期末考试模拟题（五）2022.6.16

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1.曲线$C:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ z=xy \end{cases}$在点$(2,1,2)$处的切线方程为（　　）.

（A）$\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$；　　（B）$\begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$；

（C）$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$；　　（D）$\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$.

2. 函数 $f(x,y)=xy^3$ 在椭圆 $2x^2+3y^2\le 4$ 上的最大值为（　　）.

（A）1；　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　　（C）$\dfrac{1}{2}$；　　（D）2.

3. 极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于（　　）.

（A）0；　　（B）1；　　（C）π；　　（D）2π.

4. 设有向曲面$\Sigma: x^2+y^2+(z-1)^2=1$，$(z\ge 1)$，定向为上侧，则第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 等于（　　）.

（A）$-\dfrac{5\pi}{3}$；　　（B）$-\dfrac{2\pi}{3}$；　　（C）$-\dfrac{\pi}{3}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$.

5. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为2，则数项级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 是（　　）.

（A）绝对收敛；　（B）条件收敛；　（C）发散；　（D）无法确定是否收敛.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $u(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$，则在点 $(\mathrm{e},1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,-2,2)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(\mathrm{e},1,1)}=$________.

2. 设$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$，则二重积分$\iint\limits_D (x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

3. 设 L 为圆 $x^2+y^2=4$，则$\oint\limits_L (2x^2-3y^2)\mathrm{d}s=$________.

4. 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{n}$的收敛域为________.

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n^b}$（$a>0$，$b>0$）收敛，则$a$和$b$满足的条件是________.

三、计算(每小题 8 分，共 56 分)

1. 求函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

2. 计算三次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z$.

3. 设曲线 $C:2x^2+y^2=1$，取逆时针方向，求曲线积分 $\oint\limits_C \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle| x+y+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\right\}$.

5. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

6. 设 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数，它在一个周期内的表达式为：$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\le 1\\ 1, & 1\le |x|\le \dfrac{3}{2}\end{cases}$，

试写出 $f(x)$ 在一个周期内的 Fourier 级数及和函数 $S(x)$ 的表达式，并求 $S(-2),S(3),S\left(\dfrac{9}{2}\right)$ 的值.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$（$n\ge 2$），$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数. 求 $S(x)$ 的表达式.

四、（8 分）设连续函数 $f(x)$ 恒正，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$，

$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le t^2\right\}$，$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}$， 试判断 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

五、(6 分)设函数 $f(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\lim\limits_{r\to+\infty} r\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}-3\right)=1$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记 $A_n=\iiint\limits_{B(n)}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

$B(n)=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le n^2\right\}$.试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{A_n}$ 的敛散性，若收敛请指明收敛类型，说明理由.