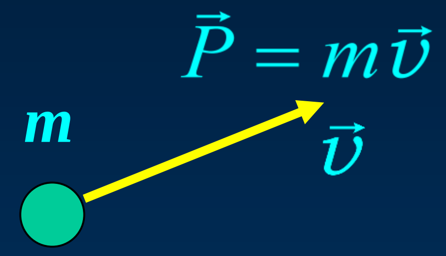
第四章　冲量和动量

- 力的空间累积 —— 功 => 能量的变化
- 力的时间累积？

4-1 质点动量定理



一、动量

质点的动量　$\vec{P}=m\vec{v}$

质点系的动量　$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$

说明：

- 矢量性，动量 P 与速度 v 方向相同
- 状态量 —— 速度 v 是一状态量
- 动量 P 是度量物体的机械运动量的物理量

二、质点动量定理

牛顿运动定律

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$$

$$\mathrm{d}\vec{P}=\mathrm{d}(m\vec{v})=\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{I}$$

力*F*的元冲量

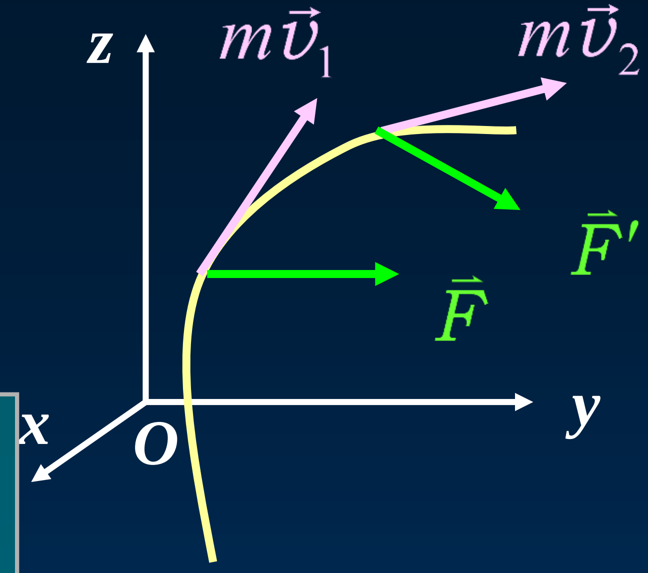
★ 结论：

(1) 质点动量的增量等于合外力×作用时间的增量

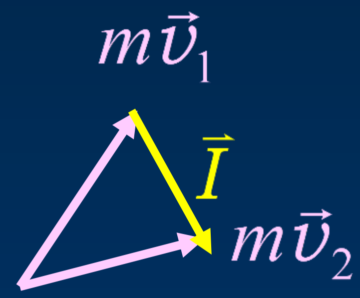
(2) 要使质点动量发生变化，仅有力的作用是不够的，力还必须累积作用一定时间

对一段有限时间， 有

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$



质点动量的增量等于合力对质点作用的冲量 —— 质点动量定理



★ 讨论

(1) 物理意义：质点动量的变化依赖于作用力的时间累积过程

合力对质点作用的冲量 ⟹ 质点动量矢量的变化

(2) 矢量性：冲量的方向与动量的增量方向相同

(3) 冲量是过程量，动量是状态量，动量定理在二者之间搭起桥梁。给我们提供了一种计算合力冲量的方法；在不同惯性系中同一力的冲量相同。

(4) 只适用于惯性系　　(5) 在直角坐标系中

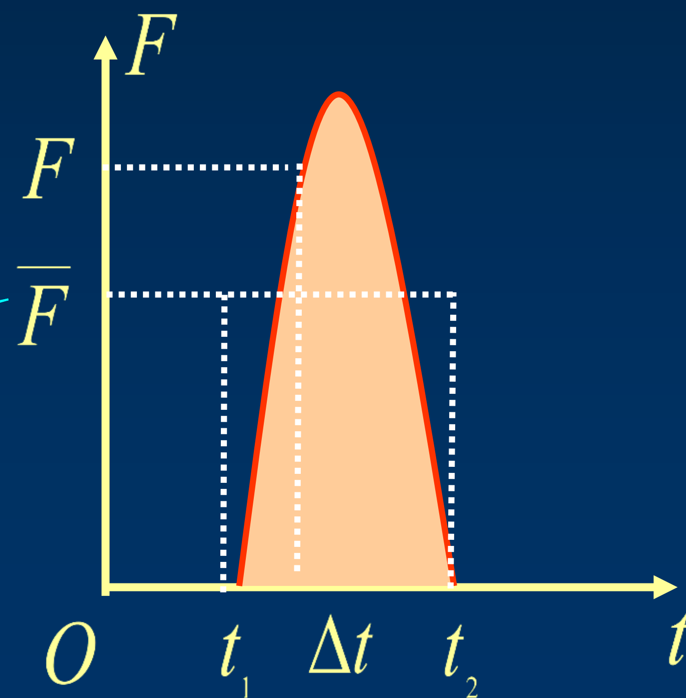
$$\left.\begin{aligned}
mv_{2_x}-mv_{1_x}&=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t\\
mv_{2_y}-mv_{1_y}&=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t\\
mv_{2_z}-mv_{1_z}&=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\}$$

(6) 平均力

平均力

$$I=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=\boxed{\overline{F}}(t_2-t_1)$$

在力的整个作用时间内，平均力的冲量等于变力的冲量



例1: 质量m=2.0kg 的质点，受合力 $\vec{F}=12t\vec{i}\ \mathrm{N}$ 的作用，沿Ox轴作直线运动，已知 t=0 时，$x_0=0$ ，$v_0=0$

求: (1) 从t=0 到t=3s 这段时间内，合力的冲量

(2) 3s末质点的速度

解: (1)

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_0^3 12t\vec{i}\,\mathrm{d}t=54\vec{i}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

(2)

$$m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}=27\vec{i}$$

例2：　一篮球质量0.58kg，从2.0m高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触时间仅0.019s.

求：　对地平均冲力？

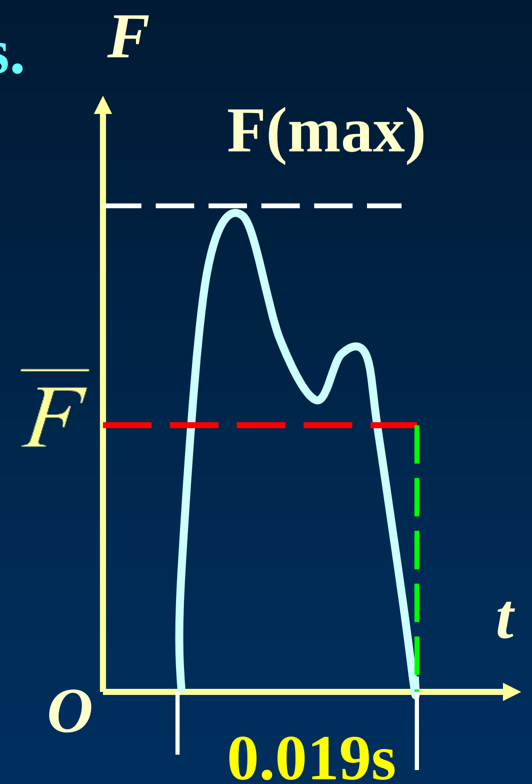
解：　篮球到达地面的速率

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.8\times 2} = 6.3(\mathrm{m/s})$$

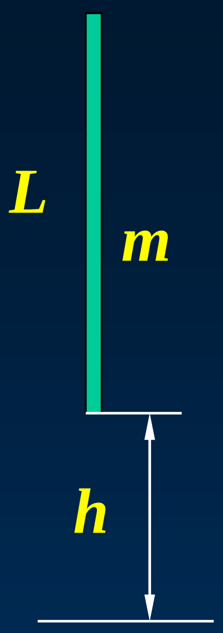
对地平均冲力

$$\overline{F} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2\times 0.58\times 6.3}{0.019} = 3.8\times 10^{2}(\mathrm{N})$$

相当于 40kg 重物所受重力！



例3：质量为 m 的匀质链条，全长为 L，开始时，下端与地面的距离为 h，当链条自由下落在地面上时



求：链条下落在地面上的长度为 $l\,(l<L)$时，地面所受链条的作用力？

解：设 $m_l = \lambda l = \dfrac{m}{L} l$

链条在此时的速度 $\upsilon = \sqrt{2g(l+h)}$

根据动量定理 $-f\mathrm{d}t = 0 - (\lambda \upsilon \mathrm{d}t)\upsilon$

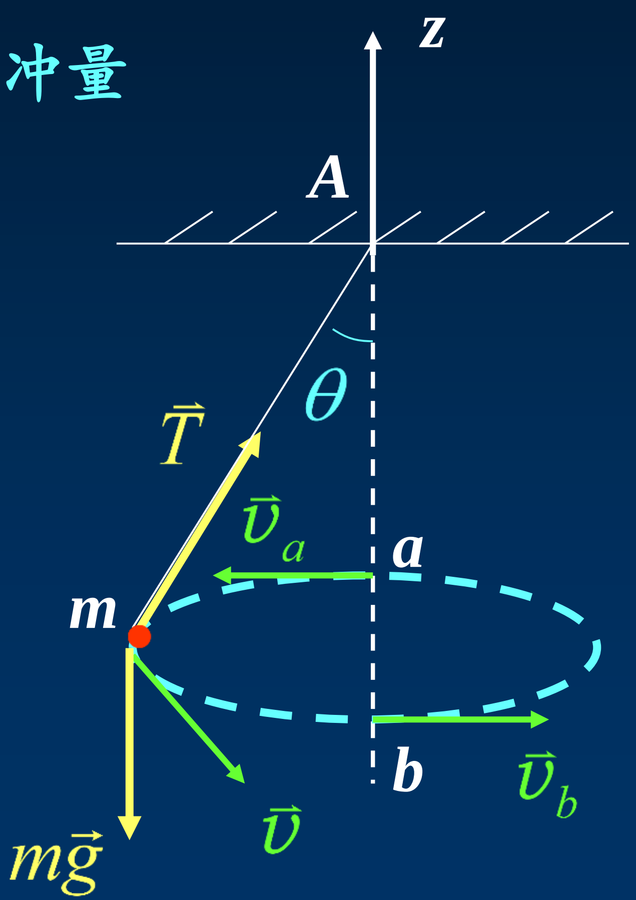
$$f = \frac{\lambda \upsilon \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\upsilon = \lambda \upsilon^2 = \frac{2m(l+h)g}{L} = f'$$

地面受力 $F = f' + m_l g = \dfrac{m}{L}(3l + 2h)g$

例4：质量为 m 的质点作圆锥摆运动，质点速率为 v，圆半径为 R，圆锥的夹为θ 。

求：(1) 质点绕行半周，作用在质点上重力的冲量

(2) 质点由a 到b 绕行半周，张力的冲量



解：(1) 在运动过程中，重力为恒力

$$\vec{I}_{mg} = m\vec{g}\frac{T}{2} \qquad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\vec{I}_{mg} = m\vec{g}\frac{T}{2} = m\vec{g}\frac{\pi R}{v}$$

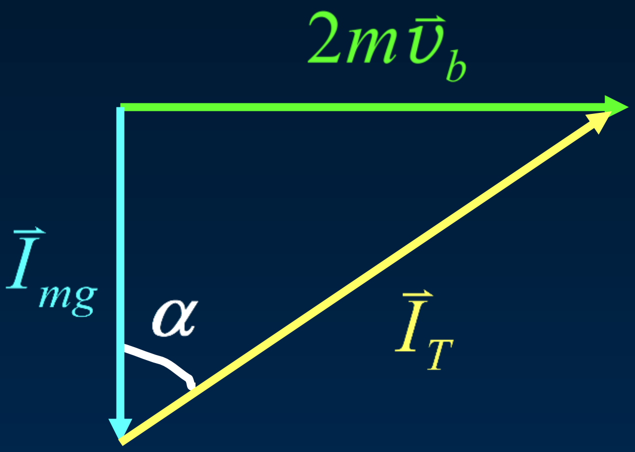
(2) 由质点动量定理

$$\vec{I}_T + \vec{I}_{mg} = m\vec{v}_b - m\vec{v}_a = 2m\vec{v}_b$$

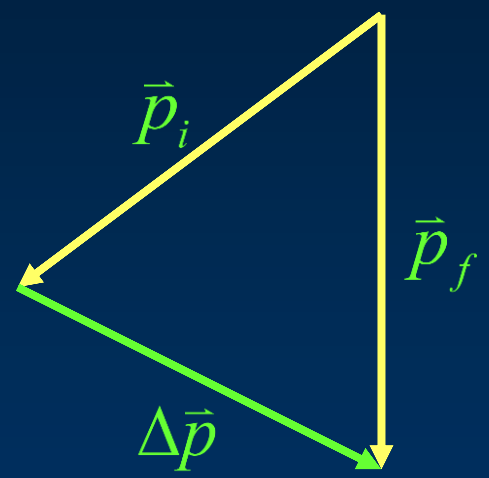
作矢量图

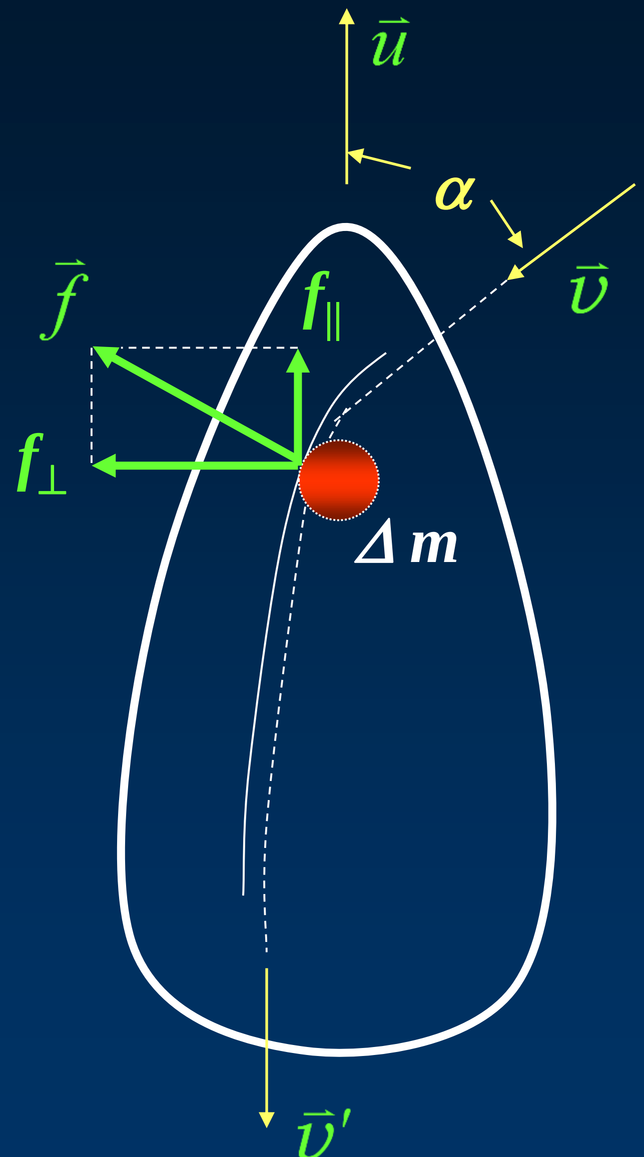
$$I_T = \sqrt{(2m\upsilon)^2 + I_{mg}^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2m\upsilon}{I_{mg}} = \frac{2\upsilon^2}{\pi Rg}$$



例：逆风行舟





该例突出了动量的矢量性

4-2 质点系动量定理

P 表示质点系在时刻 t 的动量 $\longrightarrow$ $\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$

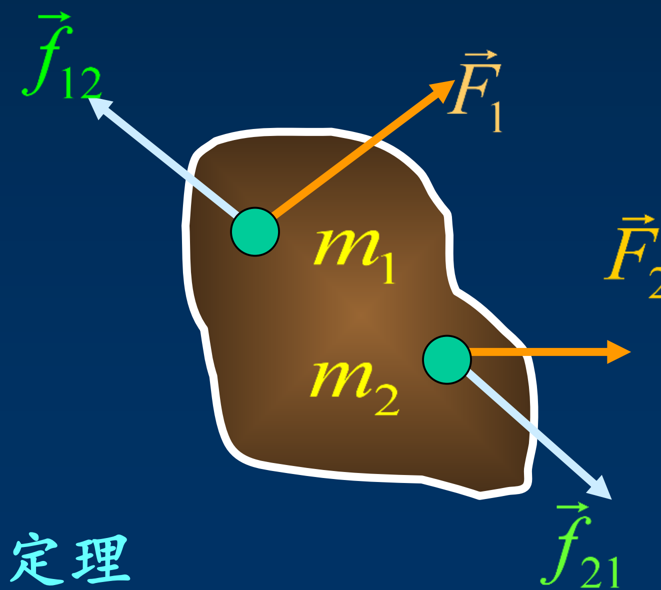
对质点m_1有

$$\mathrm{d}(m_1\vec{v}_1)=(\vec{F}_1+\vec{f}_{12})\mathrm{d}t$$

对质点m_2有

$$\mathrm{d}(m_2\vec{v}_2)=(\vec{F}_2+\vec{f}_{21})\mathrm{d}t$$

$$\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0$$



$$\mathrm{d}(m_1\vec{v}_1)+\mathrm{d}(m_2\vec{v}_2)=\vec{F}_1\mathrm{d}t+\vec{F}_2\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{d}(\sum_i m_i\vec{v}_i)=\sum_i \vec{F}_i\mathrm{d}t}$$ 质点系动量定理

在有限时间内 $$\boxed{\sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{v}_{i0} = \sum_i \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i \mathrm{d}t}$$

某段时间内，质点系动量的增量，等于作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和——质点系动量定理

★说明

(1) 直角系

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}(\sum_i m_i v_{ix}) &= \sum_i F_{ix}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}(\sum_i m_i v_{iy}) &= \sum_i F_{iy}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}(\sum_i m_i v_{iz}) &= \sum_i F_{iz}\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}$$

(2) 只有外力可改变系统的总动量

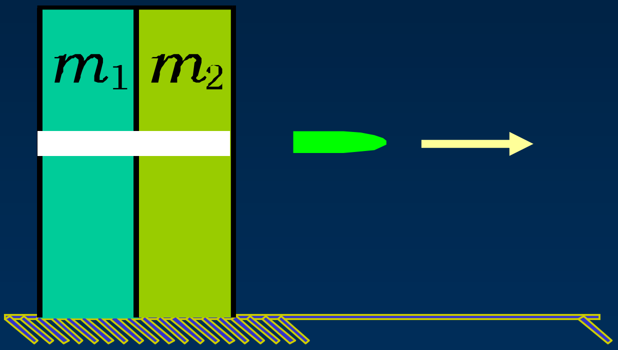
(3) 内力可改变系统内单个质点的动量——内部作用复杂

(4) 只适用于惯性系

例1： 一粒子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块，已知两木块的质量分别为 m_1, m_2，子弹穿过两木块的时间各为 $\Delta t_1, \Delta t_2$，设子弹在木块中所受的阻力为恒力 F

求： 子弹穿过后，两木块各以多大速度运动

解： 子弹穿过第一木块时，两木块速度相同，均为 v_1



$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2)v_1 - 0$$

子弹穿过第二木块后，第二木块速度变为 v_2

$$F\Delta t_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1$$

解得

$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} \qquad v_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

例2：一辆装煤的车以v=3m/s的速率从煤斗下面通过，每秒钟落入车厢的煤为Δm=50kg，

求：如果使车厢的速率保持不变，应用多大的牵引力拉车厢？(车厢与轨道间无磨擦)

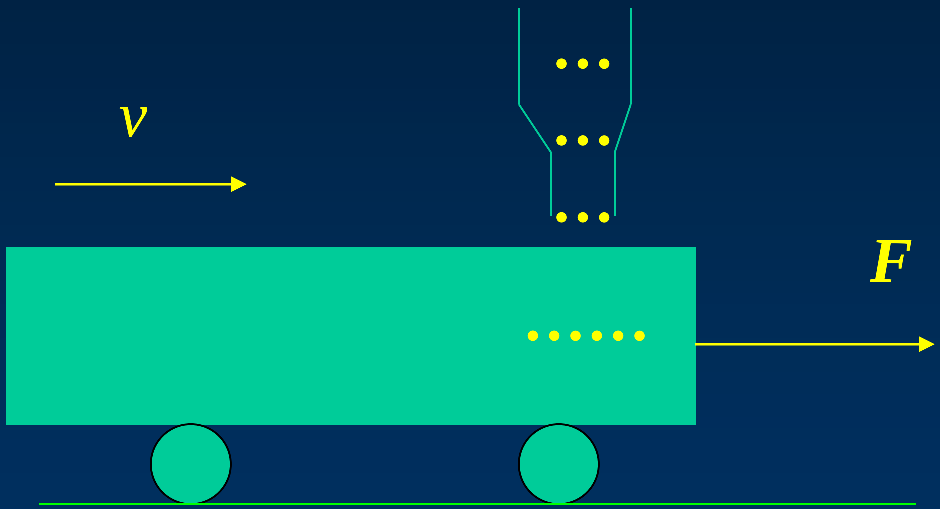
解：t, m; dt, dm

m, dm研究对象，

质点系水平方向总动量

t 时刻 $m v$

t +dt 时刻 $(m+\mathrm{d}m)v$



$$\mathrm{d}p=\mathrm{d}m\cdot v=F\cdot \mathrm{d}t \quad F=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v=\Delta m\cdot v=1.5\times 10^{2}\,\mathrm{N}$$

4-3 质点系动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ⇒ $\boxed{\mathrm{d}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = 0}$

质点系动量守恒定律 $\boxed{\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = \vec{C}}$

★ 讨论

(1) 动量守恒的分量表述

$$F_x = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{ix}\right) = P_x = 常量$$

$$F_y = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iy}\right) = P_y = 常量$$

$$F_z = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iz}\right) = P_z = 常量$$

若某个方向上合外力为零，则该方向上的分动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

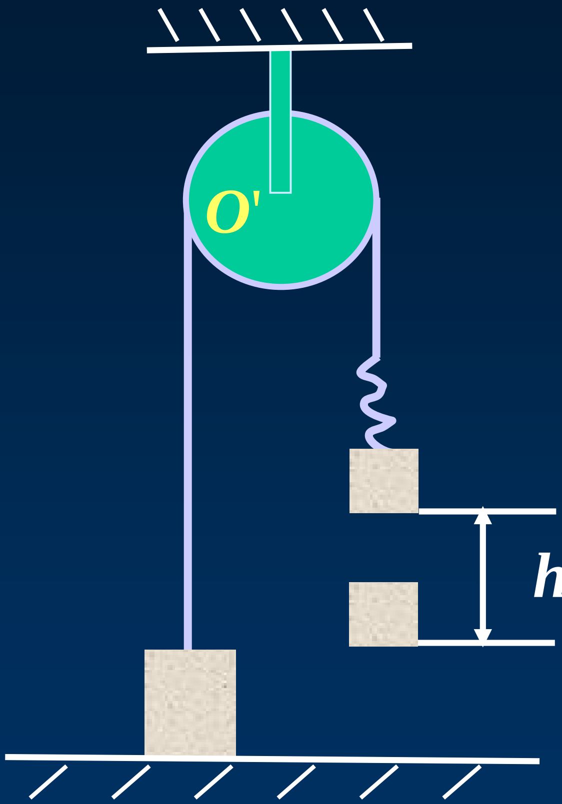
(2) 动量守恒定律适用于惯性系

(3) 在一些实际问题中，当外力<<内力，且作用时间极短时（如两物体的碰撞），往往可以略去外力的冲量，而认为动量守恒。

(4) 在牛顿力学中，因为力与惯性系的选择无关，故动量若在某一惯性系中守恒，则在其它任何惯性系中均守恒

(5) 自然界的普适定律之一，也适用于高速、微观领域

例1： 一绳跨过一定滑轮，两端分别拴有质量为m及M的物体，M静止在桌面上。抬高m，使绳 处于松弛状态。当m自由落下h 距离后，绳才被拉紧，



求： 此时两物体的速度及M 所能上升的最大高度.

解：

- 自由下落 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

- 系统竖直方向动量守恒

$$mv=(m+M)V$$

- m下降，M上升此过程机械能守恒

$$mgH-MgH=0-\frac{1}{2}(M+m)V^2$$

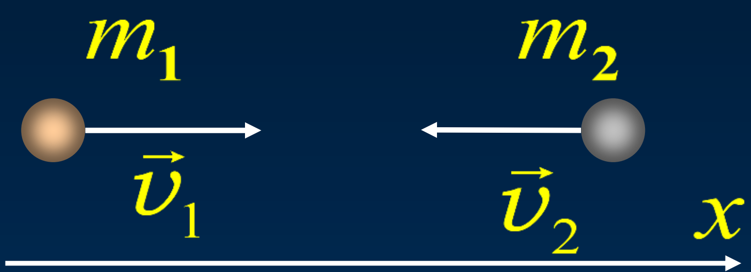
$$V=m/(m+M)\sqrt{2gh} \qquad H=\frac{m^2h}{M^2-m^2}$$

例2：在恒星系中，两质量分别为m_1和 m_2 的星球，原来为静止，且相距无穷远。后在引力作用下，互相接近，到相距为r 时，它们之间相对速率为多少？

解：

Conservation of momentum：

$$0 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$
$$= m_1 v_1 - m_2 v_2$$



Conservation of mechanical energy ：

$$0 = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}} \qquad v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)r}}$$

$$\boxed{v_{12} = v_1 + v_2}$$

运用动量守恒定律解题思路与方法

1. 选取研究对象

2. 确定运动过程

3. 分析受力：动量定理，动量守恒定律

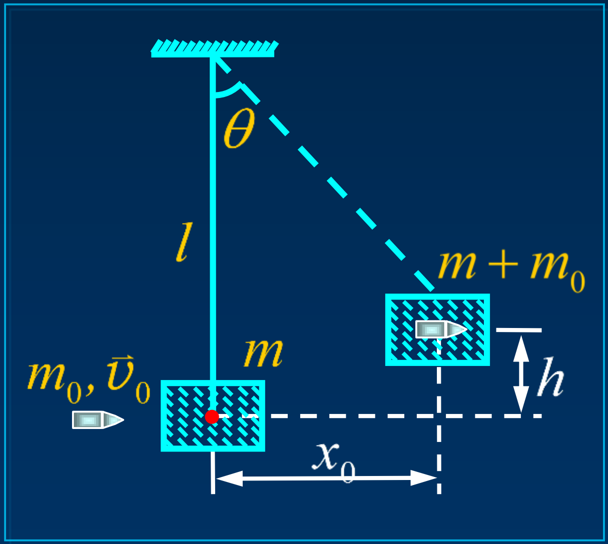
4. 列方程求解，并讨论

例3：如图冲击摆，质量为m的木块被悬挂在长度为l的细绳下端。一质量为m_0的子弹沿水平方向以速度v_0射中木块，并停留在其中，木块受到冲击而向斜上方摆动，当到达最高位置时，木块的水平位移为x_0。

求：子弹的速度v_0。

解：第一个过程，完全非弹性碰撞

动量守恒 $m_0 \upsilon_0 = (m_0 + m)\upsilon$ **(1)**



第二个过程，上摆

机械能守恒(取最低点为势能零点)

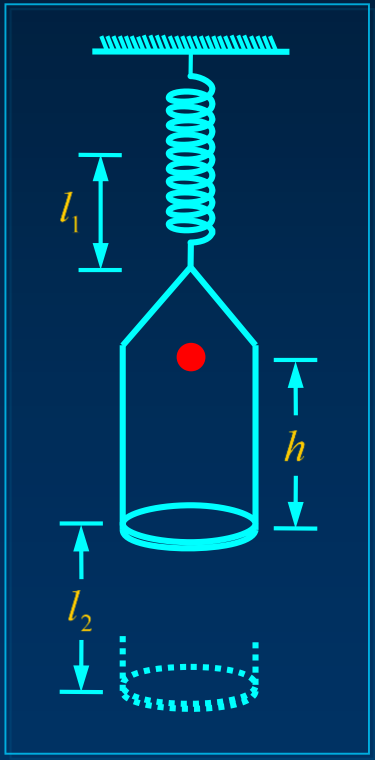
$$\frac{1}{2}(m_0 + m)\upsilon^2 = (m_0 + m)gh \quad \textbf{(2)}$$

且有 $h = l - \sqrt{l^2 - x_0^2} = l(1 - \cos\theta)$

$$\upsilon_0 = \frac{m_0 + m}{m_0}[2g(l - \sqrt{l^2 - x_0^2})]^{\frac{1}{2}} = \frac{m_0 + m}{m_0}[2gl(1 - \cos\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

例4：如图，用轻弹簧把质量为m的金属盘悬挂起来，静止在平衡位置，这时弹簧伸长了$l_1 = 10\text{cm}$。现有一个质量与金属盘相同的橡皮泥从高于盘底 $h = 30\text{cm}$处由静止自由下落到盘上。

求：此金属盘向下运动的最大距离l_2。



解：泥球自由下落，落到盘底的速率为

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

泥球与盘碰撞(完全非弹性碰撞)，系统的动量守恒，设碰撞后的共同速度为v_2，则

$$mv_1 = (m+m)v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

泥球和盘共同下降的过程

(弹簧、泥球、盘和地球组成的系统机械能守恒)

选弹簧的自然伸长端为弹性势能零点，以盘的最低点为重力势能零点，则

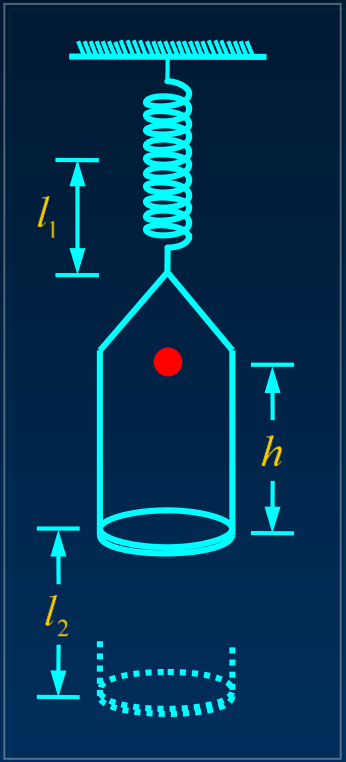
$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2+(2m)gl_2+\frac{1}{2}kl_1^2=\frac{1}{2}k(l_1+l_2)^2$$

弹簧的劲度系数为

$$k=\frac{mg}{l_1}$$

而 $v_2=\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$， $l_1=10\text{cm}$

则 $l_2^2-20l_2-300=0 \Rightarrow l_2=30\text{cm}$



4-4 质心 质心运动定理

一、质心

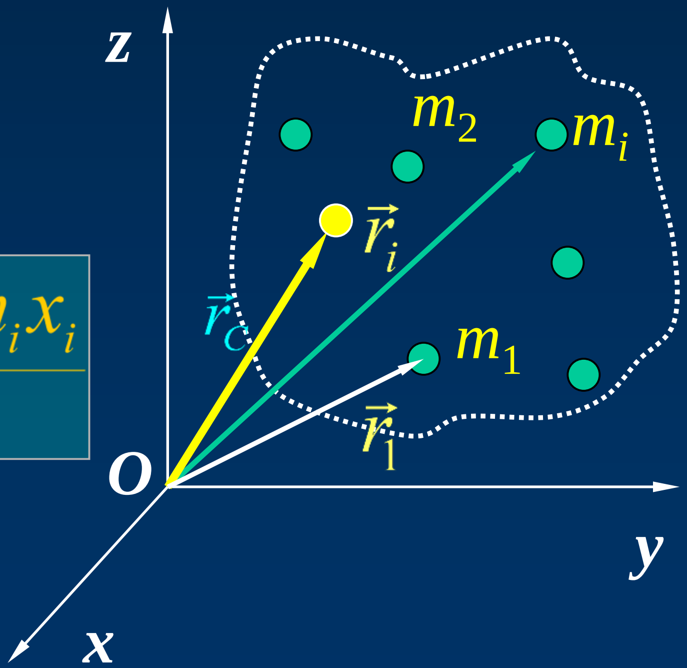
N个质点系统(质点系)，定义质量中心 ⟹ 质心

定义：

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{m}$$

$$m_1,m_2,\ldots\ldots m_{i,}\ldots\ldots m_n$$

$$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots\ldots\vec{r}_{i,}\ldots\ldots\vec{r}_n$$



——分立系统的质心公式

直角坐标系中的分量式

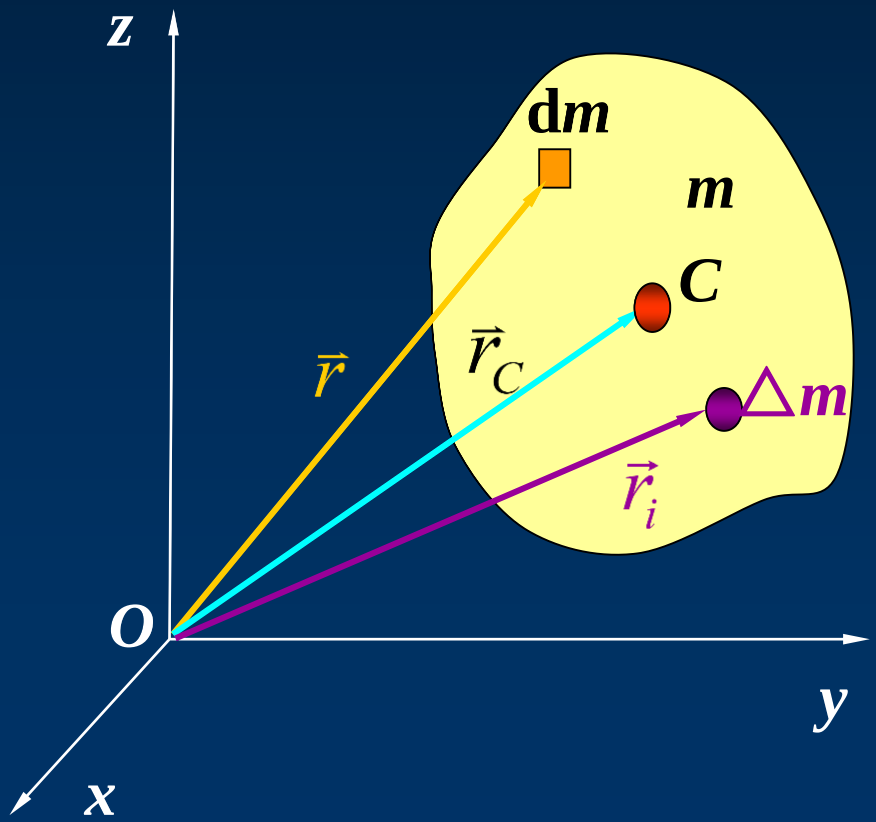
$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}$$

$$y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}$$

$$z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

- 对于质量连续分布的系统

$$\vec{r}_C = \frac{\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_i\Delta m_i}{m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$



直角坐标系中的分量式

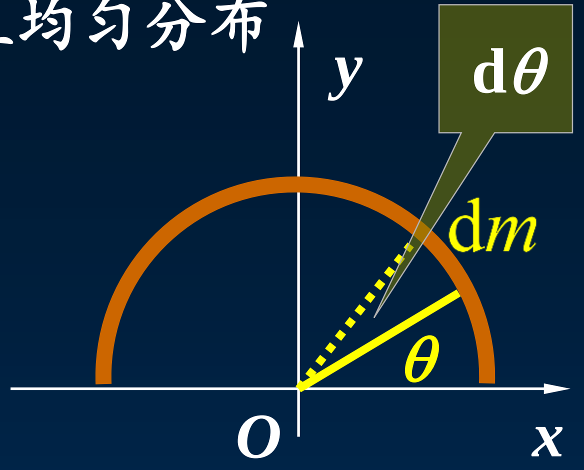
$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int x\mathrm{d}m}{m}$$

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m}$$

$$z_C = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int z\mathrm{d}m}{m}$$

例：已知一半圆环半径为 R，质量为 m，且均匀分布

求：它的质心位置



解：建坐标系如图 $x_C = 0$ $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R}R\mathrm{d}\theta = \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^\pi R\sin\theta\frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta}{m} = \frac{2}{\pi}R$$

注意：弯曲铁丝的质心并不在铁丝上 → 质心与重心的区别

• 物体质心的位置只与其质量和质量分布有关，而与作用在物体上的外力无关

• 重心是作用在物体上各部分重力的合力的作用点

★说明

(1)质心矢量与参照系的选取有关，但质心相对于系统内各质点的相对位置与参照系选取无关

(2)质心位矢只决定于质点系的质量和质量分布情况，与其它因素无关

(3)一般形状对称的质量均匀分布的物体，其质心位于它的几何对称中心

(4) 质心的位置不一定在物体系统的某个质点上，可以在其延拓的部分

(5)对质心的位矢求导可以得出质心的速度和加速度

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2}$$

二、质心运动定理

$\vec{r}_c \rightarrow \vec{v}_C \rightarrow \vec{a}_C \rightarrow \vec{F}$

- 质心的速度

$$\vec{v}_C=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m}=\frac{\sum \vec{P}_i}{m}$$

$$\sum \vec{P}_i=m\vec{v}_C=\vec{P}$$

$$\vec{P}=m\vec{v}_C$$

质点系的总动量

质点系的质量

质心的速度

- 质心的加速度和动力学规律

作用在质点系上的所有外力 $\Leftarrow \vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$ 质点系的总动量

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}_C$$

质心运动定理

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系中的分量式 $\sum_i F_{ix}=ma_{Cx}$ $\sum_i F_{iy}=ma_{Cy}$

$$\sum_i F_{iz}=ma_{Cz}$$

★ 说明

(1)质点系内各质点由于内力和外力的作用，其运动情况可能很复杂，但有一个特殊点 → 质心

(2) 可将质点系质心的运动看作为： 一个质点的运动，该质点集中整个系统质量，并集中系统受的外力。与质量的分布，力作用于何处无关

(3) 质心运动状态取决于系统所受外力，内力不能使质心产生加速度。 例如: 跳水运动员、仍掷的手榴弹

(4) 研究质心的运动意义　研究刚体的运动—— 平动、转动

★推论

质心速度不变

若 $\sum_i \vec{F}_i = 0 \longrightarrow m\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = \vec{C}$

即：　系统内力不会影响质心的运动

例1： 质量分别为m_1和m_2，速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 的两质点碰撞后合为一体。

求： 碰撞后二者的共同速度

解： 碰撞后二者的运动速度 $\longrightarrow$ 将为质心的运动速度

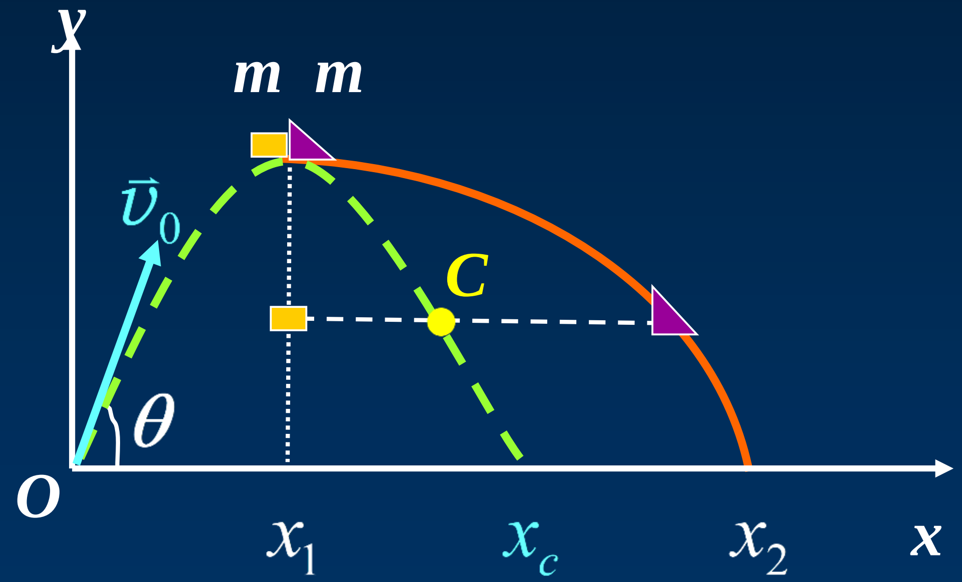
$$m\vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

例2： 一枚炮弹发射的初速度为v_0，发射角为θ，在它飞行的最高点炸裂成质量为m两部分。一部分在炸裂后竖直下落，另一部分则继续向前飞行。

求： 两部分的着地点以及质心的着地点。（忽略空气阻力）

解： 炮弹没有炸裂，则下落的水平距离为

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$



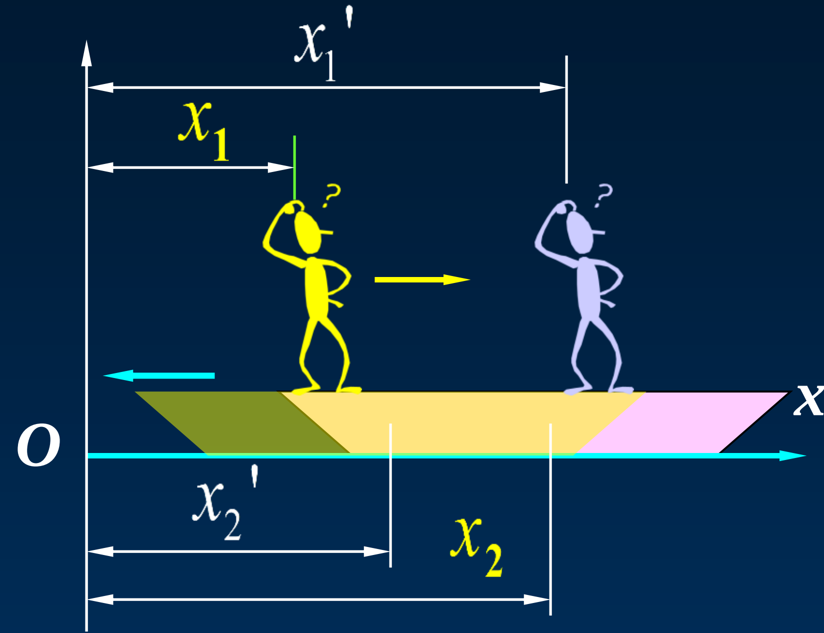
竖直下落的炮弹的一部分的水平距离为

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

例3： 如图所示，人与船构成质点系。人、船的质量为：m、M

求： 人和船各移动的距离



解： 在水平方向上，外力为零，则

$$a_{cx} = \frac{\mathrm{d}v_{cx}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad x_c = x_c'$$

开始时，系统质心位置

$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

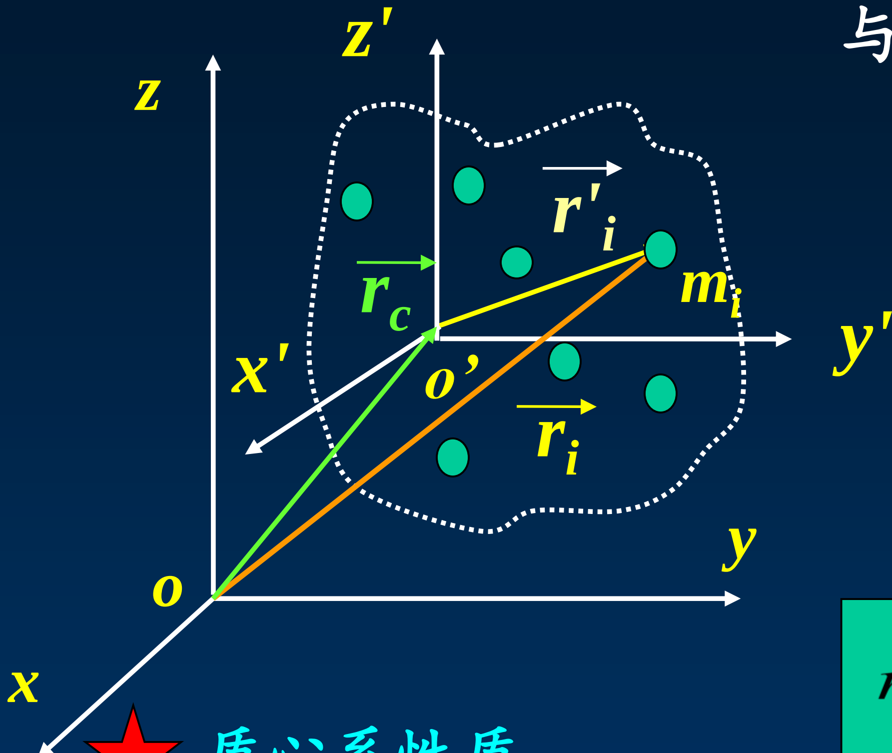
终了时，系统质心位置

$$x_c' = \frac{mx_1' + Mx_2'}{m+M}$$

$$M\underbrace{(x_2 - x_2')}_{S} = m\underbrace{(x_1' - x_1)}_{l - S}$$

解得 $S = \dfrac{ml}{m+M}$ $\qquad s = l - S = \dfrac{Ml}{m+M}$

三、质心系 —— 若将参照系的坐标原点选在系统质心上，则以与质心相同速度作平移的参照系称**质心系**



取 $\vec{r}_{\mathrm{i}}{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{c}}$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathrm{c}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' = 0$$

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\mathrm{i}}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}{}' = 0$$

★ 质心系性质

- 若质点系所受外力矢量和为零，则其总动量守恒 —— 质心作惯性运动 —— 质心系是惯性系，反之，为非惯性系。
- 质心系为零动量系 $\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}_i{}' = 0$ —— **Center of momentum system**

- 克尼希定理

$\vec{r}_{\mathrm{i}}' = \vec{r}_{\mathrm{i}} - \vec{r}_c$ ⟶ 伽利略速度变换 $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{u}$

质点系的动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_{\mathrm{i}}' + \vec{u}\right|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i'^2 + u^2 + 2\vec{v}_{\mathrm{i}}' \cdot \vec{u})$$

$$= E_k' + \frac{1}{2} m u^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{\mathrm{i}}' \cdot \vec{u}$$

$$= E_k' + \frac{1}{2} m u^2$$

如果惯性系S'是质心系，则有

$$\sum m_i \vec{v}'_i = 0$$

$$\vec{u} = \vec{v}_{\mathrm{c}}$$

质点系的总动能，等于相对质心系的动能，加上随质心整体平动的动能 —— 克尼希定理（KÖnig theorem）。