2023A-64 学时

符号说明： $\boldsymbol{I}$ 是单位阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素之和

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$A_{ij}$ 是行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列各式中一定正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=0$　　（B）$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=0$

（C）$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\det(A)$　　（D）$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i2}=\det(\boldsymbol{A})$

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，以下说法中正确的个数为（　　）

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$，$|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|\ (k\in R)$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$，　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

3.设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且 $\det(\boldsymbol{A})=-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　（B）$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　（C）$\boldsymbol{A}$　　（D）$-\boldsymbol{A}$

4.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$（　　）

（A）同时为可逆矩阵　　（B）同时为不可逆矩阵

（C）至少有一个为零矩阵　　（D）最多有一个为可逆矩阵

5.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,

$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

6.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个三维向量，则向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 的相互关系是

（A）共面　　（B）共线.　　（C）既不共线也不共面.　　（D）不确定.

7.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵， $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$1,-2,3$，则下列矩阵中满秩矩阵是（ ）

（A）$2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$　（B）$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$　（C）$6\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^*$　（D）$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*$

8.下列矩阵中不能相似于对角矩阵的为

（A）$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶实对称矩阵，则正确的命题是（ ）

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

10. 设$T\in L(R^3)$，若$T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-x_3,x_1+x_2-x_3,x_1-x_2+x_3)$，则下列向量中属于$T$的核$\ker(T)$的是（ ）

(A) $(0,-2,-2)$　(B) $(0,-2,2)$　(C) $(1,-2,2)$　(D) $(1,-2,-2)$

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=$________.

12. 设$\|\boldsymbol{a}\|=4$，$\|\boldsymbol{b}\|=2$, $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|=2\sqrt{7}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为_______

13. 过点$(1,0,-2)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,0)$和$\boldsymbol{b}=(-1,1,-1)$的平面方程为

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵. 将$\boldsymbol{A}$的第 2 列加到第 1 列得矩阵$\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=$________.

15. 设实矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{\alpha}$为 3 维单位列向量,则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的正惯性指数为_________.

16. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为零，且$\boldsymbol{A}^*\neq \boldsymbol{O}$ ，则齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的通解为________.

17. 已知线性空间 R^3 的两个基 $(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(\mathrm{II}):\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$，则基 (I) 到基 (II) 的到过渡矩阵为_________.

18. 在线性空间 $F^{2\times2}$ 中，向量 $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 在基 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 下的坐标为__________.

19. 曲线 $C:\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ x^2+y^2=2y\end{cases}$ 在 Oxy 坐标面的投影曲线方程为__________.

20. 设 T 为 $F[x]_2$ 上的线性算子，定义 $T(f(x))=f(x+1)-f(x)$，则 T 在 $F[x]_2$ 的基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为__________.

三、解答题

21（10 分）设有向量组 $(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1,-5)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,6,-a,-10)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,15,12)^T$，又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,3,b)^T$. 问 a,b 取何值时，（1）$\boldsymbol{\beta}$ 能由 (I) 线性表示且表示式惟一；（2）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 (I) 线性表示；（3）$\boldsymbol{\beta}$ 能由 (I) 线性表示且表示式不惟一，并求出一般表达式。

22（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 14 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$,

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

(2)求向量空间 $W=\{\boldsymbol{A}x \mid x\in\boldsymbol{R}^5\}$ 的基与维数。

23（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$,

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

24（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

从而 $[n-r(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]+[n-r(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 也可相似对角化.