西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下册期末试卷讲评
2021年06月28日

西安交通大学　数学与统计学院

主讲：张芳

一. 填空题(每小题3分，共15分)

1. 曲面 $\sin^2 x+\cos(y+z)=\dfrac{3}{4}$ 在点 $(x,y,z)=(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},0)$ 处的切平面的方程为__________.

切平面： $x-y-z+\dfrac{\pi}{6}=0.$

一. 填空题（每小题3分，共15分）

2. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{n})x^n$的收敛半径等于___1___.

一. 填空题(每小题3分，共15分)

3. 若R^2上的可微函数$u(x,y)$的梯度$\mathrm{grad}\,u=(2x+e^x\sin y, e^x\cos y)$，且$u(0,\pi)=2$，则$u(x,y)=$ ________.

$\therefore \quad u(x,y)=x^2+e^x\sin y+2$

一. 填空题(每小题3分，共15分)

4. 设$L: x=2\cos t, y=2\sin t, z=2t(0\le t\le\pi)$,则$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}ds=$ ______.

解 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$

一. 填空题(每小题3分，共15分)

5. 设$f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x<0\\ x^2+1, & 0\le x\le 1\end{cases}$将$f(x)$展开成以2为周期的傅里叶级数，其和函数 记为$S(x)$,则$S(-\frac{15}{2})=$ $\underline{\frac{5}{4}}$.

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

1. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,在原点(0,0)处(B).

A. 连续且偏导数存在；

B. 沿各个方向的方向导数 都存在，但不可微；

C. 可微；

D. 连续但偏导数不存在.

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

2. 设空间区域$\Omega=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\right\}$，则Ω的体积等于(A).

A. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}dr$；

B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}dr$；

C. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \sqrt{4-r^2}dr$；

D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 \sqrt{4-r^2}dr$；

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

3. 设Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$，上侧，在以下四组积分中，一组中两个积分同时为零的是（ **D** ）.

A. $\iint_{\Sigma} z^2 dx\wedge dy, \iint_{\Sigma} z dx\wedge dy$

B. $\iint_{\Sigma} x^2 dy\wedge dz, \iint_{\Sigma} xz dy\wedge dz$

C. $\iint_{\Sigma} y^2 dx\wedge dz, \iint_{\Sigma} y dx\wedge dz$

D. $\iint_{\Sigma} y^2 dx\wedge dz, \iint_{\Sigma} 1 dx\wedge dz$

二. 选择题（共5道小题，每题3分，共15分）

4. 二次积分$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{1} ye^{xy}dy$的值为(**B**).

A. e^2-e;

B. $\frac{1}{2}e^2-e$;

C. e^2+e;

D. $\frac{1}{2}e^2+e$.

5. 下列命题中正确的是 (C).

A. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$;

B. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，必存在$N\in N_+$，当$n>N$时,恒有$a_n>\frac{1}{n}$.

C. 设$f(x)=x-\sin x$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{\sqrt{n}})$收敛;

D. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

三. 计算题（每题6分，共18分）

1. 设函数$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$z = xf(xy, \frac{x}{y})$，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f + xyf_1 + \frac{x}{y} f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf_1 - \frac{x}{y^2} f_2 + xf_1 + xy\left[xf_{11} - \frac{x}{y^2} f_{12}\right]$$

$$- \frac{x}{y^2} f_2 + \frac{x}{y}\left[xf_{21} - \frac{x}{y^2} f_{22}\right]$$

$$= 2xf_1 - \frac{2x}{y^2} f_2 + x^2 y f_{11} - \frac{x^2}{y^3} f_{22}.$$

三. 计算题（每题6分，共18分）

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xz dS$，其中$\Sigma$是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截部分.

解 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, (x,y)\in D_{xy}$ $\quad D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\sqrt{2}dxdy$$

$$\therefore \iint\limits_{(\Sigma)} xz dS=\sqrt{2}\iint\limits_{(D_{xy})} x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

三. 计算题（每题6分，共18分）

3. 求函数 $z=\dfrac{x^3}{3}-xy+\dfrac{y^2}{2}-2y$ 的极值.

解 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^2-y=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+y-2=0$ 得驻点$(-1,1),(2,4)$

又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2x,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-1,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

在点$(-1,1)$处，$A=-2, B=-1, C=1, B^2-AC>0$

函数不取得极值；

在点$(2,4)$处，$A=4, B=-1, C=1, B^2-AC<0$

函数取得极小值 $f(2,4)=-\dfrac{16}{3}.$

四. 计算题（每题7分，共21分）

1. 计算曲线积分 $\int_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + [2x + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$, 其中有向曲线 $(C): y = x\sin x$，方向从 $A(\pi,0)$ 到 $O(0,0)$.

解 补直线 $\overrightarrow{OA}: y=0, 0\le x\le \pi$, 并记 $C+\overrightarrow{OA}$ 所围区域为 D

令 $P=\sqrt{x^2+y^2}, Q = 2x + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$, 利用 Green 公式，有

$$\int_{(C)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} 2dxdy - \int_{(\overrightarrow{OA})} Pdx + Qdy$$

$$= 2\int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_0^{\pi} xdx = 2\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

2. 计算第二型面积分 $\iint\limits_{(\Sigma)} x^3 dy\wedge dz - 3x^2 y dz\wedge dx + (z^3-2)dx\wedge dy$

其中Σ是曲面$z = x^2 + y^2 (0\le z\le 1)$的下侧.

解 补面$\Sigma_1 : \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=1 \end{cases}$取上侧，并记$\Sigma$与$\Sigma_1$所围区域为$\Omega$

利用 *Gauss* 公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dy\wedge dz - 3x^2 y dz\wedge dx + (z^3-2)dx\wedge dy$$

$$= \iiint\limits_{(\Omega)} 3z^2 \mathrm{d}V - \iint\limits_{(\Sigma_1)} x^3 dy\wedge dz - 3x^2 y dz\wedge dx + (z^3-2)dx\wedge dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 3z^2 \rho dz - \iint\limits_{(\Sigma_1)} (1-2)dx\wedge dy = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$$

3. (1)将函数$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$展开成麦克劳林级数；

(2)利用(1)中所得级数，求积分$\int_0^1 f(x)dx$的值（注:$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$).

解(1) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots, x\in(-1,1]$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots,$$

$$x\in(-1,0)\cup(0,1]$$

(2)$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

五（本题8分）将函数$f(x)=x-\frac{\pi}{2}+\left|x-\frac{\pi}{2}\right|,(0\le x\le\pi)$展成余弦级数．

解 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 2x-\pi, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上延拓为偶函数为 $F(x)$

再将$F(x)$延拓为周期2π的周期函数，则

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-\pi)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(2x-\pi)\sin nx}{n}+\frac{2\cos nx}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{n^2}\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right],\quad n=1,2,\cdots$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in[0,\pi]$$

六. (本题8分)求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$的和函数，并求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解 设$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}, x\in[-1,1]$,则

$$S(0)=0,\quad S(1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4},$$

当$x\in[\text{-}1,0)\cup(0,1)$

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}(x+\frac{x^2}{2})$$

六. (本题8分)求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$的和函数，并求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解 $S(0)=0,\quad S(1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4},$

当$x\in[-1,0)\cup(0,1)$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}(x+\frac{x^2}{2})=\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1})\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln2$

七. (本题9分) 函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且

$f(0,y)=y+1$，L_t是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算积分

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$ 并求$I(t)$的最小值.

解 由$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$可得$f(x,y)=xe^{2x-y}+c(y)$

由$f(0,y)=y+1$得$f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$

$\therefore I(t)$与积分路径无关，于是

$$I(t)=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(1-e^{2-y})dy=t+e^{2-t}$$

由$I'(t)=1-e^{2-t}$得$t=2$，由$I''(2)=1>0$知，最小值$I(2)=3$.

八. 证明题（本题6分）

设函数$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续，且单调增加有上界，证明：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx]$收敛.

解 函数$f(x)$连续且单调增加$\Rightarrow f(n-1)\le\int_{n-1}^{n}f(x)dx\le f(n)$

所以有$0\le f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx\le f(n)-f(n-1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$的部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]=f(n)-f(0)$

又$f(x)$单调增加有上界$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}f(n)$存在，

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛

由正项级数的比较准则知$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx]$收敛.