期末考试模拟题（三）2020.6

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分，只有一个正确）

1. 函数 $f(x, y)$ 的下面四条性质：

（1）在点 (x_0, y_0) 处连续；　　(2) 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续；

(3) 在点 (x_0, y_0) 处可微；　　(4) 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在。

则如下表述的推导关系成立的是（　）.

(A) $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$；　　(B) $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$；

(C) $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$；　　(D) $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于（　）

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$.

3．设 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ =（　）.

(A) 0　　(B) 2π　　(C) $-\pi$　　(D) -2π

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（　）

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$　(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} {u_n}^2$　(C) $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$　(D) $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{n+1})$

5. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 处收敛于（　）

(A) 0.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.　　(C) $-\frac{\pi}{2}$.　　(D) π.

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 设曲面 $S: z = x + f(y-z)$，其中 f 可导，则该曲面在任意点处的切平面的法向量 n 与向量 $(1,1,1)$ 的夹角 θ 为________.

2. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$________________.

3. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则

$\iint\limits_{\Sigma} xydy\wedge dz + xdz\wedge dx + x^2dx\wedge dy =$ __________.

4. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} = 5$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n =$ __________.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{3n+4}$ 的和函数 $S(x) =$ __________ .

三、计算下列各题（共 56 分，每小题 8 分）

1. 设 $u = f(x,y,z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$，其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

2. 求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\right\}$ 上的最大值与最小值。

3. 设 n 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的单位切向量，且与 OZ 轴正向夹角成锐角，求函数 $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $(0,1,2)$ 处沿向量 n 的方向导数。

4. 设 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的立体，求 Ω 的体积 V 与表面积 S.

5. 计算曲线积分 $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，
其中 L 为抛物线 $2x = \pi y^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

6. 设 S 是半空间 $x>0$ 中任意有向封闭曲面，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在连续的一阶导数，满足 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$，又 $\oiint\limits_{S} xf(x)dy\wedge dz - xyf(x)dz\wedge dx - e^{2x}zdx\wedge dy = 0$. 求 $f(x)$.

7. 计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})^2 dv$，其中（$V$）为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$， a,b,c 为正数.

四（7 分）设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$.

（1）将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数； （2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

五（7 分）设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有二阶连续导数，且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

其中 $a_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数，求证：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.