高等数学下期中模拟题（一）

一. 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 曲面$z=\sin x\sin y\sin(x+y)$上点$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$处法线与$z$轴夹角的正弦为(　).

A. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$;　B. $\frac{3\sqrt{26}}{26}$;　C. $\frac{\sqrt{65}}{13}$;　D. $\frac{1}{\sqrt{26}}$.

2. 设D：$x^2+y^2\le r^2$，则$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=($　$)$.

A. π;　B. $\frac{1}{\pi}$;　C. 1;　D. -1.

3. 二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$可以写成(   ).

A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$;

B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$;

D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$.

4. 设$f(x,y) = e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在(0,1)点处的两个偏导数$f_x(0,1)$和$f_y(0,1)$的情况为(   ).

A. $f_x(0,1)$不存在，$f_y(0,1) = \frac{4}{3}e$;

B. $f_x(0,1) = \frac{1}{3}e$，$f_y(0,1) = \frac{4}{3}e$;

C. $f_x(0,1) = \frac{1}{3}e$，$f_y(0,1)$不存在;

D. 两个偏导数都不存在.

5. 在曲线$x=t, y=-t^2, z=t^3$的所有切线中与平面$x+2y+z=4$平行的切线(　).

A 只有一条； B 只有2条； C 至少有3条； D 不存在.

二. 填空题（每题4分，总计20分）

1.函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$\mathrm{grad}\, u\big|_M=$

2.设$f(x,y)=\arctan\sqrt{x^y}$，则$f_x(x,1)=$

3.设$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$确定，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$

4.设$u=2xy-z^2$，则u在点M$(2,-1,1)$处方向导数的最大值为

5.设椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$，则它在点$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$处切平面方程为

三. (10分) 设$z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中f具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四. 计算二重积分$I=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中$D$是由$x^2+y^2=a^2$和$x^2+y^2=ax$及$x=0$所围在第一象限的区域$(a>0)$.

五. (12分) 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

在点$(0,0)$处 (1) 偏导数的存在性; (2) 偏导数的连续性; (3) 可微性.

六（10分）求球面$x^2+y^2+z^2-3z=0$与平面$2x-3y+5z-4=0$的交线在点$(1, 1, 1)$处的切线和法平面方程.

七（10分）已知平面两定点$A(1, 3)$, $B(4, 2)$,试在方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1(x\ge 0, y\ge 0)$圆上求一点$C$,使$\Delta ABC$的面积最大?

八（10分）设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求$f(x)$.