

## 期中考试模拟题（五）2021.11.14

### 一、 单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时，与  $\ln(1+2\sin x)$  等价的无穷小是（ ）.

- A.  $1+2\sin x$       B.  $x$       C.  $2x^2$       D.  $2x$

2. 设  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处（ ）.

- A. 极限不存在      B. 极限存在但不连续      C. 连续      D. 连续且可导

3. 设  $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \arctan \frac{1}{x}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的（ ）.

- A. 可去间断点      B. 跳跃间断点      C. 无穷间断点      D. 振荡间断点

4. 设  $f(x)$  可导,  $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$ , 若  $F(x)$  在  $x=0$  处可导, 则必有（ ）.

- A.  $f'(0)=0$       B.  $f(0)=0$       C.  $f(0)+f'(0)=0$       D.  $f(0)-f'(0)=0$

5. 已知  $f(x)$  在  $x=0$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1} = 2$ , 则  $f(x)$  在

$x=0$  处（ ）.

- A. 不可导      B. 可导且  $f'(0) \neq 0$       C. 取得极小值      D. 取得极大值

### 二、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设  $f(x)$  可微,  $y = f(\sqrt{x})e^{f(-x)}$ , 则  $y' =$ \_\_\_\_\_.

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $y = \frac{x^4+x^2+x}{x^2-1}$ , 则  $y'''(0) =$ \_\_\_\_\_.

4. 函数  $y = -\frac{1}{2}x^2e^x$  的一个极小值为\_\_\_\_\_.

5. 设  $y = y(x)$  由方程  $xy + e^y = x+1$  确定, 则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

三、(9分) 求函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2-4)}{\sin(\pi x)}, & x < 0 \\ \frac{x(x-1)}{x^2-1}, & x \geq 0 \end{cases}$  的间断点, 并指出其类型.

四、计算题(每小题8分, 共48分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$ .
2. 设  $y = \sqrt{e^{\frac{1}{\sin x}} \sqrt{e^{-x^2}} + \sin \sqrt{5} \cos x}$ , 求  $y'$ .
3. 已知曲线方程为  $\begin{cases} x = 2t + 3 + \arctan t \\ y = 2 - 3t + \ln(1+t^2) \end{cases}$ , 求曲线在  $t=0$  处对应的切线方程和法线方程.
4. 设  $f(x) = (5-x)x^{\frac{2}{3}}$ , 求  $f(x)$  的极值.
5. 求曲线  $y = (x^2+1)e^{-x}$  的拐点及凹凸区间.
6. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & x < 0 \\ a + \sin bx, & x \geq 0 \end{cases}$ , 问  $a, b$  为何值时, 函数  $f(x)$  连续、可导? 并求  $f'(x)$ .

五、证明题:

1. (7分) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1} (n \in \mathbf{N}_+)$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ .
2. (6分) 已知函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内二阶可导, 且  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  
 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|$ . 证明:  $\exists \delta > 0$ , 使得在  $(-\delta, \delta)$  内  $f(x) \equiv 0$ .