高等数学下期中模拟题（二）

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. 设函数$f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$，其中$\alpha>0$为常数，则$f(x,y)$在$(0,0)$处(　　　　).

A. 连续但不可偏导；　　B. 可偏导但不连续；

C. 可微且$df\,|_{(0,0)}=0$;　　D. $f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在$(0,0)$处连续.

2. 已知D为顶点坐标为$A(1,1)$, $B(-1,1)$和$C(-1,-1)$的三角形区域，D_1为D在第一象限部分，则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$等于(　　).

A.$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$;　　B.$2\iint\limits_{D_1} xydxdy$;

C.$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$;　　D.0.

3. 设有直线$L:\begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$和曲面$z=x^2-y^2+z^2$在点(1,1,1)的切平面为$\pi$，则直线L和平面$\pi$的位置关系为(　).

A $L\in\pi$;　B $L\parallel\pi$;　C $L\perp\pi$;　D L与π斜交.

4. 设空间曲线$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$在点$P(-1,1,1)$的切线的方向向量为$\vec{a}$,

则函数$u=x^2+2y^2-3z^2$在点$M(2,-1,-1)$处沿方向$\vec{a}$的方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|_M$=(　).

A $-2\sqrt{6}$；　B $2\sqrt{6}$；　C 12或-12;　D $2\sqrt{6}$或$-2\sqrt{6}$.

5. 设函数f具有一阶连续偏导数，若$f\left(x,x^2\right)=x^3$，

$f_x\left(x,x^2\right)=x^2-2x^4$则$f_y\left(x,x^2\right)=($　　$)$.

A $x+x^3$； B $2x^2+2x^4$； C x^2+x^5； D $2x+2x^2$.

二. 填空题（每小题3分，共15分）

1.函数$u=e^{-\pi z}\cos\dfrac{x}{y}$在点M$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{\pi},0)$处的全微分$du=$

2.设$u=z^2-2xy+y^2$在点$(1,-1,\dfrac{1}{2})$处方向导数的最小值为$=$

3.交换二次积分的次序（其中$f(x,y)$连续）

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy=$$

4.使二重积分$\iint\limits_D (4-4x^2-y^2)dxdy$达到最大的平面区域$D$为

5.设$z=f(x^2-y^2,\varphi(xy))$其中f,φ可微，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

三.计算下来各题（每小题8分，共16分）

1.设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})+\dfrac{y}{g(x^2+y^2)}$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2.设$\vec{r}=\vec{r}(t)$空间R^3中动点$\left(x(t),y(t),z(t)\right)^T$的向径。

证明:$\|\vec{r}(t)\|=c \Leftrightarrow$内积$<\vec{r}'(t),\vec{r}(t)>=0$.($c$为常数)

四.计算下来各题（每小题8分，共24分）

1.计算二重积分$I=\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$，

其中D是由$x^2+y^2=4$与坐标轴所围的第一象限的闭区域.

2.设函数f连续，平面有界闭区域D由确定$|y|\le|x|\le 1$。

证明：$\iint\limits_{D} f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)dx.$

3.设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数$u(x,y,z)=f(r)$，其中f具有二阶连续偏导数

（1）把$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成$r$的函数；

（2）若u满足$\Delta u=0$，求$f(r)$.

五. (12分) 求函数$f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$在闭区域$x^2+2y^2\le 3$上的最值.

六（10分）设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$ 求$f(x)$.

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

七. (8分) 设函数$F(x,y)=f(x)g(y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$, 其中$f,g,\varphi$连续

证明：$F(x,y)=C_2e^{C_1(x^2+y^2)}$，其中$C_1,C_2$为任取常数.