西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

线性代数与解析几何

期终模拟试题讲解（一）

数学与统计学院
李换琴

一、填空题(1−4题，每小题3分, 共12分)

1. 若向量组 $\alpha_1=(-2,3,1)^{\mathrm T},\alpha_2=(2,t,-1)^{\mathrm T},\alpha_3=(0,0,1)^{\mathrm T}$ 线性相关，则常数 t =（ -3 ）

解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]<3\Leftrightarrow|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0,$

由$\begin{vmatrix}-2 & 2 & 0\\ 3 & t & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2t-6=0,$ 得$t=-3.$

2. 若矩阵A的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

则 $\det(A)=$（ 2 ）.

解 $|A^*| = 8$，等式$AA^* = |A|E$两边取行列式，得$|A|\cdot|A^*| = |A|^4$，

则 $|A| = 0$或$|A| = 2$.

由$|A^*| \neq 0$知A^*可逆，故A可逆，从而$|A| \neq 0$，

故$|A| = 2$.

3. 已知 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 为3维列向量， $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$

则 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=$ （ 6 ）.

解

$$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1\ a_2\ a_3)=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1+1+4=6$$

4. 已知 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，

则向量组 $\beta_1=\alpha_1+t_1\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t_2\alpha_1$ 也可作为 $Ax=0$

的基础解系的充要条件是常数 t_1,t_2 满足条件（ $1-t_1t_2\neq 0$ ）

解 $[\beta_1\ \beta_2]=[\alpha_1\ \alpha_2]\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}$

β_1,β_2 也可作为 $Ax=0$ 的基础解系

$\Leftrightarrow$ 向量组 β_1,β_2 与向量组 $\alpha_1\ \alpha_2$ 等价

$\Leftrightarrow$ 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}=1-t_1t_2\neq 0.$

二、单项选择题(5-8题，每小题3分，共12分)

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，则（ B ）

$(A)\,A$为正交矩阵　　$(B)\,\dfrac{1}{3}A$为正交矩阵

$(C)\,\det(A)=1$　　$(D)\,A^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{\mathrm{T}}$

解 $\det(A)=15,$

$AA^{\mathrm{T}}=9E\Rightarrow\dfrac{A}{3}\left(\dfrac{A}{3}\right)^{\mathrm{T}}=E$，故$\dfrac{A}{3}$为正交矩阵.

6. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$相似于对角阵$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$，则$a=(A)$

$(A)\ 0 \quad (B)\ 2 \quad (C)\ -2 \quad (D)\ 6$

解 由题意，特征值6的几何重数为2，

即$3-r(6E-A)=2, \Rightarrow r(6E-A)=1.$

$$又6E-A=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -2 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故$a=0.$

7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$的秩为 1，则 (D)

$(A)a=b$且$a+2b=0$ $(B)a\neq b$且$a+2b\neq 0$

$(C)a=b$且$a+2b\neq 0$ $(D)a\neq b$且$a+2b=0$

解 若$a=b$，则$A=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\Rightarrow A^*=O$与题设矛盾，故$a\neq b$.

又A^*的秩为 1$\Rightarrow A^*$不可逆，从而A不可逆，即$|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

因$a-b\neq 0$,故$a+2b=0$.

8. $\mathbf{R}^{2\times 2}$的子空间$W=\left\{\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbf{R}\right\}$的维数是 **(B)**

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

解 $\forall\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\in W$，有$\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

显见$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in W$,

$k_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=0$,即$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow k_1=0,k_2=0.$

所以$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是$W$的一个基，$\dim(W)=2.$

三、解答题(9–15题，共76分)

9. 设3阶方阵A,B满足$A+B=AB$,

（1）证明矩阵$A-E$可逆（2）当$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时,求$A$.

解（1）$AB-A-B=O$，即$(A-E)B-(A-E)=E$,

$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$, 故$A-E$可逆,$(A-E)^{-1}=B-E$.

（2） $A-E=(B-E)^{-1}$,

$$A=E+(B-E)^{-1}=E+\begin{pmatrix}2&2&0\\3&5&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}9&-2&0\\-3&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

10. a,b取何值时，线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$有唯一解、无解、有无 穷多解？并在有无穷多 解时，求出方程组的结构式通 解.

解

$$\overline{A} = (A,b) \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array}\right]$$

(1) 当$a \neq 1$时，$r(A) = r(\overline{A}) = 4$, 方程组有唯一解.

(2) 当$a = 1, b \neq 4$时，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解；

(3) 当$a = 1, b = 4$时，$r(A) = r(\overline{A}) = 2$，方程组有无穷多解.

此时 $\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -7 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 11x_3 + 7x_4, \\ x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$

得所求通解为

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

11.两直线$L_1:\begin{cases} x=3-z, \\ y=2 \end{cases}$与$L_2:\begin{cases} x+y-3z=-7, \\ x-2z=-6 \end{cases}$是否共面？若共面，求它们所确定 平面的一般式方程．

解 $\vec{a}_1=(1,0,1)\times(0,1,0)=(-1,0,1),\quad p_1(3,2,0),$

$\vec{a}_2=(1,1,-3)\times(1,0,-2)=(2,1,1),\quad p_2(-6,-1,0),$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\cdot\overrightarrow{p_1p_2}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$ 故L_1与L_2共面.

$$\vec{n}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-i+3j-k$$

故所求平面方程为$-(x-3)+3(y-2)-z=0$ 或$x-3y+z+3=0.$

12.已知3阶矩阵A的特征值为$1,2,-3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是依次对应的特征向量，设 $B=A^*-2A+3E$，求B^{-1}的特征值、特征向量，及 $\det(B^{-1})$.

解 $|A|=-6$, $A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1}$,

由题设$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-3\alpha_3$.

故$B\alpha_1=(-6A^{-1}-2A+3E)\alpha_1=(-6\cdot\frac{1}{1}-2\cdot 1+3)\alpha_1=-5\alpha_1$,

同理 $B\alpha_2=-4\alpha_2$，$B\alpha_3=11\alpha_3$. $\therefore$ B的特征值为$-5,-4,11$

对应特征向量依次为$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3(k_i\neq 0)$.

$$\det(B^{-1})=(-\frac{1}{5})\times(-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{11})=\frac{1}{220}.$$

13.设矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,

(1)写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Bx$ 的矩阵 A;

(2)求一个正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 成对角矩阵;

(3)写出在正交变换 $x=Py$ 下 f 化成的标准型 .

解 (1) $A=\dfrac{1}{2}(B+B^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5, \lambda_3=-1.$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=5$,

$$5E-A=\begin{bmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得线性无关的特征向量

$\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

得标准正交特征向量 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda_3=-1$,

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$得特征向量$\xi_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,

再单位化得 $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$.

令$P=[e_1\quad e_2\quad e_3]$,则$P$为正交矩阵，且 $PA^{-1}P=\begin{pmatrix}5 & & \\ & 5 & \\ & & -1\end{pmatrix}$.

(3) 在正交变换 $x=Py$下f的标准型为 $5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

14.设R^4的子空间V由向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,4)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,2)^T$生成,求$V$的基与维数.

解

$$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2 & -6\\ 1 & 5 & -1 & 10\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

V的一个基为： 极大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

V的维数$\dim(V)=3.$

15. 设A,B均为n阶正定矩阵，证明关于 λ的方程 $\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.

证 因A正定，故$|A|>0$,且有可逆矩阵P,使$A=P^TP$.

$$|\lambda A-B|=|\lambda P^TP-B|=|P^T(\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1})P|$$

$$=|P^T|\cdot|P|\cdot|\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$$=|A||\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$|\lambda A-B|=0 \Leftrightarrow |\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0 \Leftrightarrow \lambda$是$(P^{-1})^TBP^{-1}$的特征值

由B正定，知$(P^{-1})^TBP^{-1}$也正定，因此其特征值均大于零.

故方程 $\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.

12.已知3阶矩阵A的特征值为1,2,−3， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是依次对应的特征向量，设 $B=A^*-2A+3E$，求B^{-1}的特征值、特征向量，及 $\det(B^{-1})$.

解 $|A|=-6,\ A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1}$,

由题设$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-3\alpha_3$.

故$B\alpha_1=(-6A^{-1}-2A+3E)\alpha_1=(-6\cdot\frac{1}{1}-2\cdot 1+3)\alpha_1=-5\alpha_1$,

同理 $B\alpha_2=-4\alpha_2$， $B\alpha_3=11\alpha_3$. $\therefore B$的特征值为$-5,-4,11$

对应特征向量依次为$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3(k_i\neq 0)$.

$$\det(B^{-1})=(-\frac{1}{5})\times(-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{11})=\frac{1}{220}.$$

13.设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,

(1)写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Bx$ 的矩阵 A;

(2)求一个正交矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 成对角矩阵;

(3)写出在正交变换 $x=Py$ 下 f 化成的标准型.

解 (1) $A=\frac{1}{2}(B+B^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=5$,

$$5E-A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得线性无关的特征向量

$\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

得标准正交特征向量 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda_3=-1$,

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3&-3&0\\-3&-3&0\\0&0&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$得特征向量$\xi_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,

再单位化得 $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$.

令$P=[e_1\quad e_2\quad e_3]$,则$P$为正交矩阵，且 $PA^{-1}P=\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-1\end{pmatrix}$.

(3) 在正交变换 $x=Py$下f的标准型为 $5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

14.设R^4的子空间V由向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3=(3,2,-1,4)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,2)^T$生成,求$V$的基与维数.

解 $$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

V的一个基为： 极大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

V的维数$\dim(V)=3.$

15. 设A,B均为n阶正定矩阵，证明关于 λ的方程 $\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.

证 因A正定，故$|A|>0$,且有可逆矩阵P,使$A=P^TP$.

$$|\lambda A-B|=|\lambda P^TP-B|=|P^T(\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1})P|$$

$$=|P^T|\cdot|P|\cdot|\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$$=|A||\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$|\lambda A-B|=0\Leftrightarrow|\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0\Leftrightarrow\lambda$是$(P^{-1})^TBP^{-1}$的特征值

由B正定，知$(P^{-1})^TBP^{-1}$也正定，因此其特征值均大于零.

故方程 $\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.