西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下期末模拟试题（二）答案

一、填空（3分×5=15分）

1. 函数$u=2xy-z^2$ 在点$(2,-1,1)$处沿$\vec{l}=(1,2,-2)$的方向导数是 $\underline{\quad \dfrac{10}{3} \quad}$

解 $\nabla u\big|_P=(2y,2x,-2z)\big|_{(2,-1,1)}=(-2,4,-2)$; $\vec{e}_l=\dfrac{(1,2,-2)}{3}$ $\left\langle \nabla u\big|_P,\vec{e}_l\right\rangle=\dfrac{10}{3}$.

2. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域是 $\underline{\quad (-3,1) \quad}$

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{2^n}\cdot\dfrac{2^{n+1}}{\ln(n+1)}\right)=2$ $x=1$, 级数发散; $x=-3$, 级数发散.

3. 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点$M_0(2,1,4)$处的切平面方程为 $\underline{\quad 4x+2y-z=6 \quad}$

解 $\vec{n}\,/\!/\,(2x,2y,-1)\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$$

4. 设L 是从点 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,2,2)$ 的直线段, 则线积分 $\int_L x\mathrm{e}^{yz}\,\mathrm{d}s=$ $\underline{\dfrac{3}{8}(\mathrm{e}^4-1)}$.

解 $L: x=t, y=2t, z=2t, t\in[0,1]$ $\quad \mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\mathrm{d}t=3\mathrm{d}t$

$$I=\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{4t^2}\,3\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\mathrm{e}^{4t^2}\Big|_0^1=\frac{3}{8}(\mathrm{e}^4-1)$$

5. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$, 其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\ldots)$, 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ $\underline{\dfrac{3}{4}}$.

解 题中的三角级数是将 f 做了偶延拓, 然后以2 为周期展成的.

所以, $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=S\left(3\times 2-\dfrac{5}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f(0.5-0)+f(0.5+0)}{2}=\dfrac{3}{4}$

二、计算题（6分×3=18分）

1. 设函数 $u=f(x,y,z)$，f 有二阶连续偏导，$z=e^x\sin y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解 $u_x=f_1+f_3z_x=f_1+e^x\sin y\cdot f_3$.

$$u_{xy}=\left(f_{12}+e^x\cos y\cdot f_{13}\right)+e^x\cos y\cdot f_3+e^x\sin y\left(f_{32}+e^x\cos y\cdot f_{33}\right)$$

2. 计算$\oint_C -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$，其中曲线 C 是平面 $y+z=4$ 与柱面 $x^2+y^2=2y$ 的交线，且从 z 轴正向往下看是逆时针方向.

解法1 用Stokes公式. 以(C)为边界的曲面取为平面 $y+z=4$ 被柱面截下的部分.

单位法向量为: $\vec{e}_n=(0,1,1)/\sqrt{2}$，其方向与$(C)$ 的正向构成右手螺旋. $\vec{A}=(-y^2,x,z^2)$

$$\oint_C -y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (1+2y)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 2y} (1+2y)\mathrm{d}\sigma = \pi + 2\pi = 3\pi.$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解法2 将积分路径参数化，$x=\cos t, y=1+\sin t, z=3-\sin t, t:0\to 2\pi$

代入积分，化为定积分.（略）

3. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中Σ是 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 2$ 部分.

解 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho=8\sqrt{2}\pi.$$

三、计算题（7分×3=21分）

1. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与圆锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围空间区域Ω 的体积.

解 $$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-\rho-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{5}{6}\pi.$$

2. 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$的和函数 $S(x)$.

解 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2}\right)^{n}}{n!}\right)'=\left(x\mathrm{e}^{x^{2}}\right)'=(1+2x^{2})\mathrm{e}^{x^{2}}$$

3. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(2\sin y+z)\mathrm{d}V$, 其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z, z\ge\sqrt{x^2+y^2}$.

解 积分区域关于 xoz 面对称, $\sin y$ 关于 y 是奇函数, $\therefore \iiint\limits_{\Omega}2\sin y\mathrm{d}V=0.$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^1\pi z^2\cdot z\mathrm{d}z+\int_1^2\pi\left(2z-z^2\right)\cdot z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{11}{12}\pi=\frac{7}{6}\pi.$$

四、解答题（8分×4=32分）

1. 计算 $I=\int_L \dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为 $\begin{cases} x=t-\sin t-\pi \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧段.

解 当 $y>0$ 时, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$,

$\therefore$ 在上半平面积分与路径无关.

选积分路径为: $x^2+y^2=\pi^2$, 上半部分, 从点 $(-\pi,0)$ 到 $(\pi,0)$

$$x=\pi\cos t, y=\pi\sin t$$

$$I=\int_{\pi}^{0}\frac{\pi^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}{\pi^2}\mathrm{d}t \quad =-\pi.$$

2. 求椭圆$\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=4\\ z=0\end{cases}$上的点到 $M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

解 椭圆上的点 $(x,y,0)$ 到 $M(0,0,2)$ 的距离的平方为 $d^2=x^2+y^2+4.$

求解条件极值问题 $u=x^2+y^2, 5x^2-6xy+5y^2=4.$

$$L=x^2+y^2-\lambda(5x^2-6xy+5y^2-4)$$

令 $L_x=0, L_y=0, L_\lambda=0$ 得 $\begin{cases}2x=\lambda(10x-6y)\\ 2y=\lambda(-6x+10y)\\ 5x^2-6xy+5y^2=4\end{cases}$

解得驻点: $(1,1),(-1,-1),(1/2,-1/2),(-1/2,1/2)$

最远距离为 $d_{\max}=\sqrt{6}$, 最近距离为 $d_{\min}=3/\sqrt{2}$.

3. 求向量场 $\vec{A}=\left(2x+z,y^2,z\right)$ 通过 $\Sigma: z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 下侧的通量.

解 补面$\Sigma_1: z=1$ 被 $x^2+y^2=1$ 所围部分，上侧. Σ 与 Σ_1 所围立体记为 (V).

$$\Phi=\iint_{\Sigma_{下}}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint_{\Sigma_{下}\cup\Sigma_1}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}-\iint_{\Sigma_1}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$=\iint_{\Sigma_{下}\cup\Sigma_1}(2x+z)dydz+y^2dzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1}(2x+z)dydz+y^2dzdx+zdxdy$$

$$=\iiint_V(3+2y)\mathrm{d}V-\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint_V\mathrm{d}V-\pi$$

$$=3\int_0^1\pi z\mathrm{d}z-\pi=\frac{3}{2}\pi-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

4. 将函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 $\because f(x)$在$[-\pi,\pi]$是奇函数, $\therefore a_n=0, n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{4}{(2n-1)\pi}\quad n=1,2,\cdots$$

$f(x)$的Fourier级数为: $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\sin nx,$

和函数 $S(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2} & -\pi<x<\pi\\ 0 & x=\pm\pi\end{cases}$

五. (8分) 将 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

解 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad x\in(-1,1]$

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\left(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots\right)$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)} \qquad x\in(-1,1]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=f(1)-1=2\ln 2-1.$$

六. (6分) 设平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$, L 为 D 的正向边界.

证明: $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge \frac{5}{2}\pi^2$.

证明 由Green公式，有 $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial(x\mathrm{e}^{\sin y})}{\partial x}-\frac{\partial(-y\mathrm{e}^{-\sin x})}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin y})\mathrm{d}\sigma=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma$$

$$=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x$$

$\because\ \mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}=2\left(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)\ge 2+t^2 \quad \therefore \mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x}\ge 2+\sin^2 x$

故 $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{-\sin x}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\ge\pi\int_0^{\pi}(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\pi^2$.