2024 总复习模拟题 1 答案

一、1. A　2. C　3. C　4. B　5. D

二、1. $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$；　　2. 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；

3. $k_1(0,0,-1,1,0)^T+k_2(-1,-2,-3,0,1)^T$（$k_1,k_2$ 为任意常数）（基础解系不唯一）；

4. $\dfrac{x^2+z^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$；　　5. $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$或$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T)$，2

三、(1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O}$.

（2）由（1）知 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 时，$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

（3）因 $\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}$ 必线性相关.

令 $\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{l}_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，以 $\boldsymbol{A}^3$ 左乘等式两端得

$\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_3\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_4\boldsymbol{A}^6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即有 $\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{0}$.

再依次以 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}$ 左乘等式 $\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{l}_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{l}_4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 两端得 $\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{l}_3=\boldsymbol{0}$.

从而 $\boldsymbol{l}_4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，由此得 $\boldsymbol{l}_4=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

或直接算出 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

四. $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2&1\\2&5-\lambda&-4&2\\-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&-4&5-\lambda&-\lambda-1\\0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-10)&(\lambda-1)(\lambda-4)\end{pmatrix}$

（1）当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=10$ 时，方程组无解.

（3）当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解. 其结构解为

$\boldsymbol{x}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,1)^{\mathrm{T}}$ k_1,k_2 为任意常数）

五. （1）直线 L 的方向向量为 $\vec{\boldsymbol{a}}=(1,-1,0)\times(3,-1,1)=(-1,-1,2)$.

在直线 L 上取一点 $(3,0,-8)$，故 L 的对称式方程为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}$.

（2）**解法 1**：过点 M 且垂直于 L 的平面方程为

$$-(x-1)-(y-0)+2(z+1)=0 \text{ 或 } x+y-2z=3$$

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{2}\\-(x-1)-(y-0)+2(z+1)=0\end{cases}$ 得 L 与该垂直平面的交点 $P:(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3},-\dfrac{8}{3})$

故点 M 到直线 L 的距离为 $d=MP=\sqrt{(1-\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{8}{3})^2+(-1+\dfrac{8}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$.

解法 2：问题为求 $d^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2$ 在条件 $x-y-3=0,3x-y+z-1=0$ 下的最小值.

令 $L=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2+\lambda(x-y-3)+\mu(3x-y+z-1)$，　.

由 $L_x=0,L_y=0,L_z=0,\quad L_\lambda=0,L_\mu=0$ 得唯一驻点 $(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3},-\dfrac{8}{3})$.

由实际问题可知，最小距离为 $d=\sqrt{(\dfrac{1}{3}-1)^2+(-\dfrac{8}{3})^2+(-\dfrac{8}{3}+1)^2}=\dfrac{\sqrt{93}}{3}$.

六、**1.**（1）$\boldsymbol{W}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5\}$，它对 $\boldsymbol{R}^4$ 中线性运算封闭，故 W 是 $\boldsymbol{R}^4$ 的子空间.

（2） $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&3&7&0\\0&1&1&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 W 的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$， $\dim\boldsymbol{W}=3$.

（3） $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=7\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 在该基下的坐标分别为 $(3,1,0)^{\mathrm{T}},(7,3,0)^{\mathrm{T}}$.

2. （1） $\boldsymbol{R(T)=\{Ax\mid x\in \mathbf{R}^3\}}$， $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&11&-19\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 列，即 $(1,5,7)^{\mathrm{T}},(-1,6,4)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{R(T)}$ 的一个基.其维数为 2.

（2）$\mathbf{ker}(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\}$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系 $(-14,19,11)^{\mathrm{T}}$ 就是 $\ker(T)$ 的一个基.其维数为 1.

（3）设 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$， 则有 $\boldsymbol{T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B}$，

即 $\boldsymbol{A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B}$， 故

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&6&3\\11&3&3\end{pmatrix}.$$

七. (1) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$.所以 $0=|\boldsymbol{A}|=-8a$， 得 $a=0$.

（2）由 $\boldsymbol{|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2\lambda}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

求得属于 2 的特征向量 $\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 属于 0 的特征向量 $\xi_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$

注意到 $\boldsymbol{\xi_1,\xi_2}$ 已正交，故将其单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_1,\boldsymbol{p}_2=\xi_2,\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_3$， 于是 $\boldsymbol{P=(p_1,p_2,p_3)}$ 为正交阵，且 $f\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}}{=\!=\!=}2y_1^2+2y_2^2$

八. （1）因 $\boldsymbol{A^T=A},$ 且是实矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

（2）由题设 $\boldsymbol{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1,\beta^{\mathrm{T}}\beta=1,\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0,\beta^{\mathrm{T}}\alpha=0},$ 故 $\boldsymbol{A\alpha=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha+\beta\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\beta}$， 同理 $\boldsymbol{A\beta=\alpha}$.于是 $\boldsymbol{A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta}$， $\boldsymbol{A(\alpha-\beta)=(-1)(\alpha-\beta)}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ 正交，所以 $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ 线性无关.于是 $\boldsymbol{\alpha+\beta\neq 0,\alpha-\beta\neq 0}$， 所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\mathbf{1,-1}$.

又 $\boldsymbol{r(A)\le r(\alpha\beta^{\mathrm{T}})+r(\beta\alpha^{\mathrm{T}})=2}$， 所以 $\boldsymbol{A}$ 还有 0 为特征值. 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

且其相似对角阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.