第一章 质点运动学

预备知识：微积分，矢量代数，国际单位制（SI）

1-1 质点运动学的基本概念

一、质点 质点系 刚体

理想模型

- 质点：
  - 具有一定的质量
  - 无大小与形状的空间几何点
- 质点系 —— 若干质点的集合体
- 刚体 —— 大小、形状的变化可以忽略不计

对实际物体有条件的、合理的抽象描述

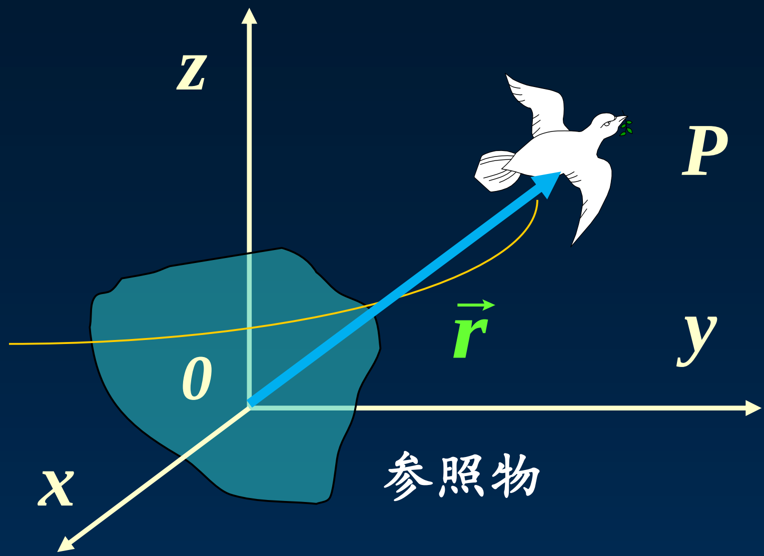
描述物体的相对性
描述物体的近似性

二、参照系

- **参照物：**

  选取的任意性， 运动的相对性

- **参照系：** 参照物 + 坐标系 + 时钟
  - 直角坐标系
  - 自然坐标系
  - 极坐标系 ……..



三、确定质点位置的常用方法

1. 直角坐标法 $P(x, y, z)$

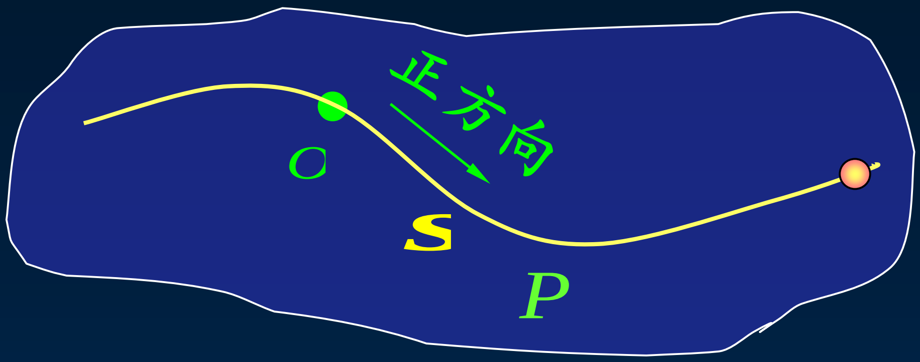
2. 位矢法（质点位置由位置矢量描述）

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

大小：$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向：$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}}$

3. 自然坐标法（用于运动轨迹已知的质点）



说明 自然坐标 S 是代数量

4. 运动学方程(函数)

位矢法 $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

直角坐标 $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$

自然坐标 $s = f(t)$

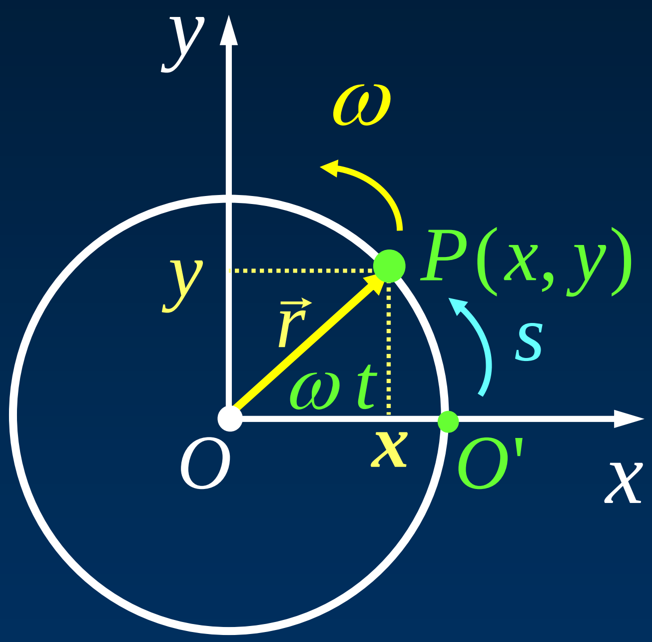
物理意义

- 描述物体运动状态——速度、加速度
- 运动叠加（合成）原理
- 确定物体运动轨迹 —— 轨迹方程

例1： 一质点作匀速圆周运动，半径为 r，角速度为 ω。

求： 用直角坐标、位矢、自然坐标表示的质点运动学方程。

解： 以圆心 O 为原点。建立直角坐标系 OXY，O'点为起始时刻，设 t 时刻质点位于 $P(x,y)$，用直角坐标表示的质点运动学方程为



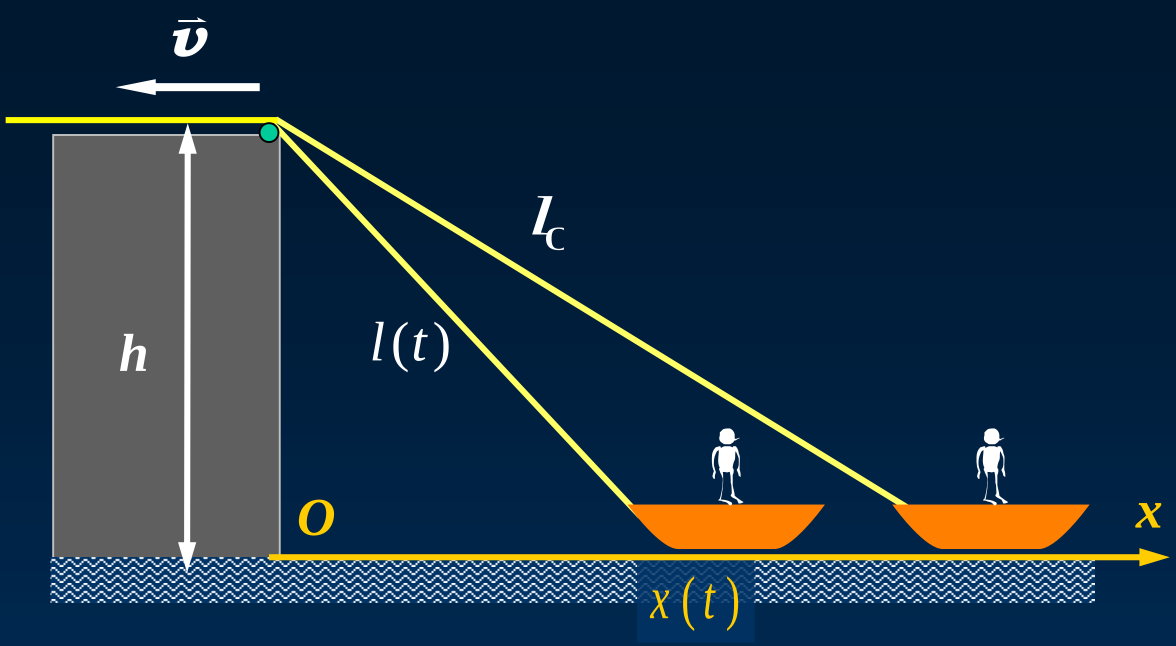
$$x = r\cos\omega t,\quad y = r\sin\omega t$$

位矢表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\omega t\vec{i} + r\sin\omega t\vec{j}$$

自然坐标表示为 $\quad s = r\omega t$

例2：如图所示，以速度v用绳跨一定滑轮拉湖面上的船，已知绳初长l_0，岸高h



求：船的运动方程

解：取坐标系如图

依题意有 $l(t)=l_0-vt$

坐标表示为 $x(t)=\sqrt{(l_0-vt)^2-h^2}$

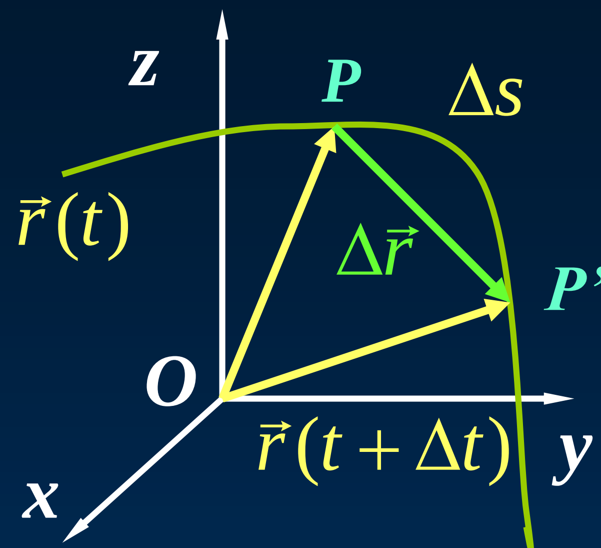
说明

质点运动学的基本问题之一，是确定质点运动学方程。为正确写出质点运动学方程，先要选定参考系、坐标系，明确起始条件等，找出质点坐标随时间变化的函数关系。

1-2 位移 速度 加速度

一、位移（Displacement vector）

$$\overrightarrow{pp'} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$$



- $\Delta\vec{r}$反映了物体运动中位置（距离与方位）的变化。
- 讨论：

1. 直角坐标系中

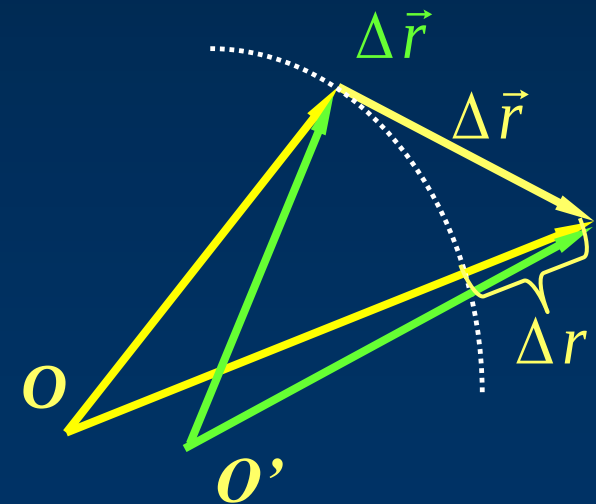
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

2. 位移与参照物位置的变化无关

3. $\left|\Delta\vec{r}\right|$ 与 Δr 的区别

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right|$$

$$\Delta r = \left|\vec{r}(t+\Delta t)\right| - \left|\vec{r}(t)\right|$$



单选题 1分

设置

一质点以半径R作匀速圆周运动，以圆心为原点，半个周期内质点位移的大小__________，位矢大小的增量为__________。

A $|\Delta\vec{r}| = \Delta r = 0$

B $|\Delta\vec{r}| = 2R \quad \Delta r = 0$

C $|\Delta\vec{r}| = \Delta r = 2R$

D $|\Delta\vec{r}| = 0 \quad \Delta r = 2R$

提交

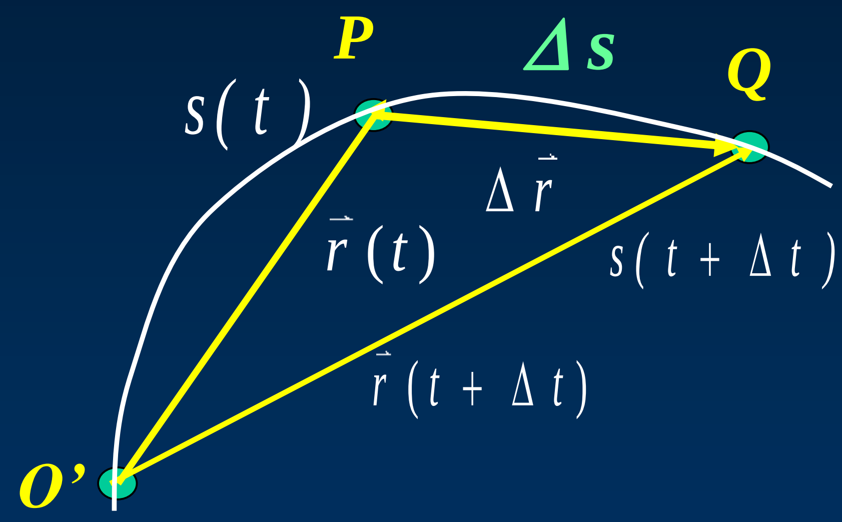
例：一质点以半径R作匀速圆周运动，以圆心为原点，半个周期内质点位移的大小 $|\Delta\vec{r}| = 2R$ ，位矢大小的增量为 $\Delta r = R - R = 0$ 。

4. 自然坐标系

$$\boxed{s = s(t)}$$

$P : s(t), Q : s(t+\Delta t)$

路程 $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$



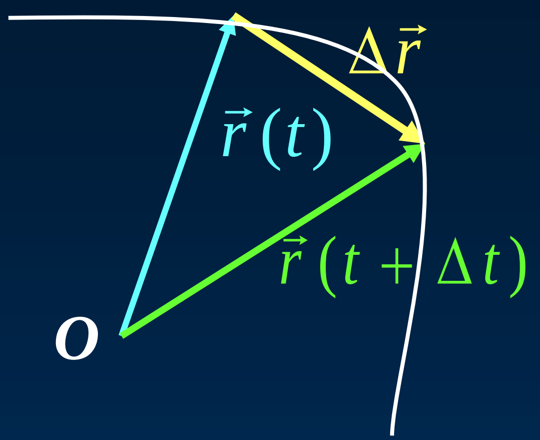
5. 位移是矢量（有大小，有方向），路程是标量

$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$ 当 $\Delta t \to 0$时，有 $|d\vec{r}| = dS$

6. 位移仅与始、终两点有关，而与运动的细节无关

二、速度（描述质点位置变化快慢和方向的物理量）

1. 平均速度 $\Delta t \Rightarrow \Delta\vec{r}$



$$\langle\vec{v}\rangle=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

★说明

(1) 是矢量

(2) 直角坐标系 $\langle\vec{v}\rangle=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$

(3) 由于位移与所起始时刻及间隔大小有关，所以谈到平均速度时应指明哪一时刻所取哪段时间内的平均值。

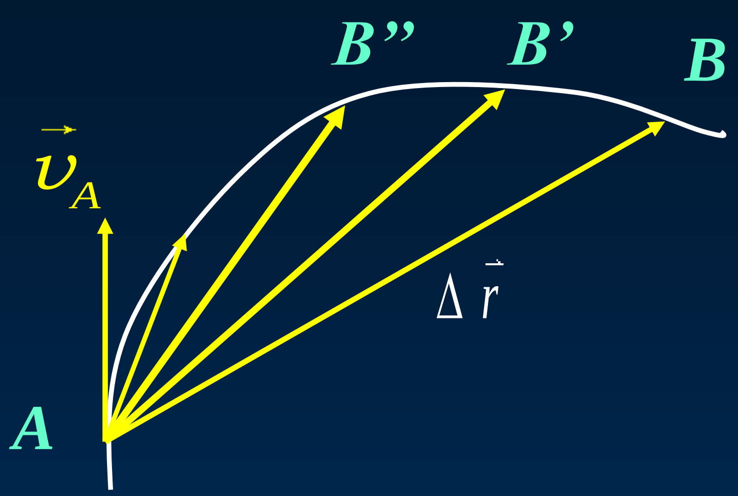
(4) 位矢大小的变化对速度有贡献，位矢方向的变化同样对速度有贡献。

(5) 它只能对时间Δt内质点位矢随时间变化的情况作一粗略描述。

2. 瞬时速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ ★



讨论：

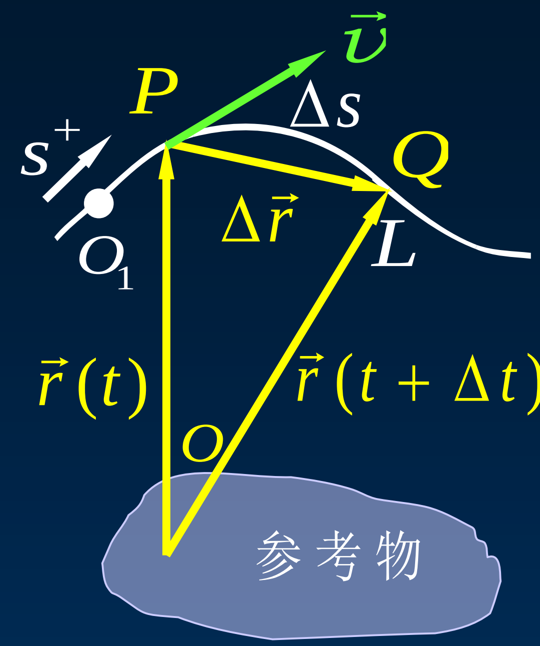
- 速度的性质：矢量性　瞬时性　相对性
- 速度与速率的区别

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longleftrightarrow v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \neq \frac{dr}{dt}$$

- 直角系：$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

- 自然坐标系：

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1$$ 方向 $\vec{\tau}$ $$\vec{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

指向自然坐标正的一侧

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \vec{\tau} = v \vec{\tau}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

大小 $\left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right|$ 方向 $\vec{\tau}$

例1： 质点运动方程：$x = 2t, y = 6 - 2t^2$

求： 1 轨迹方程　2 $t = 1s$ 到 $t = 2s$ 内的 $\Delta\vec{r}, \Delta r, \langle\vec{v}\rangle$

3 $t = 1s$ 和 $t = 2s$ 时，质点的瞬时速度

解： $1. x = 2t, y = 6 - 2t^2 \therefore y = 6 - x^2/2$

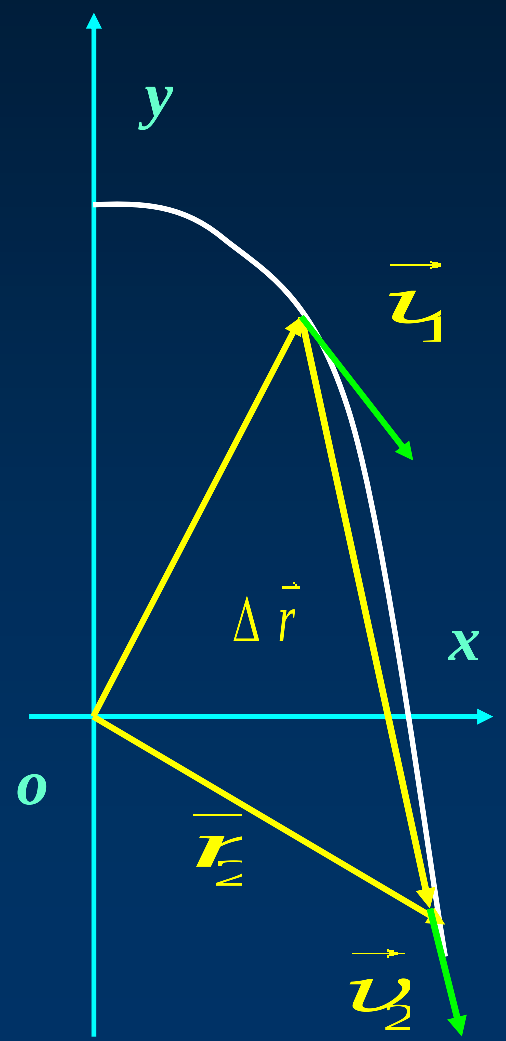
$$\vec{r} = 2t\vec{i} + (6 - 2t^2)\vec{j}$$

$$\begin{cases} t = 1s \Rightarrow \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}(m) \\ t = 2s \Rightarrow \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}(m) \end{cases}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{i} - 6\vec{j}(m)$$

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 2\vec{i} - 6\vec{j}(m/s)$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 0 \Longrightarrow \Delta r \neq |\Delta\vec{r}|$$



$\vec{r} = 2t\vec{i} + (6 - 2t^2)\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$

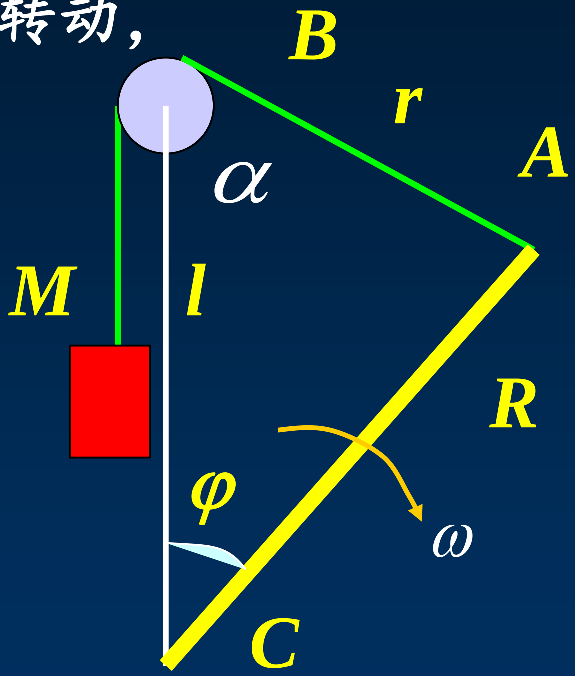
例2: 如图，A端与重物 M 用细绳连接，已知 $CB = l$

AC 杆以角速度 ω 绕定点 C 匀速转动，

求: 当 $\angle CBA = \alpha$ 时，M 的速度v_M

解: 设 $AB = r, CA = R$

在t时刻，运动学方程



$$\boxed{r^2(t) = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\varphi(t)}$$

$$r^2(t) = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\omega t$$

$$\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\omega t}$$

$$2r\frac{dr}{dt} = 2Rl\omega\sin\omega t$$

$$\boxed{v_M = \frac{dr}{dt} = \frac{Rl}{r}\omega\sin\omega t} = \frac{rl\omega\sin\alpha}{r} = l\omega\sin\alpha$$

单选题 1分

设置

思考：已知 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 求$|\vec{v}|$

- 答案一：先求出

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{dr(t)}{dt}$$

- 答案二：先求出

$$\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

你认为哪种方法是正确的？Why?

A 答案一

B 答案二

提交

思考：已知 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 求 $|\vec{v}|$

- 答案一：先求出

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{dr(t)}{dt}$$ ×

- 答案二：先求出

$$\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$ √

你认为哪种方法是正确的？**Why?**

多选题 1分 设置

7

根据瞬时速度矢量$\vec{v}$的定义，使用直角坐标和自然坐标的表示形式，它的大小$|\vec{v}|$可以表示为

A $\dfrac{dr}{dt}$

B $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$

C $\dfrac{ds}{dt}$

D $\left|\dfrac{ds}{dt}\right|$

E $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}$

F $\left|\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k}\right|$

G $(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2+(\dfrac{dz}{dt})^2$

H $\left[(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2+(\dfrac{dz}{dt})^2\right]^{1/2}$

讨论：(1)如何解读每一项？

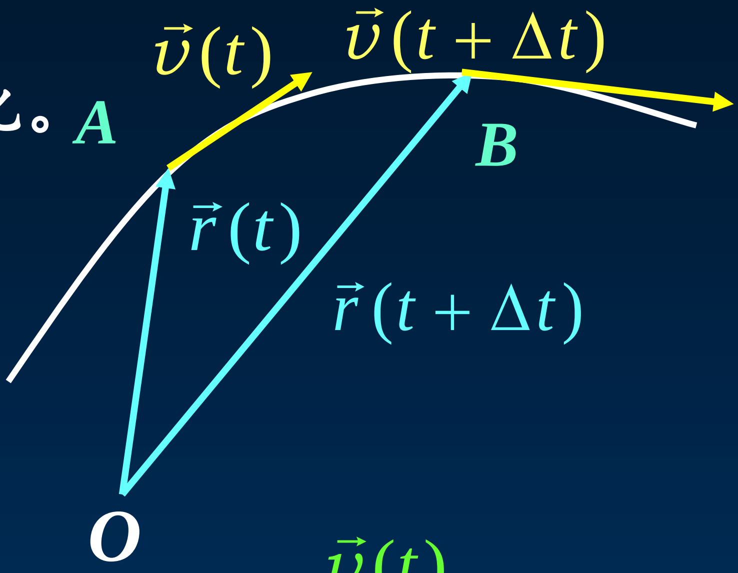
(2)基于每一项的物理含义，并不是完全找到一个对应的公式

提交

三、加速度

它是描述速度矢量变化的物理量。

变化：速度大小和方向随时间变化。

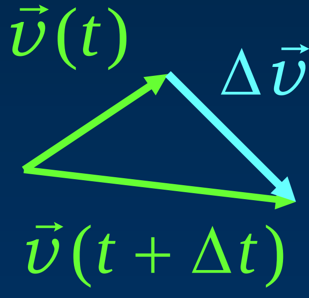


1. 平均加速度 $\Delta t \Rightarrow \Delta\vec{v}$

$$\langle\vec{a}\rangle=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

2. 瞬时加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



★ 说明

(1) 加速度反映速度的变化（大小和方向）情况。

(2) 加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一面。

(3) 直角坐标系

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$\boxed{a_x=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}$$

(4) 自然坐标系

$$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\upsilon\vec{\tau}\qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\right)=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

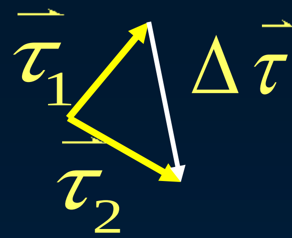
第一项 大小 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ 方向 $\vec{\tau}$

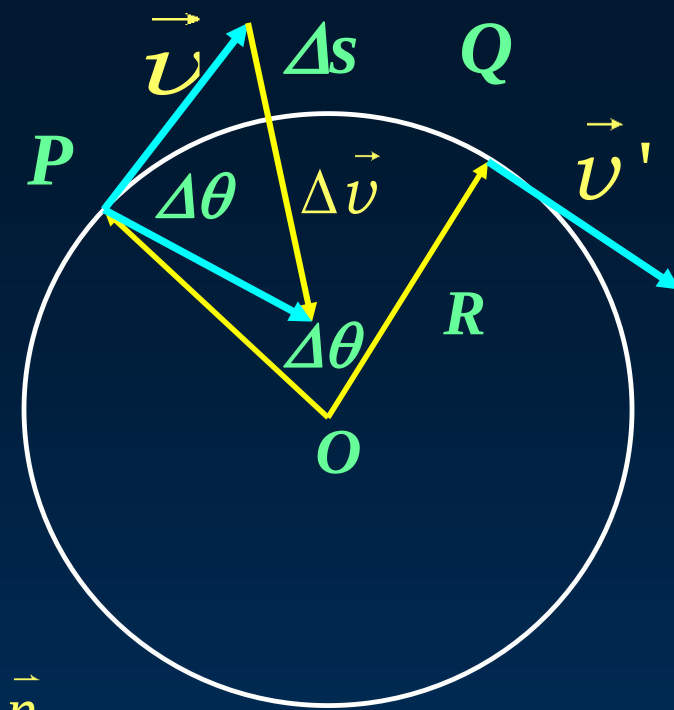
$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}=\vec{a}_\tau$$

切向加速度

意义 反映速度大小的变化

第二项 $\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$





- 匀速圆周运动为例

$$\upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\upsilon\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$$

$$=\upsilon\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\upsilon^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

$$\Delta s = R\Delta\theta \quad \Delta\vec{\tau}=\left|\Delta\vec{\tau}\right|\vec{n}=\left|1\times\Delta\theta\right|\vec{n}$$

$$\upsilon^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}=\upsilon^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1\times\vec{n}}{R}=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$

$$\boxed{\upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}=\vec{a}_n}$$

法向加速度

意义　反映速度方向变化的快慢

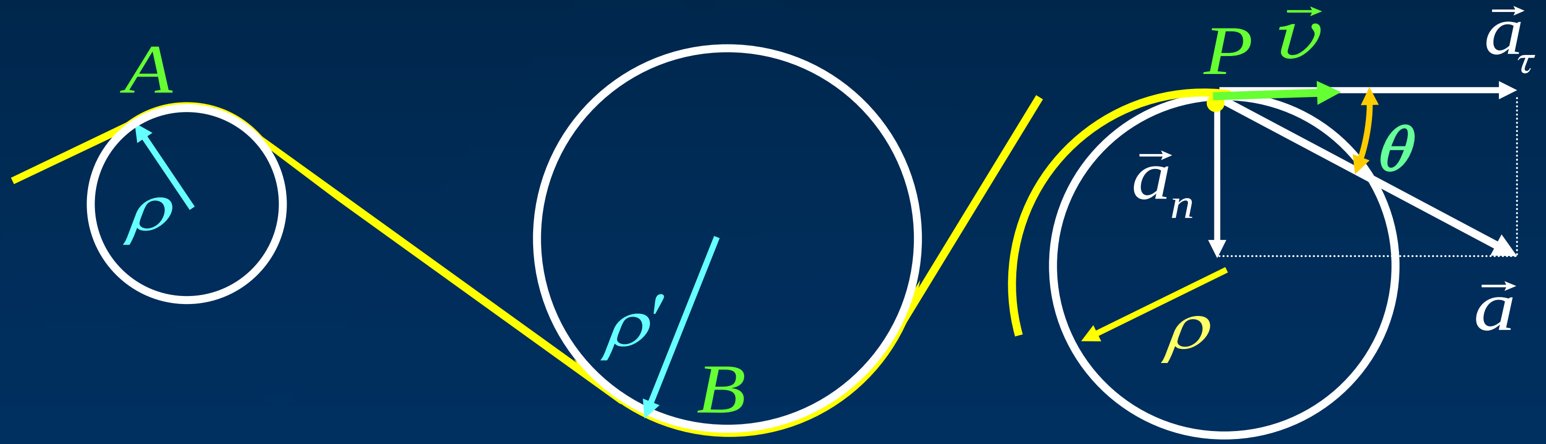
$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_\tau\vec{\tau}=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{1}{R}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}$$

讨论

(1) 在一般情况下 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\upsilon\vec{\tau})=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$

其中ρ为曲率半径，$\vec{n}$的方向指向曲率圆中心

引入曲率圆后，整条曲线就可看成是由许多不同曲率半径的圆弧所构成



$$a=\sqrt{a_\tau^{\ 2}+a_n^{\ 2}},\mathrm{tg}\,\theta=\frac{a_n}{a_\tau}$$

(2) 自然坐标系与直角坐标系的关系

- 当 $\Delta t \Rightarrow 0 \quad \because \mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$

$$|\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x}$$

- $\mathrm{d}s = \upsilon \mathrm{d}t = \sqrt{\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2} + \upsilon_z^{\,2}}\,\mathrm{d}t$

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2} + \upsilon_z^{\,2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore s = s_0 + \int_0^t \sqrt{\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2} + \upsilon_z^{\,2}}\,\mathrm{d}t$$

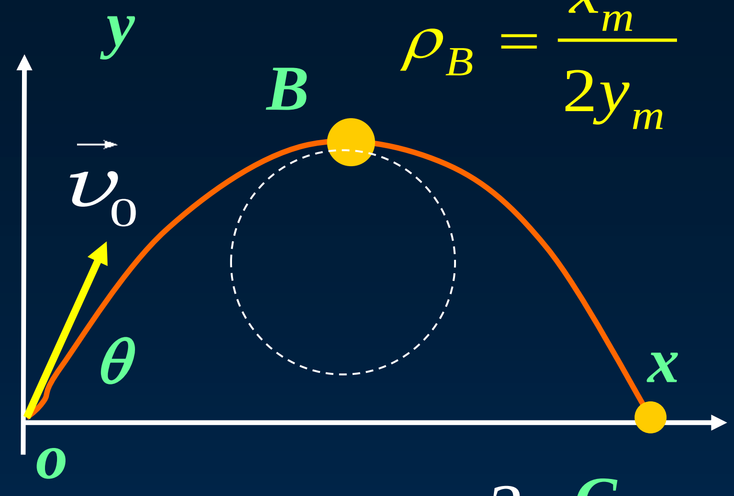
思考题： 抛体运动中的曲率半径？

$$\rho_B = \frac{x_m^2}{2y_m}$$

对B点：

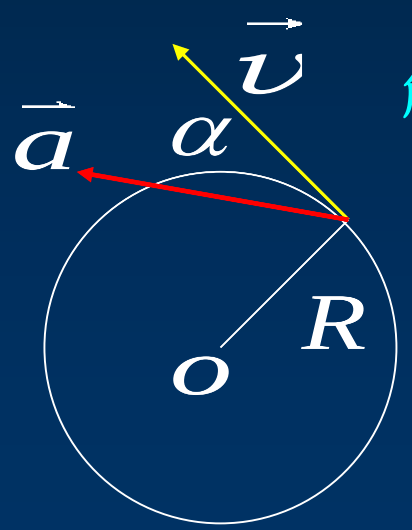
$$\vec{a}_\tau = 0 \quad \vec{a}_n = -g\vec{j} \quad \upsilon_B = \upsilon_0 \cos\theta$$

$$\rho_B = \frac{\upsilon_B^2}{a_n} = \frac{(\upsilon_0 \cos\theta)^2}{g} = \frac{x_m^2}{2y_m}$$



$$\rho_C = ?$$

例1： 如图示，求速度大小与时间的关系



解：

$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} \longleftrightarrow a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

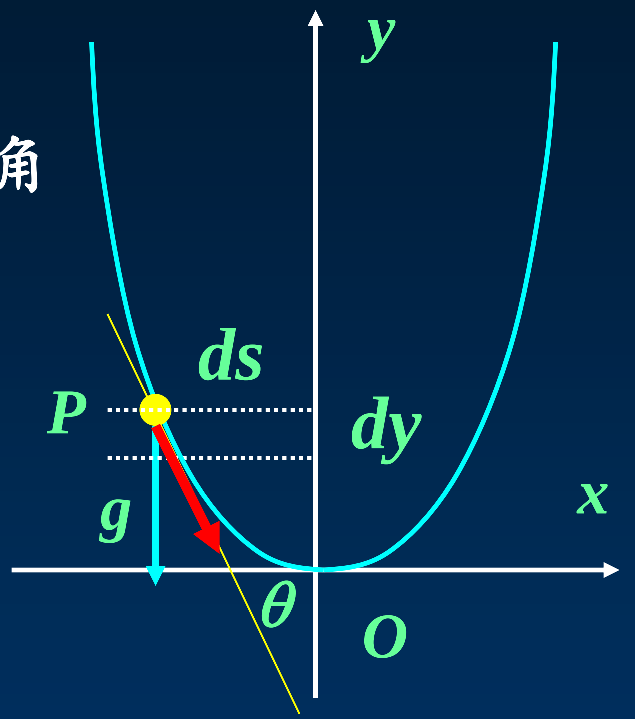
$$\tan\alpha = \frac{\upsilon^2 dt}{R d\upsilon} \longrightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{dt}{\tan\alpha R}$$

$$t = 0 \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 \longrightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0 R \tan\alpha}{R\tan\alpha - \upsilon_0 t}$$

例2: 将光滑钢丝弯成一竖直平面内的曲线，一质点可沿钢丝向下滑动。已知，质点运动的切向加速度为

$$a_\tau = -g\sin\theta$$

g 重力加速度，θ 为切向与水平方向夹角



求: $v = v(y)$

解: 由题意知

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$v\,dv = -g\sin\theta\,ds \qquad \sin\theta = \frac{dy}{ds}, \sin\theta ds = dy$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\int_{y_0}^{y} g\,dy \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2g(y_0 - y)$$

例3： 已知质点运动方程为 $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$ (SI)

求： $t_1 = 1\text{s} \rightarrow t_2 = 3\text{s}$ 之间的路程 。

解： 质点运动速度为 $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t\vec{i} + t^2\vec{j}) = 2\vec{i} + 2t\,\vec{j}$

速率为 $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2}} = \sqrt{2^2 + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$

路程有 $\mathrm{d}s = \upsilon \mathrm{d}t = 2\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2}\mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\because \int\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + c$$

$$\therefore s_2 - s_1 = \Delta s = 3\sqrt{10} - \sqrt{2} + \ln\frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} = 9.98\ \text{m}$$

多选题 1分

设置

7

根据瞬时加速度矢量$\vec{a}$的定义，使用直角坐标和自然坐标的表示形式，它的大小$|\vec{a}|$可以表示为

A $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|$

B $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

C $\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|$

D $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

E $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

F $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$

G $\left[\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}$

H $\left[\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right]^{1/2}$

提交

四、圆周运动

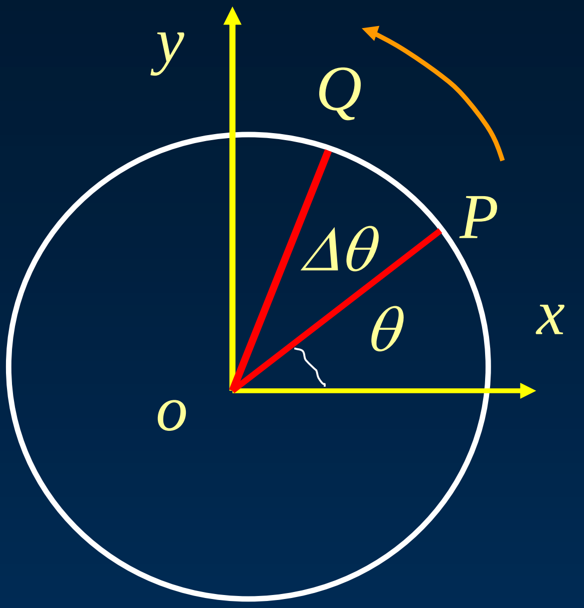
圆周运动的角量描述以及角量与线量之间的关系

- 角位置（Angular position）与角位移

$\boxed{\theta = \theta(t)}$ — 质点的圆周运动方程

当 $\Delta t \Rightarrow \Delta\theta$ 质点圆周运动的角位移

规定：右手法则确定 $\Delta\theta$ 的正负取值



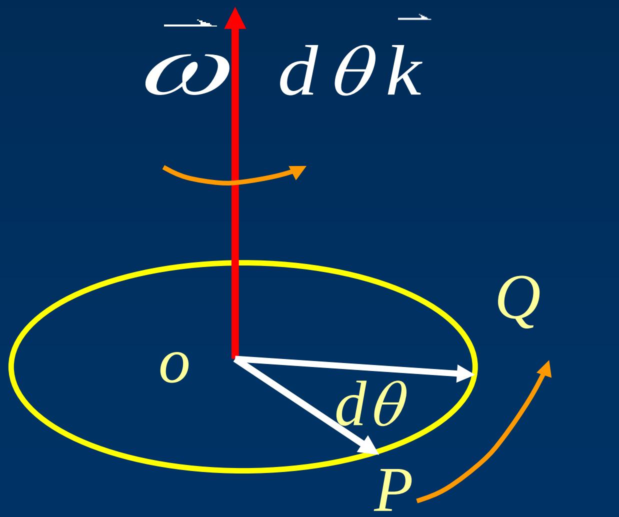
- 角速度（Angular velocity）

当 $\Delta t \Rightarrow \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta\vec{k}$

定义：质点作圆周运动的角速度

$$\boxed{\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}}$$

描述质点转动速率和转动方向

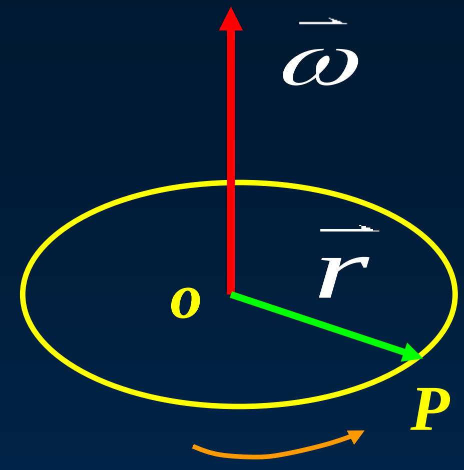


- 角加速度

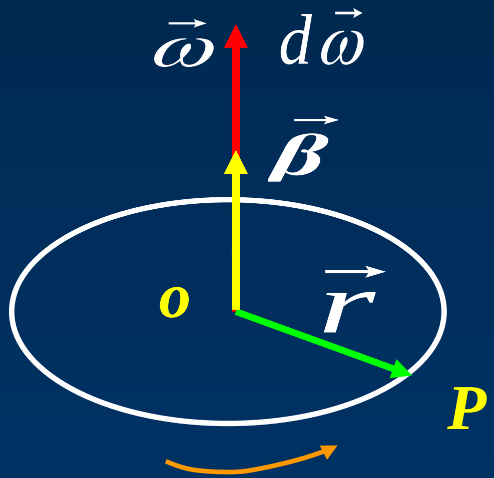
$t:\omega \Rightarrow t+\Delta t:\omega+\Delta\omega$

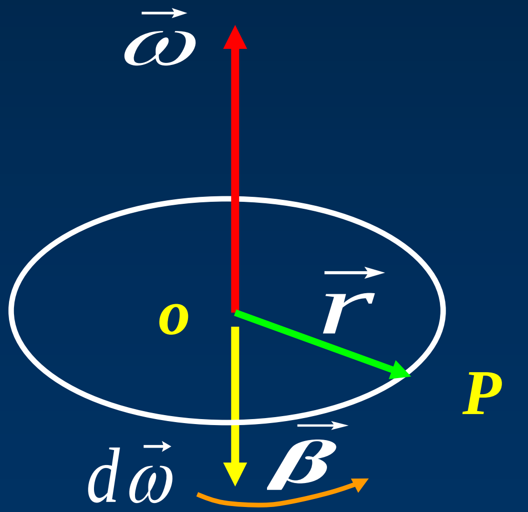
角加速度＝角速度对时间的一阶导数

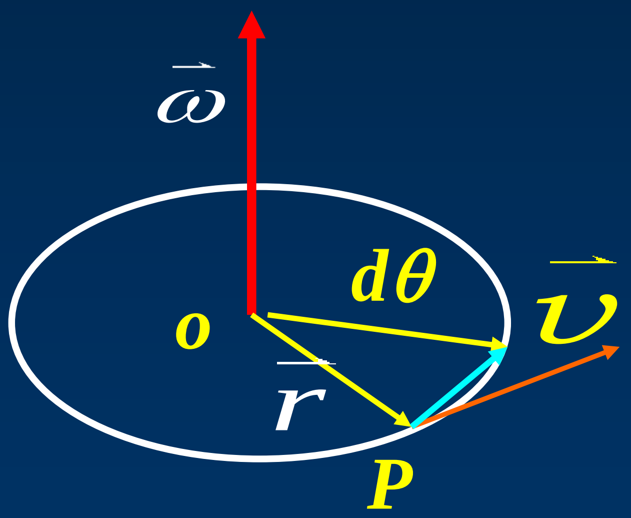
$$\boxed{\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\vec{k}\right)=\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k}}$$



- 注意：角加速度方向与角速度变化量的方向相同





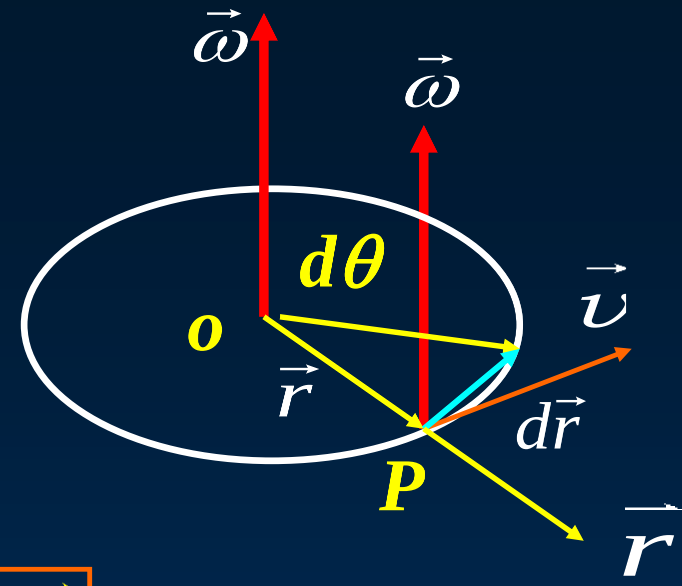


- 角量与线量的关系 $ds=\left|d\vec{r}\right|=rd\theta$

- 线位移与角位移的关系：

$$d\vec{r} = d\theta\vec{k} \times \vec{r}$$

- 速度与角速度的关系：



$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta\vec{k} \times \vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

- 大小：$\upsilon = \omega r$
- 方向：由右手法则确定

- 加速度与角加速度的关系：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

$\vec{a}_\tau$

$\vec{a}_n$

$$\boxed{a_\tau = \beta r}$$

$$\boxed{a_n = \omega\upsilon = \omega^2 r}$$

例1：一质点作半径为$0.1m$的圆周运动，已知运动学方程为

$$\theta = 2 + 4t^3 (rad)$$

试求：1）当 $t = 2s$ 时，质点运动的切向加速度和法向加速度以及加速度的大小?

2）当 $\theta = ?$ 时，质点的加速度与半径成$45°$角？

解：1）由已知条件，

$$\theta = 2 + 4t^3 \longrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2 \longrightarrow \beta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 24t$$

$$a_n = r\omega^2, a_\tau = r\beta \Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 230.5 m/s^2$$

2）设 t' 时刻，质点的加速度与半径成 $45°$ 角，则

$$t' \Rightarrow a_\tau = a_n \Leftarrow \theta = 2 + 4t'^3 = 2.67 rad$$

$$\Rightarrow r\omega^2 = r\beta \Rightarrow 144t'^4 = 24t' \Rightarrow t' = 0.55s$$

例2： 一质点在水平面内以顺时针方向沿半径为$2m$的圆形轨道运动。此质点的角速度与运动时间的平方成正比，即

$$\omega = Kt^2 \qquad K \text{——待定常数}$$

已知质点 $2s$ 末的线速度为 $32m/s$，求 $t = 0.5s$ 时质点的线速度和线加速度？

解：先确定常数 K

$$t = 2s \Rightarrow \upsilon = 32m/s \longrightarrow K = \frac{\omega}{t^2} = \frac{\upsilon}{Rt^2} = 4s^{-3} \Rightarrow \omega = 4t^2$$

$$\upsilon(t = 0.5s) = 4Rt^2\Big|_{t=0.5s} = 2.0m/s \longleftarrow \upsilon = R\omega = 4Rt^2$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 8Rt = 8.0m/s^2, a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 2.0m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 8.25m/s^2, \theta = arctg\left(\frac{a_n}{a_\tau}\right) = 13.6^\circ$$

例3： 一质点沿半径为R的圆周运动,运动学方程为：$s=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}bt^2$

其中 υ_0 , b 都是常数,

求： (1) 在t时刻质点的加速度

(2) 加速度的大小等于b的时刻;

(3) 加速度的大小等于b时,质点沿圆周运行的圈数。

解： (1) $\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\upsilon_0-bt$ $\quad a_\tau=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=-b$ $\quad a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{R}$

$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_\tau\vec{\tau}=\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{R}\vec{n}-b\vec{\tau}$$

(2) $a=\sqrt{[\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{R}]^2+b^2}=b$ $\quad \upsilon_0-bt=0$ $\quad t=\frac{\upsilon_0}{b}$

(3) $s=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}bt^2$ $\quad t=\frac{\upsilon_0}{b}$ $\quad s=\frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^2}{b}$ $\quad$ 圈数为：$\frac{\upsilon_0^2}{4\pi Rb}$

1-3 质点运动学的两类问题

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t), \vec{v} = \vec{v}(t) \\ \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t), \vec{a} = \vec{a}(t) \end{cases}$$

—— 描述运动状态的物理量

—— 描述运动状态变化的物理量

1. $\vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}(t)$ （微分问题）

2. $\vec{a} = \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}\,? \Rightarrow \vec{r}\,?$ （积分问题）

例： $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int dx = \int v_x dt$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x dt \Leftarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x dt$$

初始条件

（1）第一类问题（微分问题）：由运动学方程，求 $\vec{\upsilon}, \vec{a}$

例1： 已知质点的运动学方程

$$x = \frac{\upsilon_{x_0}}{k}(1 - e^{-kt})$$

υ_{x_0}, k 为常数，求 υ, a

解：根据运动学方程，

$$\upsilon_x = \upsilon = \frac{dx}{dt} = \upsilon_{x_0} e^{-kt}$$

质点速度随时间变化

$$a_x = a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \upsilon_{x_0}(-ke^{-kt}) = -k\upsilon$$

讨论：

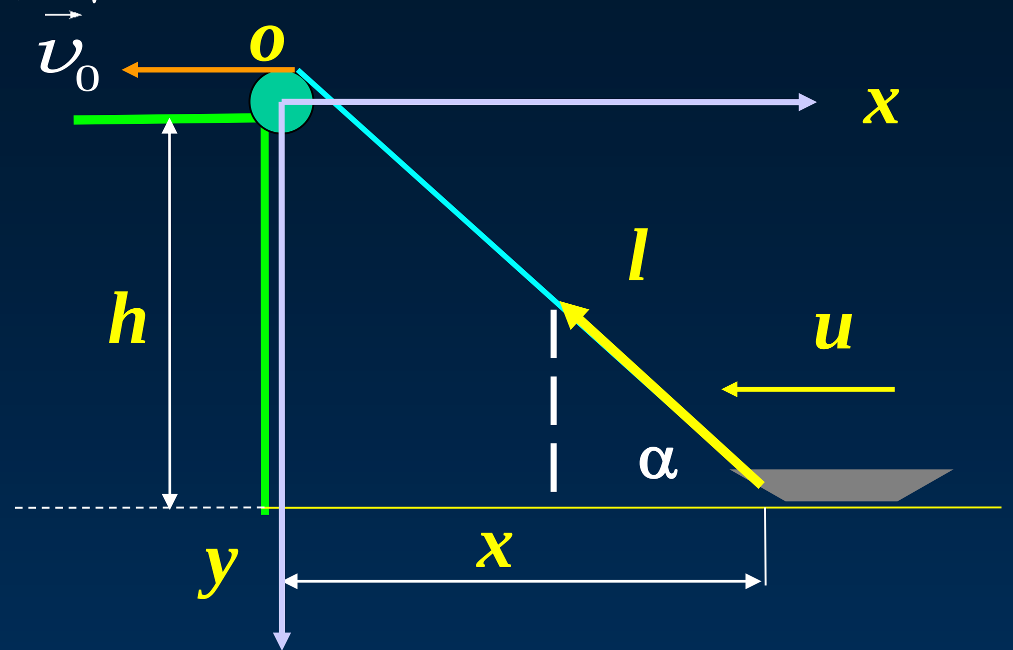
- 结果表征加速度与速度反方向。
- 当 $t \Rightarrow \infty, \upsilon_x \Rightarrow 0, x \Rightarrow \dfrac{\upsilon_{x_0}}{k}$

  质点作减速运动，直至静止。

例2：如图示 求小船靠岸过程中的 u, a

解：答案:

$u = \upsilon_0 \cos\alpha$ ？



方法1 建立运动学方程

答案1：直角坐标系

$$t : x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

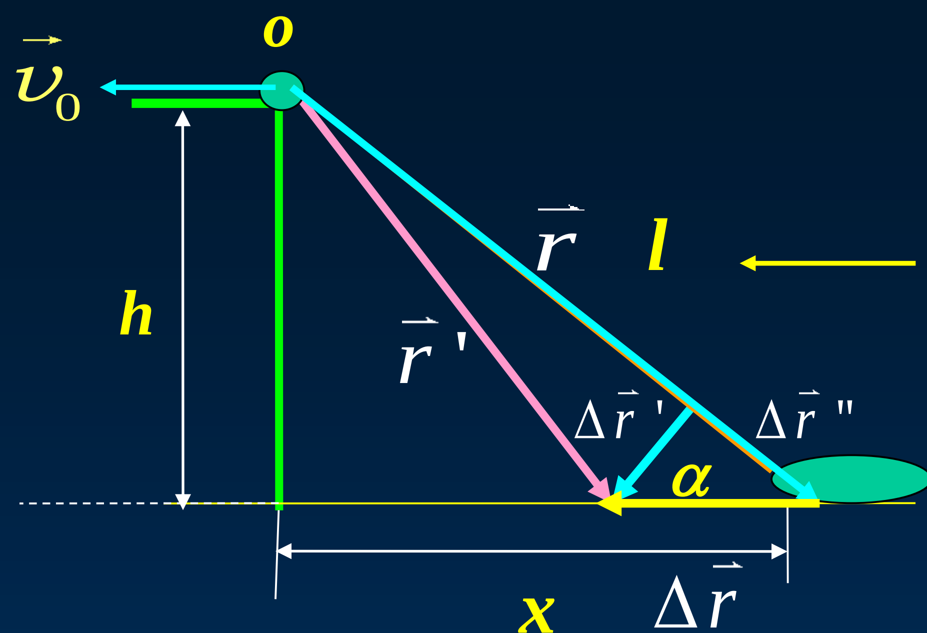
$$l = l(t), y = h = c$$ —— 运动学方程

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \frac{dl}{dt} = \frac{l}{x}\upsilon_0 = \frac{\upsilon_0}{\cos\alpha} = u \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \ldots\ldots$$

方法2　矢量分析

解：以坐标圆点做小船的位矢，确定位移，再根据速度定义求解



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' - \Delta\vec{r}\,''$$

答案2:

$$u = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}\,' - \Delta\vec{r}\,''}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}\,''|}{\cos\alpha}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\upsilon_0}{\cos\alpha}$$

$$u = \upsilon_0\cos\alpha$$

(2）第二类问题（积分问题）

由 υ, a 求运动方程（十初始条件）

以质点的匀加速直线运动为引子：$a = C$

- **$v \sim t$ 关系**　$a = C, t = 0 \Rightarrow x = x_0, \upsilon = \upsilon_0$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow d\upsilon = adt \quad \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t adt \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + at$$

- **$x \sim t$ 关系**　$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt = (\upsilon_0 + at)dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (\upsilon_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- **$v \sim x$ 关系**　$a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \upsilon\dfrac{d\upsilon}{dx}$

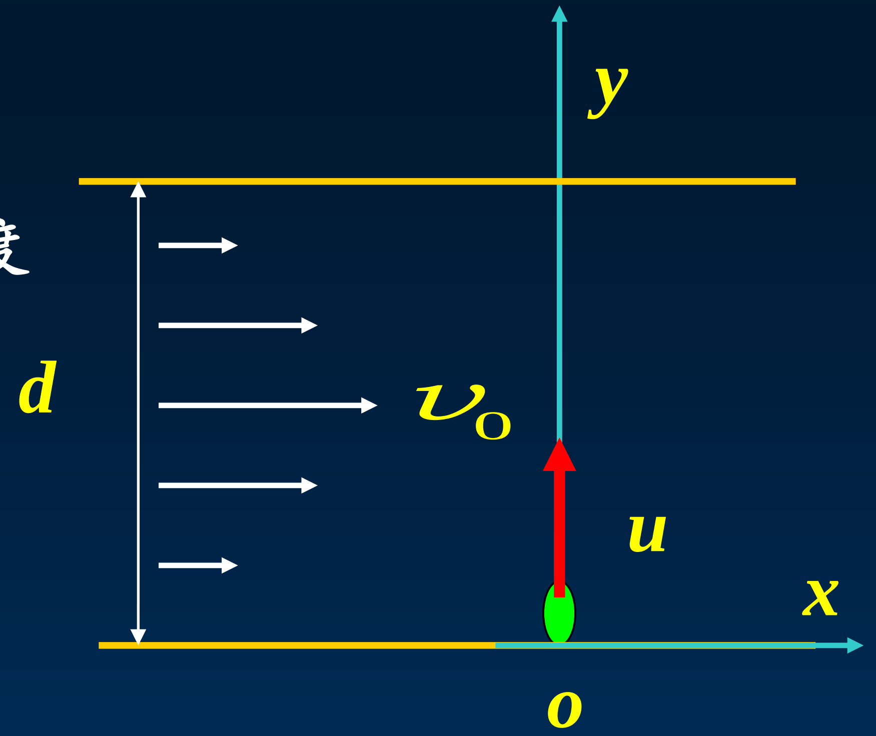
$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = \int_{x_0}^{x} adx \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

例3：已知河宽为 d，河水流速为

$\upsilon = ky$ （k 为待定系数）

中流速度为 υ_0 ，小船以速度

u 垂直流水方向向对岸划去。



求：小船的运动轨迹?

解：直角坐标系

根据题意

$$t = 0 \quad x = y = 0, u_x = 0, u_y = u$$

$$\upsilon = ky \Rightarrow y = \frac{1}{2}d \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 \Rightarrow k = \frac{2\upsilon_0}{d} \Rightarrow \upsilon_x = ky = \frac{2\upsilon_0}{d}y$$

由速度定义，可得：

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2\upsilon_0}{d}y} \Rightarrow x(t)$$

$$\boxed{\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = u} \Rightarrow y(t)$$

$$dy = udt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t udt \Rightarrow y = ut$$

$$\upsilon_x = \frac{2\upsilon_0}{d} y = \frac{2\upsilon_0}{d} ut$$

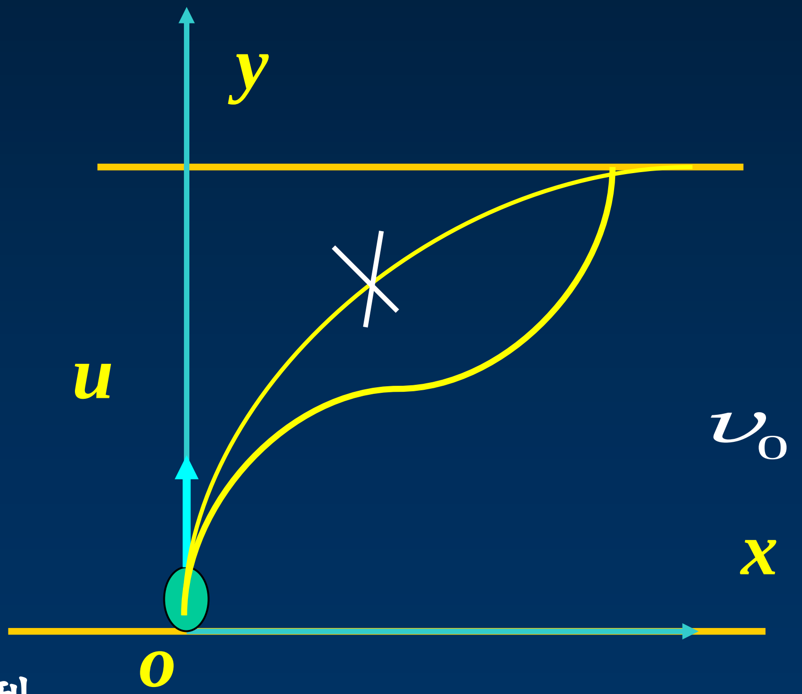
$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{2\upsilon_0}{d} utdt$$

$$x = \frac{\upsilon_0 u}{d} t^2$$

小船的运动轨迹：

$$\boxed{x = \frac{\upsilon_0 u^2 t^2}{ud} = \frac{\upsilon_0 y^2}{ud}}$$

——典型的运动学第二类问题



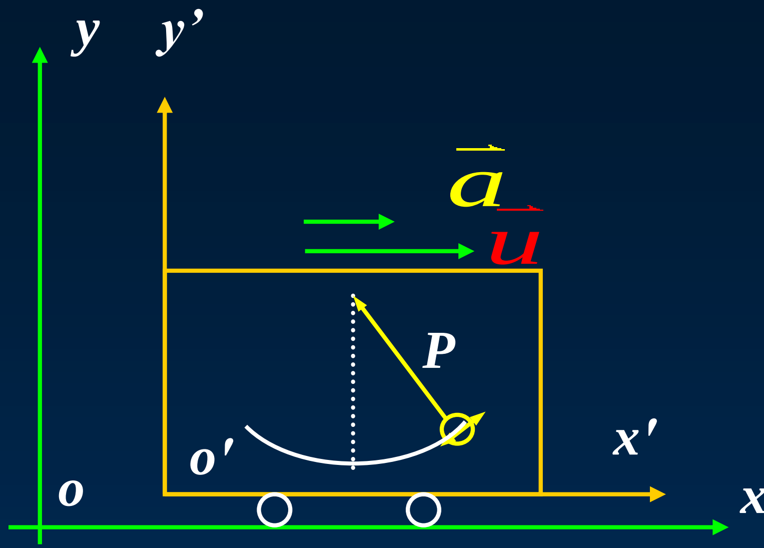
总结：

1. 对实际问题建立物理、数学模型

2. 根据题意，确定初始条件。

1-4 不同参照系中速度和加速度的变换

一、基本概念



一个动点 P (研究对象)

二个参照系

绝对参照系 s ,相对参照系 s'

三种运动

相对运动：动点相对于动系的运动称为相对运动；

相对位移；相对速度；相对加速度。

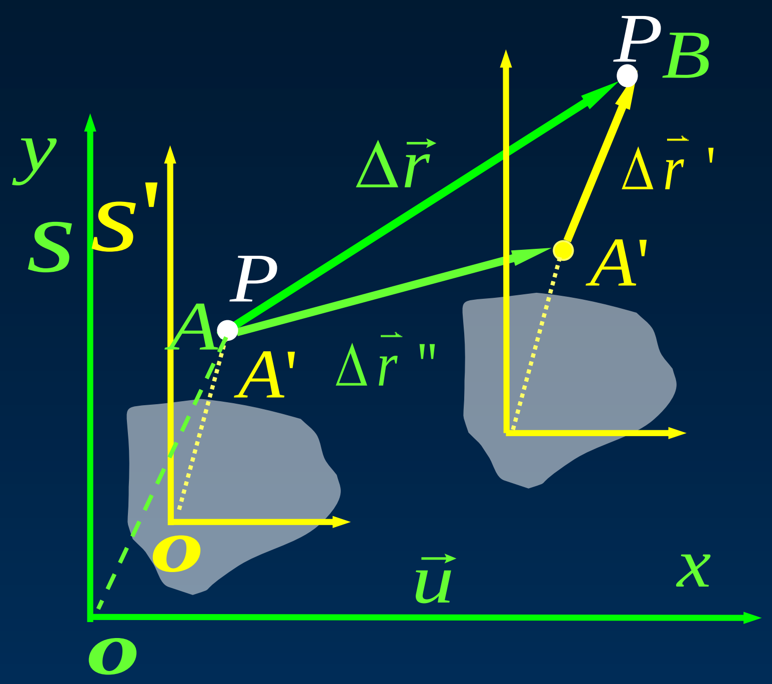
绝对运动：动点相对于定系的运动称为绝对运动；

绝对位移；绝对速度；绝对加速度

牵连运动：动系相对于定系的运动称为牵连运动；

牵连位移；牵连速度；牵连加速度

二、相对位移（设两个相对平动的参照系）



S'相对 S 平动，速度为 $\vec{u}$

$\Delta\vec{r}_{B-S}$ —— 绝对位移

$\Delta\vec{r}_{B-S'}$ —— 相对位移

$\Delta\vec{r}_{S'-S}$ —— 牵连位移

$$\boxed{\Delta\vec{r}_{B-S} = \Delta\vec{r}_{B-S'} + \Delta\vec{r}_{S'-S}}$$

位移合成关系式

三、速度变换定理　加速度变换定理

- 速度变换关系：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_{B-S}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_{B-S'}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_{S'-S}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}_{绝对}=\vec{\upsilon}_{相对}+\vec{\upsilon}_{牵连}}$$ —— 伽利略速度变换定理

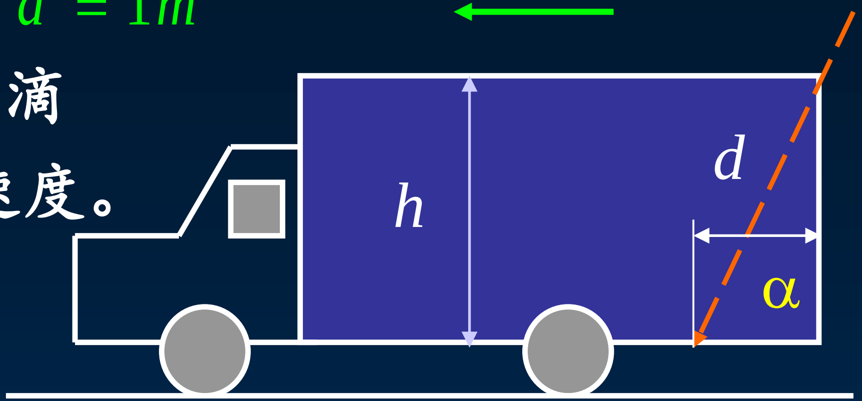
- 加速度变换关系：

$$\boxed{\frac{d\vec{\upsilon}_{绝对}}{dt}=\frac{d\vec{\upsilon}_{相对}}{dt}+\frac{d\vec{\upsilon}_{牵连}}{dt}\Rightarrow\vec{a}_{绝对}=\vec{a}_{相对}+\vec{a}_{牵连}}$$

注意：

1. 速度，加速度合成公式的矢量性。
2. 速度合成公式对任何形式的牵连运动（平动、转动）都是成立的，而上面给出的加速度合成公式只对牵连运动为平动时成立，牵连运动为转动时，情况比较复杂。

例1： 一个带篷子的卡车，车蓬高为 $h = 2m$ ，当它停在路边时，雨滴可落入车内 $d = 1m$ 若它以 $15km/h$ 运动时，雨滴恰好不能落入车中，求雨滴速度。



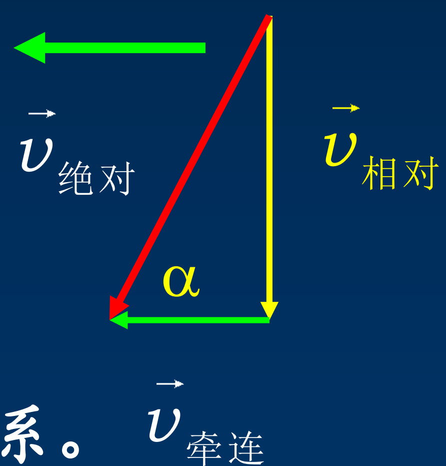
解： 由速度变换关系，得

$$\vec{v}_{绝对} = \vec{v}_{相对} + \vec{v}_{牵连}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{h}{d}\right) = 63.4°$$

$$\left|\vec{v}_{绝对}\right| = \left|\frac{\vec{v}_{牵连}}{\cos\alpha}\right| = \frac{15}{\cos\alpha} = 33.5km/h$$

画出矢量图

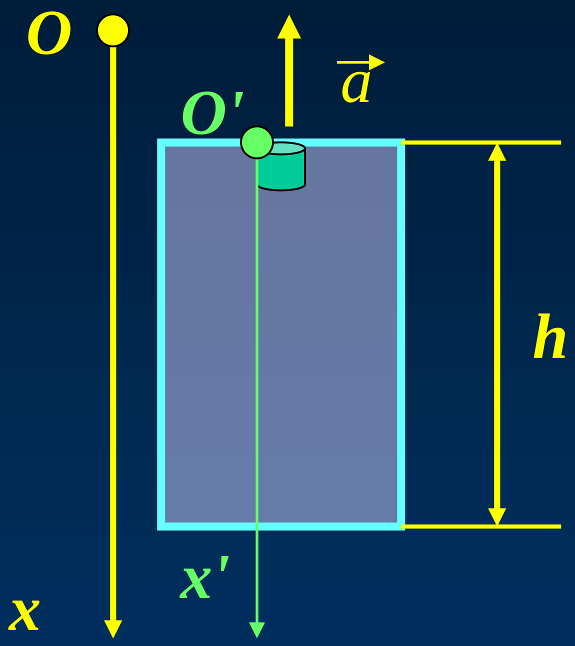


注意： 1. 确定三个速度和它们之间的矢量关系。

2. 适当画出矢量图，有助于分析问题。

例2：升降机以加速度 1.22 m/s² 上升，有一螺母自升降机的天花板松落，天花板与升降机的底板相距 2.74m 。

求：螺母自天花板落到底板所需的时间.



解：取螺母刚松落为计时零点.

动点为螺母,取二个坐标系如图

三种加速度为：

$$\vec{a}_a = g\vec{i}, \qquad \vec{a}_e = -a\vec{i}, \qquad \vec{a}_r = ?$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r, \Longrightarrow \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e$$

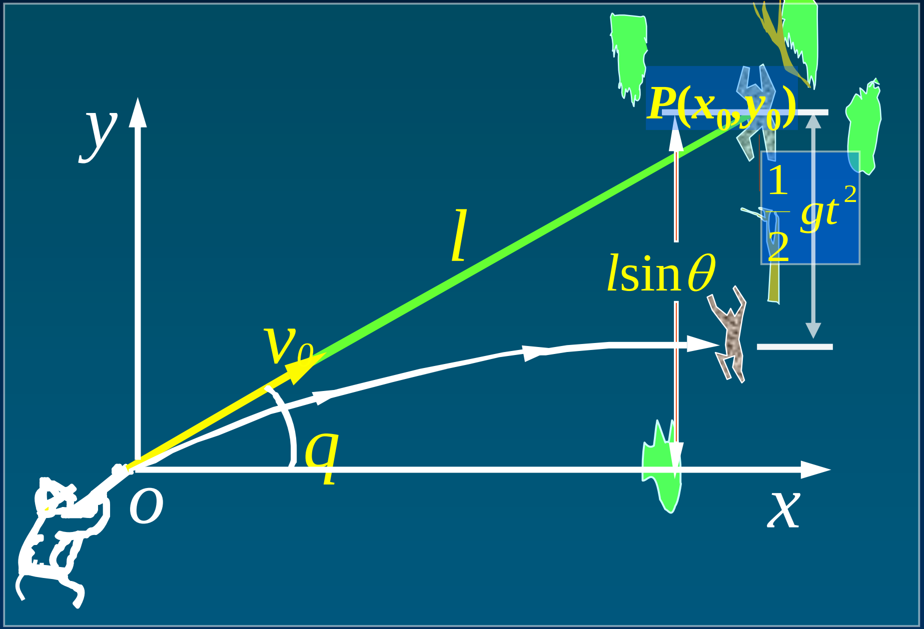
$$a_r = a_a - a_e = g + a$$

$$h = \frac{1}{2} a_r t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{9.80+1.22}} = 0.7(\mathrm{s})$$

例3： 用枪瞄准攀伏在树上的猴子，随着枪响，受惊的猴子开始向下掉落，设空气阻力可以忽略不计。

证明： 不论子弹的初速度v_0多大，都会击中自由下落的猴子。

证： 取地面为基本参考系，猴子为运动参考系。子弹为运动物体，则子弹的速度为：



$$\vec{v}_{弹\to地} = \vec{v}'_{弹\to猴} + \vec{u}_{猴\to地}$$

$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_{弹\to地} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\vec{u}_{猴\to地} = \vec{g}t$$

$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_{弹\to地} - \vec{u}_{猴\to地}$$

$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{g}t = \vec{v}_0 = 常矢量$$

子弹相对于猴子作匀速直线运动，只要初始被瞄准，不论子弹的初速度v_0为多大，自由下落的猴子都会被击中。