西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期中考试模拟试题（三）答案

一. 单项选择题（共5道小题，每小题3分，共15分）

1. $x \to 0$时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是(D).

A.无穷小　B. 无穷大　C. 有界但非无穷小　D. 无界但非无穷大

2. 设$f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,则下列$f(x)$在$x=0$处(C).

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续

D. 以上结论都不对

3. 已知$f(x)$是奇函数且$x<0$时单增，则当$x>0$时，$f(x)$是(A).

A.单增

B. 单减

C. 可能单增，可能单减

D. 既非单增，也非单减

4. 设$f(x), g(x)$都在$x=a$处取得极大值，则$F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$处(**D**).

A. 必取得极大值

B. 必取得极小值

C. 不可能取得极值

D. 是否取得极值不能确定

5. 设$f(x)$在$x=a$的某邻域内有定义，则$f(x)$在$x=a$可导的一个充分条件是(D).

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

二. 填空题（共5道小题，每题4分，总计20分）

1.设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，则$f(\ln x)$的定义域为 $\underline{\quad [1,e] \quad}$.

2.已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,则$a=$ $\underline{\quad \ln 3 \quad}$.

3.设$f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$，当$a=\underline{\ e^2\ }$,$b=\underline{\ e^2-1\ }$ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

4.函数$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$的第一类间断点$x=$ __0__，第二类间断点$x=$ __1__.

5.已知$x \to 0$时,$\sin x$与$\ln(1+ax)$是等价无穷小，则$a=$ __1_____.

三．计算题（共5道小题，每题7分，总计35分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

解 方法1

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-2x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{\cos x}=0$$

方法2

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+o(x)\right)\left(x+o\left(x^2\right)\right)-x^2-x}{\frac{1}{2}x^2}=0$$

2.设$y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$, 求$y'$.

解

$$y'=2\sin\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cos\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\cdot\frac{-\frac{1}{x}x-(1-\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$$

3.设函数$y=y(x)$由$\begin{cases} x\text{-}e^t\sin t+1=0 \\ y=t^3+2t \end{cases}$确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\frac{6te^t(\sin t+\cos t)-(3t^2+2)e^t\cdot 2\cos t}{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

4.方程$\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$表示平面上一条曲线，试求该曲线在$x=0$处的切线方程和法线方程.

解 方程两边对x求导，得：

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{y}y'=0$$

把$x=0,y=e$代入，得$y'(0)=e(1-e)$

故切线方程为：$y-e=e(1-e)x$

法线方程为：$y-e=\dfrac{1}{e(e-1)}x$

5.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$.

解

$$\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\le\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3}{2}$$

5.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n+1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}.$$

四．（本题9分）设$n\in N_+$，讨论函数$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处的连续性与可导性及$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 $n=1$时，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

$n=2$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$n\geq 3$时，$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

四. （本题9分）设$n\in N_+$，讨论函数$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处的连续性与可导性及$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

解

$n\geq 3$时，$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)=0=f'(0)$$

所以，$f'(x)$在$x=0$处连续.

五. 证明下列各题（共3道题，每小题7分，共21分）

1.设$x_1 < -1$，$x_{n+1} + \sqrt{1-x_n} = 0$, 证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 方法1(利用柯西收敛原理） 显然，$x_n < 0$

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{1-x_{n-1}} - \sqrt{1-x_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}} + \sqrt{1-x_n}}$$

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \frac{1}{2}\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2 - x_1\right|$$

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - x_{n+p-1}\right| + \left|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\right| + \cdots + \left|x_{n+1} - x_n\right|$$

$$\le \left(\frac{1}{2^{n+p-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left|x_2 - x_1\right| \le \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \left|x_2 - x_1\right|$$

五. 证明下列各题（共3道题，每小题7分，共21分）

1.设$x_1 < -1$, $x_{n+1} + \sqrt{1 - x_n} = 0$, 证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 方法1(利用柯西收敛原理) 显然，$x_n < 0$

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\le \left(\frac{1}{2^{n+p-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)|x_2 - x_1| \le \frac{1}{2^{n-2}}|x_2 - x_1|$$

由柯西收敛原理知，数列收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

等式两端取极限，得：$A=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

五. 证明下列各题（共3道题，每小题7分，共21分）

1.设$x_1 < -1$, $x_{n+1} + \sqrt{1-x_n} = 0$, 证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 方法2　　直接证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$\left|x_{n+1} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| = \left|-\sqrt{1-x_n} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{1-x_n}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|1+\sqrt{5} - 2\sqrt{1-x_n}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2+2\sqrt{5}+4x_n}{1+\sqrt{5}+2\sqrt{1-x_n}}\right| \le \frac{2}{5}\left|x_n - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|$$

$$\cdots \le \left(\frac{2}{5}\right)^n \left|x_1 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| \quad \because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0, \therefore \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

2. 证明不等式：当$e < x_1 < x_2$时，有$\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_1}$.

证明 令$f(x) = x\ln x$

$$f'(x) = 1 + \ln x > 0 \left(\because x > e\right)$$

$\therefore$当$e < x_1 < x_2$时，有$x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$.

即 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_1}$.

3.设$f\in[0,1]$，f在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{1}{3}$.

证明：存在点$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证明　令$F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$

$$\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^2\quad\left(0<\xi<\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^2\quad\left(\frac{1}{2}<\eta<1\right)$$

即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.