20－1.(学过第 8 章线性变换的同学做此题)　设 T 为 $F[x]_2$ 上的线性算子，定义 $T(f(x))=f(x+1)-f(x)$，则 T 在 $F[x]_2$ 的基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为________.

20－2.(没学过第 8 章线性变换的同学做此题)　若实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2$ 为正定二次型，则 t 的取值范围为________.

三、解答题

21.(本题 10 分)设有向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1,-5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,6,-a,-10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,15,12)^{\mathrm{T}}$，又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,3,b)^{\mathrm{T}}$. 问 a,b 取何值时，(1) $\boldsymbol{\beta}$ 能由(Ⅰ)线性表示且表示式唯一；(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由(Ⅰ)线性表示；(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能由(Ⅰ)线性表示且表示式不唯一，并求出一般表达式.

22.(本题 10 分)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\2&1&-1&1&1\\1&2&-1&14&2\\0&1&2&3&3\end{bmatrix}$，

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

(2)求向量空间 $W=\{\boldsymbol{Ax}\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^5\}$ 的基与维数.

23.(本题 14 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$，

(1)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(2)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

24.(本题 6 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

期末考试自测题二

一、单项选择题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　B. $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　　D. $|\boldsymbol{A}|=0$

2. 已知 $D=\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&-3&1\\0&1&-4\end{vmatrix}$，则 $2A_{12}+A_{22}-4A_{32}=$(　　). 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个不同的解，则下列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\frac{2}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$$

中是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解的向量共有(　　).

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

4. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分而非必要条件

C. 必要而非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

(2) 设向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{2})$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,1)$,则 $\|(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\times(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})\|=$________.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & c+2 & 0\\ 1 & 0 & c-5\end{bmatrix}$是正定矩阵,则 c 的取值范围为________.

(4) 设(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 是向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两组基,且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

则由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 $\boldsymbol{S}=$________,$\boldsymbol{\xi}=5\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$ 在基(Ⅰ)下的坐标为________.

三、(10 分)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2\\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0\end{vmatrix}$的值,这里 $n\geqslant 3$.

四、(10 分)求直线 $L:\begin{cases}x+y-z=1\\ -x+y-z=1\end{cases}$在平面 $\pi:x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

五、(10 分)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$ 具有相同的秩,且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求 a,b 的值.

六、(10 分)设非齐次线性方程组$\begin{cases}-x_1-2x_2+ax_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=b\\ 4x_1+5x_2+10x_3=2\end{cases}$,试问:当 a,b 满足什么条件时,方程组有(1)唯一解;(2)无解;(3)有无穷多解?在有无穷多解时,求出对应的齐次线性方程组的基础解系以及该非齐次方程组的通解.

七、(10 分)对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,证明:伴随矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n;\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1;\\ 0, & r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$

八、(10 分)求一个正交变换,把实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形,并判断此二次型是否正定.

九、(8 分,学习第 8 章线性变换的同学做此题)设

(Ⅰ):$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$;

(Ⅱ):$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}6 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}$,

是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中两组基，定义 $\sigma(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}$, $\forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$.

(1) 试证 σ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的线性变换；

(2) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵；

(3) 求 σ 在基(Ⅰ)下的矩阵.

期末考试自测题三

一、单项选择题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 若 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{12}-3a_{11} & -a_{13}\\ 4a_{21} & 2a_{22}-3a_{21} & -a_{23}\\ 4a_{31} & 2a_{32}-3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $-8a$　　B. $8a$　　C. $-24a$　　D. $24a$

2. 设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，则(　　).

A. $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$　　B. $a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{A}^2\sim a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{B}^2$, $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角矩阵

3. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，下列变换为线性变换的是(　　). (没学习第 8 章线性变换的同学不做此题)

A. $\sigma_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2,x_2x_3,x_1x_3)$

B. $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_1+x_3)$

C. $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$

D. $\sigma_4(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2+1,x_3+1)$

4. 设 $T\in L(\mathbf{R}^2)$, $T(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2,-2x_1+4x_2)^{\mathrm{T}}$, $\forall (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$，则 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵为(　　).

A. $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

二、填空题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 5 & 1 & -1 & 6\end{vmatrix}$，则 $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}=$________.

2. 过点(1,2,1)与两向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 都平行的平面方程为________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=12$ 的特征向量，而 $\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A\beta}=$________.

4. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在该组基下的坐标是________.