西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　高等数学（下）

学　　院　________　　考试日期　2024年6月24日

专业班号　________

姓　　名　________　　学　号________　　期中 □　期末 ✓

一、单选题（每小题3分，共18分）

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{5x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

(A)连续，偏导数存在；　(B)连续，偏导数不存在；

(C)不连续，偏导数存在；　(D)不连续，偏导数不存在。

2. 设 (D) 为圆域 $x^2+y^2\le R^2$，(D_1) 为 (D) 在第一象限的部分，则区域 (D) 上的二重积分 $\iint_{(D)}(x+y)^2\,dx\,dy$ 的最简表达式是（　　）

(A) $4\iint_{(D_1)}y^2\,dx\,dy$;　(B) 0;

(C) $16\iint_{(D_1)}x^2\,dx\,dy$;　(D) $4\iint_{(D_1)}(x^2+y^2)dx\,dy$.

3. 设椭圆 (C): $2x^2+3y^2=6$ 的周长为 l，则曲线积分 $\oint_{(C)}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-5x\right)ds$ 的值等于（　　）.

(A) $\frac{l}{6}$;　(B) $l-5$;　(C) l;　(D) 0

4. 下列正项级数收敛的是（　　）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; (B) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$;　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$;　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n}$.

5. 对于二元函数 $z=f(x,y)$，下列说法正确的是（　　）.

(A) 若函数可偏导，则一定连续；

(B) 若函数可微，则一定存在偏导数，且偏导数连续；

(C) 若函数两个偏导数都存在，则一定可微；

(D) 若函数两个混合偏导 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$.

6. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则该级数在点 $x=2$ 处（　　）.

(A) 条件收敛；(B) 绝对收敛；(C)发散；(D)敛散性不能确定.

二、填空题（每空3分，共18分）

1. 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,2,3)}=$________.

2. 设 $u=x^2z+\frac{1}{2}y^2z-\frac{1}{3}z^3$，则 $A=\mathrm{grad}\,u$ 的散度 $\mathrm{div}\,A=$________；

3. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上一点处与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程为________.

4. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为________.

5. 二重积分 $\iint_{(D)} y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy$ 值为______.其中(D)是由直线$y=x$,

$y=-1$ 及$x=1$ 所围成的区域.

6. 三重积分$\iiint_{(V)} z^2\ dV$的值为______. 其中$(V)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<R^2\}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 设$z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$,$f$具有二阶连续偏导数, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算$\iint_{(\Sigma)}(x+y+z)dS$, 其中曲面$(\Sigma)$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0<z<1)$.

3. 计算曲面积分$\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{x^2ydy\wedge dz+(e^z-xy^2)dz\wedge dx+(z^2+2)dx\wedge dy}{z+x^2+y^2}$,其中$\Sigma$为曲面

$z=9-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$, 取上侧.

4. 计算 $\oint_{(\Gamma)} y^2\ dx+xy\ dy+xz\ dz$, (Γ)为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$

的交线, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

5. 将函数$f(x)=\begin{cases}-x,-\pi<x<0\\ x,0<x<\pi\end{cases}$展开成傅里叶级数, 并利用它计算级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续的导数, 计算曲线积分

$\int_{(L)}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\ dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$, (L)为从点$A\left(3,\frac{2}{3}\right)$到点$B(1,2)$的直线段.

四、(10 分）已知函数$z=f(x,y)$的全微分$dz=2x\,dx-2y\,dy$, 并且$f(1,1)=2$.

求$f(x,y)$在椭圆域$D=\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}<1\right\}$ 上的最大值和最小值.

五、(6 分）若函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在平面区域$(D):x^2+y^2\leq 1$上具有一阶连续偏导数, 向量$F=vi+uj,G=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)j$;$L$为$(D)$的边界曲线, 当点$(x,y)\in L$时, $u(x,y)\equiv 1$, $v(x,y)\equiv y$, 试证明二重积分$\iint\limits_{(D)}F\cdot G d\sigma=-\pi$.