第五章 刚体及其基本运动

一、刚体

定义：受力时形状和体积完全不变化的质点系

★说明

(1) 特殊的质点系。

(2) 在力作用下，组成物体的所有质点间的距离始终保持不变。

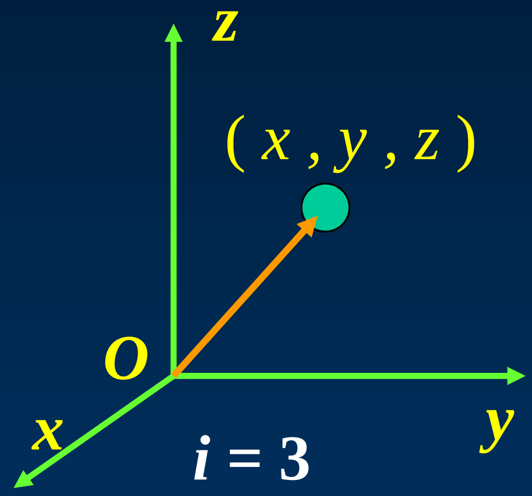
(3) 理想化模型

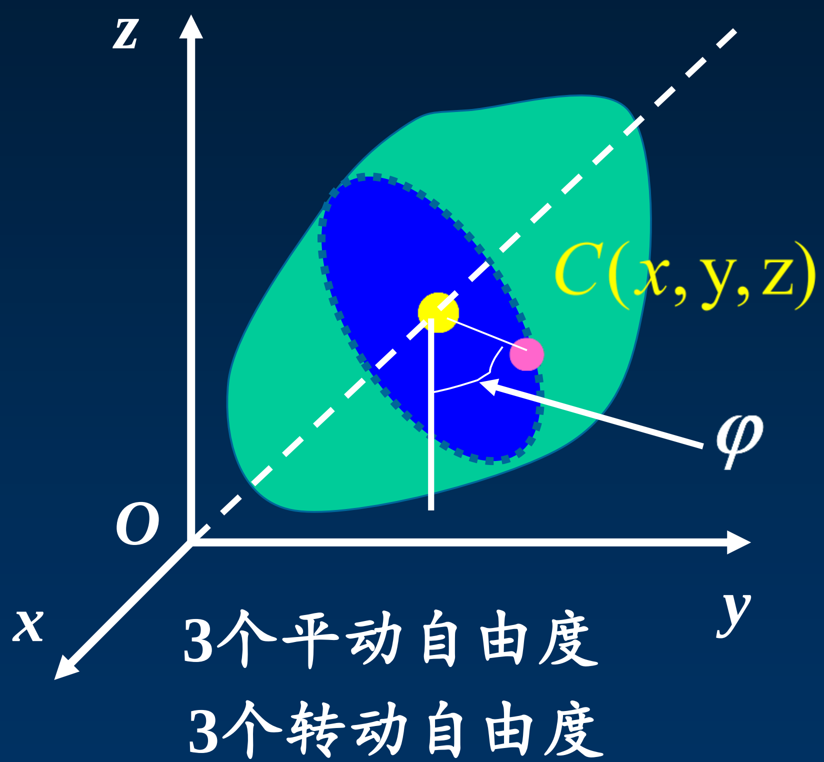
(4) 有关质点系的规律都可用于刚体。

(5) 刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二、自由度

确定物体的位置所需要的独立坐标数 —— 物体的自由度数





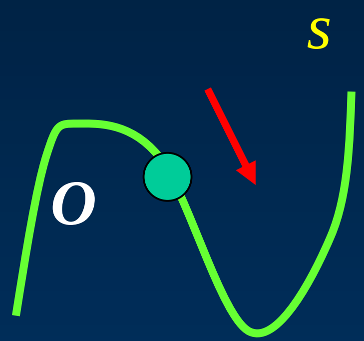
一个可以在空间自由运动的质点　自由度数=3

一个可以在空间自由运动的刚体　自由度数=6

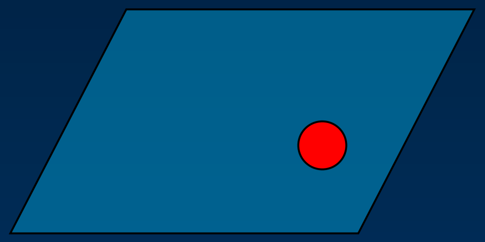
- 当刚体受到某些限制 ——自由度减少

限制在平面或曲面上运动的质点　　自由度数=2

限制在直线或曲线上运动的质点　　自由度数=1

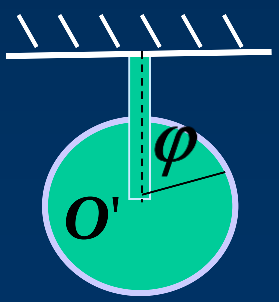


$i = 1$



$i = 2$

- 定轴转动仅有一个自由度



三、刚体的平动

定义：刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行 —— 刚体平动

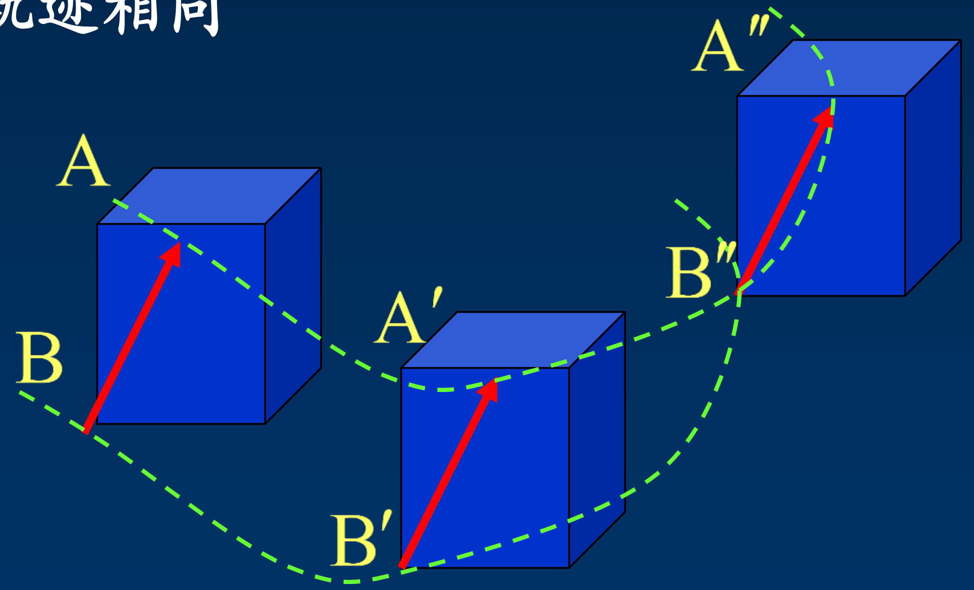
例如： 升降机 汽缸中的活塞

- 平动的特点

(1) 刚体上各质点的运动轨迹相同

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v}_A = \vec{v}_B \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B\end{gathered}}$$



(2) 用质心的运动来代替刚体的平动

四、刚体绕定轴转动

转动：刚体内各点都绕同一直线作圆周运动

例如：陀螺　门　直升飞机的螺旋桨

转轴固定不动　------定轴转动

例如：门　固定在地面上的电动机转子

刚体的平动和绕定轴转动是刚体的两种最简单最基本运动

★ 说明

平动和转动，可以描述所有质元的运动。

例如：一个车轮的滚动，

拧紧或松开螺帽，　钻头

1. 描述刚体绕定轴转动的角量

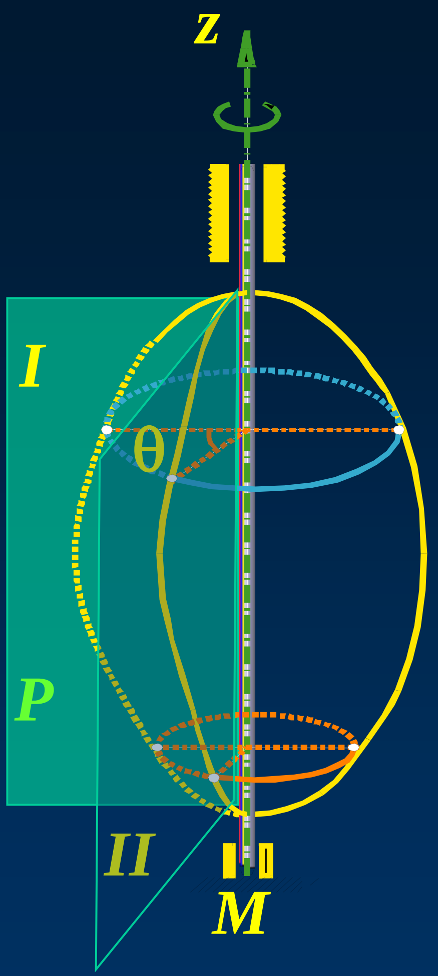
角坐标 $\theta = f(t)$

角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = f'(t)$

角加速度 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f''(t)$

当 $\beta = C \longrightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ (\theta - \theta_0) = \omega t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$

与质点的匀加速直线运动公式相象



2. 定轴转动刚体上各点的速度和加速度

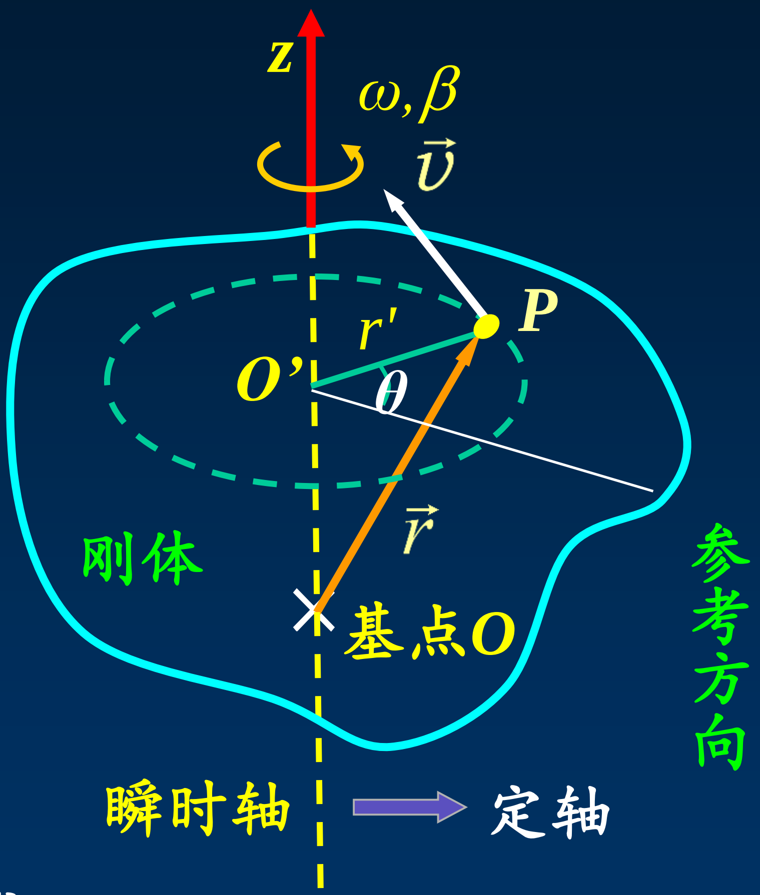
任意点都绕同一轴作圆周运动，

且 ω，β 都相同

$$v = r'\omega$$

$$a_n = r'\omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r'\beta$$



速度与角速度的矢量关系式

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

加速度与角加速度的矢量关系式

$$a_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

例：一大型回转类“观览圆盘”如图所示。圆盘的半径R=25 m，供人乘坐的吊箱高度L=2 m。若大圆盘绕水平轴均速转动，转速为0.1 r/min。

求：吊箱底部A点的轨迹及A点的速度和加速度的大小。

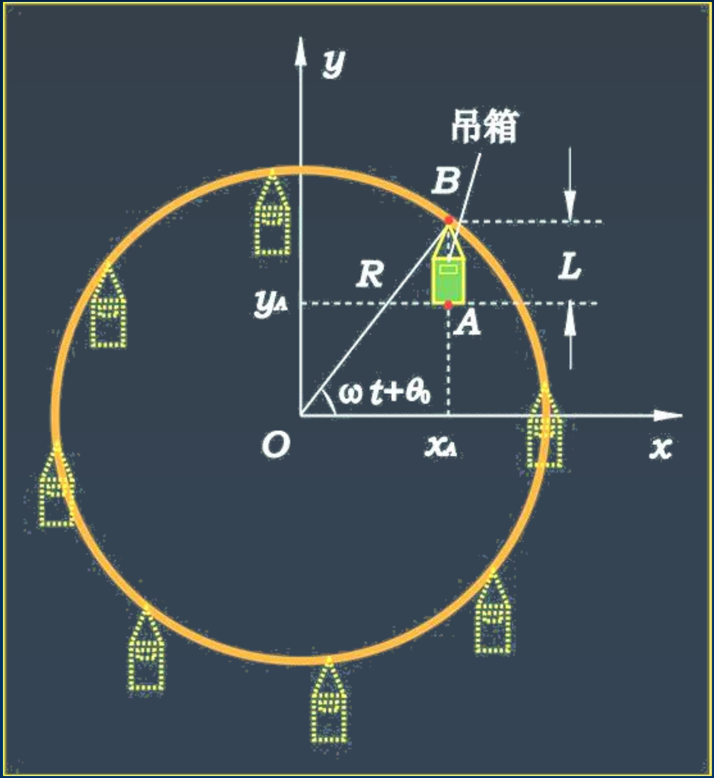
解：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{10\times 60} = \dfrac{\pi}{300}$

吊箱平动

$$x_A = x_B = R\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y_A = y_B - L = R\sin(\omega t + \theta_0) - L$$

$$x_A^2 + (y_A + L)^2 = R^2$$



$$\upsilon_{Ax} = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\upsilon_{Ay} = \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t} = R\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{Ax}^2 + \upsilon_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26\,\mathrm{m/s}$$

$$a_{Ax} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{Ax}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$a_{Ay} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{Ay}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$