mathrm{e}^x}{2}+C\mathrm{e}^x$$

练习 6.5 求微分方程的通解:

$$xy'+y=x^2y^2\ln x$$

解 令 $m=xy$，则有

$$m'=xy'+y$$

代入原方程，得到

$$m'=m^2\ln x$$

当 $m\neq 0$ 时，分离变量积分，得到

$$\int\frac{1}{m^2}\mathrm{d}m=\int\ln x\mathrm{d}x$$

积分得到

$$-\frac{1}{m}=x\ln x-x+C$$

代入 $m=xy$，得到

$$y=-\frac{1}{x(x\ln x-x+C)}$$

另外一种情况: $m\equiv 0$，此时，$y=0$，故通解为

$$y=-\frac{1}{x(x\ln x-x+C)}\text{或}y=0$$

注 在使用换元法时，两边同时除以一个函数，必须要考虑这个函数恒为零的情况，如果这种

情况能通过常数 C 的选择加以包含，那么不必特别说明，否则必须要额外说明这种情况. 下面的这道题也需要这样考虑.

练习 6.6 求微分方程的通解:

$$y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1$$

解 令 $m = y + \sin x - 1$，则有

$$m' = m^2$$

当 $m \neq 0$ 时，分离变量积分，得到

$$y = 1 - \sin x - \frac{1}{x+C}$$

另外一种情况：$m \equiv 0$，此时，$y = -\sin x + 1$，故通解为

$$y = 1 - \sin x - \frac{1}{x+C} \text{或} y = -\sin x + 1$$

练习 6.7 求微分方程的通解:

$$y^x \left(\mathrm{ln} y + \frac{xy'}{y} + 1 \right) = \mathrm{e}^{-x}$$

解 令 $m = x\mathrm{ln}y + x$，则有

$$m' = \mathrm{e}^{-m}$$

积分得到

$$\mathrm{e}^m = x + C$$

故原微分方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x+C)}{x} - 1}$$

6.1.3 齐次化换元

命题 6.3

某些可以化成 $f(y, \frac{y}{x}) = 0$ 形式的微分方程，可以对其作整体换元，令 $u = \frac{y}{x}, y' = u + u'x$，从而简化微分方程形式.

练习 6.8 求以下微分方程满足 $y(1) = \mathrm{e}^3$ 的特解:

$$xy' + y\mathrm{ln}x = y\mathrm{ln}y$$

解 令 $u = \frac{y}{x}$，则有

$$xu' + u - u\mathrm{ln}u = 0$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t(\mathrm{ln}t - 1)}$$

积分得

$$x = C(\mathrm{ln}t - 1)$$

代入 $u=\dfrac{y}{x}$ 并根据初始条件确定常数，得到

$$y=x\mathrm{e}^{2x+1}$$

✍ **练习 6.9** 求以下微分方程满足 $y(1)=\sqrt{2}$ 的特解：

$$(y^4-3x^2)y'+xy=0$$

解 展开

$$y^4\mathrm{d}y-3x^2\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$$

第一项是五次的只有 y，后两项是三次的，且都含有 x^2，故令 $x=m^2$，原式即变为齐五次微分方程

$$y^4\mathrm{d}y-3m^4\mathrm{d}y+2m^3y\mathrm{d}m=0$$

再令 $t=\dfrac{y}{m}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{3-t^4}{t(t^4-1)}$$

分离变量，积分得到

$$y^4-x^2=Cy^6$$

再由初始条件得 $C=-\dfrac{3}{8}$，故特解为

$$y^4-x^2=-\frac{3}{8}y^6$$

6.2 将高阶微分方程降阶为一阶微分方程求解

本节讨论这样一类高阶微分方程：它无法使用高阶微分方程的求解公式直接求解（或直接求解很繁琐），但是可以通过适当的换元或变形，将其降阶为一阶微分方程求解.

6.2.1 通过合理分配降阶高阶微分方程

✍ **练习 6.10** 求微分方程的通解：

$$y''-2y'+y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

解 变形为

$$(y''-y')+(y'-y)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

令 $u=y'-y$，则有

$$u'-u=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

利用通解公式，得到

$$u=\mathrm{e}^x\ln|x|+C_1\mathrm{e}^x$$

代入 $u=y'-y$，再利用通解公式，原微分方程的通解为

$$y=xe^x\ln|x|+C_1xe^x+C_2e^x$$

笔记 本题看似是一个二阶常微分方程，但非齐次项的形式我们并没有学过. 观察其次项的系数，发现可以通过合理分配，将其降阶为一阶微分方程.

练习 6.11 求微分方程的通解：

$$(y''-2y')\cos y+\sin y(1-y'^2)=\frac{e^x\ln x}{x}$$

解 令 $t=\sin y$，则有

$$t''-2t'+t=\frac{e^x\ln x}{x}$$

令 $u=t'-t$，则有

$$u'-u=\frac{e^x\ln x}{x}$$

利用通解公式，得到

$$u=\frac{1}{2}e^x(\ln|x|)^2+C_1e^x$$

代入 $u=t'-t$，再利用通解公式，得到

$$t=e^x\left(\frac{1}{2}x(\ln|x|)^2-x\ln|x|+C_1x+C_2\right)$$

故原微分方程的通解为

$$\sin y=e^x\left(\frac{1}{2}x(\ln|x|)^2-x\ln|x|+C_1x+C_2\right)$$

注 本题是一个小综合，需要观察到各项之间的导数关系，从而作出换元，还需要一点合理分配进行降阶的技巧.

6.2.2 通过将不为零阶的最低阶换元进行降阶

命题 6.4

对于形如

$$f(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$$

的微分方程（最低阶不为零阶），可以直接将最低阶换元：令 $u=y^{(k)}$，解出最低阶导数的表达式，然后对其不断积分，直到算出原微分方程的通解.

练习 6.12 求微分方程的通解：

$$(1-2x)y''-y'=0$$

解 令 $u=y'$，则有

$$(1-2x)u'-u=0$$

整理得到

$$\frac{u'}{u}=\frac{1}{1-2x}$$

积分得到

$$\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$$

带入 $u=y'$，再次积分得到

$$y=-C_1\sqrt{1-2x}+C_2$$

6.2.3 通过换元将仅含有 y,y' 和 y'' 的微分方程降阶

命题 6.5 (通过换元将仅含有 y,y' 和 y'' 的微分方程降阶)

形如

$$f(y,y',y'')=0$$

的微分方程，可以通过换元

$$y'=p,y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

将其降阶为一阶微分方程.

练习 6.13 求微分方程满足 $y(1)=1,y'(1)=0$ 的特解:

$$y^3y''+1=0$$

解 令 $y'=p$，分离变量得

$$\int p\mathrm{d}p=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y^3}$$

计算积分得

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1$$

由初始条件确定 $C_1=-\frac{1}{2}$，因此

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

分离变量积分得

$$\pm x=-\sqrt{1-y^2}+C_2$$

由初始条件得 $C_2=\pm1$，因此

$$y^2=2x-x^2$$

$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

注

1. 提示：当需要确定多个待定系数时，建议每解出来一个结果就确定一个对应的常数. 如果都拖到最后确定，还得求导（这就回到前面去了），计算量较大且易错.
2. 本题的符号易错，因为 $y(1)=1$，所以最终结果前没有 $\pm$ 号.

6.3 可化为一阶常微分方程的积分方程

练习 6.14 设函数 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，求 $y=y(x)$，使得：

$$x\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t.$$

解

两边求导得

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t+xy(x)=\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)xy(x)$$

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t+x^2y(x)$$

再次求导得

$$y(x)=xy(x)+2xy(x)+x^2y'(x)$$

$$(1-3x)y(x)=x^2y'(x)$$

$y(x)=0$ 时，满足方程.

$y(x)\neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1-3x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{x}-3\ln|x|+C$$

$$y=\frac{C}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

其中 C 为任意常数.

6.4 一阶常微分方程在物理中的应用

物理中运动学、动力学、暂态电路等问题中常常会遇到一阶常微分方程，本章以空气阻力模型为例简要展示其在动力学中的应用，期末考试大概率不会考，但可以为后续的物理课学习打下基础.

练习 6.15 *Alice* 在地上以初始速度为 v_0，初始角度为 θ（发射方向与水平方向夹角）扔球砸中楼上的 *Bob*，砸中时球的速度刚好水平，求击中时的速度大小. 已知小球会受到正比于速度平方的空气阻力，比例系数为 k_1.

解 考虑物体速度为 v 方向与水平方向夹角为 θ 的时候，物体受重力与空气阻力，将二者在垂直于速度与平行于速度方向分解. 在垂直于速度方向有

$$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{\rho}$$

其中 ρ 为物体在该处运动轨迹的曲率半径，得

$$\rho=\frac{v^2}{g\cos\theta}$$

再来看平行速度方向，空气阻力为 $-kv^2$. 考虑物体运动一小段时间，那么根据我们 θ 的定义，物体应当转过 $-\mathrm{d}\theta$，走过 $-\mathrm{d}\theta\rho$. 这一过程中重力与阻力做功为

$$\mathrm{d}W=-(mg\sin\theta+kv^2)(-\mathrm{d}\theta\rho)$$

做功应当等于动能变化，有

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=mvdv$$

将 ρ 的表达式代入可得 v 与 θ 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\frac{kv^3}{mg\cos\theta}+\tan\theta v$$

以上即为 v 与 θ 的微分关系. 由数学提示，该方程为伯努利方程，进行换元

$$z=v^{-2}$$

将 z 带入得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}+\tan\theta z=-\frac{k}{mg\cos\theta}$$

带入一阶线性非齐次微分方程的通解得

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int 2\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}\int-\frac{2k}{mg\cos\theta}\mathrm{e}^{\int 2\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\cos^2\theta\left(-\frac{2k}{mg\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta+A\right)\\&=A\cos^2\theta-\frac{2k}{mg}\left[\sin\theta+\cos^2\theta\ln\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\right]\end{aligned}$$

化得

$$v=\frac{1}{\sqrt{A\cos^2\theta-\frac{2k}{mg}\left[\sin\theta+\cos^2\theta\ln\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\right]}}$$

现在代入初态并讨论. 利用 $\theta=\theta_0$ 时 $v=v_0$，即

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{A\cos^2\theta_0-\frac{2k}{mg}\left[\sin\theta_0+\cos^2\theta_0\ln\left(\tan\theta_0+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\right]}}$$

得

$$A=\frac{1}{v_0^2\cos^2\theta_0}+\frac{2k}{mg\cos^2\theta_0}\left[\sin\theta_0+\cos^2\theta_0\ln\left(\tan\theta_0+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\right]$$

速度方向水平时 $\theta=0$，此时

$$v_f=\frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v_0^2\cos^2\theta_0}+\frac{2k}{mg\cos^2\theta_0}\left[\sin\theta_0+\cos^2\theta_0\ln\left(\tan\theta_0+\frac{1}{\cos\theta_0}\right)\right]}}$$

注 本题，若尝试在直角坐标系中写出动力学方程组，则会发现 x 与 y 坐标非线性耦合，难以求解. 此时巧妙地选择**自然坐标系**考虑，再结合动能定理，便可转为 Bernoulli 方程求解.

✍ **练习 6.16** 一小球斜抛，初速度为 v_0，初始角度为 α，空气阻力 $\boldsymbol{f}=-k\boldsymbol{v}$，求轨迹方程. 并验证当 k 趋于零时，轨迹方程趋近于无阻力时的抛物线方程.

解 列出动力学方程如下

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kv_x$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -kv_x - mg$$

解微分方程得到

$$v_x = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{\frac{-kt}{m}}$$

$$v_y = (v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k})\mathrm{e}^{\frac{-kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

再对速度积分，得到

$$x = \frac{mv_0}{k}\cos\alpha(1 - \mathrm{e}^{\frac{-kt}{m}})$$

$$y = \frac{m}{k}(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{k})(1 - \mathrm{e}^{\frac{-kt}{m}}) - \frac{mgt}{k}$$

两式联立，消去 t，得到轨迹方程

$$y = (\tan\alpha + \frac{mg}{kv_0\cos\alpha})x + \frac{m^2g}{k^2}\ln(1 - \frac{kx}{mv_0\cos\alpha})$$

令 $k \to 0$，对上式取极限，得到

$$y = \tan\alpha x + \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

这与无空气阻力时的斜抛方程一致.

第 6 章 练习

1. 求解微分方程的通解：

$$y' = -\frac{1+y^2}{x - \arctan y}$$

解 分母关于 x 是线性的，因此可以把 x 视为因变量，把 y 视为自变量

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\arctan y}{1+y^2}$$

直接代一阶线性微分方程的通解公式，得到

$$x = \arctan y - 1 + C^{-\arctan y}$$

2. 求解：

$$(2x^3 + 3xy^2 - 7x)\mathrm{d}x - (3x^2y + 2y^3 - 8y)\mathrm{d}y = 0$$

解 变形为：

$$\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8}$$

令 $x^2 = u + 2$，$y^2 = v + 1$，则有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u + 3v}{3u + 2v}$$

解得

$$u + v = C(u - v)^5$$

代回原变量，得到通解

$$x^2 + y^2 - 3 = C(x^2 - y^2 - 1)^5$$

第 7 章 高阶微分方程

内容提要

- ❏ 高阶微分方程解的结构
- ❏ 高阶常系数线性齐次微分方程
- ❏ 高阶常系数非齐次线性微分方程
- ❏ Euler 方程

7.1 高阶微分方程解的结构

作为高阶微分分方程理论的基础，这里给出一些关键性的定义与定理帮助大家回忆本节知识

定义 7.1 (线性算子)

将 $L(\ )=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}+P_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+P_n(t)$ 称为线性微分算子.

定理 7.1 (n 阶线性微分方程解的存在唯一性定理)

对于方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+P_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\quad+P_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+P_n(t)x=F(t)$$

给定初值条件

$$x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$$

若 $P_1(t),P_2(t),,P_n(t)$ 以及 $F(T)$ 均在区间 (a,b) 连续，则原方程存在唯一满足初值条件的一个解 $x(t)$

定理 7.2 (解的线性无关判别法)

设 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 是 n 阶线性齐次微分方程地 n 个定义在区间 I 上的解，则它们线性无关的充要条件是：在 I 上存在一点 t_0，使 **Wronski** 行列式

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \cdots & \dot{x}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}\neq 0$$

定理 7.3 (通解结构)

对于齐次线性方程，若 $x_1,x_2.\cdots,x_n$ 是其 n 个线性无关的特解，则称 $x_1,x_2.\cdots,x_n$ 为该方程的一个基础解组，其通解可表示为

$$x=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$$

对于非齐次方程，其通解为对应齐次方程的通解 X 加上原方程的一个特解 $\tilde{X}$, 即

$$x = X + \tilde{X}$$

一些细小的知识与定理的证明在本章节中或以习题的形式呈现，如若需要完整回忆可以选择打开课本.

7.2 高阶常系数线性齐次微分方程

例题 7.1 求微分方程 $3y^{(3)} - 10y'' + 4y' + 8y = 0$ 的通解

解 所给方程的特征方程为

$$3\lambda^3 - 10\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda = -\dfrac{2}{3}$, 于是原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x} + C_3 \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$$

笔记 我们在求数列通项、解决差分方程时都会遇到特征方程与特征根，相关的公式本质上都是借助矩阵特征值的知识推导的，有兴趣的同学可以自行查看相关书籍. 但解决相关题目只需掌握求解特征方程的方法就可以很好地应对.

练习 7.1 求微分方程 $x'' + \dfrac{4}{t}x' + (\dfrac{2}{t^2} + 1)x = 0$ 的通解

解 恒等变形将方程化为

$$(t^2 x'' + 4tx' + 2x) + t^2 x = 0$$

观察到括号内为 $t^2 x$ 的二阶导, 故令 $t^2 x = m$ 得

$$m'' + m = 0$$

其特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$ 所有特征值为 $\mathrm{i}, -\mathrm{i}$

故

$$m = C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

将 $m = t^2 x$ 回代得原方程通解为

$$x = \frac{C_1 \sin t + C_2 \cos t}{t^2}$$

7.3 高阶常系数非齐次线性微分方程

在第一节的知识回忆中，我们可以看到非齐次方程的解法实际就是再解齐次方程的基础上加上一个特解，所以在这里我们主要就是探究如何高效的解出特解

7.3.1 待定系数法

例题 7.2 求微分方程 $y''-y'-2y=(2x+1)e^{2x}$ 的通解

解 对应于齐次线性方程的特征方程为

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

故特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$, 对应的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

再求非齐次线性方程的一个特解，由于 $\mu=2$ 是特征方程的单根，故令

$$y^*=x(B_1x+B_0)\mathrm{e}^{2x}$$

回代解得

$$B_1=\frac{1}{3},B_0=\frac{1}{9}$$

特解为

$$y^*=\mathrm{e}^{2x}(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x)$$

则原微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x)$$

笔记 本题是最常规的高阶非齐次微分方程的解法，需要读者熟悉相关特解的形式，下面给出一个书上的表格供读者回忆：

<table>
<tr><td>$F(t)$ 的类型</td><td colspan="2">应设置特解 $x^*(t)$ 的形式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">m 次多项式 $\varphi(t)$</td><td>0 不是特征值</td><td>$x^*=Z(t)$</td></tr>
<tr><td>0 是 k 重特征值</td><td>$x^*=t^kZ(t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\varphi(t)\mathrm{e}^{\mu t}$</td><td>$\mu$ 不是特征值</td><td>$x^*=Z(t)e^{\mu t}$</td></tr>
<tr><td>μ 是 k 重特征值</td><td>$x^*=t^kZ(t)\mathrm{e}^{\mu t}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\varphi(t)\mathrm{e}^{\mu t}\cos vt$ 或
$\varphi(t)\mathrm{e}^{\mu t}\sin vt$</td><td>$\mu+\mathrm{i}v$ 不是特征值</td><td>$x^*=\mathrm{e}^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos vt+Z_2(t)\sin vt\right]$</td></tr>
<tr><td>$\mu+\mathrm{i}v$ 是 k 重特征值 $\left(1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]\right)$</td><td>$x^*=t^k\mathrm{e}^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos vt+Z_2(t)\sin vt\right]$</td></tr>
</table>

练习 7.2 求微分方程 $y'''-y=(x+1)\mathrm{e}^x$ 的通解

解 对应齐线性微分方程的特征方程为 $\lambda^3-1=0$，特征根分别为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，故齐线性微分方程的解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

由于 $\lambda=1$ 是单根，设有形如 $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$ 的特解，代回原方程，得 $A=\dfrac{1}{6},B=0$ 故原

方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x^2}{6}\mathrm{e}^x$$

7.3.2 换元法

例题 7.3 求微分方程 $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} + x$ 的通解

解 这个题的形式不是我们所学的典型的非齐次方程形式，进行恒等变形
两侧同乘 e^x, 得

$$y''\mathrm{e}^x + 2y'\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x + 1$$

令 $y\mathrm{e}^x = t$
原方程可化为

$$t'' = x\mathrm{e}^x + 1 \tag{7.1}$$

两侧进行不定积分可得方程（1.1）的通解为

$$t = \mathrm{e}^x(x-2) + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

则原特征方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-x}(\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2) + x - 2$$

笔记 本题作为一个非常规形式的非齐次方程，实际上使用了换元法来转化成简便形式，需要观察不同项的系数，对于类似二项式系数的形式可以引导我们向换元法靠拢.

练习 7.3 求微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的通解

解

< 解法一 >:
当 $y \neq 0$ 时，方程两边同乘 $\mu = \dfrac{1}{y^2}$，得

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0$$

从而有 $\dfrac{y'}{y} = C$ 积分并注意到 $y = 0$ 也是原方程的解，故原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{C_2x}$$

< 解法二 >:
令 $y = \mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x}$，则

$$y' = z\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x},\quad y'' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z^2\right)\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x},$$

代入原方程得

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z^2\right)\mathrm{e}^{2\int z\mathrm{d}x}-z^2\mathrm{e}^{2\int z\mathrm{d}x}=0$$

约去公因子可得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，则 $z=C$ 回代可得原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{C_2x}$$

笔记 本题实际上可以采用降阶的做法完成，在这里介绍了另外两种换元的方法

7.3.3 常数变易法

例题 7.4 求 $y''+y'-2y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ 的通解

解

< 解法一 >:

注意到

$$y''-y'+2y'-2y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

令 $p=y'-y$ 得

$$p'+2p=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

两边同乘 e^{2x} 得

$$(\mathrm{e}^{2x}p)'=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

两边同时积分可得

$$\mathrm{e}^{2x}p=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-\mathrm{e}^{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C_1$$

即

$$y'-y=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C_1$$

再按照一阶非齐次微分方程的解法可以得出

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}\ln(1+\mathrm{e}^{x})$$

< 解法二 >: 再引入常数变易法

对应齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

现在将常数 C_1,C_2 变易为 $C_1(x),C_2(x)$，得到

$$y=C_1(x)\mathrm{e}^{x}+C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

则

$$y'=C_1(x)\mathrm{e}^{x}-2C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}+C_1'(x)\mathrm{e}^{x}+C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

由于现在有两个未知函数，但我们现在只有一个等式，我们需要再添加一个限制条件，我们

只要求一个特解，因此不妨给定一个方便计算的初值条件

令

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0$$

则

$$y' = C_1(x)\mathrm{e}^x - 2C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y'' = C_1(x)\mathrm{e}^x + 4C_2\mathrm{e}^{-2x} + C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

就得到两个限制条件

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^x) \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \mathrm{e}^x - \ln(\mathrm{e}^x+1)\right] \end{cases}$$

结果仍然为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\ln(1+\mathrm{e}^x)$$

笔记 相比之下，方法一似乎更加简便，但方法二的适用性更广，不需要过多观察，不失为一种保底方法.

注 由于解法二的目标是求特解，因此在最后一步求不定积分时省略了常数项

练习 7.4 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = x\sin 2x$ 的通解

解 对应齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

设非齐线性微分方程的解为

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

代入原方程可得

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2(x)\cos 2x = x\sin 2x, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{x\sin^2 2x}{2}, \\ C_2'(x) = \dfrac{x\sin 2x\cos 2x}{2}, \end{cases}$$

积分得

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{16}\sin 4x + \dfrac{\cos 4x}{64}, \\ C_2(x) = -\dfrac{x}{16}\cos 4x + \dfrac{\sin 4x}{64}, \end{cases}$$

故原方程的通解为

$$y = y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{64}$$

7.3.4 利用解的叠合性

例题 7.5 求微分方程 $y'' + y = 1 - \dfrac{1}{\sin x}$ 通解

解

< 解法一 >: 可以先使用常数变易法

对应齐次微分方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

现在将常数 C_1, C_2 变易为 $C_1(x), C_2(x)$，得到

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

则

$$y' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x + C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x$$

令

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$

则

$$y' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

$$y'' = -C_1'(x)\sin x - C_1(x)\cos x + C_2'(x)\cos x - C_2(x)\sin x$$

就得到两个限制条件

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 1 - \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1(x) = x + \cos x \\ C_2(x) = \sin x - \ln|\sin x| \end{cases}$$

通解为

$$y = C_1\sin x + C_2\cos x + x\cos x - (\ln|\sin x|)\sin x + 1$$

< 解法二 >: 利用解的叠合性

将原方程转化为

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 = 1 \\ y_2'' + y_2 = \csc x \end{cases}$$

分别解出 y_1, y_2 的通解 Y_1, Y_2，由解的叠合性可知通解

$$y = Y_1 + Y_2$$

如果我们动手计算一下，我们会发现结果和方法一是吻合的

笔记 通过利用解的叠合性，我们把原方程拆成两个可以使用待定系数法的方程，这样解题更加便利.

结论 常见的高阶常系数非齐次线性微分方程的特解的求法：待定系数法、还原法、常数变易法、利用解的叠合性

7.4 Euler 方程

定义 7.2 (Euler 方程)

形如

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n y = 0$$

的方程称为 Euler 方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为常数

对于这类变系数方程，通常的解决办法是做变量替换 $x = \mathrm{e}^t$ 从而将变系数当成转化为常系数方程来求解. ♣

练习 7.5 求方程 $x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 3x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0$ 的通解

解 令 $x = \mathrm{e}^t (\mathrm{e}^{-t})$, 则原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = 0$$

对应特征方程的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，对应的通解为

$$y = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{2t}$$

由于 $t = \ln x$，故原方程的通解为

$$y = x^2 (C_1 + C_2 \ln|x|)$$

笔记 通过换元的方式解 Euler 方程，我们实际可以发现 Euler 方程的解有它固定的结构，实际上存在如下的结论：

对于 Euler 方程的 m 重实根 $\lambda = \lambda_0$ 对应其 m 个线性无关的解

$$x^{\lambda_0}, x^{\lambda_0}\ln|x|, \cdots, x^{\lambda_0}(\ln|x|)^{m-1}$$

而对于其 m 重共轭复根 $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\nu$ 对应了 $2m$ 个线性无关的解

$$x^{\mu}\cos(\nu\ln|x|), x^{\mu}\ln|x|\cos(\nu\ln|x|), \cdots, x^{\mu}(\ln|x|)^{m-1}\cos(\nu\ln|x|)$$

$$x^\mu \sin(\nu \ln|x|), x^\mu \ln|x| \sin(\nu \ln|x|), \cdots, x^\mu (\ln|x|)^{m-1} \sin(\nu \ln|x|)$$

✍ **练习 7.6** 求方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 的通解

解 令 $x=\mathrm{e}^t$ 得到对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda+1=0$$

则特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 依照结论，原方程的通解即为

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right]$$

✍ **练习 7.7** 求方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=\dfrac{36}{x}\ln x$ 的通解

解 这是一个解 Euler 方程与求非齐次方程特解的复合问题

先解对应的 Euler 方程，其特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

解得特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，因此齐线性微分方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^3$$

再利用常数变易法求原方程的一个特解设 $y^*=C_1(x)x^2+C_2(x)x^3$ 为原方程的一个特解，代入可得

$$\begin{cases}C_1'(x)+xC_2'(x)=0,\\ 2C_1'(x)+3xC_2'(x)=\dfrac{36}{x^4}\ln x.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}C_1(x)=\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{12}{x^3}\ln x+r_1,\\ C_2(x)=-\dfrac{9}{4x^4}-\dfrac{9}{x^4}\ln x=r_2.\end{cases}$$

取 $r_1=r_2=0$, 得原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{7}{4x}+\frac{3}{x}\ln x$$

故原方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{7}{4x}+\frac{3}{x}\ln x$$

第 7 章 练习

1. 解下列微分方程

   1) $y^{(7)}-3y^{(6)}+5y^{(5)}-7y^{(4)}+7y^{(3)}-5y''+3y'-y=0$

   2) $y''-y=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\mathrm{e}^x$

   3) $x^2f'(x)+3xf(x)+10\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$

   解

1) 对于这个 7 阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为

$$\lambda^7-3\lambda^6+5\lambda^5-7\lambda^4+7\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda-1=0$$

分解因式得

$$(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)^3=0$$

特征根 $\lambda_1=1$ 重数为 3，$\lambda_{2,3}=\pm\mathrm{i}$ 重数为 2，故原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1+C_2x+C_3x^2)+(C_4+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x$$

2) 首先通过特征方程求出其对应齐次微分方程的通解

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

由于 $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 3x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x$ 故将原方程可以拆为两个方程

$$y_1''-y_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 3x,\quad y_2''-y_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x$$

由待定系数法，求得特解为

$$y_1^*(x)=\left(-\frac{1}{26}\cos 3x+\frac{1}{39}\sin 3x\right)\mathrm{e}^x,$$
$$y_2^*(x)=\left(-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\right)\mathrm{e}^x$$

可得原方程的一个特解为

$$y_1^*(x)+y_2^*(x)=\left(-\frac{1}{26}\cos 3x+\frac{1}{39}\sin 3x-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\right)\mathrm{e}^x$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\left(-\frac{1}{26}\cos 3x+\frac{1}{39}\sin 3x-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\right)\mathrm{e}^x$$

3) 两边求导可得

$$x^2f''(x)+5xf'(x)+13f(x)=0$$

令 $x=e^\tau$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\tau^2}+4\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}+13f=0$$

对应特征方程解得的特征根为 $\lambda_1=-2+3\mathrm{i},\lambda_2=-2-3\mathrm{i}$ 那么由 Euler 方程的结论可知原方程的通解为

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[C_1\cos\left(3\ln|x|\right)C_1\cos\left(3\ln|x|\right)\right]$$

第 8 章 一阶线性微分方程组

内容提要

- ❑ 线性微分方程组的定义
- ❑ 线性微分方程组的解
- ❑ 常系数微分方程的求解
- ❑ Jordan 标准形
- ❑ 标准形在求解微分方程组中的应用

8.1 线性微分方程组的基本概念

8.1.1 线性微分方程组的定义

定义 8.1 (矩阵函数)

$\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{n\times m}, t\in \boldsymbol{I}$ 其中 $(a_{ij}(t))_{n\times m}$ 为 $\boldsymbol{I}$ 上的函数. ♣

- 若所有函数 a_{ij} 均在区间 $\boldsymbol{I}$ 上连续，则称矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在区间 $\boldsymbol{I}$ 上连续.
- 若 $a_{ij}(t)$ 在区间 $\boldsymbol{I}$ 上可导 (可积)，则称矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在区间 $\boldsymbol{I}$ 上可导 (可积).

定义 8.2 (矩阵函数的运算)

$$\dot{\boldsymbol{A}}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_{ij}(t))_{n\times m}$$

♣

容易验证矩阵函数的导数满足如下法则：

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是可与 $\boldsymbol{A}$ 相乘的常数矩阵;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}$.

定义 8.3 (向量值函数)

$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T$ 可以看成一个列矩阵，是上述的一个特例，因此可以使用上述运算法则. 例如 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=(\dot{x_1}(t),\cdots,\dot{x_n}(t))^T$. ♣

那么我们就得到了线性微分方程组的向量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t) \tag{8.1}$$

当 $\boldsymbol{f}(t)\equiv 0$ 时，8.1化为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.2}$$

称为**齐次线性微分方程组**. 当 $\boldsymbol{f}(t)\neq\boldsymbol{0}$ 时，称8.2为**非齐次线性微分方程组**.

8.1.2 线性微分方程组的解

由于方程组 8.1 的左端由 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量的导数组成，则它的解中可以含有 n 个独立的任意常数，并称这样的解为方程组 8.1 的**通解**，不含任意常数的则称为 **特解**. 要确定通解中的 n 个任意常数，需要 n 个独立的附加条件 (定解条件). 若定解条件是由函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 在一点 $t=t_0$ 处的值给出：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x_0}=(x_{0,1}\cdots x_{0,n})^T$，则此条件称为初值条件，即求解如下方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{8.3}$$

该问题称为**初值问题**，或 **Cauchy 问题**. 它与方程式一样有类似的性质：

定理 8.1 (解的存在唯一性定理)

当系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 与非齐次项 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 (a,b) 内连续时，初值问题8.3的解在 (a,b) 内是存在且唯一的. ♡

从而我们有以下结论

定理 8.2

线性微分方程组满足初始条件:

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 在区间 (a,b) 上是存在且唯一的，其中初值 $t_0\in(a,b)$ 和 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 是任意给定的. ♡

齐次线性微分方程组

1. $\boldsymbol{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ 是方程组 8.2 的解，称为 **平凡解**或**零解**;
2. 若方程组8.2的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\mathbf{0}$，则由解的存在唯一性定理可知必有 $\boldsymbol{x}(t)\equiv\mathbf{0}$;
3. 若 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,\cdots,n,t\in(a,b))$ 均为方程组 8.2 的解，$C_1,\cdots,C_n$ 皆为常数，则其线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{x}_i(t)\quad(t\in(a,b))$ 也是方程组 8.2的解.

定义 8.4 (线性相关与线性无关)

当在区间 (a,b) 上的向量函数满足以下条件时

$$c_1\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x})+c_2\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x})+\cdots+c_m\boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{x})\equiv\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}\in(a,b)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 为不全为零的任意常数，那么我们称 $\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{\phi}_m(\boldsymbol{x})$ 线性相关，否则，就称线性无关 ♣

我们知道方程组 8.1 的通解由 n 个线性无关的向量构成一个解空间 (线性无关与线性相关的概念参考线性代数的内容)，我们称这样的解为**基本解组**，以这些解的分量构成的矩阵称为

方程组 8.1 的**基解矩阵**，记为：

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}=(\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$$

利用基解矩阵可将方程组8.2的通解表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C},\quad t\in(a,b) \tag{8.4}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(C_1,\cdots,C_n)^T$ 是由任意常数构成的常向量.

由此可见，求解齐次线性微分方程组关键就是求出其基解矩阵，也就是 n 个线性无关的特解. 我们有下列简单的线性无关的判别法：

定义 8.5 (Wronski 行列式)

由 n 个 n 维向量值函数 $\boldsymbol{x}_i(t)(t\in\boldsymbol{I},i=1,2,\cdots,n)$ 的分量 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 依次为列所构成的行列式，称为这 n 个向量值函数的 **Wronski** 行列式，记作 $W(t)=\det(x_{ij}(t)),t\in\boldsymbol{I}$.

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

♣

引理 8.1 (Liouville 公式)

如果 Wronski 行列式 $W(x)$ 满足

$$W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau},\ a<t_0,t<b$$

其中

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}(t)=\sum_{i=1}na_{ii}(t)$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的迹.

♡

由上述定理可知，Wronski 行列式 $W(t)$ 在区间 (a,b) 上只有两种可能，恒为 0，恒不为 0.

定理 8.3

齐次微分方程组8.1的 n 个解 $\boldsymbol{x}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 (a,b) 内线性无关的充要条件是存在一点 $t_0\in(a,b)$，使得这 n 个解的 Wronski 行列式在 t_0 处的值 $W(t_0)\neq 0$.

♡

接下来我们来看基解矩阵所具有的性质：

1. 基解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$ 满足矩阵方程
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$$
2. 若 $\boldsymbol{X}(t)$ 是方程组8.2在 (a,b) 内的任一基解矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是任一 n 阶非奇异常数矩阵，则 $\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{B}$ 也是8.2在 (a,b) 内的一个基解矩阵.

3. 若 $\boldsymbol{X}(t)$ 与 $\boldsymbol{X}^*(t)$ 是方程组8.2在 (a,b) 内的任意两个基解矩阵，则必存在一 n 阶非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}^*(t)\boldsymbol{B},\quad t\in(a,b)$$

非齐次线性微分方程组

定理 8.4 (非齐次线性微分方程组解的结构)

非齐次线性微分方程组8.1的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以表示为它的任一特解 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 与它所对应的齐次线性微分方程组8.2的通解8.4之和的形式，即：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{x}^*(t),\quad t\in(a,b)$$

♡

也就是说我们需要求得齐次线性微分方程组的基解矩阵以及一个非齐次线性微分方程组的特解.

定理 8.5

设 $\boldsymbol{X}(t)$ $(t\in(a,b))$ 是齐次线性微分方程组的一个基解矩阵，则

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in(a,b) \tag{8.5}$$

就是非齐次线性微分方程组8.1适合初值条件 $\boldsymbol{x}^*(t)=0$ 的特解.

♡

于是我们得到了非齐次线性微分方程组8.1通解的表达式

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.6}$$

代入初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 代入，可得特解：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.7}$$

8.2 常系数线性微分方程组

当微分方程组8.1的系数 $a_{ij}(t)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 全是常数时，我们称此时的方程组为**常系数微分方程组**，这也是每年考试的重点.

8.2.1 常系数齐次微分方程组

其矩阵形式为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.8}$$

类比我们所学的一阶线性常系数微分方程的解为指数函数以及指数函数的导数仍是指数函数，我们可以设想方程组8.8有形如 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的特解，其中 λ 为待定常数，$\boldsymbol{r}$ 为待定常向量，

然后将特解代入8.8中来求确定的 λ 与 $\boldsymbol{r}$. 这种方法称为**待定系数法**. 可以得到:

$$\boldsymbol{r}\lambda = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r} \quad 或 \quad (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

可见方程组8.8的解是 λ 与 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及其对应的特征向量.

(1)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

这时的 $\boldsymbol{A}$ 在线性代数中的意义是可以对角化，此时我们只需要求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量及其对应的特征值，就可求出基解矩阵.

定理 8.6

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(不一定互不相同), 则矩阵

$$\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{r}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\boldsymbol{r}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\boldsymbol{r}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}) \tag{8.9}$$

就是常系数齐次线性微分方程组8.8的一个基解矩阵. 从而其通解为:

$$\boldsymbol{X}(t) = \left(\boldsymbol{r}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\boldsymbol{r}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\cdots,\boldsymbol{r}_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\right)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ 为任意常向量.

♡

例题 8.1 求方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

的通解.

解 微分方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda-3)^2(\lambda-2) = 0$$

求得其特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 对于 $\lambda_1 = 2$，求出其特征向量为:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$，可以求出两个线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故其基解矩阵为

$$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{r}_1\mathrm{e}^{2t},\boldsymbol{r}_2\mathrm{e}^{3t},\boldsymbol{r}_3\mathrm{e}^{3t})=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{3t}&\mathrm{e}^{3t}\\\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{3t}&0\\\mathrm{e}^{2t}&0&\mathrm{e}^{3t}\end{bmatrix}$$

则微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^T$ 为任意常向量.

(2)$\boldsymbol{A}$ 没有 n 个线性无关的特征向量

这时的 $\boldsymbol{A}$ 无法对角化，但可以采取 **Jordan 标准型**，编者会在之后说明. 这里编者直接给出结论：

定理 8.7

设 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n_i 重特征值，则方程组8.8必存在 n_i 个形如

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_i t}\left(\boldsymbol{r}_0+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_1+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{n_i-1}\right)\tag{8.10}$$

的线性无关的特解，其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{n_i}\boldsymbol{r}=0$$

的非零解，而该方程组必有 n_i 个线性无关的解. 对于每一个解 $\boldsymbol{r}_0$，相应的 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_{n_i-1}$ 可由下列关系式依次确定：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0\\\boldsymbol{r}_2&=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{r}_{n_i-1}&=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_{n_i-2}\end{aligned}\tag{8.11}$$

♡

例题 8.2 求微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\tag{8.12}$$

的通解.

解 首先列出 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程并求其特征值

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(\lambda-1)^3=0,\ \ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

对于三重特征值 $\lambda_1=1$，由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 不满秩，故先求出方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的解：

$$\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_0^{(3)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{r}_0^{(1)}$、$\boldsymbol{r}_0^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{r}_0^{(3)}$ 和分别代入8.11(此时 $n_i=3$)，可得

$$\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_2^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_2^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(3)}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{r}_2^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{r}_0^{(1)},\boldsymbol{r}_1^{(1)},\boldsymbol{r}_2^{(1)},\boldsymbol{r}_0^{(2)},\boldsymbol{r}_1^{(2)},\boldsymbol{r}_2^{(2)},\boldsymbol{r}_0^{(3)},\boldsymbol{r}_1^{(3)},\boldsymbol{r}_2^{(3)}$ 分别代入8.10式，得到三个特解

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(1)}+t\boldsymbol{r}_1^{(1)}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(1)})=\mathrm{e}^t\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(2)}+t\boldsymbol{r}_1^{(2)}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(2)})=\mathrm{e}^t\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}\frac{2}{3}t\\-\frac{1}{3}t+1\\-\frac{1}{3}t\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3(t)=\mathrm{e}^t(\boldsymbol{r}_0^{(3)}+t\boldsymbol{r}_1^{(3)}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{r}_2^{(3)})=\mathrm{e}^t\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\mathrm{e}^t\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}t\\\frac{1}{3}t\\\frac{1}{3}t+1\end{bmatrix}$$

则微分方程组的通解为：

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^t & \frac{2}{3}t\mathrm{e}^t & -\frac{2}{3}t\mathrm{e}^t\\ 0 & (1-\frac{1}{3}t)\mathrm{e}^t & \frac{1}{3}t\mathrm{e}^t\\ 0 & -\frac{1}{3}t\mathrm{e}^t & (1+\frac{1}{3}t)\mathrm{e}^t\end{bmatrix}\boldsymbol{c}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意三维常数向量.

(3)$\boldsymbol{A}$ 有复特征值

定理 8.8

设方程组8.8有一个复数解

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\boldsymbol{u}(t)\pm \mathrm{i}\boldsymbol{v}(t)$$

则 $\boldsymbol{u}(x)$ 与 $\boldsymbol{v}(x)$ 是方程组两个线性无关的特解，可以代替 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 与其共轭.

所以我们如果遇到复特征值时，只需选一组中的一个进行计算就好了.

例题 8.3 求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}5&-1\\1&5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解 首先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(\lambda-5)^2+1=0,\ \lambda_1=5+\mathrm{i},\lambda_2=5-\mathrm{i}$$

接下来不论时计算 λ_1 还是 λ_2 是一样的，这里以 λ_1 为例，其特征向量为

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}$$

此时有特解

$$\boldsymbol{x}_0(t)=\mathrm{e}^{(5+\mathrm{i})t}\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{5t}\left(\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}+\mathrm{i}\begin{bmatrix}\cos t\\\sin t\end{bmatrix}\right)$$

则该微分方程组有两个特解

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{5t}\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{5t}\begin{bmatrix}\cos t\\\sin t\end{bmatrix}$$

则微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{5t}\begin{bmatrix}-\sin t&\cos t\\\cos t&\sin t\end{bmatrix}\boldsymbol{c}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意二维常数向量.

笔记 以上就是所用题的通用解法，但当然有些时候还是要因题而异，或许会有更简单的解答方法.

例题 8.4 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

解 设 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$，则该方程组可以写成

$$\begin{cases} \dot{y_1}(x)=y_2+y_3 \\ \dot{y_2}(x)=y_1+y_3 \\ \dot{y_3}(x)=y_1+y_2 \end{cases}$$

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}(y_1+y_2+y_3)}{\mathrm{d}x}=2(y_1+y_2+y_3)$$

于是

$$(y_1+y_2+y_3)=c\mathrm{e}^{2x}$$

将上式代入方程组得

$$\begin{cases} \dot{y_1}(x)=c\mathrm{e}^{2x}-y_1 \\ \dot{y_2}(x)=c\mathrm{e}^{2x}-y_2 \\ \dot{y_3}(x)=c\mathrm{e}^{2x}-y_3 \end{cases}$$

这是三个一阶线性微分方程. 由此得到

$$y_1=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}+c_1\mathrm{e}^{-x}$$
$$y_2=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-x}$$
$$y_3=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}+c_3\mathrm{e}^{-x}$$

又由于 $(y_1+y_2+y_3)=c\mathrm{e}^{2x}$，则 $c_3=-(c_1+c_2)$，因此通解为

$$y_1=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}+c_1\mathrm{e}^{-x}$$
$$y_2=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-x}$$
$$y_3=\frac{1}{3}c\mathrm{e}^{2x}-(c_1+c_2)\mathrm{e}^{-x}$$

8.2.2 常系数非齐次微分方程组

对于常系数非齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

我们可以按照8.5先求出特解，并求出其齐次的通解后将两者相加. 当然对于特解8.5我们有更加方便的解法

定理 8.9

设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是常系数线性齐次微分方程组满足 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$ 的基解矩阵，则常系数线性非齐次微分方程组的通解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.13}$$

而对于满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的特解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}(t-\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.14}$$

♡

对于该定理的证明，编者会在下一节提及. 可以认为此定理的一个必要条件为对于满足 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$ 的常系数线性齐次微分方程组的基解矩阵，$\boldsymbol{X}^{-1}(t_1)=\boldsymbol{X}(-t_1)$，$\boldsymbol{X}(t_1)+\boldsymbol{X}(t_2)=\boldsymbol{X}(t_1+t_2)$

例题 8.5 求解如下非齐次微分方程组

$$\begin{cases}\dot{y}(x)=z+2\mathrm{e}^x\\ \dot{z}(x)=y+\mathrm{e}^x\end{cases}$$

解 首先整理得

$$\begin{bmatrix}\dot{y}(x)\\ \dot{z}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^x\\ \mathrm{e}^x\end{bmatrix}$$

不妨令 $\boldsymbol{m}(x)=(y\ z)^T$，求出其一个基解矩阵为

$$\boldsymbol{M}_1(x)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^x&\mathrm{e}^{-x}\\ \mathrm{e}^x&-\mathrm{e}^{-x}\end{bmatrix}$$

为了使用定理8.9，选取基解矩阵

$$\boldsymbol{M}(x)=\boldsymbol{M}_1(x)\boldsymbol{M}_1^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}&\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}&\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\end{bmatrix}$$

这样可以保证 $\boldsymbol{M}(0)=\boldsymbol{E}$. 将 $\boldsymbol{M}(x)$ 代入方程8.14，得到

$$\boldsymbol{m}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}&\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}&\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\end{bmatrix}\boldsymbol{C}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}x\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x\\ \frac{3}{2}x\mathrm{e}^x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^x\end{bmatrix}$$

8.3 Jordan 标准形与常系数线性微分方程组

相信大家可能对教材上当 $\boldsymbol{A}$ 没有 n 个特征向量时为什么要构造8.11这种形式. 这其实和线性代数中的 Jordan 标准型有关.

8.3.1 前置知识：Jordan 标准形

Jordan 块

定义 8.6 (Jordan 块)

如果一个矩阵主对角线全为 λ，副对角线全为 1，其他地方都是 0，我们称这样的矩阵为一个 Jordan 块.

注意一个 Jordan 块主对角线上元素是相同的，而且可以是 0. 比如

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{bmatrix}$$

就是一个 $\lambda=2$ 的四阶 Jordan 块.

Jordan 标准形

定义 8.7 (Jordan 标准形)

Jordan 块组成的对角阵 $\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J_1},\boldsymbol{J_2},\ldots,\boldsymbol{J_m})$ 为一个 Jordan 标准形.

我们有如下定理：

定理 8.10 (Jordan 标准化)

对于任何一个方阵 $\boldsymbol{A}$，总存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PJP}^{-1}$.

这个证明比较复杂，主要对比对角化解释 $\boldsymbol{J},\boldsymbol{P}$ 的含义：

$\boldsymbol{J}$ 的主对角线是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，根据代数重数重复，这一点和对角化相同.

$\boldsymbol{P}$ 的列向量被称为“广义特征向量”. 当特征值的几何重数 m 小于代数重数 c 时，无法对角化是因为 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$ 的解空间没有那么多的基. 但是，广义特征向量被定义为 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^c x=0$ 的解空间的基. 可以证明，这样的基总有 c 个. 这样，总是能找到广义特征向量，也就总是能找到 $\boldsymbol{P}$.

$\boldsymbol{J}$ 由不同的 Jordan 块构成. 显然不同的特征值对应不同的块，但是相同的特征值也可能在不同的块内. 一般地，λ_i 对应的块的数量是 λ_i 的几何重数，而 λ_i 对应 Jordan 块中阶数恰为 k 的块的数量为 $\operatorname{rank}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{k-1}+\operatorname{rank}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{k+1}-2\operatorname{rank}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{k}$.

8.3.2 常系数一阶线性微分方程组

在线性常微分方程组中，常系数的方程组可以使用代数方法解出，这里给出一种一般方法，它是借助线性代数里的 Jordan 标准形以及矩阵相似理论给出的一种解法. 以下总假设所讨论的方程组的形式为

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y_0} \tag{8.15}$$

其中，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

8.3.3 矩阵指数

笔记 也许有人难以理解为何会有 n 个线性无关的解. 我们将方程组打开，每一个微分方程都有一个独立常数 C_i. 则所有的解构成一个与 $\mathbb{R}^n$ 同构的 n 维空间.

借助矩阵指数的概念，方程组的基解矩阵可以写作:

$$\exp \boldsymbol{A}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!} x^n \tag{8.16}$$

规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$. 上述矩阵函数项级数的收敛性按照矩阵范数的概念进行定义（全实数集上收敛），求导法则和一般一元实函数级数的求导无异.

$\exp \boldsymbol{A}x$ 是一个解矩阵，这是因为

$$(\exp \boldsymbol{A}x)' = \boldsymbol{A}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \boldsymbol{A} \exp \boldsymbol{A}x \tag{8.17}$$

同时还是基解矩阵，因为在 $x = 0$ 处，$\det \exp(\boldsymbol{A}0) = \det \boldsymbol{E} = 1 \neq 0$. 从而在 $\mathbb{R}$ 上 $\det \exp \boldsymbol{A}x \neq 0$. （作为方程组的解矩阵，一点不为零则处处不为零）.

因此，我们得到了级数表示下的方程组的解. 但在实际应用中，我们需要将其具体形式解出，因此还需要借助其它工具.

当然对于矩阵质数函数，还有一些其他的性质.

定理 8.11

(1) 若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$$

(2) 对于任意的 n 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 可逆，且

$$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}$$

(3) 若 n 维矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ ，$\boldsymbol{P}$ 可逆，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{PAP}^{-1}} = \boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}$$

笔记 通过这些性质，我们很容易就能理解定理8.9为何成立了. 因为当 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{x}$ 就是矩阵指数函数，所以满足上述性质.

可对角化的情形

设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 都是相异的，那么由线性代数的知识，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ 为对角矩阵，而对于对角矩阵来说，有

$$\exp \boldsymbol{D}x = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

而可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 i 列形成的列向量就是特征值 λ_i 所对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1, i = 1, 2, \cdots, n$. 因此再由矩阵指数的性质

$$\exp(\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{P}(\exp \boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{-1} \tag{8.19}$$

有

$$\exp \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{P}(\exp \boldsymbol{D}x)\boldsymbol{P}^{-1} \tag{8.20}$$

上式就是基解矩阵的确定式，实际上由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，基解矩阵有性质：它乘上任意可逆矩阵依然是基解矩阵（秩始终是 n），因此

$$(\exp \boldsymbol{A}x)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \exp \boldsymbol{D}x \tag{8.21}$$

也是一个基解矩阵，将它写成列向量（特征向量）分块的形式，就是

$$(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\boldsymbol{v}_n) \tag{8.22}$$

这样就避免了求逆的麻烦.

但是上式不一定是实矩阵，当特征根出现复数时，用 $\exp \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{P}(\exp \boldsymbol{D}x)\boldsymbol{P}^{-1}$ 作为基解矩阵更好.

化 Jordan 标准形

对于有重根的情形，确定矩阵 $\exp \boldsymbol{A}x$ 的具体形式的方法有很多，这里介绍 Jordan 标准形法，其特点是通法清晰，操作机械.

我们由矩阵相似的相关理论可以知道在 $\mathbb{C}$ 上，实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定有 Jordan 标准形：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix} \tag{8.23}$$

其中,

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{t_i\times t_i}, i=1,2,\cdots,s \tag{8.24}$$

且 $\sum\limits_{i=1}^{s}t_i=n$. 并存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$, 于是

$$\exp\boldsymbol{J}x=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\exp\boldsymbol{J}_1x & & & \\ & \exp\boldsymbol{J}_2x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp\boldsymbol{J}_sx\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{8.25}$$

其中,

$$\exp\boldsymbol{J}_ix=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{x^{(t_i-1)}}{(t_i-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x & 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_ix} \tag{8.26}$$

于是, $\exp\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{P}(\exp\boldsymbol{J}x)\boldsymbol{P}^{-1}$. 就是基解矩阵, 在 λ_i 均为实数时, 可直接计算 $\boldsymbol{P}\exp\boldsymbol{J}x$.

第 8 章 练习

1. 求线性微分方程组的通解:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 10 & -4 & 5\\ 5 & -4 & 6\end{pmatrix}$$

解 首先求矩阵特征值, 解方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$, 得

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_{2,3}=1$$

验证矩阵的秩, 容易得到 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}4&2&1\\15&10&1\\10&6&1\end{pmatrix}$$

做线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^*$, 解对应的方程组, 得到通解为

$$\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2t}\\C_2\mathrm{e}^t+C_3t\mathrm{e}^t\\C_3\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}4C_1\mathrm{e}^{2t}+(2C_2+2C_3t+C_3)\mathrm{e}^t\\15C_1\mathrm{e}^{2t}+(10C_2+10C_3t+C_3)\mathrm{e}^t\\10C_1\mathrm{e}^{2t}+(6C_2+6C_3t+C_3)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}.$$

2. 解非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\tan^2t-1\\\tan t\end{pmatrix}$$

解 首先考虑对应的齐次方程, 解方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$, 得到特征值为

$$\lambda_1=\mathrm{i},\quad \lambda_2=-\mathrm{i}$$

对应的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\end{pmatrix}$$

故齐次方程组的基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}&-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\\-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}&-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\end{pmatrix}$$

化为实的基解矩阵，为

$$\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

齐次方程的通解已得出，下面我们求方程的一个特解. 首先求基解矩阵的逆，为

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

故方程的一个特解为

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^{*}&=\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{t})\int_0^t\mathbf{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{t})\int_0^t\begin{pmatrix}\sin s & \cos s\\ -\cos s & \sin s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tan^2 s-1\\ \tan s\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\&=\begin{pmatrix}\tan t\\ 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}+\begin{pmatrix}\tan t\\ 2\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意二维常数向量.

笔记 上述过程为解非齐次线性微分方程组的较为完善的过程，这类题目的解法较为机械统一，读者可自行总结.