期中考试模拟题（五）参考答案

一．单项选择题　1. D; 2. C；3.A; 4. B；5.C；

二．填空题　1. $y'=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)-f\left(\sqrt{x}\right)f'(-x)\right]e^{f(-x)}$；　2. $\frac{1}{2}$；

3. -6；　4. $y(-2)=-\frac{2}{e^2}$　；　5. $dy=\frac{1-y}{x+e^y}dx$.

三．1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2-4}{\frac{\sin\pi x}{\pi x}\pi}=-\frac{4}{\pi}$,　　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=0$,　；$x=0$ 为跳跃间断点;

2. $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\frac{8}{\pi}$,　　$x=-2$ 为可去间断点;

3. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$,　　$x=1$ 为可去间断点;

4. $\lim\limits_{x\to-k}f(x)=\infty,\ k=1,3,4,5,\cdots$　　$x=-k,(k=1,3,4,5,\cdots)$ 为无穷间断点;

四．1. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}$,

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{\cos2x+2x\sin x}}{4x^3}\overset{3'}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos2x+2x\sin x}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\cos2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{8\sin2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}=\frac{1}{3}$.

$\therefore\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

2. $\ln y=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)\right]$,

两边对 x 求导得：　$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$,

所以　$y'=\frac{1}{2}\sqrt{e^{\sin\frac{1}{x}}\sqrt{e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$.

3. $\frac{dy}{dt}=-3+\frac{2t}{1+t^2}$,　　$\frac{dx}{dt}=2+\frac{1}{1+t^2}$,　　$\frac{dy}{dx}=\frac{-3+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}}$　，$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$,

$t=0$ 时，$(x,y)=(3,2)$;　　;切线方程为：$y-2=-(x-3)$;　；法线方程为：$y-2=(x-3)$;

4. $f'(x)=-x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(5-x)x^{-\frac{1}{3}} \;=\frac{5(2-x)}{3\sqrt[3]{x}}$，$(x\neq 0)$;　　$x=0$ 为不可导点;

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'<0$，　　当 $x\in(0,2)$ 时，$f'>0$，　　当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'<0$;

所以，极小值 $f(0)=0$ ，　　极大值 $f(2)=3\sqrt[3]{4}.$

5. $y'=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$,　　$y''=(x-1)(x-3)\mathrm{e}^{-x}$,

所以 ，凹（上凹）区间为：$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ ，　；凸（下凹）区间为：$(1,3)$.

拐点为：$\left(1,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$ 和 $\left(3,\frac{10}{\mathrm{e}^3}\right)$.

6. (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2$,　；$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$,　　若函数 $f(x)$ 连续，则 $a=2$,

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$,　；$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}-2}{x}=2$,　　若函数 $f(x)$ 可导，则 $b=2$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+1}{x^2}, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ 2\cos 2x, & x>0.\end{cases}$$

五．1. $x_{n+1}>1$ $(n\in N_+)$ ，$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{1+x_n}\left|x_n-\sqrt{2}\right|$ ，

所以 $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right| \;<\; \cdots<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{2}\right| \;<\; \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$ ，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-\sqrt{2}\right)=0$，　$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{2}.$

2. $f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$，得 $f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$,

$f'(x)-f'(0)=f''(\xi_2)x$, 得 $f'(x)=f''(\xi_2)x$,　；因 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，则 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续，则在 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上必有最大值，设 $M=\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(|f(x)|+|f'(x)|\right)=\left(|f(\eta)|+|f'(\eta)|\right)$ ，

则 $M=\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|\eta^2+\left|f''(\xi_2)\right||\eta|\le M\left(\frac{1}{2}\eta^2+|\eta|\right)\le\frac{5}{8}M$ ，故 $M=0$.

从而 $\exists\delta=\frac{1}{2}$，当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$f(x)\equiv 0$.

中国大学MOOC