2024 总复习模拟题 1

一、单项选择（请将正确选项填写在后面的括号中，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\3&0&4&0\\0&4&0&1\end{pmatrix}$，则行列式 $|2\boldsymbol{A}|$ 的值为 【　　】

（A）320　　（B）-320　　（C）40　　（D）-40

2. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{1896}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2015}=$ 【　　】

（A）$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}g&h&i\\d&e&f\\a&b&c\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}c&b&a\\f&e&d\\i&h&g\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}a&c&h\\d&f&e\\g&i&b\end{pmatrix}$

3. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则 【　　】

（A）$\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　　（B）$\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

（C）$\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　　（D）$\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\lambda=2}$ 是二重特征值，

则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 依次为 【　　】

（A）$-2,\ \ 2$　　（B）$2,\ \ -2$　　（C）$3,\ \ -1$　　（D）$-1,\ \ 3$

5. 以下说法中正确的是 【　　】

（A）对于方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

（B）若存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定的

（C）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2$ 是正定的

（D）若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都是正数，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定的

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$____________.

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 经若干次初等行变换可化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩为________，其一个极大无关组为______________，

其余向量由极大无关组线性表示的关系式为____________.

3. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，对其系数矩阵施以初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则其结构式通解为________________.

4. 曲线 L：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 oy 轴旋转一周所得旋转面的方程为________________.

5. 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Bx}$ 的矩阵为________________，其秩为________.

三、（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\boldsymbol{A}^3$ 和 $\boldsymbol{A}^4$；

（2）试求一个 4 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$；

（3）证明：对于（2）中的 $\boldsymbol{\alpha}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的，而 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}$ 是线性相关的.

四、（12 分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？并在有无穷多解时，求其结构解.

五、（12 分）设有直线 L ：$\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ 与点 $M(1,0,-1)$.

（1）求 L 的对称式方程；

（2）求点 M 到直线 L 的距离.

六、（12 分）（注意：学习了第八章线性变换者做第 2 题，其余同学做第 1 题）

1. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ 的第 j 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,5)$.

（1）证明 $W=\{\boldsymbol{Ax}\mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^5\}$ 为线性空间 $\boldsymbol{R}^4$ 的子空间；

（2）求 W 的基与维数；

（3）求 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 在该基下的坐标.

2. 设 $T \in L(\boldsymbol{R}^3)$，定义为 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\mathrm{R}(T)$的基与维数；

（2）求 $\ker(T)$的基与维数；

（3）求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)^T$ 下的矩阵.

七、（12 分）已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，（1）求 a 的值；（2）求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化 f 为标准形；

八、（10 分）设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维实单位列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$，

问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化？为什么？若可对角化，求与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵 $\boldsymbol{D}$.