



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期中模拟題（二）



一. 单选题（每小题3分，共18分）

1. $x = 2$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{2-x}$ 的 ().

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()

A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导

3. 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^2 - x|$ 不可导点的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



4. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则在 $x = a$ 处 ()

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$ B. $f(x)$ 取得极大值
C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 的导数不存在

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$,

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处切线的斜率为 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

6. 在区间 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 的图像在区间 (a, b) 内是 ()

- A. 单增且凸 B. 单减且凸 C. 单增且凹 D. 单减且凹



二. 计算题（每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} \right).$

2. 设 $y = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$, 求 dy .

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right).$

4. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$



6.证明：当 $x > 0$ 时， $e^x - 1 < xe^x$.

7.求函数 $f(x) = x + 2\cos x$ 的最大值，其中 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

三（8分）设 $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + b, & x \leq 0 \\ \sin ax, & x > 0 \end{cases}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(x)$.

四.（12分）设 $f(x) = \frac{x^2}{2(x+1)^2}$, 求

(1) 函数 $f(x)$ 单调区间与极值;

(2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间拐点及渐近线.



五. (7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明: 存在 $c \in (-1,1)$, 使 $f'''(c) \geq 3$.

六 (6分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$,

证明: 在 $[0,1]$ 内存在两点 x_1, x_2 , 使 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY