西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下期末模拟题（一）答案

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数$f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处的某个邻域内有定义, 则下列说法正确的是(　).

A. 若$f(x,y)$在点P处的偏导数存在, 则$f(x,y)$在该点一定可微；

B. 若$f(x,y)$在点P处连续, 则$f(x,y)$在该点的偏导数一定存在；

C. 若$f(x,y)$在点P有极限, 则$f(x,y)$在该点一定连续；

D. 若$f(x,y)$在点P可微, 则$f(x,y)$在该点连续且偏导数一定存在.

函数连续，偏导存在，可微之间的关系

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)

$$
\begin{tikzcd}
\text{函数连续} \arrow[rr, shift left, "(1)", "/" marking] \arrow[dr, shift left, "(1)", "/" marking] & & \text{函数偏导存在} \arrow[ll, shift left, "(2)", "/" marking] \arrow[dl, shift right, "(2)"', "/" marking] \\
& \text{函数可微} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[d, shift left, "(3)", "/" marking] & \\
& \text{偏导数连续} \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}
$$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在点(0,0).

(3) 函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

在(0,0)处可微但(0,0)处偏导数不连续.

《高等数学》期末考试模拟题（一）答案

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数$f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$处的某个邻域内有定义, 则下列说法正确的是(D).

A. 若$f(x,y)$在点P处的偏导数存在, 则$f(x,y)$在该点一定可微；

B. 若$f(x,y)$在点P处连续, 则$f(x,y)$在该点的偏导数一定存在；

C. 若$f(x,y)$在点P有极限, 则$f(x,y)$在该点一定连续；

D. 若$f(x,y)$在点P可微, 则$f(x,y)$在该点连续且偏导数一定存在.

2. 若$f(x,y)$在$D: a \le x \le b, c \le y \le d$上有二阶连续偏导数，

则$\iint\limits_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$(B).

A $f(a,d) - f(b,d) - f(b,c) + f(a,c)$;

B $f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)$;

C $f(a,d) - f(b,d) - f(a,c) + f(b,c)$;

D $f(b,d) - f(a,d) - f(a,c) + f(b,c)$;

解

$$\iint\limits_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f(x,d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,c)}{\partial x}\right] \mathrm{d}x = f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)$$

3. 若L是球面$x^2+y^2+z^2=4$与平面$x+y+z=0$的交线，

则$I=\oint_L (x+1)^2 \mathrm{d}s=($ A $)$.

A $\dfrac{28}{3}\pi$; B 8π; C $\dfrac{19\pi}{3}$; D 12π.

解

$$I=\oint_L (x+1)^2 \mathrm{d}s=\oint_L (x^2+2x+1)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\oint_L \mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}\oint_L 4\mathrm{d}s+\oint_L \mathrm{d}s=\frac{7}{3}\oint_L \mathrm{d}s=\frac{28}{3}\pi.$$

4. 设$a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，常数$\lambda \in (0,\frac{\pi}{2})$，

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$（ A ）.

A 绝对收敛； B 条件收敛； C 发散； D 敛散性与λ有关.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}\right|}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\lambda}{n}=\lambda$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}\right|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$同敛散.

由$a_n > 0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$绝对收敛.

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n$收敛域为(C).

A $[-3,3]$; B $(-3,3)$; C $[-3,3)$; D $(-3,3]$.

解 $$a_n=\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}+(-2)^{n+1})}{n(3^n+(-2)^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3-2(\frac{-2}{3})^n)}{n(1+(\frac{-2}{3})^n)}=3$$

当$x=-3$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(1+(-\frac{2}{3})^n)}$收敛;

当$x=3$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n(3^n+(-2)^n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+(\frac{-2}{3})^n)}$发散.

二. 简答题（共8道小题，每题5分，总计40分）

1.求曲面$e^z - z + xy = 3$在点(2, 1, 0)处的切平面方程和法线方程.

解 令$F = e^z - z + xy - 3$

$$F_x = y, F_y = x, F_z = e^z - 1$$

因此法向量$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)|_{(2,1,0)}$ =$(y, x, e^z - 1)|_{(2,1,0)}$ =$(1, 2, 0)$

切平面方程为$x - 2 + 2(y - 1) = 0$即$x + 2y = 4$

法线方程为$x - 2 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{0}$.

2.求密度为1的抛物体V：$x^2+y^2\le z\le 1$绕z轴的转动惯量.

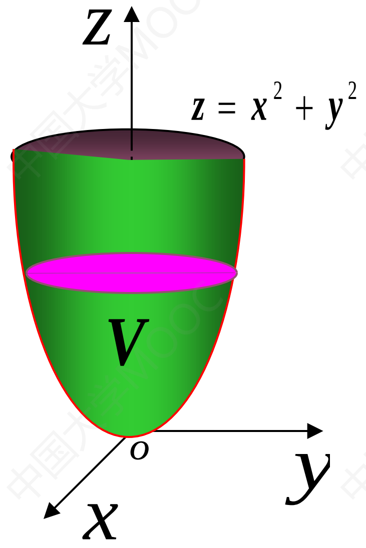
解

$$I_z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}$$



3.设为S上半球面 $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$,计算$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\mathrm{d}S$.

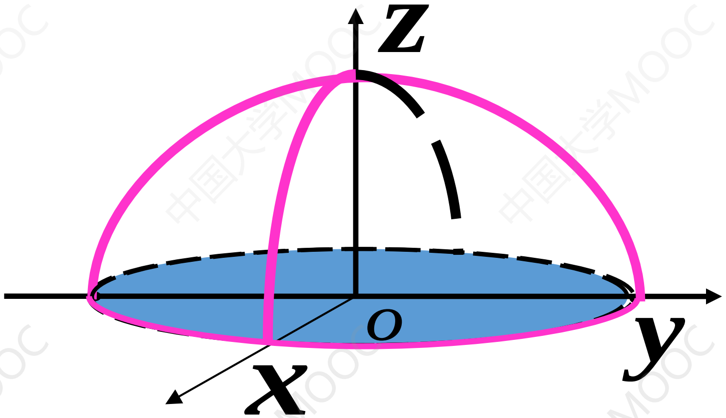
解 $$\iint\limits_{(S)}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)}z\mathrm{d}S$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\sqrt{4-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$$



4.计算$I=\int_L (y^2+\sin^2(x+y))\mathrm{d}x+(x^2-\cos^2(x+y))\mathrm{d}y$,

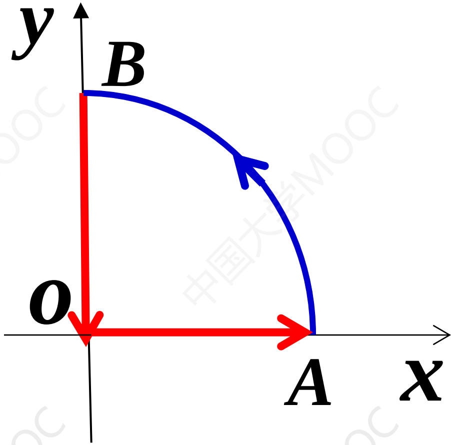
其中L为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$上从点$A(1,0)$到点$B(0,1)$的一段弧.

解 补直线BO,OA,围成的区域为D.

$$I=\int_L+\int_{BO}+\int_{OA}-\int_{BO}-\int_{OA}$$

$$=\iint_D 2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_1^0-\cos^2 y dy-\int_0^1\sin^2 x dx$$

$$=-1$$



4.计算$I=\int_L (y^2+\sin^2(x+y))\mathrm{d}x+(x^2-\cos^2(x+y))\mathrm{d}y$,

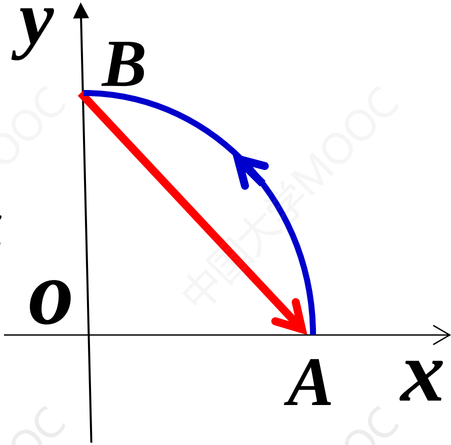
其中L为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$上从点$A(1,0)$到点$B(0,1)$的一段弧.

解 补直线$BA: y=1-x$, x从0到1,直线与围成的区域为D.

$$I=\int_L+\int_{BA}-\int_{BA}$$

$$=\iint_D 2(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^1((1-x)^2+\sin^2 1-x^2+\cos^2 1)\mathrm{d}x$$

$$=-1$$



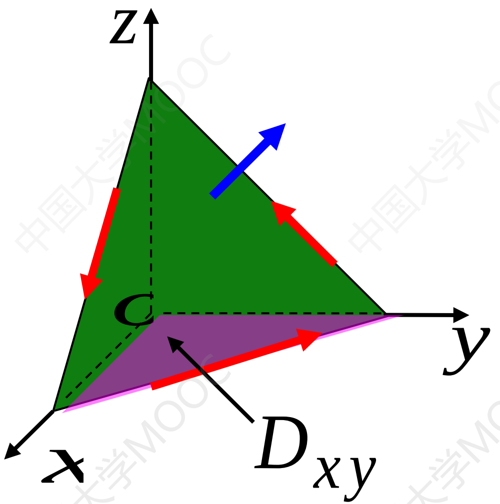
5.计算积分 $I=\oint_C z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$,其中$C$为$x+y+z=1$被三个坐标面所截的三角形的边界,方向与三角形上侧的法向量构成右手法则.

解 记S为平面被三个坐标面所截的三角形，由*stokes* 公式，

$$I=\iint_{(S)}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{(S)}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\iint_{(S)}\mathrm{d}S=3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$



6.设$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$,计算 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}\, f(x,y,z)]$和$\mathrm{rot}[\mathrm{grad}\, f(x,y,z)]$.

解 $\mathrm{grad}\, f(x,y,z)=\left(f_x, f_y, f_z\right)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x,2y,2z)$

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad}\, f(x,y,z)]=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\mathrm{rot}[\mathrm{grad}\, f(x,y,z)]=\vec{0}$$

注：当 $f(x,y,z)\in C^2$

$$\mathrm{rot}[\mathrm{grad}\, f(x,y,z)]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}=\left(f_{zy}-f_{yz}, f_{xz}-f_{zx}, f_{yx}-f_{xy}\right)=\vec{0}$$

7.将函数$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$展开成麦克劳林级数,并指出收敛域.

解

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{x^4}{1-x^4}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n},\quad x\in(-1,1)$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1},\qquad x\in(-1,1).$$

8.设$f(x)$是周期为2π的函数，且$f(x)=x, x\in[-\pi,\pi]$,将$f(x)$展成Fourier级数.

解 $f(x)$是奇函数，所以$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ n=1,2,\cdots$$

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \ x\in[-\pi,\pi]$$

三. (9分) 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$,

在点(0,0)处的连续性、偏导数的存在性及可微性..

解 由于$\left|xy\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{\pi}{2}|xy|$ 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

函数$f(x,y)$在点(0,0)处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

同理$f_y(0,0)=0$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\left(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

函数$f(x,y)$在点(0,0)处可微.

四. (9分) 在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点P,使得函数$u=x^2+y^2+z^2$在点P沿方向$\vec{n}=(1,-1,0)$的方向导数最大, 并求此方向导数的最大值.

解 设$P(x,y,z)$ $\nabla u=(2x,2y,2z)$,

$$e_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\nabla u\cdot e_n\big|_P=\sqrt{2}(x-y)$$

设$L=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} L_x=\sqrt{2}+4\lambda x=0 \\ L_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ L_\lambda=2x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2},z=0$$

此时函数$u=x^2+y^2+z^2$

在点$P(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0)$方向导数最大,

方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\sqrt{2}.$

五．（9分）计算$I=\oiint\limits_{(S)}(x-y+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

其中S为封闭曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$的外侧.

解　记S所围区域为V，则由高斯公式$I=3\iiint\limits_{(V)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$

区域V变为区域Ω：$|u|+|v|+|w|\le 1$　$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$

所以$I=3\iiint\limits_{(\Omega)}\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\dfrac{3}{4}\iiint\limits_{(\Omega)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\dfrac{3}{4}\times 8\times\dfrac{1}{6}=1$

六. (9分) 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2-1)}$的和函数，并求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\right)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$=-\frac{x}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x),\quad (|x|<1, x\neq 0)$$

所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots$$

七. (9分) 设L是不经过点$(2,0),(-2,0)$的分段光滑的简单正向闭曲线, 试就L的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$$

解 记 $I_1=\oint_L\frac{y}{(2-x)^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}\mathrm{d}y, I_2=\oint_L\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\mathrm{d}y$

计算得 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(2-x)^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right)$

（1）若L所围区域不包含点$(2,0),(-2,0)$, 则$I_1=I_2=0$,因此$I=I_1+I_2=0$;

解 （2）若L所围区域包含点$(2,0),(-2,0)$, 则分别作以这两个点为圆心, 以$\varepsilon_1,\varepsilon_2$为半径的圆$C_1,C_2$使它们都在所$L$围区域内部, 且$C_1,C_2$的方向取为逆时针, 则

$$I_1=\oint_{C_1}\frac{y}{(2-x)^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_1^2}\oint_{C_1}y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y=-\frac{2}{\varepsilon_1^2}\iint\limits_{(2-x)^2+y^2\le\varepsilon_1^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$$

同理 $I_2=-2\pi$,

因此$I=I_1+I_2=-4\pi$;

（3）若点$(2,0),(-2,0)$中一个在闭曲线L所围区域内部, 一个在外部时, 综合（1），（2）得 $I=-2\pi$.