XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期末考试模拟题（二）答案

一. 填空题（每小题3分，共15分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\sin x+\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)=$ <u>2</u>.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\sin x+\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\sin x+\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}$$

$$=0+\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=2.$$

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ $\underline{\quad\dfrac{\pi}{6}\quad}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{d\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, 当 $f(x)\in R[0,1]$ 时 $\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

3. 设函数$f(x)=(x^2+x+2)\sin x$, 则 $f^{(10)}(0)=$ ____10____.

解 $f^{(10)}(x)=(x^2+x+2)\sin^{(10)}x+10(x^2+x+2)'\sin^{(9)}x$

$+45(x^2+x+2)''\sin^{(8)}x$

$$=(x^2+x+2)(-\sin x)+10(2x+1)\cos x+90\sin x$$

$f^{(10)}(0)=10.$

4. 当$x \to 0$时, 两个函数$f(x)=\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x)=x^k(e^x-1)$, 是同阶无穷小量, 则 $k=$ __2__.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt}{x^k(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt}{x^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2\cdot\cos x}{(k+1)x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(k+1)x^k}=c\neq 0 \qquad \Leftrightarrow k=2.$$

5. 曲线$y=x+\dfrac{1}{e^x-1}$的渐近线有____条.　　**渐近线**

1. 铅直渐近线　(垂直于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)=\pm\infty$,则 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

2. 水平渐近线　(平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$,则 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

(a,b 为常数)，那么 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

斜渐近线求法： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,$　　$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

5. 曲线$y=x+\dfrac{1}{e^x-1}$的渐近线有<u> 3 </u>条.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\infty$, 所以$x=0$为垂直渐近线;

$$a=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\dfrac{1}{e^x-1}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\dfrac{1}{e^x-1}}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=-1$$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{e^x-1}-x\right)=0$, 所以$y=x$为斜渐近线;

$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{e^x-1}-x\right)=-1$, 所以$y=x-1$为斜渐近线.

二. 计算题（每小题6分，共48分）

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x+\sin x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x+\cos x}{2}$

$=1$.

2. $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x\le 0\\ e^{-2x}, x>0\end{cases}$，计算$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$.

解

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+t^2)dt+\int_{0}^{1} e^{-2t}dt$$

$$=(t+\frac{1}{3}t^2)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{25}{24}-\frac{1}{2}e^{-2}.$$

3. 设曲线L的参数方程为方程$\begin{cases} x = t^2 - t \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$,

求该曲线在$t=0$处的切线方程.

解 $t = 0, x = 0, y = -1$

$$e^y + te^y \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{e^y}{te^y + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{e^y}{(2t-1)(te^y+1)}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{e}$$

切线方程为$y + 1 = \frac{1}{e}x.$

4. 设函数$f(x)$连续, 且满足$\int_0^x (x-t)f(t)dt = x(x-2)e^x + 2x$.

求:(1) $f(x)$的表达式;

(2) $f(x)$的单调区间与极值.

解 (1) 两边求导得:$\int_0^x f(t)dt = (x^2-2)e^x + 2$

$$f(x) = (x^2+2x-2)e^x$$

(2) $f'(x) = x(x+4)e^x$ $\quad x_1 = -4, x_2 = 0$

$f(x)$的单增区间为$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ 单减区间为$[-4,0]$

$f(x)$的极大值$f(-4) = 6e^{-4}$, 极小值$f(0) = -2$.

5. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx.$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{1+e^x}$

$$=-\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$$

$$=\left(x-\ln(1+e^x)\right)\Big|_0^{+\infty}=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(1+e^x)\right)$$

$$=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$=\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+e^{-x}}=\ln 2.$$

6. 求微分方程$y''+2y'+y=e^{-x}+x$的通解.

解 $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1$

设微分方程$y''+2y'+y=e^{-x}$特解为$y_1{}^*=ax^2e^{-x}$ 解得$a=\dfrac{1}{2}$

设微分方程$y''+2y'+y=x$特解为$y_2{}^*=bx+c$ 解得$b=1, c=-2$

微分方程$y''+2y'+=e^{-x}+x$的通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}+x-2.$$

7. 求初值问题$\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y(0)=1, y'(0)=3\end{cases}$的解.

解 令$y'=p(x)$,则$y''=p'$ $\Rightarrow (1+x^2)p'=2xp$

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$$ 则$p=c_1(1+x^2)$ 由$y'(0)=3\Rightarrow c_1=3$

$$\frac{dy}{dx}=3(1+x^2)$$ $y=3x+x^3+c_2$

由$y(0)=1\Rightarrow c_2=1$ $y=3x+x^3+1.$

8. 求微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}x$ 的通解.

常系数线性齐次微分方程组的求解方法

常系数线性齐次微分方程组，$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$

（1）系数矩阵 A 有n线性无关特征向量的情形

定理 设n阶矩阵A有n线性无关的特征向量$r_1,r_2,\cdots,r_n$,它们对应的特征值分别为量$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(未必互不相同)则常系数齐次线性微分方程通解为

$$x(t)=C_1r_1e^{\lambda_1 t}+C_2r_2e^{\lambda_2 t},+\cdots+C_nr_ne^{\lambda_n t}.$$

其中$C_1,\cdots,C_n$为任取常数

（2）系数矩阵 A 没有n线性无关特征向量的情形

定理 设λ_i是矩阵A的k_i重特征值，则方程组必存在k_i个形式为

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}r_{k_i-1}\right)$$ 的线性无关的特解

其中r_0是齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)^{k_i}r=0$的非零解

且齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)^{k_i}r=0$必有k_i个线性无关的解

对每个r_0相应的$r_1,r_2,\cdots,r_{k_i-1}$由下列关系式逐次确定

$$r_1=(A-\lambda_i E)r_0,r_2=(A-\lambda_i E)r_1,\cdots,r_{k_i-1}=(A-\lambda_i E)r_{k_i-2}.$$

8. 求微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}x$ 的通解.

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 4\\ 1 & 0 & -4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+3)^2$

$\lambda_1=0,\qquad \lambda_2=\lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=0$ 时，解 $Ax=0$ $\quad r=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}\quad \xi_1(t)=re^{0t}=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$

解　当$\lambda_2=\lambda_3=-3$时　由于$r(A+3E)=2$

$$(A+3E)^2=\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为　$r_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},s_0=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

对$r_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$　$r_1=(A+3E)r_0=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\xi_2(t)=e^{-3t}(r_0+tr_1)=e^{-3t}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=e^{-3t}\begin{pmatrix}-1-t\\1+2t\\-t\end{pmatrix}$$

$$\text{对} s_0=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad s_1=(A+3E)s_0=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\xi_3(t)=e^{-3t}(s_0+ts_1)=e^{-3t}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}\right)=e^{-3t}\begin{pmatrix}-1-2t\\4t\\1-2t\end{pmatrix}$$

$$x(t)=C_1\xi_1(t)+C_2\xi_2(t)+C_3\xi_3(t) \quad =C_1\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}-1-t\\1+2t\\-t\end{pmatrix}+C_3e^{-3t}\begin{pmatrix}-1-2t\\4t\\1-2t\end{pmatrix}$$

其中C_1,C_2,C_3为任取常数

三. (9分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续, 在$(0,1)$内大于0, 并且满足 $xf'(x)=f(x)-3x^2$, 曲线$y=f(x)$与直线$x=1, y=0$所围图形D的面积为2, 求 (1) 函数$f(x)$; (2) D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) $xf'(x)=f(x)-3x^2 \quad \Rightarrow f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-3x$

$$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int -3xe^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x(-3x+C)$$

$$\int_0^1 x(-3x+C)dx=-1+\frac{C}{2}=2 \qquad C=6 \qquad f(x)=6x-3x^2$$

(2) $$V_x=\pi\int_0^1(6x-3x^2)^2dx=\frac{24\pi}{5}.$$

四. (9分) 已知 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数;

(2)求 $f(x)$ 的值域;

(3)求由 $y=f(x), x=0, x=\pi, y=0$ 围成图形的面积.

解 (1) 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt \xlongequal{令t=\pi+u} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du = f(x).$$

(2) 对于任意 $x\in[0,\pi]$ $f'(x)=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x-\sin x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos x-\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\sqrt{2} \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=2-\sqrt{2}$$

$f(\pi)=f(0)=1$ 所以函数 $f(x)$ 的值域 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

四. (9分) 已知$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$

(1) 证明$f(x)$是以π为周期的函数;

(2)求$f(x)$的值域;

(3)求由$y=f(x), x=0, x=\pi, y=0$围成图形的面积.

解 (3) $D=\int_0^{\pi} f(x)dx = xf(x)\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx = \pi.$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x-\sin x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x-\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$$

五.（6分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(1)=0$，

证明：存在 $\xi\in[0,2]$，使 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

证明 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(\eta)}{2}(x-1)^2$ η 介于 x 与1之间

$$=f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-1)^2$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(f'(1)(x-1)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-1)^2\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{f''(\eta)}{2}(x-1)^2dx=\frac{f''(\xi)}{2}\int_0^2(x-1)^2dx=\frac{1}{3}f''(\xi)\quad \xi\in[0,2]$$

存在 $\xi\in[0,2]$，使 $f''(\xi)=3\int_0^2 f(x)dx$.

六．（5分）(1)设n是正整数，计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$;

(2)证明对任意正实数p,函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\,dt$存在.

证明 (1)$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \int_{n\pi}^0 (n\pi-t)|\sin(n\pi-t)|(-dt)$

令$x=n\pi-t$ $\quad = \int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt$

$$= \int_0^{n\pi} n\pi|\sin t|dt - \int_0^{n\pi} t|\sin t|dt$$

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \frac{1}{2}\int_0^{n\pi} n\pi|\sin t|dt = \frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt$$

$$= \frac{n\pi}{2}\cdot n\int_0^{\pi}|\sin t|dt = \frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = n^2\pi.$$

六．（5分）(1)设n是正整数，计算$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$;

(2)证明对任意正实数p,函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\sin t|^p\,dt$存在.

证明 (1)$I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx=\int_0^{\pi}(t+k\pi)\sin t\,dt$　　令$x=k\pi+t$

$$=\int_0^{\pi} t\sin t\,dt+k\pi\int_0^{\pi}\sin t\,dt \;=(-t\cos t+\sin t)\big|_0^{\pi}+2k\pi$$

$$=(2k+1)\pi$$

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1} I_k=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi=n^2\pi.$$

$$(2)\quad J_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x\,|\sin x|^p\,dx=\int_0^{\pi}(t+k\pi)(\sin t)^p dt \qquad \text{令}\, x=k\pi+t$$

$$=\int_0^{\pi}\left(t(\sin t)^p+k\pi(\sin t)^p\right)dt=\int_0^{\pi} t(\sin t)^p dt+k\pi\int_0^{\pi}(\sin t)^p dt$$

$$A=\int_0^{\pi} t(\sin t)^p dt \qquad B=\int_0^{\pi}(\sin t)^p dt \qquad J_k=A+k\pi B$$

$$u(n)=\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|^p\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}J_k=\sum_{k=0}^{n-1}(A+k\pi B)=nA+\frac{n(n-1)}{2}\pi B$$

对$x>\pi$,取$n=\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$, $(n+1)\pi>x\geq n\pi$ $\quad \dfrac{u(n)}{((n+1)\pi)^2}\leq\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,|\sin t|^p\,dt\leq\dfrac{u(n+1)}{(n\pi)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(n)}{((n+1)\pi)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{u(n+1)}{(n\pi)^2}=\frac{B}{2\pi}$$

由夹逼准则知

函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,|\sin t|^p\,dt=\dfrac{B}{2\pi}$

(2)证明对任意正实数p,函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,|\sin t|^p\,dt$存在.