西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下册期中考试参考答案
2021年05月

主讲：张芳

一. 填空题（每小题3分，共15分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} =$ ______.

解 $\left|\dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^2 y}{2xy}\right| = \left|\dfrac{x}{2}\right| \xrightarrow{x\to 0} 0$

2. 函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2 f(x-z,y)$确定，其中函数$f(u,v)$可微，则$dz\big|_{(0,1)} =$ ________.

解 方程两边微分：

$$zdx+(x+1)dz-2ydy=2xdxf+x^2\left[f_u(dx-dz)+f_v dy\right],$$

将(0,1,1)代入上式得$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

一. 填空题(每小题3分，共15分)

3. $u=2xy-z^2$在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值 为____.

解 $gradu=(2y,2x,-2z)\Big|_{(2,-1,1)}=(-2,4,-2)$,

方向导数的最大值为$\underline{\|gradu\|=2\sqrt{6}}$.

4. 设$z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(x,y)$，且$\varphi$为可微函数，则$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=$____.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{3x^2}+\varphi_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{3x}+\varphi_y$, $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=\underline{x^2\varphi_x-xy\varphi_y}$.

5. 设区域$(D)=\left\{(x,y)\Big|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，则$\iint_{(D)}(x+y+1)d\sigma=\underline{\quad\pi ab\quad}$.

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

1. 设$z=f(x^2y,\frac{y}{x})$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1-\frac{y}{x^2}f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+2x^3yf_{11}+yf_{12}-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^3}f_{22}$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

2. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的隐函数，求 $z=z(x,y)$的极值.

解 设$F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x-3y}{y+z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{10y-3x-z}{y+z},\quad (y+z\neq 0)$$

驻点为$(9,3,3)$和$(-9,-3,-3)$,

极小值为3，极大值为-3.

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

3. 已知方程组$\begin{cases} xu + yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$确定了隐函数$u = u(x,y), v = v(x,y)$，

求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$及$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 方程组微分得：$\begin{cases} xdu + ydv = -udx - vdy \\ ydu + xdv = -udy - vdx \end{cases}$

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -udx - vdy & y \\ -udy - vdx & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}, \quad dv = \frac{\begin{vmatrix} x & -udx - vdy \\ y & -udy - vdx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{vy - ux}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{vy - ux}{x^2 - y^2}.$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

4. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y^2+z^2=R^2 \end{cases}$在点$P\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$处的切线与法平面方程.

解 $\begin{cases} 2xdx+2ydy=0 \\ 2ydy+2zdz=0 \end{cases}$ 代入点P得：$dx=-dy=dz$,

切线方程为：$\dfrac{x-\frac{R}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}=\dfrac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{1}$,

法平面方程为：$x-y+z=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

5. 已知曲线$\begin{cases} y = 2x \\ z = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$在点$(1,2,1)$处的切向量$\vec{a}$与$z$轴正向的夹角为锐角，求函数$f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$在点$(1,2,1)$处沿向量$\vec{a}$的方向导数.

解 $\begin{cases} dy = 2dx \\ dz = 2xdx + 2ydy \end{cases}$

代入点：$(dx, -dy, dz) = (1, 2, 10)$

$\vec{a}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{105}}(1,2,10)$，　$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \sqrt{\dfrac{5}{14}}$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

6. 计算积分$I=\iint_{(D)}\left|x^2+y^2-1\right|dxdy$，其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.

解 $$I=\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2(\rho^2-1)\rho d\rho+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho d\rho=5\pi$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

7. 计算$\int_0^1 dy \int_y^1 x\sin\frac{y}{x}dx$.

解

$$\int_0^1 dy \int_y^1 x\sin\frac{y}{x}dx = \int_0^1 dx \int_0^x x\sin\frac{y}{x}dy$$

$$= \int_0^1 (-x^2\cos\frac{y}{x})\Big|_0^x dx = \frac{1}{3}(1-\cos 1)$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

8. 求曲面$x^2+y^2=az$与$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$围成的立体体积.

解

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(2a-\rho-\frac{\rho^2}{a}\right)\rho d\rho=\frac{5}{6}\pi a^3$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

9. 计算$\iiint\limits_{(V)} z^2 dV$，其中$(V)=\left\{(x,y,z)\left|\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-1)^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$.

解

$$\begin{cases} x-1=ar\sin\varphi\cos\theta, & 0\le\varphi\le\pi \\ y=br\sin\varphi\sin\theta\quad, & 0\le\theta\le 2\pi \\ z-1=cr\cos\varphi\quad, & 0\le r\le 1 \end{cases} \qquad dV=abcr^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$\iiint\limits_{(V)} z^2 dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(1+cr\cos\varphi)^2 abcr^2\sin\varphi dr$$

$$=4\pi abc\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}c^2\right)$$

二. 计算题（共10道小题，每题6分，共60分）

10. 已知向量值函数 $\vec{w}=\vec{f}(\vec{u})=\begin{pmatrix} u_1u_2u_3 \\ u_2\sin u_1 \end{pmatrix}, \vec{u}=\vec{g}(\vec{x})=\begin{pmatrix} \ln x_1 \cos x_2 \\ x_2+\sin x_1 \\ x_1^2 e^{x_2} \end{pmatrix}$

求复合函数$(f\circ g)$在$(1,0)$点处的导数.

解

$$D\vec{w}=\begin{bmatrix} u_2u_3 & u_1u_3 & u_1u_2 \\ u_2\cos u_1 & \sin u_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1}\cos x_2 & -\ln x_1 \sin x_2 \\ \cos x_1 & 1 \\ 2x_1 e^{x_2} & x_1^2 e^{x_2} \end{bmatrix}$$

$$D\vec{w}\Big|_{(1,0)}=\begin{bmatrix} \sin 1 & 0 \\ \sin 1 & 0 \end{bmatrix}$$

三、(本题9分)讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)处的连续性和可微性.

解 1. $\because 0\le \dfrac{|xy|}{|x|+|y|}\le \dfrac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}}=\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2}\to 0$，连续；

2. $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $f_y(0,0)=0$；

3. $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{|\Delta x|+|\Delta y|}\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ 极限不存在，不可微.

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{k\Delta x^2}{|\Delta x|^2(1+|k|)}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{k}{(1+|k|)\sqrt{1+k^2}},$$

四. (本题8分)求抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的一个切平面，使得它与该抛物面及圆柱面 $(x-1)^2+y^2=1$ 围成的立体体积最小，写出切平面方程 并求出最小体积 .

证明 切平面的方程：$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2$，

$$V=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left[1+x^2+y^2-(2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2)\right]d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}(3-4x_0+2x_0^2+2y_0^2)\pi$$

令 $gradV=0$，得 $(x_0,y_0)=(1,0)$，$V_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$

切平面的方程为：$z=2x.$

五.(本题8分)若$\forall t>0$，有$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则函数$f(x,y)$称为n次齐次函数.证明：若$f(x,y)$可微，则$f(x,y)$是n次齐次函数的充要条件是：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y).$

证明 必要条件

$\because \forall t>0$，有$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$对t求导得：

两边对t求导得：

$$xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

令$t=1$得：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y).$

五.(本题8分)若$\forall t>0$，有$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则函数$f(x,y)$称为n次齐次函数.证明：若$f(x,y)$可微，则$f(x,y)$是n次齐次函数的充要条件是：$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

证明 充分条件 令$F(t)=f(tx,ty),(t>0)$

对t求导得：$\frac{dF}{dt}=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)$

两边乘以t得：$t\frac{dF}{dt}=txf_1(tx,ty)+tyf_2(tx,ty)=nf(tx,ty)=nF(t)$

积分得：$F(t)=Ct^n$，令$t=1$得：$F(1)=C$

$\therefore F(t)=F(1)t^n$,即：$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.