西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数与解析几何　课时：64　考试时间：2020 年 10 月 31 日

一、单项选择题（每小题 3 分）1. B　2 .C　3. D　4. C　5. A

二、填空题（每小题 3 分）　**6.** $(y^2-x^2)(c^2-b^2)$；　**7. 20**；

8. $6^{n-1}A$ 或 $6^{n-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & 3 & -3\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$；　**9. 2**；　**10.** $6x+y+6z=\pm 6$.

三、解答题

11 解　$\det(A)=1$,所以 A 可逆。

$$B=(-2A)^*=|-2A|(-2A)^{-1}=(-2)^3|A|\cdot(-\frac{1}{2})A^{-1}=4A^{-1},$$

故 $\det(B)=64.$

另解：利用 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$, 得

$$\det(B)=\det[(-2)^2A^*]=4^3\det(A^*)$$

$$=4^3[\det(A)]^2=64$$

12 证明：（1）$A+2B=AB \Rightarrow (A-2E)(B-E)=2E$

所以 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-E)$

(2) $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-E) \Rightarrow (A-2E)\frac{1}{2}(B-E)=\frac{1}{2}(B-E)(A-2E)$ …**10** 分

$\Rightarrow AB=BA$。

13 解 给方程两边左乘 A，右乘 A^{-1}，得

$$X=2A+AX$$

$$\Rightarrow (E-A)X=2A$$

$$\because |E-A|=1,\quad \therefore X=2(E-A)^{-1}A=\begin{bmatrix}-6 & 10 & 4\\ -2 & 4 & 2\\ -4 & 10 & 0\end{bmatrix}$$

14. 解

$$[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{bmatrix}$$

(1)当$a=3$时，$r(A)=r(\overline{A})=2;$

(2)当$a=-1$时，$r(A)=2, r(\overline{A})=3;$

(3)当$a\neq 3$且$a\neq -1$时，$r(A)=r(\overline{A})=3.$

15. 解 $\vec{s}_1=(1,2,1)$，$\vec{s}_2=(1,1,1)$，$P_1=(1,-1,1)$，$P_2=(-1,1,0)$

$$[\vec{s}_1\quad \vec{s}_2\quad \overrightarrow{P_1P_2}]=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\-2&2&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$ 所以这两条直线异面。

$$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(1,0,-1),$$

$$d=\frac{\left|[\vec{s}_1\quad \vec{s}_2\quad \overrightarrow{P_1P_2}]\right|}{\|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\|}=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

16. 解

（1）$PQ=\begin{bmatrix}E&O\\-\alpha^T A^*&|A|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\alpha\\O&|A|(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b)\end{bmatrix}$,

（2）因为A非奇异，$\therefore$ $|A|\neq 0$

$\because |P|=|A|$，$|PQ|=|P||Q|=|A|^2(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b)$

$\therefore |Q|=|A|(-\alpha^T A^{-1}\alpha+b)$

$\Rightarrow Q$ 可逆 $\Leftrightarrow |Q|\neq 0\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha\neq b.$