西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期末考试模拟试题（三）

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)>\max\{f(a),f(b)\}$,则(　　).

A.对任意$x\in(a,b)$，有$f''(x)<0$;

B.必存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$;

C.对任意$x\in(a,b)$，有$f''(x)\geq 0$;

D.必存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)>0$;

2. 下列曲线中必有斜渐近线的是(　　).

A. $y = x + \cos x$;

B. $y = x + \cos^2 x$;

C. $y = x + \cos\dfrac{1}{x}$;

D. $y = x^2 + \cos\dfrac{1}{x}$.

3. 下列各积分中不等于零的是(　　).

A. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

B. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$;

C. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin^5 x\mathrm{d}x$;

D. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + \cos x}{2}\mathrm{d}x$.

4. 下列广义积分中，发散的是(　).

A. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x\cos x}$;　B. $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$;　C. $\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　D. $\int_{0}^{1}\ln x\mathrm{d}x$.

5. 下列选项中，不是某个二阶常系数线性微分方程的一组解的是(　).

A. $e^{x}+x, x-2e^{-2x}, e^{-2x}+x$;　B. $e^{x}+xe^{-x}, 2xe^{x}+xe^{-x}, xe^{x}+xe^{-x}$;

C. $e^{x}-x+1, 2-x, e^{x}-x$;　D. $x\left(e^{x}+1\right), xe^{x}-2e^{-x}, xe^{x}+2x+2e^{-x}$.

二. 填空题（共5道小题，每题3分，总计15分）

1.设可微函数$y=f(x)$由方程$\cos(xy)+\ln y-x=1$确定，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=\underline{\qquad\qquad}.$$

2.已知函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}(0<t<\pi)$确定，则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

3.设$f(x)=(x-1)\ln(2-x)(\forall x<2)$,则$f(x)$的最大值是$\underline{\qquad}$.

4. 若函数$f(x)$满足$f(x)=x+\int_0^2 f(t)dt$,则$f(x)=$ ________.

5. 微分方程$yy'+xy^2=5x$的通解为: ____________.

三. 计算题（共6道小题，每题7分，总计42分）

1.设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\ln(x+1)]e^{nx}+ax+b}{e^{nx}+1}$.

(1)求$f(x)$的表达式;

(2)试确定常数a,b，使$f(x)$在$x=0$处可导.

2.计算极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}$.

3.设函数$\Phi(u)=\int_0^u(x^2-1)e^x\mathrm{d}x$的极值.

4.计算定积分$\int_0^{\ln2}\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+2e^x-2^{2x}}}\mathrm{d}x$.

5.计算不定积分$\int\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

6.求微分方程组$\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}\vec{x}$的通解.

四. 应用题（本题7分） 求曲线$y=3\left(1-x^2\right)$与x轴围成的封闭图像绕$y=3$旋转一周所得的旋转体的体积.

五. （本题7分） 若$f(x)$在$(0,1)$内可导，且有最大值1，最小值0. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)>2$.

六. （本题7分）设$f(x)$具有二阶导数，且$f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

证明:(1) $f''(x)-f'(\pi-x)=\cos x$;

(2)求$f(x)$的表达式.

七．（本题7分） 设$f(x)$的导函数$f'(x)$在$[a,b]$上连续，

$$f(a)=f(b)=0,\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1.$$

求证：(1) $(x-a)\int_a^x\left[f'(t)\right]^2\mathrm{d}t\geq f^2(x)$;

(2) $\int_a^b\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geq\dfrac{8}{(b-a)^2}$.