期中考试模拟题（六）参考答案 2022.11

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D 2.A 3. C 4. B 5. C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{(2x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$; 2. 2; 3. 1/6; 4. $\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}$; 5. $\frac{2}{3}$

三、计算(每小题 8 分，共 48 分)

1. $y'=\left(e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x\right)\arctan\sqrt{x^2-1}+e^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$

$$=2x\cos x^2 e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$$

2. 该函数的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$. 又$f''(x)=-\frac{8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$,

所以,当 $x=0$, 6 时, $f''(x)=\infty$; 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,6)$ 时, $f''(x)<0$;

当 $x\in(6,+\infty)$ 时, $f''(x)>0$. 由此, 将该曲线 $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ 的凹凸性与拐点列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$+$
$f(x)$	凸		凸	凸	凸	拐点 (6,0)	凹

凹区间为$(6,+\infty)$，拐点为$(6,0)$ 注意：点 (0,0)不是该曲线的拐点.

3. 由条件易见 $c\neq 0$. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c}$ 由拉格朗日定理，有$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$.其中 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间,那么 $\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}$. 于是, $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$, 故 $c=\frac{1}{2}$.

4. 令 $y=1-x$, 有$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2 y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi y}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上连续, 因此定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$, 就可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

5. 由于$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x}{2+x^2-\mathrm{e}^{tx}}=\begin{cases}\frac{x}{2+x^2}, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}$

当 $x>0$ 时, $f'(x)=0$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$; 而当 $x=0$ 时, 因为

中国大学MOOC

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{0-0}{x-0}=0,\ f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{x}{2+x^2}-0}{x-0}=\frac{1}{2}\neq f'_+(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 综上所述, $f'(x)=\begin{cases}\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}, & x<0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

6. 方程 $te^y=y$ 两边对 t 求导, 得 $e^y+te^y\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dt}$, 整理得 $\frac{dy}{dt}=\frac{e^y}{1-y}$. 由 $x=t^2+2t$,

得 $\frac{dx}{dt}=2t+2$. 所以$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^y}{2(1-y)(t+1)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{e^y\frac{dy}{dt}(t+1)(1-y)-e^y\left[(1-y)-(t+1)\frac{dy}{dt}\right]}{4(t+1)^3(1-y)^2}$$

又 $y|_{t=0}=0,\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1$, 于是 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{4}$.

四、(I) 用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界.由$0<x_1<\pi$, 得$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$; 设 $0<x_n<\pi$, 则$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$; 所以 (x_n) 单调下降且有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.记 $a=\lim x_n$, 由 $x_{n+1}=\sin x_n$ 得$a=\sin a$.所以 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(II) 因为$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

又由 (I) $\lim x_n=0$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

五、(1) 任给非零 $x\in(-1,1)$, 由拉 格朗日中值定理得$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ $(0<\theta(x)<1)$ 因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号, 不妨 设 $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 严格 单增, 故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 证法一 由泰勒公式得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$,其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

所以 $xf'(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$,

从而 $\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi)$由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$. $\lim\limits_{x\to0}f''(\xi)$

$=\lim\limits_{\xi\to0}f''(\xi)=f''(0)$. 故 $\lim_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证法二 对于非零 $x\in(-1,1)$, 由拉格朗日中值定理得$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$, $(0<\theta(x)<1)$ 故 $\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$, 而$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$. 故 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$

中国大学MOOC