西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期中考试模拟试题（三）

一．填空题（共5道小题，每题4分，总计20分）

1.设$z=e^{x^2y}$，则$dz=$ ______________.

2.函数$z=z\left(x,y\right)$由方程$xy=e^{xz}-z$确定，则e^{x^2y}，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __________.

3.$u=2xy-z^2$在点$\left(2,-1,1\right)$处方向导数的最大值为 __________.

4.空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2+z^2=10\end{cases}$在点$M\left(3,1,1\right)$处的切线方程为 __________.

5.平面曲线L为$y=-\sqrt{1-x^2}$,则$\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=$ ___.

二. 计算题（共5道小题，每题8分，总计40分）

1.设$z=f\left(e^{x+y},\dfrac{x}{y}\right)$,其中$f$具有二阶连续的偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2.求曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$的一个切平面，使该切平面在三个坐标轴上的截距之积最大，并写出该切平面方程.

3.方程组$\begin{cases} u+v+w=x \\ uv+vw+wu=y \\ uvw=z \end{cases}$可确定隐函数$\begin{cases} u=u(x,y,z) \\ v=u(x,y,z) \\ w=u(x,y,z) \end{cases}$，求偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

4.计算二重积分$\iint\limits_{D}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$(D)$是由

$x^2+y^2=a^2$与$x^2+y^2=ax, x=0$围成的第一象限的区域.

5.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

三、(本题10分)计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$,其中$\Omega$由曲面

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成.

四、(本题10分)计算$\int_L \left(x^2 y + 3xe^x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\left(x^3 - y\sin y\right)\mathrm{d}y$，其中$L$是摆线$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$上从到点$O(0,0)$到点$A(\pi,2)$的弧段.

五、(本题10分)计算曲面积分$I = \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$,

其中(Σ)为椭圆抛物面$z = 4-\left(x^2 + 4y^2\right)$的上侧.

六、（本题10分）设为空间有界区域，其边界逐片光滑，$\vec{n}$是$(\partial\Omega)$的外单位法向量，函数$f(x,y,z)$在内满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$在$(\partial\Omega)$上有连续的偏导数.证明：

(1) $\displaystyle\oiint_{(\partial\Omega)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S=0;$

(2) $\displaystyle\oiint_{(\partial\Omega)} f(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S=\iiint_{(\Omega)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V;$

(3) 若当$(x,y,z)\in(\partial\Omega)$时，$f(x,y,z)\equiv 0$，

证明：在(Ω)内，$f(x,y,z)\equiv 0$.