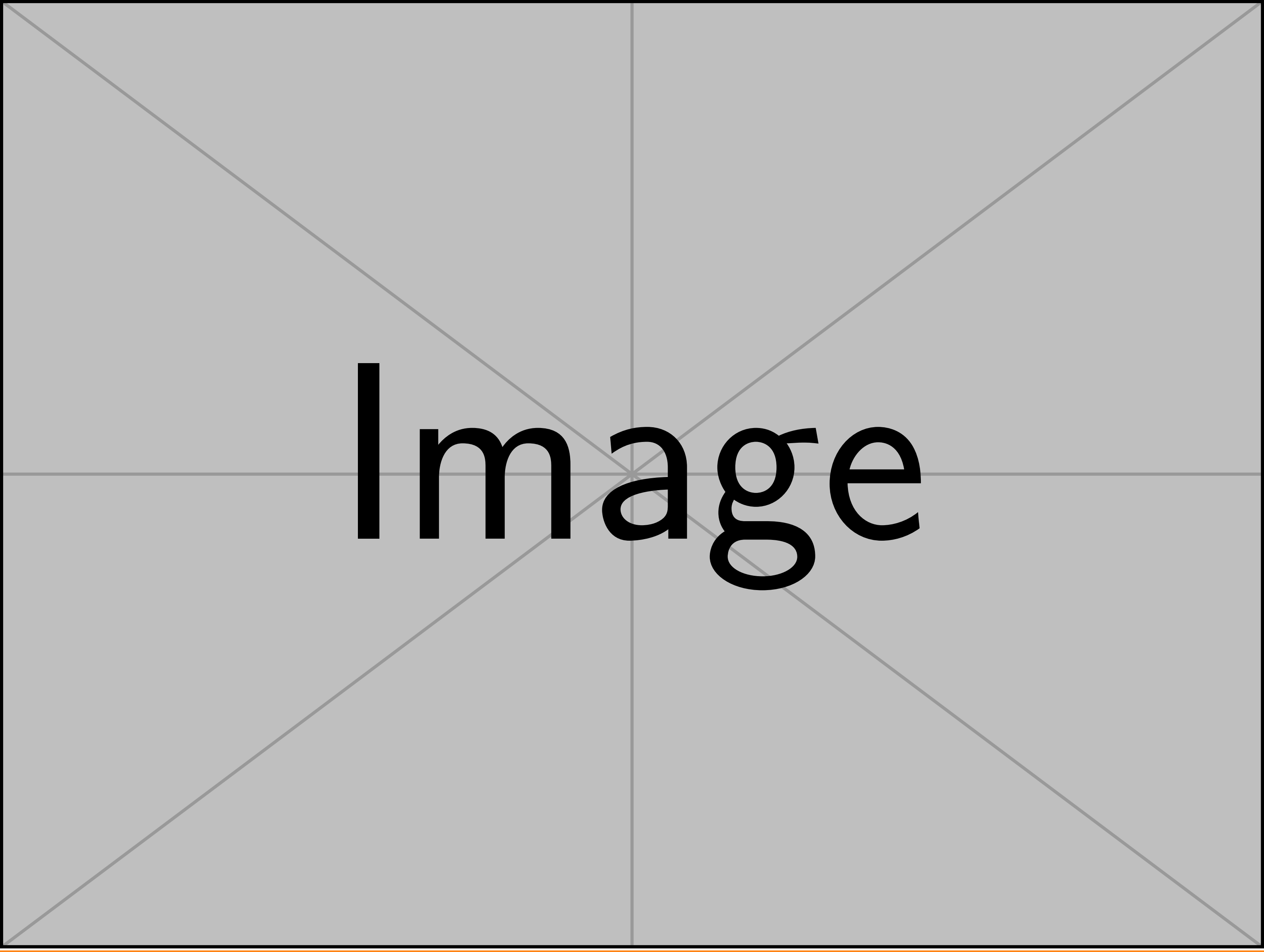

多元函数积分学习题课讲义

曲线积分、曲面积分与场论

作者：自动化钱 2401 石骥弘

目录

第 1 章 曲线积分

1.1 第一类曲线积分

1.1.1 第一类曲线积分的性质

第一类曲线积分，又称对弧长的曲线积分，具有如下性质：

1. $\int_L [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\mathrm{d}s = \int_L f_1(x,y)\mathrm{d}s \pm \int_L f_2(x,y)\mathrm{d}s$
2. $\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s = k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，其中 k 为常数。
3. 若 $L = L_1 + L_2$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

4. 若 L 的弧长为 S，则

$$\int_L \mathrm{d}s = S$$

1.1.2 第一类曲线积分的计算方法

计算第一类曲线积分的主要方法是将曲线用参数方程表示出来，找出曲线所对应的参数方程的区间，将第一类曲线积分化为定积分计算，具体讨论如下：

1. 设函数 $f(x,y)$ 在平面曲线 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leq \beta)$ 上连续，$x'(t), y'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

特别地，若曲线 L 的方程为 $y=y(x)(a\le x\le b)$ 且 $y'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

2. 设函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ 上连续，$x'(t),y'(t),z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

3. 设曲线 L 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)(\theta_1\le\theta\le\theta_2)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

将曲线的极坐标方程化为直角坐标系下关于 θ 的参数方程，即可证明该结论。

1.1.3 利用曲线积分的性质计算

例题 1.1 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，计算 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$。

解

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(2xy+12)\mathrm{d}s=2\oint_L xy\mathrm{d}s+12\oint_L \mathrm{d}s=2\oint_L xy\mathrm{d}s+12a$$

由对称性，知

$$\oint_L xy\mathrm{d}s=0$$

故

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2)\mathrm{d}s = 12a$$

注 习题与考试中遇到的第一类曲线积分，其被积函数和积分曲线往往具有很高的对称性，可以利用这一特点大大简化计算。关于对称性有以下结论：

1. 若曲线 L 关于 $x=0$ 对称，L_1 是 L 在 $x \geq 0$ 的部分，则当 $f(x,y)$ 是关于 x 的偶函数，即 $f(x,y)=f(-x,y)$ 时，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$$

当 $f(x,y)$ 是关于 x 的奇函数时，即 $f(x,y)=-f(-x,y)$ 时，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$$

2. 若曲线 L 关于 $y=0$ 对称，L_1 是 L 在 $y \geq 0$ 的部分，则当 $f(x,y)$ 是关于 y 的偶函数，即 $f(x,y)=f(x,-y)$ 时，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$$

当 $f(x,y)$ 是关于 y 的奇函数时，即 $f(x,y)=-f(x,-y)$ 时，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$$

1.1.4 在直角坐标系下计算第一类曲线积分

例题 1.2 计算

$$I = \int_L x\mathrm{d}s$$

其中 L 为双曲线 $xy=1$ 从点 $(\frac{1}{2},2)$ 至点 $(1,1)$ 的弧段。

解 L 可表示为

$$x=\frac{1}{y},1\leq y\leq 2$$

以 y 为积分变量可得：

$$\begin{aligned}\int_L x\mathrm{d}s&=\int_1^2\frac{1}{y}\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^3}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{1+y^4}\mathrm{d}(\frac{1}{y^2})\\&=-\frac{1}{2}[\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}|_1^2-\int_1^2\frac{1}{y^2}\cdot\frac{2y^3}{\sqrt{1+y^4}}\mathrm{d}y]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\int_1^2\frac{y}{\sqrt{1+y^4}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\mathrm{d}y^2\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

注 本题若以 x 为积分变量则被积函数较为复杂，还需作代换 $x=\frac{1}{y}$，化为以上积分。

1.1.5 利用参数方程计算第一类曲线积分

例题 1.3 计算

$$\int_L y^2\mathrm{d}s$$

其中 L 为摆线的一拱

$$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leq t\leq 2\pi)$$

解

$$
\begin{aligned}
\int_L y^2 \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{[a(t-\sin t)']^2+[a(1-\cos t)']^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{2}a(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}4\sqrt{2}\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u = 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u \\
&= 32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3
\end{aligned}
$$

1.2 第二类曲线积分

1.2.1 第二类曲线积分的性质与计算方法

第二类曲线积分具有如下性质：

性质

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

第二类曲线积分的一般计算方法如下：设函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在有向曲线 Γ 上连续，Γ 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), (\alpha \le t \le \beta)$$

且 $t=\alpha$ 对应起点 A，$t=\beta$ 对应终点 B，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\mathrm{d}t$$
$$\int_\Gamma Q(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\mathrm{d}t$$
$$\int_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

实际上可以认为，第二类曲线积分就是将参数方程代入被积函数后的定积分。

1.2.2 两类曲线积分的联系

设空间有向曲线 Γ 上任意一点 $N(x,y,z)$ 处与 Γ 方向一致的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\cos\gamma=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$$

则

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

1.2.3 利用参数方程计算第二类曲线积分

例题 1.4 计算

$$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$$

其中 Γ 为曲线

$$x=k\theta,y=a\cos\theta,z=a\sin\theta$$

上从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$ 的一段弧。

解

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z&=\int_0^\pi[(k\theta)^2(k\theta)'+a\sin\theta(a\cos\theta)'-a\cos\theta(a\sin\theta)']\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\pi^3k^3-\pi a^2\end{aligned}$$

1.2.4 使用两类曲线积分之间的联系解题

例题 1.5 设 $u(x,y)=x^2-xy+y^2$,L 为抛物线 $y=x^2$ 从原点至点 $A(1,1)$ 的有向弧段，$\mathbf{n}$ 为 L 的切向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的法向量，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 为函数 u 沿法向量 $\mathbf{n}$ 的方向导数，计算

$$\int_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$$

解 设 α 为曲线切线方向与 x 轴正向的夹角，则曲线切线的方向向量可表示为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角后，得到 $\mathbf{n}=(\sin\alpha,-\cos\alpha)$，从而

$$\begin{aligned}\int_L\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s&=\int_L(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)\mathrm{d}s\\&=\int_L\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\\&=\int_L(2x-y)\mathrm{d}y-(2y-x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1[(2x-x^2)\cdot 2x-(2x^2-x)]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

注 关于第二类曲线积分的更多计算技巧，我们会在 Green 公式与 Stokes 公式的相关章节进行讲解。

第 2 章 曲面积分

2.1 第一类曲面积分

设曲面 S 的参数方程为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},(u,v)\in\sigma$$

则 f 在 S 上的第一类曲面积分的计算公式为

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_\sigma f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$\mathbf{r}_u=x_u(u,v)\mathbf{i}+y_u(u,v)\mathbf{j}+z_u(u,v)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v=x_v(u,v)\mathbf{i}+y_v(u,v)\mathbf{j}+z_v(u,v)\mathbf{k}$$

由叉乘的运算公式，可得

$$\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|=\sqrt{(x_uy_v-x_vy_u)^2+(x_uz_v-x_vz_u)^2+(y_uz_v-y_vz_u)^2}$$

特别地，若 S 的方程为 $z=z(x,y),(x,y)\in\sigma$，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_\sigma f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算第一类曲面积分时，可以运用口诀“一投，二代，三微变”。“投”是指

选取合适的坐标面，将曲面投影上去；“代”是指将曲面的表达式或方程代入被积函数进行化简；“微变”是指将原来的积分微元 $\mathrm{d}S$ 变为相应坐标面中的积分微元 $\mathrm{d}\sigma$，具体方法如上。

可以利用对称性简化第一类曲面积分的计算：设 S 关于 xOy 平面对称，S_1 是 S 在 $z \geq 0$ 的部分，则若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数，即 $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$，有

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数，即 $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$，有

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0$$

例题 2.1 计算

$$\iint\limits_{\Sigma} x\sqrt{y^2+z^2}\mathrm{d}S$$

其中，Σ 为 $x = \sqrt{y^2+z^2}$ 与 $x = 1$ 围成的立体表面。

解 设

$$\Sigma_1 : x = \sqrt{y^2+z^2}(0 \leq x \leq 1)$$

$$\Sigma_2 : y^2+z^2 \leq 1, x = 1$$

$$\sigma : y^2+z^2 \leq 1, x = 1$$

则

$$\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} = I_1 + I_2$$

取 yOz 平面为投影面，则

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \sqrt{2}\iint\limits_{\sigma}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_{\sigma}\sqrt{y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

从而原式 $= I_1 + I_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3})\pi$

注 本题的积分区域是“围成的立体表面”，不要遗漏 $x=1$ 处的圆锥底面。

2.2 第二类曲面积分

2.2.1 第二类曲面积分的计算方法

设有向曲面 S 可用显式方程 $z=z(x,y),(x,y)\in\sigma_{xy}$ 表示，则

$$\iint\limits_{S} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分的符号由曲面的法向量 n 与 z 轴的夹角 θ 确定：当 θ 是锐角时，积分的符号取正号；当 θ 是钝角时，积分的符号取负号。同理，当 S 的方程可用 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 给出时，有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{\sigma_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{\sigma_{xz}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

在计算第二类曲面积分时，可运用口诀“一投，二代，三定号”。“投”与“代”的步骤与第一类曲面积分类似，“定号”是指按照上面的方法确定等式右端二重积分的符号。

可以利用被积函数和积分区域的对称性简化第二类曲面积分的计算：若有向曲面 S 关于 xOy 平面对称，S_1 是 S 在 $z\geq 0$ 的部分，且 $R(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数，即 $R(x,y,z)=R(x,y,-z)$，则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

若 $R(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数，即 $R(x,y,z)=-R(x,y,-z)$，则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{S_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注 请注意，两类曲面积分关于对称性的结论恰好相反，这是因为第二类曲面积分的积分区域是**有向曲面**。

例题 2.2 计算

$$\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧位于 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分

解 被积函数是关于 z 的奇函数，积分区域关于平面 xOy 对称，设

$$S_1 : x^2+y^2+z^2=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$$

于是

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint\limits_{\sigma_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

2.2.2 两类曲面积分的联系

设有向曲面 S 指定侧的单位法向量 e_n 为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{S}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R$$

例题 2.3 计算

$$\iint\limits_{\Sigma}(f+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $f(x,y,z)$ 连续，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧。

解

$$\mathrm{e}_n=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(f+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(f+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Sigma}[\frac{1}{\sqrt{3}}(f+x)-\frac{1}{\sqrt{3}}(2f+y)+\frac{1}{\sqrt{3}}(f+z\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

注 如果第二类曲面积分的被积函数满足：

1. 含有任意函数 $f(x,y,z)$；
2. 不经处理需要进行 3 次投影。

那么可以考虑将其化为第一类曲面积分进行计算。

例题 2.4 计算

$$I=\iint\limits_S (x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, z\geq 0$ 的上侧。

解 曲面 S 上点 (x,y,z) 处的法向量 $\mathrm{e}_n=(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R})$，从而原式可化为第一类曲面积分：

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_S [\frac{x}{R}(x^2-x)+\frac{y}{R}(y^2-y)+\frac{z}{R}(z^2-z)]\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{R}\iint\limits_S [x^3+y^3+z^3-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{R}\iint\limits_S (x^3+y^3+z^3)\mathrm{d}S-R\iint\limits_S \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

积分区域关于 yOz, zOx 平面对称，x^3, y^3 都是奇函数，从而有

$$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}S=\iint\limits_S y^3\mathrm{d}S=0$$

故

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S} z^3 \mathrm{d}S - 2\pi R^3 \\
&= \iint\limits_{\sigma_{xy}} (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\pi R^3 \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \mathrm{d}r - 2\pi R^3 \\
&= \frac{\pi R^4}{2} - 2\pi R^3
\end{aligned}
$$

注 本题也可以使用 Gauss 公式进行求解。

第 3 章 Green 公式

3.1 Green 公式的概念与简单应用

定理 3.1 (Green 公式) 设平面有界闭区域 σ 由一条分段光滑的简单闭曲线 C 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 σ 上有连续的一阶偏导数，则下式成立：

$$\iint\limits_{\sigma}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{+C}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)$$

其中 $+C$ 表示曲线 C 的正向。

在应用 Green 公式计算第二类曲线积分时，应当注意公式左端二重积分中各函数对哪个自变量求偏导，可以用“兔子不吃窝边草”来记住这一点：公式右端与 $\mathrm{d}x$“相乘”的函数 $P(x,y)$ 在公式左端对 y 求偏导，公式右端与 $\mathrm{d}y$“相乘”的函数 $Q(x,y)$ 在公式左端对 x 求偏导。

也可以借助行列式来记忆：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & P\\ \frac{\partial}{\partial y} & Q\end{vmatrix}$$

例题 3.1 计算

$$I=\oint_{L}(-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(2xy+x^2-x)\mathrm{d}y$$

其中 L 是以 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的正方形的正向边界。

解 本题若直接代入求解，共有四部分积分组成，比较麻烦，应用 Green 公式可以大大简化计算：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\sigma} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\sigma} (-2y - 2x + 1 + 2x + 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3.2 平面第二类曲线积分与路径无关的等价条件

定理 3.2

设区域 $\sigma \in \mathrm{R}^2, P, Q, \in C(\sigma), A, B \in \sigma$，则下列四个命题等价：

1. 沿 σ 内任一分段光滑简单闭曲线 C，都有

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

2. 线积分

$$\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

的值在 σ 内与路径无关

3. 被积表达式

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

在 σ 内是某一二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

4. 在 σ 内，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

♡

例题 3.2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导数，计算曲线积分

$$\int_L \frac{1 + y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y$$

L 为从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段。

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{y^2}[y^2 f(xy) - 1] + \frac{x}{y^2}[y^3 f'(xy)] \\ &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{y \cdot [2yf(xy) + xy^2 f'(xy)] - [1 + y^2 f(xy)]}{y^2} \\ &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy)\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

原曲线积分与路径无关。重新选取路径 L_1 为双曲线 $xy=2$ 从 $x=3$ 至 $x=1$ 的那一段，则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_3^1 [\frac{1+(\frac{2}{x})^2 f(2)}{\frac{2}{x}}\mathrm{d}x + \frac{x}{(\frac{2}{x})^2}[(\frac{2}{x})^2 f(2)-1]\mathrm{d}(\frac{2}{x}) \\
&= \int_3^1 (\frac{x}{2}+\frac{2}{x}f(2)-\frac{2}{x}f(2)+\frac{x}{2})\mathrm{d}x \\
&= \int_3^1 x\mathrm{d}x \\
&= -4
\end{aligned}
$$

注 由原曲线积分与路径无关，可以重新选取恰当的路径化简被积表达式。

3.3 补充适当的曲线使积分曲线闭合

积分路径通常不是闭合曲线，这时我们不能直接运用 Green 公式，这时我们需要填补一段较为简单的路径使之成为闭合曲线。

例题 3.3 设

$$I = \int_L (\mathrm{e}^{x^2} - y^3)\mathrm{d}x - (x+\cos y)\mathrm{d}y$$

其中 L 为 $y=k\cos x (k>0)$ 上从 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的一段弧。问 k 取何值时，I 取极值，是极大值还是极小值？

解 设 L_1 是从 $(\frac{\pi}{2},0)$ 到 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 的直线，则

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{L+L_1} - \int_{L_1} \\
&= \iint\limits_{\sigma_{xy}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{L_1} (\mathrm{e}^{x^2} - y^3)\mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_{\sigma_{xy}} (1-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{k\cos x} (1-3y^2)\mathrm{d}y + A \\
&= 2k - \frac{4}{3}k^3 + A
\end{aligned}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}k} = 2 - 4k^2 = 0$$

得驻点 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}k^2} = -8k = -4\sqrt{2} < 0$$

从而当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 I 取得极大值。

3.4 积分区域内存在奇点的情形

有时，积分曲线所围区域内存在奇点，这时我们不能直接使用 Green 公式。可以通过代入积分曲线表达式化简被积表达式消去奇点，或通过在奇点附近“挖洞”来处理这种情况。

例题 3.4 计算

$$I = \oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 的正向。

解 积分曲线所围成的区域内有奇点 $(x,y)=(0,0)$，因此直接使用 Green 公式是错误的。应当先将曲线 L 的表达式代入被积表达式：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a^2}\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a^2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{a^2}\cdot(-2)\cdot\pi a^2 \\
&= -2
\end{aligned}
$$

例题 3.5 计算

$$
I=\oint_L\left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2}-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{x+y}{4x^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]\mathrm{d}y
$$

其中 L 为 $x^2+y^2=4$ 的正向。

解 本题的被积表达式比较复杂，我们可以先按照分母的形式将其分为两部分：

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y \\
I_2 &= \oint_L -\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

容易验证，两个积分都满足条件

$$
\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}
$$

对于 I_1，取 $L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$，顺时针方向，设 σ_{xy} 为 L 与 L_1 围成的区域，则由 Green 公式，有

$$\begin{aligned}
I_1 &= \oint_{L+L_1} - \oint_{L_1} \\
&= \iint\limits_{\sigma_{xy}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\sigma}(1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\varepsilon^2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

同理，对于 I_2，取 $L_2: (x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$，顺时针方向，从而有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \oint_{(} L+L_2) - \oint_{L_1} \\
&= \iint\limits_{\sigma_{xy}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{L_2} \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_2} -y\mathrm{d}x + (x-1)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\sigma}(1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

所以

$$I = I_1 + I_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$$

注 像这样，奇点的形式是被积表达式分母 $u(x,y)=0$ 的情况，可以选取包含奇点的闭合曲线 $u(x,y)=C$ 作为“洞”，这样不仅避开了奇点，而且可以将被积表达式的分母化为常数，大大简化计算。

3.5 全微分求积问题与全微分方程

3.5.1 全微分求积问题

给定两个二元函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由平面第二类曲线积分与路径无关的等价条件知，存在函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。求解这样一个 $u(x,y)$ 的问题，称为**全微分求积问题**，函数 $u(x,y)$ 也称作全微分 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的**一个原函数**。

与一元函数的原函数类似，全微分的原函数 $u(x,y)$ 也有无穷多个，它们之间仅相差一个常数。

通常可以使用线积分法或偏积分法求全微分的原函数，现分别说明如下：

例题 3.6 计算 $(2x+2y)\mathrm{d}x+(2x+3y^2)\mathrm{d}y$ 的原函数。

解 容易验证上式是全微分，使用线积分法求积，将 $(0,0)$ 至 (x,y) 的路径分为从 $(0,0)$ 到 $(0,x)$ 和从 $(0,x)$ 到 (x,y) 的折线段：

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{x,y}(2x+2y)\mathrm{d}x+(2x+3y^2)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x (2x+0)\mathrm{d}x+\int_0^y (2x+3y^2)\mathrm{d}y \\
&= x^2+2xy+y^3
\end{aligned}
$$

从而原函数的一般形式为

$$u(x,y)=x^2+2xy+y^3+C$$

例题 3.7 计算 $\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 的原函数。

解 使用偏积分法求积。对 $P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ 作关于 x 的偏积分，得

$$u(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\arctan\frac{x}{y}+\phi(y)$$

注意，这里实际上就是将 $P(x,y)$ 关于 x 求不定积分，但是将不定积分中的任意常数 C 替换为关于 y 的任意函数 $\phi(y)$

对 y 作 $u(x,y)$ 的偏导，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(y)-\frac{x}{x^2+y^2}$$

由全微分的性质，知

$$\phi'(y)-\frac{x}{x^2+y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

从而 $\phi(y)=C$ ，故

$$u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}+C$$

例题 3.8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，计算曲线积分

$$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

L 为从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的任意分段光滑曲线（不含 $y=0$ 的点）。

解

请读者注意本题与例题 3.2 的区别：本题的条件是 $f(x)$ 连续，但不一定可微，因此不能直接使用 Green 公式，但我们可以求解被积表达式的原函数：

令 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，对 $P(x,y)$ 求关于 x 的偏积分：

$$u(x,y)=\int\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x=\frac{x}{y}+F(xy)+\phi(y)$$

对 $u(x,y)$ 求关于 y 的偏导：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(y)-\frac{x}{y^2}+xf(xy)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$$

从而 $\phi(y)=C$，即

$$u(x,y)=\frac{x}{y}+F(xy)+C$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y&=u(x,y)\Big|_{(3,\frac{2}{3})}^{(1,2)}\\&=(\frac{1}{2}+F(2))-(\frac{9}{2}+F(2))\\&=-4\end{aligned}$$

3.5.2 全微分方程

如果存在函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，那么形如

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

的微分方程称作**全微分方程**，也称**恰当方程**

如果 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数是 $u(x,y)$，那么 $u(x,y) = C$ 就是全微分方程 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 的通解。

第 4 章 Gauss 公式与 Stokes 公式

4.1 Gauss 公式

4.1.1 Gauss 公式的定义与简单应用

定理 4.1 (Gauss 公式) 设空间有界闭区域 V 由分片光滑的闭曲面 S 围成，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^{(1)}(V)$，则

$$\iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}) = \oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 的法向量指向外侧。

例题 4.1 计算

$$I=\oiint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是由 $x^2+y^2=1,z=0,z=3$ 所围柱体的外侧。

解

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_V (1+1+1)\mathrm{d}V\\&=3\cdot 3\cdot\pi\\&=9\pi\end{aligned}$$

例题 4.2 计算曲面积分

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})) + y^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [\frac{1}{y}f(\frac{y}{z}) + z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是由 $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成立体表面的外侧，f 是可导函数。

解

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V [2x + \frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z}) + 2y - \frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z}) + 2z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\phi\int_1^2 r\cos\phi\cdot r^2\sin\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{15}{4}\pi
\end{aligned}$$

4.1.2 补充适当曲面使积分曲面闭合

例题 4.3 计算

$$I = \iint\limits_S (x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, z\geq 0$ 的上侧。

解 在例 2.4 中，我们运用两类曲面积分之间的联系，将原积分转化为第一类曲面积分。现在我们使用 Gauss 公式来求解本题。

设 $\Sigma_1 : x^2+y^2 \le R^2, z=0$，方向向下，则

$$
\begin{aligned}
I &= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} \\
&= \iiint\limits_{V} (2x+2y+2z-3)\mathrm{d}V - \iint\limits_{\Sigma_1} (z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint\limits_{V} [2(x+y+z)-3]\mathrm{d}V - 0
\end{aligned}
$$

由对称性，

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{V} (2z-3)\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^{R} (2r\cos\theta\cos\phi - 3)R^2 \sin\phi \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi R^4}{2} - 2\pi R^3
\end{aligned}
$$

例题 4.4 计算曲面积分

$$
I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
$$

其中 Σ 为椭圆抛物面 $z=4-(x^2+4y^2)(z\ge 0)$ 的上侧。

解 本题的被积表达式在 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 处有奇点，因此不能直接选取 xOy 平

面使积分曲面闭合。我们可以在原点处作一小球面来绕过原点：设曲面

$$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$$
$$\Sigma_2 : x^2+4y^2\le 4, x^2+y^2\ge\varepsilon^2, z=0$$

方向均取下侧，则

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}\\&=I_1-I_2-I_3\end{aligned}$$

$$I_1=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V=0$$

计算 I_2 时，我们可以先将积分曲面方程 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 代入被积表达式消去奇点，然后补充底面 $x^2+y^2=\varepsilon^2$：

$$\begin{aligned}I_2&=\varepsilon^{-3}\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\varepsilon^{-3}\iiint\limits_V(1+1+1)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\sigma_{xy}}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-3\varepsilon^{-3}\cdot\frac{2}{3}\pi\varepsilon^3=-2\pi\end{aligned}$$

$$I_3=\iint\limits_{\sigma_{xy}}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以

$$I = I_1 - I_2 - I_3 = 2\pi$$

4.2 Stokes 公式

定理 4.2 (Stokes 公式) 设 P, Q, R 是区域 G 上的具有连续一阶偏导数的函数，C 为 G 内一条分段光滑的有向简单闭曲线，有向曲面 S 完全位于 G 内且以 C 为边界，C 的方向与 S 的法向量符合右手螺旋法则，则

$$\oint\limits_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同样可以利用行列式辅助记忆：

$$\nabla \times \mathbf{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathbf{k}$$

例题 4.5 设空间曲线 C 是以 $(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0)$ 为顶点的正方体与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 相交的折线，计算

$$I = \oint_C (z^2-y^2)\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\mathrm{d}y + (y^2-z^2)\mathrm{d}z$$

其中 C 的方向为向 z 轴负向看去的逆时针方向。

解 该折线围成了一个六边形，如果直接计算非常麻烦，可以考虑运用 Stokes 公

式，将曲线积分化为曲面积分。根据右手螺旋法则，取 S 的方向指向上侧：

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint\limits_S (y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

再将第二类曲面积分化为第一类曲面积分：

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint\limits_S (y+z, z+x, x+y)\cdot \mathrm{e}_n \mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S [(y+z)+(z+x)+(x+y)]\mathrm{d}S \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_S \mathrm{d}S \\
&= 2\sqrt{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

4.3 简单场论与其在物理中的应用

定义 4.1 (散度)

设区域 G 内有一向量场 $\mathbf{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，其中 P,Q,R 在 G 内具有连续的一阶偏导数，则称

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 的散度，记作 $\mathrm{div}\mathbf{A}$

使用 Nabla 算子

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$$

则散度的表达式可以记作

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}$$

♣

散度有如下运算法则：

1. $\mathrm{div}(C\mathbf{A})=C\mathrm{div}\mathbf{A}$
2. $\mathrm{div}(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\mathrm{div}\mathbf{A}\pm\mathrm{div}\mathbf{B}$
3. $\mathrm{div}(u\mathbf{A})=u\mathrm{div}\mathbf{A}+\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{A}$

如果一个向量场的散度处处为 0，那么称它为**无源场**。

定义 4.2 (旋度)

设区域 G 内有一向量场 $\mathbf{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，其中 P,Q,R 在 G 内具有连续的一阶偏导数，则称

$$(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$$

为向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度，记作 $\mathrm{rot}\mathbf{A}$

使用 Nabla 算子，旋度的表达式可以记作

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

♣

旋度具有如下运算法则：

1. $\nabla \times (C\mathbf{A}) = C\nabla \times \mathbf{A}$
2. $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B}$
3. $\nabla \times (u\mathbf{A}) = u(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla u) \times \mathbf{A}$

旋度处处为 0 的场称为**无旋场**

场论中的概念在物理中应用较多，下面将以电磁学为例进行讨论。

注 以下讨论将仅限于真空中的情形。

电磁学中著名的**麦克斯韦方程组**的微分形式如下：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

与之对应的积分形式如下：

$$
\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} &= 0 \\
\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \\
\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

使用 Gauss 公式和 Stokes 公式能够证明两种形式是等价的。微分形式和积分形式的麦克斯韦方程组分别描述了微观和宏观状态下的电磁场，在电磁学理论中都具有重要的意义。

公式一的积分形式是我们所熟知的**高斯定律**，公式左端对电场 $\mathbf{E}$ 的闭合曲面积分可以使用 Gauss 公式变为对电场强度散度的三重积分，公式右端的电荷量 Q 可以写成对电荷体密度 ρ 的三重积分。由于 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 和 $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 对空间中任一区域的积分都相等，因此它们应当是相等的，这就得到了**高斯定律**的微分形式。

公式二是**高斯磁定律**，它表明空间磁场是**无源场**，也就是说，所谓“磁单极

子”是不存在的。

公式三是**法拉第电磁感应定律**，其积分形式的含义如下：一变化的磁场通过一闭合回路所围区域的磁通量的变化率（公式右端），是其在该闭合回路中产生的**感生电动势**的相反数（公式左端），这与我们中学所学的结果是一样的。使用 Stokes 公式可以导出公式三的微分形式，它表明

1. 静电场是无旋场（$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0$），从而也是有势场，可以定义静电场的**电势**。
2. 由变化磁场产生的**感生电场**并非无旋场。

注 实际上，公式三的积分形式既描述了由磁场变化引起的**感生电动势**，也描述了由导体在磁场中作切割磁感线运动的**动生电动势**，它们都可以概括为闭合回路中磁通量的变化。

公式四是**麦克斯韦-安培定律**，其积分形式右端由两项组成：$\mu_0 I$ 和 $\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$。如果后一项为 0，那么公式四变为

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}=\mu_0\sum_{i=0}^{n} I_i$$

即：空间中磁场强度绕一闭合路径的积分，正比于通过该路径所围成曲面的电流之和，这就是**安培环路定律**，它说明电流（恒定的或变化的）可以产生磁场。

公式四后一项 $\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$ 称为**麦克斯韦修正项**，它说明变化的电场也能产生磁场。将公式三与公式四相结合，可以看出变化的磁场与变化的电场能够相互激发，从而在空间中交替产生，形成**电磁波**。