七、(13 分)已知直线 $L_1:\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$，$L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z+4}{-2}$.

(1) 求直线 L_1，L_2 的一般式；

(2) 求与直线 L_1，L_2 相交，且与平面 $2x+3y-5=0$ 平行的直线的轨迹；

(3)直线轨迹表示何种二次曲面.

八、(13 分) 用正交线性变换化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形，并写出所用的正交线性变换.

九、(4 分) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$. 证明:矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

期末考试自测题一参考答案及解答

一、单项选择题

1.C　2.B　3.B　4.A　5.D　6.A　7.D　8.C　9-1.C　9-2.C　10-1.A　10-2.A.

二、填空题

11. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.　12. $\dfrac{2\pi}{3}$.　13. $x-2y-3z-7=0$.　14. 9.　15-1. 2.　15-2. 2.

16. $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.　17. $\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$.　18. $(2,1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

19. $\begin{cases}x^2+y^2=2y\\z=0\end{cases}$.　20-1. $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$.　20-2. $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$.

三、解答题

21. **解**　记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4]$，对 $[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta}]$ 施行初等行变换，得

$$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&2-a&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}$$

(1)当 $a\neq2$ 时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 能由(Ⅰ)唯一线性表示.

(2)当 $a=2$ 且 $b\neq1$ 时，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由(Ⅰ)线性表示.

(3)当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta}]=3$，$\boldsymbol{\beta}$ 能由(Ⅰ)线性表示且表示式不唯一，求得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(-8,3-2c,c,2)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{\beta}=-8\boldsymbol{\alpha}_1+(3-2c)\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4，其中\ c\ 为任意常数。$$

22. **解**　(1)记矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4\ \boldsymbol{\alpha}_5]$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_5=10\boldsymbol{\alpha}_1-15\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4$.

(2)$W=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5\}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 W 的一组基，$\dim(W)=4$.

23. **解** (1) f 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=14,\lambda_2=\lambda_3=0$.

对 $\lambda_1=14$，解方程组 $(14\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_2=\lambda_3=0$，解方程组 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，正交化、单位化后得 $\boldsymbol{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=\left(-\frac{3}{\sqrt{70}},-\frac{6}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}}\right)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $14y_1^2$.

(2)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 及(1)得 $y_1=0$. 即 $x_1+2x_2+3x_3=0$. 解得

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

24. **证法 1** 设 $r(\boldsymbol{A})=r$，当 $r(\boldsymbol{A})=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，可对角化；当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，也可对角化.

当 $0<r(\boldsymbol{A})<n$ 时，记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]$，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，则由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\alpha}_j$，且 $\boldsymbol{\alpha}_j\neq 0(j=1,2,\cdots,r)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1$，属于特征值 1 有 r 个线性无关特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$.

而 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且属于 0 有 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r$ 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 也可相似对角化.

证法 2 当 $r(\boldsymbol{A})=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，可对角化；当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，可对角化.

当 $0<r(\boldsymbol{A})<n$ 时，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\leqslant n$. 又 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{I})=n$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

从而 $[n-r(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]+[n-r(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 也可相似对角化.

期末考试自测题二参考答案及解答

一、单项选择题

1. D　2. B　3. A　4. B