西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期末模拟题（一）

一. 单选题（每小题3分，共15分）

1. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+c}{x^2+2}=1$(其中$a,b,c$为常数),则（　）.

A. $a=0,b\in R$　B. $a=0,b=1$　C. $a\in R,b=1$　D　$a\in R,b\in R$

2. 若函数$f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$皆可导, 且有$f(x)<g(x)$,则必有（ ）

A.　$f(-x)>g(-x)$　　B　$f'(x)<g'(x)$

C.　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　D.　$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

3. 函数$f(x)$的一个原函数是$(x-2)e^{x}$, 则$f'(x+1)=$( )

A. xe^{x} B. xe^{x+1} C.$(x+1)e^{x+1}$ D.$(x+1)e^{x}$

4. 下列广义积分中发散的是( )

A.$\int_{0}^{1}\ln x dx$ B.$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{2}x}dx$ C.$\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$ D.$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\cos x}$

5. 设$f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$, $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$, 则$F(x)$在$x=0$处( )

A. 不连续 B. 连续不可导 C. 可导且$F'(0)\neq 0$ D. 可导且$F'(0)=0$

二. 填空题（每小题3分，共15分）

1. 已知函数$y = f(x)$由参数方程为方程$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$确定

则曲线$y = f(x)$在$t = 2$处的切线方程为____.

2. 设$[x]$表示不超过x的最大整数, 则定积分$\int_0^{2018}(x-[x])dx = $____.

3. 已知$y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$是某二阶非齐次线性微分方程的3个解, 则该微分方程的通解是_____.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ ______.

5. 设 $f(x)=(x-1)\ln(2-x)\ (x<2)$, 则 $f(x)$ 的最大值点 x ______.

三. 计算题（每小题3分，共15分）

1. 计算积分 $\int\frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx.$

2. 计算积分 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt.$

3. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx.$

四. 解答题（8分）

求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}(x-3)y^4=0$的通解.

五. 解答题（10分）求微分方程组$\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -5\\ 6 & 4 & -9\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}x$的通解.

六. 应用题(10分) 求曲线$y=3(1-x^2)$与x轴围成封闭图形绕直线$y=3$旋转一周所得旋转体的体积.

七. 解答题(9分) 对t取不同值讨论函数$f(x)=\dfrac{1+2x}{2+x^2}$在区间$[t,+\infty)$上是否有最大值或最小值？若存在最大值或最小值，则求出相应的最大值和最大值点，或最小值和最小值点.

八. 证明题(9分).设$f'(x)$是连续函数, $F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$,

证明: $F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$

九. 证明题(9分).设函数$f(x)$在闭区间[0,1]上具有连续的导数, 且$f(0)=f(1)=0$

证明:(1)$\forall t\in R,\int_0^1 xf(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$;

(2)$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$,

等号当且仅当$f(x)=A(x^3-x)$时成立，其中A为常数.