高等数学期末模拟题（一）答案

一. 单选题（每小题3分，共15分）

1. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+c}{x^2+2}=1$(其中$a,b,c$为常数),则（ B ）.

A. $a=0,b\in R$ B. $a=0,b=1$ C. $a\in R,b=1$ D $a\in R,b\in R$

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+c}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\dfrac{c}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow a=0,b=1,c\in R.$$

2. 若函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$皆可导，且有$f(x)<g(x)$，则必有（C）

A. $f(-x)>g(-x)$

B $f'(x)<g'(x)$

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

D. $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

解 由$f(x)<g(x)\Rightarrow f(x_0)<g(x_0)$

而$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x), g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. 函数$f(x)$的一个原函数是$(x-2)e^x$，则$f'(x+1)=$（ C ）

A. xe^x　B. xe^{x+1}　C. $(x+1)e^{x+1}$　D. $(x+1)e^x$

解

$$f(x)=\left((x-2)e^x\right)'=(x-1)e^x$$

$$f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=xe^x$$

$$f'(x+1)=(x+1)e^{x+1}$$

4. 下列广义积分中发散的是（D）

A. $\int_0^1 \ln x dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx$ C. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ D. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\cos x}$

解法1 $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\big|_{0+\varepsilon}^1 = -1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\big|_0^{+\infty} = 1$$

4. 下列广义积分中发散的是（D）

A. $\int_0^1 \ln x dx$　B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$　C. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$　D. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\cos x}$

解法2

$$\frac{1}{x\cos x} > \frac{1}{x} > 0, x \in (0,1]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx\text{发散，则}\int_0^1 \frac{1}{x\cos x}dx\text{发散}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\cos x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x\cos x} + \int_0^1 \frac{dx}{x\cos x}\text{发散}$$

5. 设$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{t}, t\neq 0\\ 0, \quad t=0\end{cases}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则$F(x)$在$x=0$处（D）

A. 不连续 B. 连续不可导 C. 可导且$F'(0)\neq 0$ D. 可导且$F'(0)=0$

解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{x^2}^x f(t)dt$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt\right|\le\frac{1}{x}\int_0^{x^2}|f(t)|dt\le\frac{1}{x}\cdot x^2 \quad\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} f(t)dt=0$$

$$\frac{1}{x}\int_{x^2}^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_{x^2}^x\sin\frac{1}{t}dt=\frac{1}{x}\int_{x^2}^x t^2d\cos\frac{1}{t}=\frac{1}{x}(t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^x-\int_{x^2}^x 2t\cos\frac{1}{t}dt)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^x)=0 \quad \left|\frac{1}{x}\int_{x^2}^x 2t\cos\frac{1}{t}dt\right|\le\frac{1}{x}\int_{x^2}^x 2tdt \quad\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_{x^2}^x f(t)dt=0$$

则$F'_+(0)=0$ 同理可证$F'_-(0)=0$ 故$F'(0)=0.$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

1. 已知函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$确定

则曲线$y=f(x)$在$t=2$处的切线方程为______

解 $t=2, x=\dfrac{2}{5}, y=\dfrac{4}{5}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=2}=\frac{4}{-3}$$

切线方程为$y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{4}{3}(x-\dfrac{2}{5})$

2. 设$[x]$表示不超过x的最大整数, 则定积分$\int_0^{2018}(x-[x])dx=$____.

解 $\int_0^{2018}(x-[x])dx=2018\int_0^1(x-[x])dx=2018\int_0^1 xdx=1009$

3. 已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$是某二阶非齐次线性微分方程的3个解, 则该微分方程的通解是______.

解 $y_1-y_3=e^{3x},y_2-y_3=e^x$是该二阶非齐次线性微分方程对应的齐次的2个线性无关的解

则该微分方程的通解是$C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$(C_1,C_2为任取常数).

4. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+3\sin\dfrac{3}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ______.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+3\sin\dfrac{3}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\frac{3}{n}\sin\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}=\int_0^1 x\sin x dx$$

$$=\int_0^1 xd(-\cos x)=\sin 1-\cos 1.$$

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{d\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, 当$f(x)\in R[0,1]$时 $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})$.

5. 设$f(x)=(x-1)\ln(2-x)\ (x<2)$,则$f(x)$的最大值点$x=$______.

解 $$f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x-1}{2-x}$$

令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

$x\in(-\infty,1)$时$f'(x)>0$, $x\in(1,2)$时$f'(x)<0$

$x=1$为唯一的极大值点, 则为最大值点.

三. 计算题（每小题5分，共15分）

1. 计算积分$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}dx.$

解 $$\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 9}dx$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 9}d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right) + C$$

2. 计算积分$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中$f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

解

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}$$

$$=\left(2\sqrt{x}f(x)\right)\Big|_0^1 \quad -\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\cdot 2\sqrt{x}dx$$

$$=-2\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx \quad =-4\int_0^1 \ln(x+1)d\sqrt{x}$$

$$=\left(-4\sqrt{x}\ln(x+1)\right)\Big|_0^1 \quad +4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$$

$$=-4\ln 2 \quad +8\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

$$=8-2\pi-4\ln 2$$

3. 计算反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx.$

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{1+e^{x}}$$

$$=-\frac{x}{1+e^{x}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

$$=\left(x-\ln(1+e^{x})\right)\Big|_0^{+\infty}=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(1+e^{x})\right)$$

$$=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+e^{-x}}=\ln 2.$$

四. 解答题（8分）

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(x-3)y^4=0$ 的通解.

解 $y'+\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{3}(x-3)y^4 \qquad y^{-4}y'+\dfrac{1}{3}y^{-3}=-\dfrac{1}{3}(x-3)$

$$\left(y^{-3}\right)'-y^{-3}=x-3$$

$$y^{-3}=e^{\int dx}\left(C+\int(x-3)e^{\int -dx}dx\right)$$

$$=Ce^{x}-x+2$$

五. 解答题（10分）求微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}x$ 的通解.

常系数线性齐次微分方程组的求解方法

常系数线性齐次微分方程组，$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$

（1）系数矩阵 A 有n线性无关特征向量的情形

定理 设n阶矩阵A有n线性无关的特征向量$r_1,r_2,\cdots,r_n$,它们对应的特征值分别为量$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(未必互不相同),则常系数齐次线性微分方程通解为

$x(t)=C_1r_1e^{\lambda_1 t}+C_2r_2e^{\lambda_2 t},+\cdots+C_nr_ne^{\lambda_n t}$. 其中$C_1,\cdots,C_n$为任取常数.

（2）系数矩阵 A 没有n线性无关特征向量的情形

定理 设λ_i是矩阵A的k_i重特征值，则方程组必存在k_i个形式为

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}r_{k_i-1}\right)$$ 的线性无关的特解，

其中r_0是齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)^{k_i}r=0$的非零解

且齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)^{k_i}r=0$必有k_i个线性无关的解

对每个r_0相应的$r_1,r_2,\cdots,r_{k_i-1}$由下列关系式逐次确定

$$r_1=(A-\lambda_i E)r_0,\ r_2=(A-\lambda_i E)r_1,\cdots,r_{k_i-1}=(A-\lambda_i E)r_{k_i-2}.$$

五. 解答题（10分）求微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -5\\ 6 & 4 & -9\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}x$ 的通解.

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & -5\\ 6 & 4-\lambda & -9\\ 5 & 3 & -7-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-1)$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ $\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时 由于 $r(A)=2$ 需要解 $A^2x=0$

$A^2=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 基础解系为 $r_0=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix},s_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

解 对$r_0=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ $r_1=Ar_0=\begin{pmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$ $\xi_1(t)=e^{0t}(r_0+tr_1)=\begin{pmatrix}-1+2t\\3+6t\\4t\end{pmatrix}$

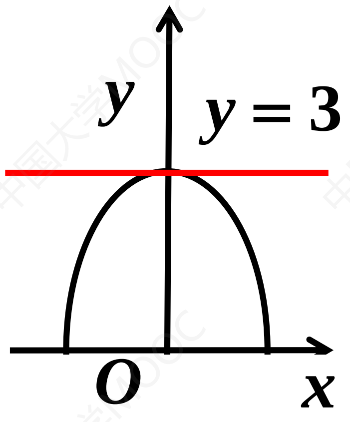
对$s_0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $s_1=As_0=\begin{pmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ $\xi_2(t)=e^{0t}(s_0+ts_1)=\begin{pmatrix}1-t\\-3t\\1-2t\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=1$时,解$(A-E)x=0$ $r=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\xi_3(t)=re^t=e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$x(t)=C_1\xi_1(t)+C_2\xi_2(t)+C_3\xi_3(t)=C_1\begin{pmatrix}-1+2t\\3+6t\\4t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1-t\\-3t\\1-2t\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

其中C_1,C_2,C_3为任取常数.

六. 应用题（10分）求曲线$y=3(1-x^2)$与x轴围成封闭图形绕直线$y=3$旋转一周所得旋转体的体积.



解

$$dV=\pi 3^2dx-\pi\left(3-3(1-x^2)\right)^2dx$$

$$=9\pi(1-x^4)dx$$

$$V=\int_{-1}^{1}9\pi(1-x^4)dx=\frac{72\pi}{5}.$$

八. 证明题(9分).设$f'(x)$是连续函数, $F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$,

证明: $F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$

证明 $F(2a)-2F(a)=\int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)dt-2\int_0^a f(t)f'(2a-t)dt$

$$=\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt-\int_0^a f(t)f'(2a-t)dt$$

$$\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt=-\int_a^{2a} f(t)d\left(f(2a-t)\right)$$

$$=-f(t)f(2a-t)\Big|_a^{2a}+\int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)dt$$

$$=f^2(a)-f(0)f(2a)-\int_a^0 f(t)f'(2a-t)dt$$

$$=f^2(a)-f(0)f(2a)+\int_0^a f(t)f'(2a-t)dt$$

$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a).$

九. 证明题(9分).设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续的导数，且$f(0)=f(1)=0$

证明:(1)$\forall t\in R,\int_0^1 xf(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$;

(2)$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$,

等号当且仅当$f(x)=A(x^3-x)$时成立，其中A为常数.

证明 (1)$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2-t)$

$$=\frac{1}{2}(x^2-t)f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx;$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$$

$$\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$$

$$=\int_0^1(x^2-t)df(x)$$

$$=(x^2-t)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2xf(x)dx$$

$$=-2\int_0^1 xf(x)dx$$

九. 证明题(9分).设函数$f(x)$在闭区间[0,1]上具有连续的导数, 且$f(0)=f(1)=0$

证明:(1)$\forall t\in R,\int_0^1 xf(x)dx=-\dfrac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$;

(2)$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\dfrac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$,

等号当且仅当$f(x)=A(x^3-x)$时成立，其中A为常数.

证明 (2)$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx\right)^2\le\dfrac{1}{4}\int_0^1(x^2-t)^2dx\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$

$$=\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{5}\right)\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$$

由于当$t=\dfrac{1}{3}$时$t^2-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{5}=(t-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{4}{45}$取得最小值， 所以$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\dfrac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

柯西-施瓦兹不等式

当且仅当$f'(x)=k(x^2-\dfrac{1}{3})$等号成立，积分得$f(x)=A(x^3-x)$.

西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY