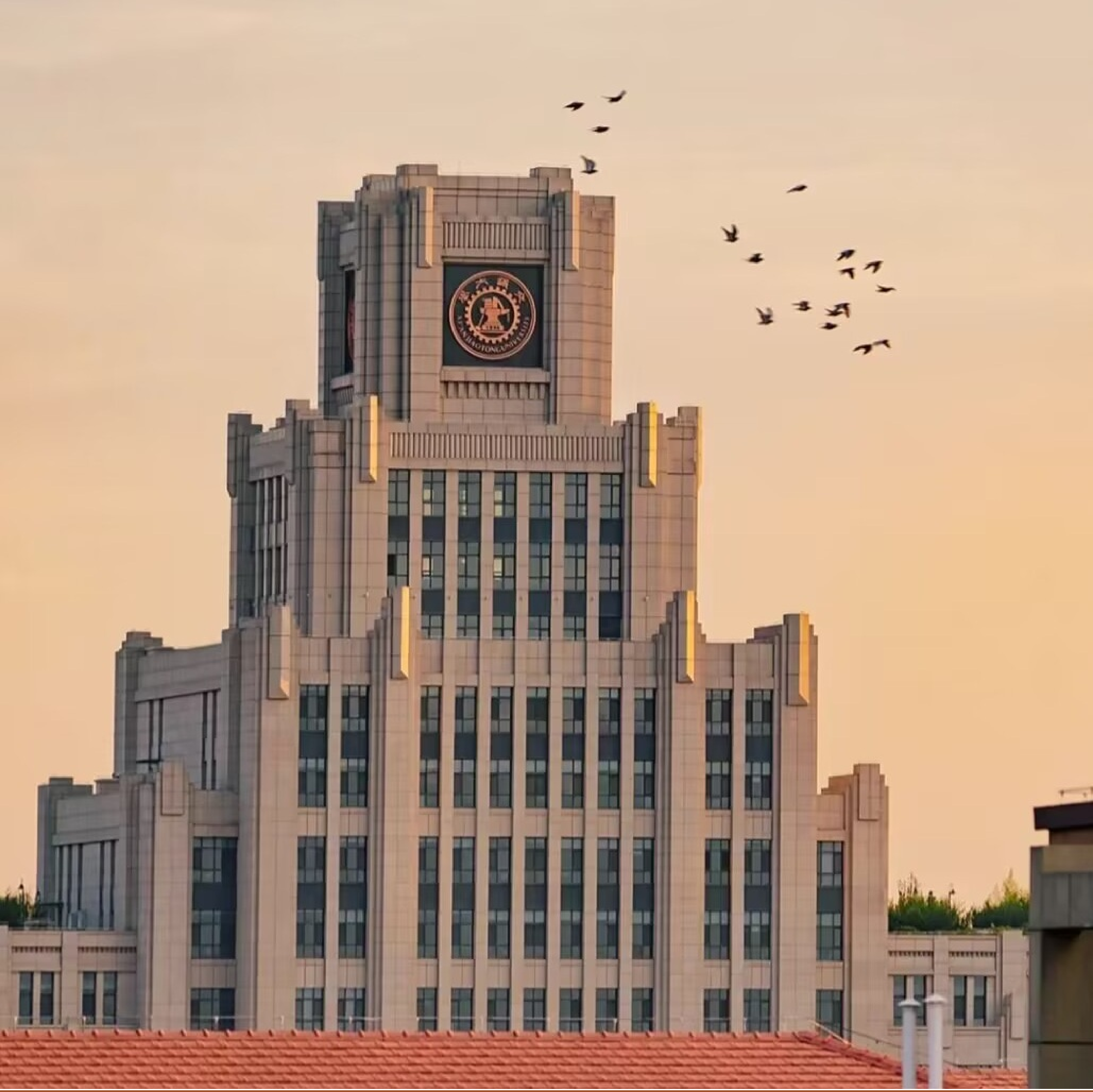

高数上习题归纳

作者：仲英学业辅导中心

时间：2024 年 12 月 19 日

Mathematics is the queen of the sciences. ——Johann Carl Friedrich Gauss

编者说

随着考试的临近，我们[1]深知大家面临着巨大的学习压力。为了帮助大家更有效地复习和掌握高等数学的考试题型，仲英学业辅导中心特别编写了这份高数习题归纳材料。本资料涵盖了常见的题型和解题技巧，旨在帮助大家快速梳理知识点，提高应试能力。

无论你是对某些概念感到困惑，还是希望通过练习提升自己的解题速度，这份资料都能为你提供切实的帮助。希望同学们能够充分利用这些资源，在考试中取得优异的成绩。

这是仲英学辅第一次尝试以习题归纳的方式来编写小助手，希望能更好地帮助到同学们复习，并且掌握做题技巧。也建议同学们在准备考试的时候学会自己整理习题、整理做题技巧，寻求各类题目之间的变与不变。另外，如果有同学对这份资料有什么疑问或者建议，都可以随时联系在学粉群里联系学辅成员。祝大家考试顺利！

——蔡芳仪

这册高数小助手的编写思路大概可以概括为三个方面：知识点，题型以及技巧方法。大部分题目出自历年期中，还有吴慧卓老师习题课资料。这边建议本书可以搭配章习题和真题配套使用哦！

另外学姐有一些关于高数期中的小感言：首先，大家一定要相信所有数学组的老师们，他们都是非常厉害的老师，考试的内容也一定会和他们上课讲的相一致（这点比高中好多了）；很多同学可能会对上大学来的第一次大型考试感到异常焦虑（我当时觉得它决定了我四年的命运）。但其实它远没有那么恐怖，大学是一个高投入就一定会有高回报的地方，只要准备充分，胜利自在前方，一定要对自己有足够的信心，你肯定可以的！

——林嘉玙

关于高数期末的备考，大家一定不要慌张，可以先从基本概念的掌握，熟悉基本的重要公式，再到常见结论和解题技巧的运用，由浅入深，有条不紊。复习的时候可以多做一做课后题，既有难度也有“考度”，题目不是做的越多越好，重在理解归纳。祝大家“高考”必胜！

——朱新

感谢大家对学辅导工作的关注！同时也感谢仲英学辅志愿者的付出！我们的志愿者们在过去的几个月里投入了大量时间和精力，精心准备了各类学习材料与活动，希望大家能够积极参与学辅的活动，互相帮助，共同进步！

——肖追日

祝大家学习顺利，取得理想的成果！同时欢迎加入仲英学辅官方答疑 QQ 群：**949045188**。此外如果你对仲英学辅的工作感兴趣，欢迎私聊学粉群管理员 or 邮箱致信 →chuijih.hsiao@gmail.com

---

[1] **主编：**蔡芳仪、林嘉玙、朱新、马驿飞、刘润钦；**审核：**孙晨晰、王宜田、肖追日

目录

第 1 章 微分学

内容提要

- 求极限
- 判断间断点
- 导数的应用
- 一元函数微分学及其综合应用

1.1 求极限

1.1.1 收敛数列的定义

定义 1.1 (数列收敛)

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $|A - a_n| < \epsilon$，则称 a_n 数列收敛于常数 A。♣

在证明题中，利用收敛数列的定义进行证明是非常重要的方法。

例题 1.1(p27 例题 2.2) 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

证明

若 $q = 0$, 结果显然成立。下面只需证明当 0<|q|<1 时结果也成立即可.

设 $\epsilon > 0$.

为使 $|q|^n < \epsilon$, 只需 $nln|q| < ln\epsilon$, 即 $n > \dfrac{ln\epsilon}{ln|q|}$.

取 $N = [\dfrac{ln\epsilon}{ln|q|}] + 1$, 则当 $n > N$ 时，就有 $|q^n - 0|<\epsilon$.

由定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

□

例题 1.2(使用定义法证明极限) 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+3n+1} = 0$

证明 根据定义有:

$$|x_n - 0| = \left|\frac{\sin(n^2+1)}{n^2+3n+1} - 0\right| = \frac{|\sin(n^2+1)|}{|n^2+3n+1|} \leq \frac{1}{n^2+3n+1} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$$

$\forall \varepsilon > 0$ 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则对 $\forall n > N$ 有:

$$|x_n - 0| = \left|\frac{\sin(n^2+1)}{n^2+3n+1} - 0\right| < \varepsilon$$

□

笔记 对收敛数列定义进一步理解:
- 对于 ϵ 具有任意性和给定性，给定之前可以任意，即可以任意小。给定之后就是一个确定的常数。
- N 的取值由给定的 ϵ 确定，刻画了保证定义成立的 n 的变大程度。换句话说就是 $n > N$ 时定义成立。
- 关于“恒有”要求 $n > N$ 项后所有项成立，不能是无限项。

1.1.2 收敛数列的性质

在本章节的习题中，要熟练掌握收敛数列的相关性质，以便在证明和计算题目当中熟练运用。

定理 1.1 (唯一性)
收敛数列的极限是唯一确定的.

定理 1.2 (有界性)
收敛数列是有界的.

定理 1.3 (保号性)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0$, 则 $\exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, a_n 与 a 同号. 并且, 若 $a > 0$ (或 $a < 0$), 则 $\exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $a_n \leq q > 0$(或 $a_n \geq q > 0$).

推论 1.1 (保序性)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 若 $\exists N_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$.

保序性是保号性的推论，在题目中有较多应用。

定理 1.4 (夹逼性)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 若存在 $\exists N \in N_+$, 使得 $\forall n > N$, 恒有 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

例题 1.3(经典例题) 设a_n 单调增，b_n 单调减 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，证明两个数列均收敛且有相同极限

解 利用收敛数列的有界性可以判断两个数列是否收敛，再利用收敛数列的有理运算法则，可以得出两个数列的极险。

证明 由题设可知，$b_n - a_n$ 单调减少.

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 即$b_n - a_n$ 的下确界为 0，可知 $b_n \geq a_n$.

从而有a_n 单调且有上界 b_1, b_n 单调且有下界 a_1.

故两数列均收敛.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n).$$

□

1.1.3 收敛数列判别方法

1. 单调有界准则: 单调增减有上下界的数列必收敛。优点：利用数列本身的特性。缺点：单调性有时不好确定。

例题 1.4(单调有界准则的应用) 已知 $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{a_{n-1}+2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明

分析: 并不是所有人都会求这个数列的通项公式。但是我们可以通过证明数列单调有界来证明数列收敛。首先我们能发现数列有上界 2, 容易使用数学归纳法证明。然后就是证明数列单调了。

先证明 $a_n < 2$. 首先 $a_1 < 2$, 假设 $a_k < 2$, 那么 $a_{k+1} = \sqrt{a_k+2} < \sqrt{2+2} = 2$

$\therefore a_n < 2 \forall n$ 成立证明完毕。数列的有界性得到了证明;

再证明数列单调递增。令 $t = \sqrt{a_n+2}$, 则 $a_n = t^2 - 2$ 那么:

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+2} - a_n = t - (t^2-2) = -(t+1)(t-2) > 0$

数列单调递增，数列的单调性得到证明；于是数列单调递增且存在上界限;

根据单调有界准则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

从而令 $A = \sqrt{A+2}$ 解得数列极限为 $A = 2$;

□

2. 夹逼准则:(见定理 4.4) 优点：不但证明收敛，而且能求极限。缺点：要利用另外两个收敛数列。

笔记 在应用到夹逼性的题目中时，通常需要对题目进行适当的放大和缩小，得到两个极限存在且相当的数列，使它们满足（或从某一项开始满足）夹逼不等式，这也是使用夹逼的关键和困难所在。

3.Cauchy 收敛原理: 数列a_n 收敛的充要条件为它是 Cauchy 数列。优点：为充要条件，既能证明收敛又能证明发散。缺点：不能用来求极限。

定义 1.2 (Cauchy 数列)

设a_n 为一个实数列, 若满足下述条件: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+$, 使得 $\forall m, n > N, |a_m - a_n| < \epsilon$. ♣

例题 1.5(p40 例 2.12) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明数列发散.

证明

$\exists\epsilon_0>0, \forall N\in N_+$, 使得 $\exists m,n>N$, 使得 $|a_m-a_n|\geq\epsilon_0$.

对于 $\epsilon_0=\frac{1}{2}$, 取 $m=2n$.

由于 $|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}$.

因为 $\frac{1}{2}$ 不满足无穷小, 不是 Cauchy 数列, 所以是发散数列.

□

1.1.4 数列极限的求法

(1) 有理运算法则

定义 1.3

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a+b$;

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}, b_n\neq0.$

♣

例题 1.6(西工大高数期中)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1}=\frac{1}{2}$

由此可得原式为 $\frac{1}{2}$

(2) 夹逼准则

例题 1.7(2017 高数上期中)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$

解 首先，原式 $\geq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3$

其次，原式 $\leq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\sqrt[n]{3}$

由常用结论（见下文）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$

所以可以得到原式 ≤3

由夹逼准则可知，原式 =3

例题 1.8(变式)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+(1+\frac{1}{n})^n+(1+\frac{2}{n})^n+\ldots+(1+\frac{n}{n})^n}$

解 首先，原式 $\geq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{n}{n})^n}=2$

其次，原式 $\leq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot(1+\frac{n}{n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{n}=2$

由常用结论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

所以可以得到原式 ≤2

由夹逼准则可知，原式 =2

笔记 一些书上例题的结果可以作为**常用结论**在其它题目中使用:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (0<q<1)$

(3) 单调有界准则，判定后找到递推关系

例题 1.9(2021 高数期中)

设数列 x_n 满足 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

证明 寻找数列递推关系，利用单调有界准则证明数列收敛，再求其值。

假设数列 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}$ 极限存在那么有：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}$ 同时取极限可将等式化为 $a=\dfrac{a+2}{a+1}$

可得 $a=\sqrt{2}$

那么我们不妨构造 $y_n=|x_n-\sqrt{2}|$，那么：

$$y_{n+1}=|x_{n+1}-\sqrt{2}|=|\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}|=\frac{\sqrt{2}-1}{x_n+1}|x_n-\sqrt{2}|=\frac{\sqrt{2}-1}{x_n+1}y_n$$

又显然有 $x_n>0$ 成立，所以 $y_{n+1}<(\sqrt{2}-1)y_n$;

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-\sqrt{2}|=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

□

笔记 在题目中可得 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{3}$，$x_3=\dfrac{7}{5}$ 单调递减是在 $n\geq 2$ 时成立的。由此可以说明数列有限项的特性不影响数列整体的性质，因此在做题时要学会从整体出发，而不是受到个别几项的干扰。

例题 1.10(经典例题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q, |q|<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

证明 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ 即可

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=|q|<1$

由保号性可知 $\exists N$, n>N 时，$|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|<1$

从而 $\exists r, n>N$ 时, $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|<r<1$, 即 $|a_{n+1}|<r|a_n|$

$|a_{n+1}|=|a_{N+1}|\cdot|\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}|\cdots|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}|\cdot|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|\leq|a_{N+1}|r^{n-N}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{N+1}r^{n-N}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

由夹逼准测可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

□

(4) 重要极限及其衍生形式

在题目中通过化简将原式转化为已知的极限

- $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sin n}{n}=1$
- $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\tan n}{n}=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$

1.1.5 函数极限的求法

函数极限有九种方法，一下将对每种方法进行介绍同时进项拓展补充和例题讲解（有些性质、方法和收敛数列接近只进行简单介绍）

(1) 利用基本极限求极限

笔记

常用的基本极限的总结:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$
- $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_1x+a_0+L}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_1x+b_0+L}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}(n=m),\\ 0,(n<m)\\ \infty(n>m).\end{cases}$$
- $$\lim_{x\to\infty}x^n=\begin{cases}0(|x|<1),\\ \infty(|x|>1),\\ 1(x=1).\end{cases}$$

例题 1.11(2019 高数上期中) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=9$，则 a=

解 这道题要用到重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 的变形

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x &= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^x \\
&= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{(\frac{x-a}{2a})(\frac{2a}{x-a})x} \\
&= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{(\frac{x-a}{2a})(\frac{2a}{1-a/x})} \\
&= e^{2a}
\end{aligned}
$$

由 $e^{2a}=9$ 可得，$a=ln3$

(2) 利用等价无穷小代换求极限

定义 1.4

若 $a\sim a_1$、$b\sim b_1$，则 $\lim\frac{a}{b}=\lim\frac{a_1}{b_1}$

定理 1.5

有限个无穷小的和仍是无穷小

有限个无穷小的积仍是无穷小

无穷小量与有界量的积仍是无穷小**【这条性质在选择题的判断中会被经常应用】**

常用等价无穷小的总结

当 $x\to 0$ 时:

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim ln(1+x)\sim e^x-1$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$a^x-1\sim xlna$

$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$

$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$

例题 1.12(2017 高数期中) 当 $x\to 0$，$ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小 (　)

$A.1+2\sin x$

$B.x$

$C.2x^2$

$D.2x$

解 已知

$$\sin x\sim ln(1+x)\sim x.$$

因此，原式

$$\sim 2\sin x$$
$$\sim 2x.$$

故选 D。

笔记 题型介绍：利用等价无穷小的定义。需要熟练掌握常见的等价无穷小

例题 1.13(2021 高数期中) $\lim\limits_{x\to0}(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}}=$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to0}(1+2xe^x)^{\frac{1}{x}\frac{1}{2xe^x}2xe^x}\\&=\lim_{x\to0}(1+2xe^x)^{\frac{1}{2xe^x}\frac{2xe^x}{x}}\\&=e^2.\end{aligned}$$

笔记 题型介绍：为利用等价无穷小求极限题。这道题要熟练掌握基本模型 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ (注意观察括号里为无穷小项，指数位置为无穷大项)

这种题型的通用方法总结就是根据已知模型对题目进行化简和构造。

例题 1.14(2019 高数期中)

已知 $x\to0$ 时，$\sin x$ 与 $ln(ax+1)$ 为等价无穷小，则 a=

解 由条件可得：

$$\lim_{x\to0}\frac{ln(1+ax)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=1$$
$$a=1.$$

例题 1.15(经典例题)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+\cos x-2}{x\arcsin 2x}=\_\_.$$

解

依据题意有：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+\cos x-2}{x\arcsin(2x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+\cos x-2}{2x^2}\cdot\frac{2x}{\arcsin(2x)}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{2x^2}+\frac{\cos x-1}{2x^2}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

主要是 $arcsin, \mathrm{e}^x-1, cosx-1$ 等无穷小量的等价代换的应用

例题 1.16(经典例题)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}.$$

解

解令$t=\dfrac{1}{x}$,则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\\&=\lim_{t\to 0}(\cos t+\sin t^2)^{\frac{1}{t^2}}\\&=\lim_{t\to 0}e^{\frac{1}{t^2}\ln(\cos t+\sin t^2)}.\end{aligned}$$

利用等价关系:$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t+\sin t^2)}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t+\sin t^2-1)]}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln[1+(\cos t+\sin t^2-1)]}{\cos t+\sin t^2-1}\right.\\&\left.\cdot\frac{\cos t+\sin t^2-1}{t^2}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t+\sin t^2-1)]}{\cos t+\sin t^2-1}\\&\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t+\sin t^2-1}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t-1}{t^2}+1\right)\\&=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以原式极限为$\sqrt{e}$.

例题 1.17(经典例题)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}.$$

解

由极限的运算法则与等价无穷小, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x-\sin x)[1+\tan(\tan x)\tan(\sin x)]}{\tan x-\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)[1/\cos(\sin x)-1]}{\tan x-\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}[1+\tan(\tan x)\tan(\sin x)]+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=2\end{aligned}$$

笔记 题型总结：利用等价无穷小的性质求参数问题。

补充无穷小和无穷大的问题

问题一：k 阶无穷小

定义 1.5 (无穷小的阶)

若 $\lim \dfrac{a(x)}{b(x)^k}=c$（其中是常数 $c\neq 0, b(x)\neq 0$ and $k>0$），则称 $a(x)$ 是关于 $b(x)$ 的 k 阶无穷小。特别地，若 $b(x)=x-x_0, \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{(x-x_0)^k}=c$ 则称 $a(x)$ 是 $x\to x_0$ 的 k 阶无穷小 ♣

例题 1.18(经典例题)

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的（　）阶无穷小

解 由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^6(1+\sqrt{\cos x^2})}{1-\cos x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x^6}{\frac{x^4}{2}}\\&=\lim_{x\to 0}4x^2=0.\end{aligned}$$

故当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是无穷小量，且

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=4.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 2 阶无穷小。

无穷大量与无界量的判断

定义 1.6 (无穷大量)

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\to\infty$，称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量 ♣

（1）两个无穷大量的乘积仍为无穷大量 （2）无穷大与有界变量之和仍未无穷大

笔记 区分无穷大量和无界变量：1. 无穷大量是无界量的一种，而无界量不一定是无穷大量。

2. 无穷大量具有任意性，即任意 $x>x_0$ 都要满足的性质，但是无界量具有存在性，即每一点都可以有限但整体无界。

在选择题中经常出现的一种题型，通常作为辨析题出现，容易搞混，且作为前两道题出现很容易搞人心态。

例题 1.19(2019 高数期中) 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是

A 无穷小

B 无穷大

C 有界但非无穷小量

D 无界但非无穷大

解 当 $x \to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ 且 $sin\frac{1}{x}$ 不恒等于 0，因此 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界量。

又因为，$sin\frac{1}{x}$ 为震荡函数（即不是一直增大或者一直减小而是随着 x 的改变而呈现出震荡的形态），使原式 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无法满足无穷大要求的任意性。

综上，选 D 无界但非无穷大

(3) 利用洛必达法则求极限

定理 1.6 (洛必达法则 $\frac{0}{0}$ 型不定式)

设函数 f, g, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$ 内满足其下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$= $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$=0;

(2)f, g 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$(a 为有限实数或无穷大)

则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$$

定理 1.7 (洛必达法则 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)

设函数 f,g, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$ 内满足其下列条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$= $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$=$\infty$;

(2)f, g 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$($a$ 为有限实数或无穷大)

则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$$

例题 1.20(经典例题) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x\sin x-x(x-1)}{1-\cos x})$

解 原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x^2-x}{x^2/2}$$

又因为该极限为 $\frac{0}{0}$ 型，故可用洛必达法则。

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-2x-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x)-2}{1}\\
&= \lim_{x\to 0} 2\cos x e^x-2\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

笔记 题型总结：改题目应用了等价无穷小和洛必达法则。当觉得走投无路或者式子太复杂没办法直接用等价无穷小时，洛必达法则是一个很好的选择

但是一定要注意是否符合洛必达法则应用的条件即是否为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

例题 1.21(经典例题) 下列极限中能使用洛必达法则的是：

$A\ \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$

$B\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

$C\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

$D\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^2}$

解 A: 将原式化简为:

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}.$$

易知，为 $\frac{0}{0}$ 型。

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

B: 对原式分子分母求导后不满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a(a$ 为有限实数或无穷大)。

C 对原式分子分母求导后不满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a(a$ 为有限实数或无穷大)。

D 化简后的式子 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 不满足 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$

故综上，这道题选 A.

笔记 题型总结：从两方面判断：

（1）原式（或简单化简后）是否满足 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$

（2）对原式分子分母求导后是否满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$(a 为有限实数或无穷大)。

(3) 利用泰勒展开求极限

常用麦克劳林公式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$$

$$ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

笔记 在题目中要对基本公式做一定变形。

例题 1.22(经典例题) 求下列极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}]$

解 其中 $(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}$ 应用麦克劳林公式可得；

$$=(x^3-x^2+\frac{x}{2})[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})]$$

$$=x^3+\frac{1}{6}+o(1).$$

对 $\sqrt{x^6+1}$ 利用麦克劳林公式可得：

$$=x^3(1+\frac{1}{x^6})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^3[1+\frac{1}{2x^6}+o(\frac{1}{x^6})]$$

$$=x^3+o(1).$$

其中 $o(1)$ 表示 $x\to\infty$ 时的无穷小，因此原式

$$=\lim_{x\to+\infty}(x^3+\frac{1}{6}+o(1)-x^3+o(1))$$

$$=\frac{1}{6}.$$

1.2 判断间断点

1.2.1 函数的连续性

定义 1.7 (函数在一点连续)

设函数 $f\colon U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

则称 f 在 x_0 处连续

在做题中经常使用用极限定义的函数连续性

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)(\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)).$$

则称 f 在 x_0 处左连续 (右连续)，左右统称为单侧连续

定义 1.8 (极限定义的函数连续性)

f 在 x_0 处连续 $\rightleftarrows$f 在 x_0 处既左连续又右连续

结论

函数 f 在 x_0 处连续必须满足以下三个条件

1. f 在 x_0 处有定义;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，即 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 均存在且相等;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

例题 1.23(2017 高数期中) 设函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \dfrac{1}{x^2} (x \neq 0), \\ 0 (x = 0). \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

A 极限不存在

B 极限存在但不连续

C 连续

D 以上结论都不正确

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

满足要求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ 因此函数极限存在且连续，选 C。

结论 这道题考察了学生对函数连续定义的理解，从定义 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ 出发，对 $x = 0$ 点求极限可得结论。

同时在求极限的过程中应用了无穷小乘以有界量等于无穷小的结论，使求解过程变得简单便捷。

例题 1.24(2019 高数期中) 设

$$f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}(x<0), \\ b+1(x=0), \\ \dfrac{\sin ax}{x}(x>0). \end{cases}$$

当 $a =$____，$b =$____ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续

解

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^-}(1+2x)^{\frac{2}{2x}} \\ &= e^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0}(b+1) \\ &= b+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x} \\ &= a. \end{aligned}$$

已知连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $e^2 = b+1 = a$

综上解得：$a = e^2$，$b = e^2 - 1$

结论 这道题的关键点是从 $x = 0$ 点来判断，可以用连续函数的极限法定义来做

1.2.2 函数的间断点

函数的间断点分类：

第一类间断点 (函数的左右极限都存在的间断点)

1. 可去间断点

性质 函数在该点左右极限存在且相等但是函数在该点无定义或者极限值与该点函数值不相等

2. 跳跃间断点

性质 左右极限都存在但是不相等的间断点

第二类间断点 (左右极限有一个不存在，或者都不存在的称为第二类间断点)

常见类型：无穷间断点，震荡间断点。

例题 1.25(经典例题) 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)\cdot ln|x|\cdot\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-1}$ 的可去间断点个数为

解 找间断点:

由 $x^2-1=0$ 以及 $ln|x|$ 间断点有三个：$1,-1,0.$

分别讨论

化简可得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)\cdot ln|x|\cdot\sin\frac{1}{x}}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot ln|x|\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 0}-x\cdot ln|x|\cdot\sin\frac{1}{x}\\&=0.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}xln|x|$ 为无穷小量,而 $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x-1}$ 是有界量,由无穷小乘以有界量仍是无穷小可知,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$x=0$ 是可去间断点。

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x\cdot ln|x|\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-1}=0.$$

因此，$x=-1$ 是可去间断点。

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot ln|x|\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-1}=\sin 1.$$

因此，$x=1$ 为可去间断点。

综上所述，一共有三个可去间断点。

笔记 本题需要学生对不同间断点类型有较好掌握。

能够要找到所有间断点，一般在没有定义，或者分段函数的间断点处，可以复习初等函数的相关性质。

其次对间断点的判断，如果该间断点极限存在则一定是可去间断点。如果不存在需要对左右极限讨论来判断是第一类间断点还是第二类间断点。

例题 1.26(2021 高数期中) 求函数的间断点并指出其类型

$$\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin(\pi x)}(x<0),\\ \dfrac{x(x-1)}{x^2-1}(x\geq 0).\end{cases}$$

解 找出间断点：$x=1,x=0,x=i\ (i=-1,-2,\cdots-n)$;

分别讨论:

$x=1$ 时:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此 $x=1$ 为函数第一类可去间断点。

$x=0$ 时:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x^2-4)}{\pi x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-4}{\pi}\\ &= \frac{-4}{\pi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(x+1)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此 $x=0$ 为函数第一类跳跃间断点。

$x=-2$ 时:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f(x) &= \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x-2)}{\sin(\pi x)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{8(x+2)}{\sin(\pi(x+2))}\\ &= \frac{8}{\pi}.\end{aligned}$$

因此 $x=-2$ 为函数第一类可去间断点。

$x=i\ (i=-1,-3,\cdots-n)$ 时，$\lim\limits_{x\to i} f(x)=\infty$ 为第二类间断点。

笔记 该题型为大题，是高数上期中必考题型，需要学生熟练掌握。

要将这类题完全做对往往需要学生 1. 要找出全部的间断点，一般可以从无定义点，分段函数的间断点下手，可以复习初等函数的性质等相关知识；2. 掌握不同间断点的特征，运用极限是否存在，左右极限是否存在且相等来判断；3. 对学生的求极限能力有较高要求，同时还要掌握一定的技巧例如：洛必达法则，无穷小有界量的结合。

1.3 导数的应用

1.3.1 导数的定义

定义 1.9

若极限

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\\&=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$

存在则认为 f 在 x_0 处可导, 并称该极限值为 f 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ ♣

笔记

函数在某一点可导的严谨论述

要严谨地论述函数在某一点可导的性质，我们需要用到导数的定义。设 f 是一个实值函数，我们希望讨论 f 在某一点 a 的可导性。

函数 f 在点 a 处可导，意味着以下极限存在：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

一些注意事项：

1. **左导数与右导数**：- 若 h 从左侧趋近于 0，定义左导数为：

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- 若 h 从右侧趋近于 0，定义右导数为：

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- 如果 $f'(a)$ 存在，那么 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$ 必须相等，即：

$$f'_-(a)=f'_+(a)=f'(a)$$

2. **极限的存在性**：- 为了 $f'(a)$ 存在，必须满足极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

必须是一个确定的有限值。这意味着无论 h 是正数还是负数，$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 在 h 趋近于 0 时的值都应收敛到同一个数。

3. **可导性与连续性的关系**：- 如果 f 在点 a 可导，则 f 在点 a 处必须连续。这可以表述为：

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$$

- 然而，反之不一定成立：如果 f 在点 a 处连续，不一定可导。

4. **可导性的几何意义**：- 函数 f 在点 a 可导的几何意义是，函数图像在点 $(a, f(a))$ 处有一个切线，切线的斜率为 $f'(a)$。

笔记 要求：对极限的应用以及对导数定义的正确理解。

例题 1.27(经典例题) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：

A 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;

B 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;

C 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在;

D 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

解

A 中若要使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，已知分母 $\lim\limits_{x\to0}x=0$ 则分子需要 $f(0)=0$;

B 若要使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 x 需要 $\lim\limits_{x\to0}f(x)+f(-x)=0$ 即 $f(x)=0$;

$C\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 可以补成 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 为 $f(x)$ 在 0 处的导数，由导数的定义可知，$f'(0)$ 存在;

D 若要证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在。以下为错误证法：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)+f(-x)-f(0)}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}\\
&=2f'(0).
\end{aligned}
$$

错误原因已知由极限的有理运算法则可知 $\lim a+b=\lim a+\lim b$ 当且仅当 $\lim a$ 和 $\lim b$ 均存在。而我们的目标就是要证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}, \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}$ 即 $f'(0)$ 存在，不能将结果作为条件出现在证明中。

故这道题选 D.

1.3.2 求导的基本法则

1. 复合函数求导法则

定理 1.8 (链式求导法则)

设在 $u=g(x)$ 在 x 可导, 函数 $y=f(u)$ 在于相对 x 的 u 处可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在处可导，并且
$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

2. 反函数求导法则

定理 1.9 (反函数求导法则)

设 $y=f(x)$ 为在 I 严格单调连续函数，且函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，且 $y=f^{-1}(x)\neq 0$ 则复合函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 x 处也可导，并且
$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dy/dx}$.

几个重要的反函数导数:

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$x\in(-1,1)$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$x\in(-1,1)$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(arccot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

3. 高阶导数求导

几种常用的高阶导数求导公式

$(e^x)^{(n)}=e^x$

$(\sin x)^{(n)}=sin(x+n\frac{\pi}{2})$

$(\cos x)^{(n)}=cos(x+n\frac{\pi}{2})$

$[ln(x+1)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,$(x>-1)$

$(au+bv)^{(n)}=au^{(n)}+bv^{(n)}$

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

4. 隐函数求导

设 $y=f(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则 $F(x,f(x))=0$，根据链式法则将该方程两边对 x 求导，便可得到所要求的导数.

5. 参数方程求导法则

若函数 $x=x(t)$,$y=y(t)$ 在区间 I 上可导

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

例题 1.28(典型例题)

其中 x, y 满足参数方程

$$\begin{cases} x = t - e^{t^3-t^2} \\ t^2 - y + 1 = e^y \end{cases}$$

所唯一确定的，其中 t 为参数，试求 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}$?

解

依据题意不难得:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - e^{t^3-t^2}(3t^2 - 2t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{e^y + 1} \end{cases}$$

当 $t = 0$ 时 , $x = -1, y = 0$ (由单调性，x、y 取值均唯一)

带入上式可得:

$$\frac{dy}{dx}|_{t=0} = \frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0/1 = 0$$

例题 1.29(2019 高数上期中试题) 方程 $\sin(xy) - \ln\frac{x+1}{y} = 1$ 表示平面上一条曲线，试求该曲线在 $x = 0$ 处的切线方程和法线方程。

笔记 切线方程的斜率就是曲线在那一点的导数。

解 已知当 $x = 0$ 时，$\ln y = 1$ 即 $y = e$

$$\sin(xy) - \ln\frac{x+1}{y} = 1$$
$$(y + xy')\cos(xy) - \frac{1}{(x+1)/y}\frac{y - y'(x+1)}{y^2} = 0$$
$$e - \frac{(e - y')}{e} = 0.$$

解得 $y' = e - e^2$

1.3.3 导数对函数性态的应用

定义 1.10

函数的性态是分析其行为和图形特征的重要工具，主要包括单调性、凹凸性、拐点等。

1. 单调性

- **单调递增**：如果对于任意 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) \le f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 在该区间上是单调递增的。
- **单调递减**：如果对于任意 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) \ge f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 在该区间上是单调递减的。
- **单调性判断**：通过求导来判断。若 $f'(x) \ge 0$ 则单调递增；若 $f'(x) \le 0$ 则单调递减。

2. 凹凸性

- **凹函数**：如果在区间内任意两点 x_1 和 x_2 之间的连线在函数图像之上，即对于任意 x_1, x_2 和 $\lambda \in [0,1]$，有：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- **凸函数**：类似地，如果连线在函数图像之下，即：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- **凹凸性判断**：使用二阶导数法则。若 $f''(x) > 0$，则函数在该区间上是凸的；若 $f''(x) < 0$，则函数是凹的。

3. 拐点

- **拐点**：函数的凹凸性发生变化的点称为拐点。在拐点处，二阶导数 $f''(x)$ 可能为零或不存在，并且其符号在拐点的两侧发生变化。
- **判断拐点**：通过求 $f''(x)$ 并找出其零点，检查该点的二阶导数的符号变化。

4. 综合性态

- **全局和局部分析**：分析单调性和凹凸性可以结合全局和局部性质，确定函数的极值和图形的整体特征。
- **应用**：这些性质在优化问题、经济学模型、物理现象等多个领域中具有重要应用。♣

例题 1.30(2017 期末真题)

已知曲线L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \ (t \ge 0)$.

(1) 讨论曲线L 的凹凸性.

(2) 过点$(-1, 0)$ 引曲线L 的切线, 求切点坐标(x_0, y_0), 并求切线的方程.

解

(1) 定义域:$\{x|x\geq 1\}$, $y''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{2t\cdot(-2)-2\cdot(4-2t)}{(2t)^3}=-\dfrac{1}{t^3}$

$\because t\geq 0$

$\therefore y''<0$.故L在$[1,+\infty)$上是凹的

(2)$y'=\dfrac{\hat{y}}{\hat{x}}=\dfrac{4-2t}{2t}=\dfrac{2}{t}-1$.切线,$y-y_0=(\dfrac{t}{2}-1)(x-x_0)$

即$y-4t+t^2=(\dfrac{2}{t}-1)(x-t^2-1)$

将$(-1,0)$代入得$t^2+t-2=0\Rightarrow t=-2$或$1$ 又$t\geq 0$

$\therefore t=1\therefore$ 切点$(2,3)$ 切线方程为$y=x+1$

笔记

设函数$y=f(x)$在x_0处有连续 $(n\geq 2), f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$

(1) 若n 为偶数, 则x_0 为$f(x)$ 的极值点, 且当

$f^{(n)}(x_0)<0$ 时, 则x_0 为$f(x)$ 的极大值点, $f(x)$ 在x_0 处取得极大值$f(x_0)$;

当$f^{(n)}(x_0)>0$ 时, 则x_0 为$f(x)$ 的极小值点, $f(x)$ 在x_0处取得极小值$f(x_0)$.

(2) 若n 为奇数, 则$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点.

1.4 一元函数微分学及其综合应用

1.4.1 微分中值定理及其应用

定理 1.10 (Rolle 中值定理)

若函数 f 满足下列条件:

(1)f 在 $[a,b]$ 上连续;

(2)f 在 (a,b) 内可导;

(3)$f(a)=f(b)$;

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$

推论 1.2

可微函数的任意两个零点之间至少有其导函数的一个零点。

定理 1.11 (Lagrange 中值定理)

若函数 f 满足下列条件:

(1)f 在 $[a,b]$ 上连续;

(2)f 在 (a,b) 内可导;

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(a) - f(b) = f'(\xi)(b-a)$

推论 1.3

设 f 在 I 上连续，在 I 上可导，则在 I 内 $f'(x) = 0$ 的充要条件是 f 在 I 上是常数.

推论 1.4

当 $x > 0$ 时，有

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x.$$

(读者可自行证明或看工科数学分析 p136)

定理 1.12 (Cauchy 中值定理)

若函数 f 满足下列条件:

(1)f 在 $[a,b]$ 上连续;

(2)f 在 (a,b) 内可导，并且 $\forall x \in (a,b)$,$g'(x) \neq 0$;

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例题 1.31(经典例题) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，$f(a) = b$，$f(b) = a$，a 和 b 同号，证明 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

解 $f'(\xi)\xi + f(\xi) = 0$

可知 $F(x) = xf(x)$，$F'(x) = f'(x)x + f(x)$ 因此 F(x) 为其原函数。

$$F(a) = ab = F(b)$$

由 Rolle 中值定理可知 $\exists \xi(a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

笔记 这道题涉及重要考点：Rolle 中值定理；通过导数形式推断出相应的原函数，同学们可以在平常做题时注意相关函数的积累并从中寻找规律。

以下给出一些常见的导数形式及其原函数:

(1)

$$f'(x)x - 2f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = 0$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

在寻找原函数中我们可以乘以或除以一些与 x 有关的量，同时总结出以下规律：相加一般和乘法有关，相除一般和减法有关。

(2)

$$f'(x)-\lambda f(x)=0$$

$$e^{-\lambda x}f'(x)-e^{-\lambda x}\lambda f(x)=0$$

$$F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$$

(3)

$$f'(x)+g'(x)(f(x)-2x)=2$$

$$e^{g(x)}[(f'(x)-2)+g'(x)(f(x)-2x)]=0$$

$$F(x)=e^{g(x)}(f(x)-2x)$$

例题 1.32(经典例题)

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，且 a 和 b 同号。证明 $\exists\eta,\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

解 满足 Lagrange 定理所需条件，由 Lagrange 定理可得：

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi).$$

满足 Cauchy 定理所需条件，由 Cauchy 定理可得：

$$\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

综合两式可得要求证明的式子：

$$\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\cdot\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

例题 1.33(经典例题) 假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 证明：

（1）$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（2）$\exists\zeta,\eta\in(0,1)$，且 $\eta\neq\zeta$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$；

解 (1) 第一问用 Rolle 定理即可证明，这里略。

(2) 假设 $\eta\in(0,x_0),\zeta\in(x_0,1)$

且已知 $f(0)=0$，$f(1)=1$，则由 Lagrange 定理可得：

$$f'(\eta)=\frac{f(x_0)}{x_0}$$

$$f'(\zeta)=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}$$

综合两式可得:

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}$$

且由第一问可知 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$，则当 $x_0=\xi$ 时，有 $f(x_0)=1-x_0$
则可将上式化简为:

$$\begin{aligned}f'(\eta)f'(\zeta)&=\frac{1-x_0}{x_0}\frac{x_0}{1-x_0}\\&=1\end{aligned}$$

笔记 综合以上两道例题我们可以总结做题规律：对于没有要求两个变量（如第一道例题题中的 η,ξ) 不相等的，往往使用两个不同的函数，需要分别应用 Lagrange 定理或者 Cauchy 定理。

若题目中明确要求两个变量不相等（如第二道例题中的条件 $\eta\neq\zeta$），则此时应该是同一个函数只是要分成不同的两个区间，再利用 Lagrange 定理或者 Cauchy 定理。

例题 1.34(经典例题)

设$f(x)$ 在$[0,1]$ 连续, 在$(0,1)$ 可导, 且$f(0)=0,f(1)=1,\lambda_i>0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

证明存在 n 个不同的点$\xi_1,\cdots,\xi_n\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=1.$

证明

证明：由于

$$f(0)=0<\lambda_1<f(1)=1$$

根据闭区间上连续函数的性质，存在 $c_1\in(0,1)$ 使得

$$f(c_1)=\lambda_1.$$

由于

$$f(c_1)=\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1=f(1)$$

根据闭区间上连续函数的性质，存在 $c_2\in(c_1,1)$ 使得

$$f(c_2)=\lambda_1+\lambda_2.$$

依此类推由于

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}=f(c_{n-1})<\lambda_1+\cdots+\lambda_n<1=f(1)$$

根据闭区间上连续函数的性质，存在 $c_n\in(c_{n-1},1)$ 使得

$$f(c_n)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n.$$

记

$$0=c_0<c_1<\cdots<c_n<c_{n+1}=1.$$

在区间 $[c_i,c_{i+1}]$ 上适用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_i\in(c_i,c_{i+1})$ 满足

$$\begin{aligned}f'(\xi_{i+1})&=\frac{f(c_{i+1})-f(c_i)}{c_{i+1}-c_i}\\&=\frac{\lambda_{i+1}}{c_{i+1}-c_i}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\lambda_{i+1}}{f'(\xi_{i+1})}=c_{i+1}-c_i,i=0,1,\cdots,n$$

相加得到

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}\\&=[c_1-c_0]+[c_2-c_1]+\cdots+[c_{n+1}-c_n]\\&=1-0=1,\end{aligned}$$

其中 ξ_i 互不相同。[证明完毕]

□

1.4.2 泰勒展开式及其应用

定义 1.11

泰勒展开是数学分析中的一种重要工具，用于将光滑函数在某一点附近表示为其导数的无穷级数。下面是对其主要内容的总结:

1. 泰勒公式: 设函数 $f(x)$ 在点 a 处具有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在 a 处的泰勒展开为:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)$ 为余项。

2. 余项: 余项 $R_n(x)$ 可以用拉格朗日形式表示为:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 c 是介于 a 和 x 之间的某个点。

3. 特殊情况:

- **麦克劳林级数**: 当 $a=0$ 时，泰勒展开称为麦克劳林级数:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

4. 应用:

- **函数近似**: 泰勒展开可以用于函数的近似计算，特别是在 x 接近 a 的情况下。
- **解方程**: 在求解非线性方程的根时，可以用泰勒展开进行迭代逼近。
- **数值分析**: 在数值计算中，泰勒展开常用于误差分析和数值积分。

笔记 常用函数的泰勒展开形式:

$$
\begin{aligned}
&e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{c},\quad c\in[0,x]\\
&\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin(c),\quad c\in[0,x]\\
&\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(c),\quad c\in[0,x]\\
&\tan x=x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2x^{5}}{15}+\cdots+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(2^{2n}-1)2^{2n}B_{n}}{(2n)!}x^{2n-1}\\
&\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n}+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n+1},\quad c\in[0,x]\\
&\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}+\cdots+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n}\binom{1/2}{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!},\quad c\in[0,x]\\
&\arcsin x=x+\frac{x^{3}}{6}+\frac{3x^{5}}{40}+\cdots+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1-c^{2}}},\quad c\in[0,x]\\
&\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^{3}}{6}-\frac{3x^{5}}{40}+\cdots+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1-c^{2}}},\quad c\in[0,x]\\
&\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+R_{n}(x)\\
&R_{n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)(1+c^{2})},\quad c\in[0,x]
\end{aligned}
$$

例题 1.35(经典例题)

设$f(x)$ 在$[0,1]$ 上三阶可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 求证: 存在$\xi\in(0,1)$,使$|\ f''(\xi)\ |\geqslant$ 24.

解 考虑将 $f(x)$ 泰勒展开:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{f'''\left(\xi_1\right)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

在上式中令 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{1}{4}-\frac{f'''(\xi_1)}{48}=0$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{1}{4}+\frac{f'''(\xi_2)}{48}=1\,.$$

两式相减得到:

$$48=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\,,$$

从而

$$48\leqslant|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|\leqslant 2\max(|f''(\xi_1)|\,,|f''(\xi_2)|),$$

故存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $|\ f'''(\xi)\ |\geqslant 24$.

证毕!

笔记 待证明的式子中出现三阶导数。于是自然而然联想使用泰勒展开法求解；同时题干中也给出了关于函数在 $x=\frac{1}{2}$ 处的信息，于是容易联想在这里泰勒展开两次。

例题 1.36(经典例题)

设 $f(x)$ 在 [0,1] 上具有二阶连续导数，且满足 $f(0)=0$

$f(1)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}$, 证明:

(1) 存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)<2$

(2) 若对于任意的 $x\in(0,1)$, $f''(x)\neq 2$, 则对于任意的 $x\in(0,1)$, $f(x)>x^2$.

解

(1)将$f(x)$ 在$x=\dfrac{1}{2}$处泰勒展开得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

令$x=0$, 得$0=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi_1)}{8}$;

令$x=1$, 得$1=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi_2)}{8}$,

两式相加, 得$1=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}$, 即

$$4-8f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

由于$f''(x)$ 连续, 故由介值定理知存在$\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=4-8f\left(\frac{1}{2}\right)<4-8\times\frac{1}{4}=2, \text{证毕.}$$

(2)若存在$c\in(0,1)$, 使得$f(c)\leqslant c^2$, 构造函数$F(x)=f(x)-x^2$, 则

$$F(c)=f(c)-c^2\leqslant 0, F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}>0\,,$$

则由零点定理知存在$x_0\in(0,1)$, 使得$F(x_0)=0$,

因此可得$F(0)=F(x_0)=F(1)$.

利用三次罗尔定理，知存在$\eta\in(0,1)$, 使得$F''(\eta)=0$,

$f''(\eta)=2$.与已知条件相矛盾，故待证结论成立.

[注] 第二问不需要二阶导连续的条件，故本题条件还可减弱

第 1 章 练习

1. 若要判断 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2\sin x)^x - 1}{x^2}$.
4. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（）

   A. 连续点

   B. 可去间断点

   C. 跳跃间断点

   D. 第二类间断点
5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$
6. 函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx-1}{nx^2+1}$的间断点是$x=$__.
7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\cot x - \dfrac{1}{x})$
8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$
9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$
10. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$，则

    A. $x=-1$ 为可去间断点，$x=1$ 为无穷间断点

    B. $x=-1$ 为无穷间断点，$x=1$ 为可去间断点

    C. $x=-1$，$x=1$ 均为无穷间断点

    D. $x=-1$，$x=1$ 均为可去间断点
11. 求曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的斜渐近线方程.
12. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$, 试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.
13. 证明不等式：当 $e<x_1<x_2$ 时，有 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}$
14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 周期为 4, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2$, 则求曲线 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 处的切线斜率

15. 设函数在上三阶可导，且 $f(-1)=0,f(0)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，证明：存在 $\epsilon\in(-1,1)$，使得 $|f^{(3)}(\epsilon)|\geq 3$.

16. 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明在 [0,1] 存在两点 x_1,x_2，使得 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$.

17. 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶导数, $f(0)\geqslant 0, f'(0)\geqslant 0,$ 且满足$f''(x)\geqslant f(x)$, 求证:$f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x, x\in[0,+\infty)$

第 2 章 积分学

内容提要

- ❑ 定积分
- ❑ 不定积分
- ❑ 反常积分
- ❑ 极限与积分
- ❑ 积分不等式

2.1 定积分

2.1.1 上下限观察法

在使用该方法解决定积分问题时，我们首先需要清楚定积分关于上下限的两个基本性质：

性质 5.1

(a). 规定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；当 $a=b$ 时，规定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(b). （区间可加性）若 I 是一个有限闭区间，$a, b, c \in I$。若 f 在 I 上可积，则 f 在 I 的任一闭子区间内都可积，且 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

基于定积分的以上两个基本性质，在解决定积分计算题时，我们可以优先观察计算式中定积分的上下限是否满足上述要求或者是否可以通过上述性质进行化简计算。

在观察定积分上下限时，若发现上下限互为相反数，则需考虑到内部函数的奇偶性进行简化计算。对于定积分 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$, 如果内部函数 $f(x)$ 是奇函数，则原式等于 0；如果是偶函数，则原式等价于 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

2.1.2 线性法

[线性性质] 在我们平常遇到的题目中除了对区间进行拆分，同样可以对内部函数进行拆分，而合理的拆分则可以大大简化计算难度，而对内部函数的拆分就涉及定积分的线性性质：

性质 5.2

设 f, g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $\forall x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

需要注意的是，利用该性质进行计算时不仅可以对内部函数进行拆分，同样也可以进行逆向过程，即合并（前提是上下限一致且 Riemann 可积）；有时因解题需要还会给内部函数 $f(x)$ 配一个函数 $g(x)$，再减去这个函数，使内部函数变成自己所需要的形式。

2.1.3 定积分换元法

设有函数 f 在有线区间 I 上连续，$x=\psi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数，且 ψ 的值域 $R(\psi)\in I$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $a=\psi(\alpha), b=\psi(\beta)$.
一定要注意换元后上下限的变化。

2.1.4 不等式放缩法

对于一个在闭区间内的已知连续函数，其必然存在上下确界，由此可知该函数的值域；同样对于一个在闭区间上 Riemann 可积的函数也有类似的性质。下面先介绍定积分的单调性：

性质 5.3(单调性)
设 f，g 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $f(x)\le g(x)$，$\forall x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
由定积分的单调性可得到以下推论：

推论 2.1 (夹逼原理)
设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $m\le f(x)\le M,\forall x\in[a,b]$, 其中 m，M 是常数，则有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$

对于一个内部函数未知的定积分，若该定积分最值已知或是易知，则可以通过夹逼原理对该定积分进行放缩，放缩后一般是一个已知量或者一个常数乘以上下限之差，有时也可以进一步放缩达到预期值，具体方法将在之后例题中具体讲解。
接下来将介绍另外一种常用的放缩方法，即绝对值放缩法：

性质 5.4
设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.
该放缩法由于带有绝对值符号的转移，故常用来放缩一些变号函数，常见的如 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ 以及一些分段函数。

2.1.5 几何意义法

对于我们现阶段所学的定积分，其几何含义我们常用面积来理解，即积分结果等于所有面积微元的总和，也就是定积分的定义。由此对于部分规则图形的曲线公式及其面积公式（如圆、椭圆等）需要我们熟记于心，这样在进行定积分计算时可以实现快速准确的计算。

2.1.6 不定积分法

对于许多定积分计算，也可以先忽略其上下限，进行不定积分计算，再代入求解（必须注意是否在闭区间上 Riemann 可积），具体方法将在之后的不定积分小节阐述，在此就不过多赘述。

下面以一道往年期末真题为例，使用以上方法求解：

例题 2.1(2020 年期末真题) 计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$.

解 首先观察到上下限为对称区间，考虑用奇偶性简化计算。

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x = 4 \int_{0}^{1} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x + 0$$

以上进行简单的化简, 下面提供两种常用解题思路.

(1) 三角换元法:

设 $x = \sin t$，则有原式为:

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t}{1 + \cos t} \mathrm{d}t \\
&= 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t (1 + \cos t)(1 - \cos t)}{1 + \cos t} \mathrm{d}t \\
&= 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^2 t) \mathrm{d}t \\
&= 4 - \pi.
\end{aligned}$$

此处可利用后文提到的点火公式直接求得答案.

(2) 几何法:

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \mathrm{d}x \quad \text{(分母有理化，后者的值利用圆的面积可迅速求出)} \\
&= 4 - \pi.
\end{aligned}$$

2.2 微积分基本定理及公式

本书以解题技巧为主，但鉴于微积分基本定理及公式对于解题的重要性，在此只进行简单的回顾。

定理 2.1 (Newton-Leibniz 公式)

(微积分基本公式) 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 f 在区间 $[a,b]$ 上有一个原函数 F，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

定理 2.2 (微积分第一基本定理)

设 $f \in C[a,b]$, $\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $x \in [a,b]$，则 $\phi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $\phi'(x) = f(x)$.

推论 2.2

设 $f \in C[a,b]$，则 f 在区间 $[a,b]$ 上必有原函数，且变上限积分就是它的一个原函数.

定理 2.3 (微积分第二基本定理)

设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，C 为任意常数，则 $F+C$ 就是 f 在区间 I 上的所有原函数。

2.3 不定积分

对于不定积分主要有三种计算方法，分别是第一类换元法 (凑微分法)、第二类换元法以及分部积分法，为方便说明，下面称第一类换元法为凑微分法，第二类换元法为换元法。

2.3.1 凑微分法

定理 2.4

设 f 是连续函数，ψ 有连续导数，且 ψ 的值域含于 f 的定义域，则

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

其中 $u = \psi(x)$

例如: $\int 3cos(3x+1)\mathrm{d}x = \int cos(3x+1)\mathrm{d}(3x+1)$.

2.3.2 换元法

换元法本质上就是变量替换，但是需要注意的是在定积分计算过程中换元后其上下限也应该换成对应函数的值域范围。其形式如下:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t_{t=\psi^{-1}(x)}$$

针对不同的积分类型存在不同的换元方法:

(a). 简单无理式代换

令 $t = (ax+b)^{\frac{1}{n}}$，即 $t^n = ax + b$。

例题 2.2(经典例题) 求

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解 令 $t = \sqrt{x-1}$，则有 $x = 1 + t^2$，且 $dx = 2t\,dt$。

代入原积分式，得到:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,dt$$

进一步化简为:

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

计算各部分积分:

$$= 2t - \arctan t + C$$

最终结果为:

$$= 2\sqrt{x-1} - \arctan\sqrt{x-1} + C$$

(b). 三角代换

- 对于形如 $(a^2-x^2)\frac{1}{2}$，可以提出一个 a，再令 $\sin t = \frac{x}{a}$，化简得到 $|\cos t|$，当然也可以用 $\cos t$ 进行代换，一般采用 $\sin t$ 进行代换;
- 对于形如 $(x^2+a^2)\frac{1}{2}$，同样可以提出一个 a，再令 $\tan t = \frac{x}{a}$，进而得到 $|\sec t|$。

注意，凡是开偶次根式的算式，结果都需要先添加绝对值符号，再考虑去绝对值问题。

(c). 倒代换，即令 $t = \frac{1}{x}$。当分母中的幂较高时可采用倒代换进行计算。

例题 2.3(经典例题) 求

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\,\mathrm{d}x$$

解 设 $t = \dfrac{1}{x}$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^7+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^8}{1+2t^7}\cdot(-t^{-2})\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{14}\int \frac{1}{1+2t^7}\,\mathrm{d}(2t^7+1) \\ &= -\frac{1}{14}\ln(1+2t^7)+C \\ &= -\frac{1}{14}\ln(\frac{x^7+2}{x^7})+C.\end{aligned}$$

(其中 C 为任意常数)

(d). 指数代换

例题 2.4(经典例题) 求 $\int \dfrac{1}{1+e^x}dx$.

解 设 $t = e^x$，则有 $x = \ln t$，且 $dx = \frac{1}{t}dt$。

代入原积分式，得到：

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

接下来，计算该积分：

$$\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C$$

将 $t = e^x$ 代入，得：

$$\ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = x - \ln(e^x+1) + C$$

因此，原积分的解为：

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = x - \ln(e^x+1) + C$$

(e). 万能代换公式（主要用于三角有理函数积分）：对于含三角的不定积分问题，有时并不能符合以上三角代换形式，此时可以使用万能代换公式进行计算，具体操作如下：

令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$，

则 $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$， $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$， $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$。

例题 2.5(经典例题) 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}$.

解 令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$，

则 $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$， $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$。

即

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x} &= \int \frac{\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2+2t} \\
&= -\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{t-1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2-1} \\
&= -\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}\sec y}{\tan y} \\
&= -\sqrt{2}\int \sec y\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\ln|\sec y+\tan y|+C.
\end{aligned}$$

(其中 C 为任意常数)

例题 2.6(经典例题) 计算不定积分:

$$I=\int \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^2}\,dx$$

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，则有以下三角恒等式:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

代入原积分式，得到:

$$I=\int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

化简分母:

$$1+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}$$

所以:

$$\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=\frac{4}{(1+t^2)^2}$$

代入后得到:

$$I=\int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\frac{4}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

简化后为:

$$I=\int \frac{4t^3}{(1+t^2)^2}\,dt$$

以下省略

2.3.3 分部积分法

分部积分法是基于微分学中函数乘积的求导法则对应的一种积分方法，其基本形式如下：

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

一般而言，对某一积分式采用分部积分后，可以达到与其他式子相消或者经过几次操作后得到原式，移项后除以系数便得到所求结果；同时，分部积分还可以实现正指数幂降幂，负指数幂“升”幂的作用。如 e^x，$\sin x$，$\cos x$ 以及双曲函数等具有特殊性质的函数常使用分部积分法，而对于两种不同函数类型相乘的情形也会考虑分部积分（如指数函数乘以常数函数）。

例题 2.7(经典例题) 求 $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$。

解 设 $\theta = \arcsin x$，那么根据反三角函数的定义，可以得到：

$$x = \sin\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \quad dx = \cos\theta\, d\theta$$

因此，原积分可以转化为：

$$\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = \int \theta^2\cos\theta\, d\theta$$

接下来，使用分部积分法来求解。根据分部积分公式：

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

选择：

$$u = \theta^2, \quad dv = \cos\theta\, d\theta$$

那么：

$$du = 2\theta\, d\theta, \quad v = \sin\theta$$

应用分部积分公式：

$$\int \theta^2\cos\theta\, d\theta = \theta^2\sin\theta - \int 2\theta\sin\theta\, d\theta$$

继续对第二项进行分部积分。设：

$$u = 2\theta, \quad dv = \sin\theta\, d\theta$$

那么：

$$du = 2\, d\theta, \quad v = -\cos\theta$$

应用分部积分公式：

$$\int 2\theta\sin\theta\, d\theta = -2\theta\cos\theta + \int 2\cos\theta\, d\theta$$

计算得到：

$$\int 2\theta\sin\theta\, d\theta = -2\theta\cos\theta + 2\sin\theta$$

将其代回原式:

$$\begin{aligned}\int \theta^2\cos\theta\,d\theta &= \theta^2\sin\theta - (-2\theta\cos\theta + 2\sin\theta)\\ &= \theta^2\sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta\end{aligned}$$

最终代回 $\theta = \arcsin x$，得到:

$$\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = (\arcsin x)^2 x + 2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C$$

例题 2.8(经典例题) 求 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$。

解

$$\begin{aligned}\int xe^x\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}e^x\\ &= xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

(其中 C 为任意常数)

分部积分同样在定积分中有着广泛的应用，下面给出一个常用的积分公式——华里士公式（又称点火公式）:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & \text{当}n\text{ 为奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当}n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

笔记 这里给出课本没写出但常见有用的积分结论:

(a). $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(b). $\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$ (T 为 $f(x)$ 的周期);

(c). $\int \tan x\mathrm{d}x = -ln|\cos x| + C$;

(d). $\int \cot x\mathrm{d}x = ln|\sin x| + C$;

(e). $\int \sec x\mathrm{d}x = ln|\sec x + \tan x| + C$;

(f). $\int \csc x\mathrm{d}x = -ln|\csc x + \cot x| + C$;

(g). $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

结论 不定积分的积分方法多种多样，关于如何运用和选择积分方法，需要读者首先建立一个基本认知，对常见积分公式十分熟悉，知晓常见的积不出的积分以便及时判断转变方法（一般直接积不出的会采用分部积分法）；感兴趣的同学可以去进一步学习有理函数的留数法（有理积分一定积的出，留数法可以用来拆解复杂有理函数）、Dirichlet 积分、Fresnel 积分等，这些积分可以开拓你的思维，有利于以后解决积分难题，同时熟记三角函数的积化和差与和差化积；最后当然是需要勤加练习，“千里之行始于足下”，随着熟练度的提高与知识的不断沉淀，在日后的考场上自然而然可以做到下笔如有神。

2.4 反常积分（或广义积分）

关于反常积分，分为**无穷积分**和**无界积分**两大类，而对于反常函数，我们通常不直接讨论其取值情况，而是注重于它的收敛情况，即敛散性。

(a). 无穷积分：对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$f$ 定义在 $[a,+\infty]$ 上），若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在则该无穷积分收敛；反之，则发散。

(b). 无界积分：对于无界积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ (a 为 f 的奇点)，若极限 $\lim\limits_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则该无界积分收敛；反之，则不收敛。

由上述反常积分敛散性的定义可知，若题目要求求一个广义积分的值，基本方法即将广义积分化为极限形式进行求解

以下则为判断反常积分敛散性的几种方法。

2.4.1 定义判别法

具体操作见上述反常积分敛散性的定义。

2.4.2 p 积分判断法

- 无穷积分 $\int_a^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$: $\begin{cases} \text{收敛}, & p>1 \\ \text{发散}, & p\le 1. \end{cases}$
- 无界积分 $\int_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$: $\begin{cases} \text{收敛}, & p<1 \\ \text{发散}, & p\ge 1. \end{cases}$

2.4.3 比较准则

对于反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ($b\to\infty$ 或 b 为 $f(x)$ 的奇点), 若 $g(x)>0, \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, 则

(a). 当 $\lambda>0$ 且为有限值时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

(b). 当 $\lambda=0$ 时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(c). 当 $\lambda\to\infty$ 时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

（注：课本上分为两个比较准则，实际上准则 1 就是准则 2 的简化版，口诀为“大的收敛小的一定收敛，小的发散大的一定发散”。）

2.4.4 绝对收敛准则

对于反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ($b\to\infty$ 或 b 为 $f(x)$ 的奇点), 若 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 一定收敛（此时称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为绝对收敛）。

笔记 [Γ 函数] 由反常积分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 在区间确定的以 α 为自变量的函数，称为 Γ 函数，记作

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\quad \alpha\in[0,\infty].$$

由递推关系可知：$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x=n!.$ (详见教材 P238)

例题 2.9(经典例题) 判断反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$ 是否收敛，若收敛，求出其值。

解

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\arctan x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$$

令 $t=\arctan x$，有：

$$=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^b\frac{t}{\tan^2 t}\mathrm{d}\tan t$$

$$=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^b t\mathrm{d}\frac{1}{\tan t}$$

由分部积分易得：

$$=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}}(ln|\sin t|-\frac{t}{\tan t})|_{\frac{\pi}{4}}^b$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}ln2.$$

以上便是三大积分——定积分，不定积分，广义积分的常用解题技巧，具体的练习将在章末习题中进行，接下来我们再来看一下另外两种常见的积分题型——极限与积分以及积分不等式的证明。

2.5 极限与积分

关于极限与积分的关系，本质上便是积分的定义，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由定义式可知函数的定义域划分是随意的，但是其直径必须趋于 0，所以通常我们解决积分与极限之间的关系的问题时，常常对极限进行均匀划分，然后转化成定积分进行计算；当然，这一过程中还涉及对积分上下限的确定，而这一过程主要由对应部分最小和最大的极限值决定。

例题 2.10(经典例题) 利用积分计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$ 的值。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{n^2}\\ &= \int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

以上为常规的做法，对于部分特殊形式可以考虑采用其他方法，如对于分子分母相对复杂的可以考虑放缩夹逼法，对于开 n 次方的可以采用对数转换法等。

2.6 积分不等式

这里首先介绍积分中值定理以及它常用的推论。

定理 2.5

设 f 在区间 [a,b] 上连续，g 在区间 $[a,b]$ 上 Reimann 可积，且 g 在 $[a,b]$ 上不变号。则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2.3

设 $f\in C[a,b]$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

现阶段我们使用的基本都是其推论，即狭义积分中值定理。式子中的 $f(\xi)$ 我们通常称作函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的积分中值，也叫做积分均值；对于连续函数来说，积分中值等于该函数在区间上的平均值。同时，积分中值定理不仅可以用来解决大题难题，同样可以用来解决极限问题（详见章习练习题第 3 小题）。

笔记 [Cauchy 不等式] 设 f,g 在区间 $[a,b]$ 上连续，则有：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

下面再介绍五种常见的积分不等式题的解题思路。

2.6.1 构造含变上限积分的函数

通常在题目中出现了函数单调或者 $f'(x)>0$(或 <0) 的时候可以考虑使用该方法。此类题目一般是以区间左右值作积分，可以选择上限或者下线作为变量，这时也就确定了变

量的变化范围。

例题 2.11(经典例题) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续且单调减少，证明：当 $0<a\leq b$ 时，有 $a\int_0^b f(x)dx \leq b\int_0^a f(x)dx$.

解 设函数 $h(x)=a\int_0^x f(t)\,dt - x\int_0^a f(x)\,dx$，其中 $x\geq a>0$。

首先，计算 $h'(x)$:

$$h'(x)=a\left[f(x)-f(\xi)\right]$$

由于 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)\leq f(a)\leq f(\xi)$。

因此，

$$f(x)-f(\xi)\leq 0 \quad\Rightarrow\quad h'(x)\leq 0$$

从而可以得出，$h(x)$ 是单调递减的。

进一步分析，当 $x\geq a$ 时，

$$h(x)\leq h(a)=0$$

即，

$$a\int_0^x f(t)\,dt - x\int_0^a f(x)\,dx \leq 0$$

取 $x=b$，则有：

$$a\int_0^b f(x)\,dx \leq b\int_0^a f(x)\,dx$$

2.6.2 使用分部积分来辅助的证明

例题 2.12(经典例题)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{12}max\left|f''(x)\right|,x\in[0,1]$$

解 设 $M=max\left|f''(x)\right|,x\in[0,1]$，然后：

第一步使用分部积分，化出二阶导数：

$$\int_0^1 f(x)dx=(x-\frac{1}{2})f(x)|_0^1-\frac{x(x-1)}{2}f'(x)|_0^1+\int_0^1\frac{x(x-1)}{2}f''(x)dx$$

于是：

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} f''(x)dx$$

第二步再结合绝对值不等式:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} f''(x)dx \leq M \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} dx = \frac{M}{12}$$

2.6.3 基于柯西积分不等式的证明

例题 2.13(经典例题)

设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上连续，且 $f(1)-f(0)=1$，试证明:

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 1$$

解 第一步，使用柯西积分不等式:

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx \geq [\int_0^1 f'(x) \cdot 1 dx]^2$$

再使用已知条件:

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq [\int_0^1 f'(x) \cdot 1 dx]^2 = |f(1)-f(0)|^2 = 1$$

证明完毕!

2.6.4 使用泰勒展开的辅助证明

例题 2.14(经典例题)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(x)$ 不恒为 0，$f(1)=f(0)=0$，$|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值，$x_0 \in (0,1)$，证明:

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4|f(x_0)|$$

解 由于 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值，所以有 $f'(x)=0$.

$\therefore \exists \eta \in (x,x_0)$ 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(\eta)(x-x_0)$

当 $x=0$ 时有 $0=f(x_0)+f'(\eta_1)(0-x_0)$，其中 $\eta_1 \in (0,x_0)$，即:

$$f'(\eta_1) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

同理可得，当 $x=1$ 时代入可得:

$\exists \eta_2 \in (x_0, 1)$ 使得

$$f'(\eta_2) = \frac{f(x_0)}{x_0 - 1}$$

两式相减可得:

$$f'(\eta_2) - f'(\eta_1) = f(x_0)[\frac{1}{x_0 - 1} - \frac{1}{x_0}] = f(x_0) \cdot \frac{1}{x_0(x_0 - 1)}$$

于是有:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} f''(x)dx = f(x_0) \cdot \frac{1}{x_0(x_0 - 1)}$$

接着显然有:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |f''(x)|\, dx \geq \left| f(x_0) \cdot \frac{1}{x_0(x_0 - 1)} \right| \geq 4\,|f(x_0)|$$

2.6.5 使用牛顿-莱布尼兹公式的证明

例题 2.15(经典例题)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上连续可导，试证明

$$max_{[a,b]}\,|f(x)| \leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

解

依题设不妨设 $max_{[a,b]}\,|f(x)| = |f(x_0)|$

那么待证明转化为:

$$(b-a)\,|f(x_0)| \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + (b-a)\int_a^b |f'(x)|\, dx$$

即证明:

$$\left|\int_a^b f(x_0)dx\right| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\int_a^b |f'(x)|\, dx$$

注意到:

$$\left|\int_a^b f(x_0)dx\right| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b [f(x_0) - f(x)]dx\right| = \left|\int_a^b [\int_x^{x_0} f'(t)dt]dx\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b [\int_x^{x_0} |f'(t)|\, dt]dx\right| \leq \left|\int_a^b [\int_a^b |f'(t)|\, dt]dx\right| = (b-a)\int_a^b |f'(x)|\, dx$$

证明完毕!

笔记 区间再现 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

由区间再现我们可得: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ 等其他结论.

第 2 章 练习

(a). 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1^2}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\right)$.

(b). 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

(c). 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x |\sin t|\mathrm{d}x}{x}$.

(d). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_1^0 f(x)\mathrm{d}x = 0$. 求证:
存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$.

(e). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $(a>0)$, 且满足 $2\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x^2-b^2)}f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(b)$,
证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $2\lambda\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$

(f). 计算不定积分 $I = \int \dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$.

(g). 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y}\mathrm{d}y$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(h). 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\dfrac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{ln^2(1-x)}]\mathrm{d}x$.

(i). 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$.

(j). 计算 $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

(k). 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\sin x dx$.

(l). 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\tan x dx$.

(m). 计算 $\int_0^{\pi} ln(1+\cos x)dx$.

(n). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 且有 $f(0)=f(1)=0$, 证明: $|\int\limits_0^1 f(x)dx| \le \dfrac{M}{4}$, 其中 $M = max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$.

(o). 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\tan^\alpha x}dx$.

(p). 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}dx$.

(q). 计算 $\int_0^\pi xln(\sin x)dx$.

章习题答案

(a). $\dfrac{\pi}{4}$.

(b). $\frac{4}{e}$.

(c). $\frac{2}{\pi}$.

(d). 详证略.

(e). 详证略.

(f). $-\frac{x}{1+e^x}+x-ln(1+e^x)+C$.

(g). $\frac{1}{6}(e-2)$.

(h). $\frac{3}{2}ln\frac{3}{2}+ln\frac{1}{2}-2$.

(i). $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

(j). $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(k). $-\frac{\pi}{2}ln2$.

(l). 0.

(m). $-\pi ln2$.

(n). 详证略.

(o). $\frac{\pi}{4}$.

(p). $1-\frac{\pi}{4}$.

(q). $-\frac{\pi^2}{2}ln2$.

第 3 章 微分方程

3.1 高阶微分方程

3.1.1 高阶常系数线性非齐次微分方程

考虑方程

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=F(t)$$

我们已经知道，非齐次方程的通解等于特解加上齐次方程的通解。接下来我们对 $F(t)$ 的不同形式进行讨论。

1. $F(t)=\varphi(t)e^{\mu t}$

注意： 其中 $\varphi(t)$ 为多项式函数。
核心思路： 左右两边多项式的次数和幂次需要对应相等。
步骤：

(a). 列出齐次方程的特征方程，求解特征根

$$\mu^2+a_1\mu+a_2=0$$

解得特征根。

(b). 设特解为 $x(t)=Z(t)e^{\mu t}$，代入方程并消去 $e^{\mu t}$ 将特解代入原方程，并利用 $x(t)=Z(t)e^{\mu t}$ 得到如下关系：

$$(\mu^2+a_1\mu+a_2)Z(t)+(2\mu+a_1)\dot{Z}(t)+\ddot{Z}(t)=\varphi(t)$$

需要考虑 μ 的不同情况：

- (1) μ 不是特征方程的根：即 $\mu^2+a_1\mu+a_2\neq 0$，此时 $Z(t)$ 和 $\varphi(t)$ 同次。
- (2) μ 是单根：即 $\mu^2+a_1\mu+a_2=0$，此时 $Z(t)$ 比 $\varphi(t)$ 高 1 次，设 $Z(t)=t(At^n+Bt^{n-1}+\cdots)$。
- (3) μ 是重根：即 $\mu^2+a_1\mu+a_2=0$ 且 $2\mu+a_1=0$，此时 $Z(t)$ 比 $\varphi(t)$ 高 2 次，设 $Z(t)=t^2(At^n+Bt^{n-1}+\cdots)$。

2. $F(t)=e^{\mu t}\cos(\nu t)$ 或 $F(t)=e^{\mu t}\sin(\nu t)$

引理： 对于方程

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=F(t),$$

若 $F(t)=e^{\mu t}\cos(\nu t)$ 或 $F(t)=e^{\mu t}\sin(\nu t)$，则方程的解可以表示为复数形式，其中实部是关于 $\cos(\nu t)$ 的解，虚部是关于 $\sin(\nu t)$ 的解。具体而言，设

$$x=x_R(t)+ix_I(t),$$

其中 $x_R(t)$ 为实部解，$x_I(t)$ 为虚部解。

步骤：

(a). ① **构造辅助方程：** 将原方程转化为复数形式。对于 $F(t)=e^{\mu t}\cos(\nu t)+ie^{\mu t}\sin(\nu t)$，可表示为:

$$F(t)=e^{\mu t}\varphi(t),\quad \varphi(t)=\cos(\nu t)+i\sin(\nu t)=e^{i\nu t}.$$

因此，方程变为:

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=e^{\mu t+i\nu t}\varphi(t).$$

(b). ② **求特解：** 假设特解 $x(t)=Z(t)e^{\mu t+i\nu t}$。代入方程，得到一个复数常系数的方程。通过求解该方程，分别得到实部 $x_R(t)$ 和虚部 $x_I(t)$ 的解。

(c). ③ **求齐次方程的通解：** 对齐次方程 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$ 求解，得到齐次解 $x_h(t)$。最后，通解为齐次解与特解的线性组合:

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t),$$

其中 $x_h(t)$ 是齐次方程的通解，$x_p(t)$ 是特解。

例题 3.1(典型例题) 求方程 $\ddot{x}+x=te^t\cos t$ 的通解

解：对应线性齐次方程的特征方程为

$$\Lambda^2+1=0$$

特征根为

$$\Lambda=\pm i$$

线性齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t$$

为求原方程的一个特解，先求微分方程

$$\ddot{x}+x=te^{(1+i)t}$$

的特解。由于 $1+i$ 不是特征根，令

$$x^*=(B_0+B_1t)e^{(1+i)t}$$

求导后代入方程 $\ddot{x}+x=te^{(1+i)t}$，化简得

$$B_1(1+2i)t+[2B_1(1+i)+2B_0i+B_0]=t$$

比较系数，得

$$B_1=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5},B_0=-\frac{2(1+i)}{1+2i}=\frac{-2+14i}{25}$$

因此

$$x^*=e^t(\frac{1-2i}{5}t+\frac{-2+14i}{25})(\cos t+i\sin t)$$

其实部

$$x_R^*=\frac{e^t}{25}[(5-2t)\cos t+(10t-14)\sin t]$$

为原方程的一个特解，因此原方程通解为

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{e^t}{25}[(5-2t)\cos t+(10t-14)\sin t]$$

待定系数法（实数域内）:

设 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=e^{\mu t+i\nu t}\varphi(t)$ 的特解为 $x^*=t^kZ(t)e^{\mu t+i\nu t}$。因此，需要讨论 $Z(t)$ 与 $\varphi(t)$ 的次数与系数。令 $Z(t)=R(t)+iI(t)$。代入化简得 $x^*=t^ke^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t+Z_2(t)\sin\nu t]$。其中，$k$ 为特征根重数，$Z_1(t)$ 与 $Z_2(t)$ 为实系数多项式，与 $\varphi(t)$ 同次。

例题 3.2(典型例题) 求方程 $\ddot{x}-2\dot{x}+5x=e^t\sin 2t$ 的一个特解

解：特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+5=0$$

解得

$$\lambda_1=1+2i,\lambda_2=1-2i$$

$1+2i$ 为特征方程的单根设方程特解为

$$x^*(t)=te^t(A\cos 2t+B\sin 2t)$$

则

$$\dot{x}^*(t)=x^*(t)+e^t(A\cos 2t+B\sin 2t)+te^t(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)$$

$$\ddot{x}^*(t)=x^*(t)+\cdots$$

整理得

$$e^t(-4A\sin 2t+4B\cos 2t)=e^t\sin 2t$$

$$A=-\frac{1}{4},B=0$$

故特解为

$$x=-\frac{1}{4}te^t\cos 2t$$

例题 3.3(典型例题) 求方程 $\ddot{y}+4y=6\sin x$ 的通解

解：特征方程为

$$\lambda^2+4=0$$

解得

$$\lambda_1=2i,\lambda_2=-2i$$

齐次方程通解为

$$y=B_1\cos 2x+B_2\sin 2x$$

考虑到该方程无 $\dot{y}$，不妨设特解为 $y^*=C\sin x$ 代入原方程，得

$$3A\sin x=6\sin x$$

$$A=2$$

通解为

$$y=2\sin x+B_1\cos 2x+B_2\sin 2x$$

待定系数法常用的特解形式 ($Z(t),Z_1(t),Z_2(t)$ 均为与 $\varphi(t)$ 同次的多项式)

$F(t)$ **的类型**	**应设置特解 $x^*(t)$ 的形式**	
m 次多项式 $\varphi(t)$	0 不是特征值	$x^* = Z(t)$
	0 是 k 重特征值	$x^* = t^k Z(t)$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 不是特征值	$x^* = Z(t)e^{\mu t}$
	μ 是 k 重特征值	$x^* = t^k Z(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos(\upsilon t)$	$\mu + i\upsilon$ 不是特征值	$x^* = e^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos(\upsilon t) + Z_2(t)\sin(\upsilon t)\right]$
或 $\varphi(t)e^{\mu t}\sin(\upsilon t)$	$\mu + i\upsilon$ 是 k 重特征值	$x^* = t^k e^{\mu t}\left[Z_1(t)\cos(\upsilon t) + Z_2(t)\sin(\upsilon t)\right]$

3.1.2 高阶变系数线性微分方程

Euler 微分方程：

1. **一般形式：**

Euler 微分方程的标准形式为：

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t),$$

其中 n 为方程的阶数，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数系数，且 $f(t)$ 是已知函数。

2. **解法（变量代换法）：**

为了解这个变系数微分方程，我们可以通过适当的变量代换，将其转换为常系数线性微分方程。具体步骤如下：

① **设定变量代换：**

令 $t = e^\tau$，其中 $\tau = \ln t$（假设 $t > 0$）。这一代换可以将方程中的 t-依赖项转化为 τ-依赖项。

② **计算导数：**

通过代换关系 $\tau = \ln t$，我们可以推导出关于 τ 的导数：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}\right), \qquad \ldots$$

对于高阶导数，有：

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{1}{t^n}\left(\frac{d^n x}{d\tau^n} - (\text{低阶导数项})\right).$$

③ **代入原方程：**

将上述导数表达式代入原方程中，得到关于 τ 的常系数线性微分方程：

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + (a_1 - n)\frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(e^\tau).$$

经过代换后，原方程变为常系数方程。此时，我们可以用常规的解法（例如，特征方程法）来求解该方程。

④ **解回 t-域：**

最后，通过逆变换 $\tau = \ln t$ 将 τ-域的解转换回 t-域。具体地，如果解得 $x(\tau)$，则有：

$$x(t) = x(\ln t).$$

注意： Euler 方程的解法通过变换为常系数线性方程，使得求解过程变得更加简便。对于非齐次 Euler 方程，除了求解齐次方程的通解外，还需要求解特解。特解的形式取决于 $f(t)$ 的具体形式。

例如： 对于方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 3t\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

我们首先设定 $t = e^\tau$，然后计算导数并代入，得到常系数线性方程:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{3}{2}\frac{dx}{d\tau} + 2x = 0.$$

接着，使用常规方法（如特征方程法）求解该方程，最后将结果通过逆变换 $\tau = \ln t$ 回到 t-域。

例题 3.4(典型例题) 求方程 $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$ 的通解。

解：令 $t = e^\tau$，即 $\tau = \ln t(t > 0)$，有

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \ddot{x} = \frac{1}{t^2}(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}), \cdots$$

代入原方程，化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + x = 0$$

解得通解为

$$x = (C_1\tau + C_2)e^\tau$$

将 τ 代换为 $\ln t$，即可得原方程的通解为

$$x = (C_1\ln t + C_2)t$$

3.2 线性微分方程组

3.2.1 基本概念

基本形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = g_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = g_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = g_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

矩阵表达形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

则矩阵表达式可化简为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t)$$

初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t) \\ \vec{X}(t_0) = \vec{x_0} = (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n})^T \end{cases} \tag{3.4}$$

解的存在唯一性定理：当系数矩阵 $A(t)$ 与非齐次项 $\vec{f}(t)$ 在（a,b）内连续时，初值问题的解在 (a,b) 内是存在且唯一的。

3.2.2 线性微分方程组解的结构

1. 齐次线性微分方程组的解的结构

① 解的结构满足叠加原理，即若 $\vec{x_1}(t)$ 和 $\vec{x_2}(t)$ 是齐次线性微分方程组的解，则它们的线性组合 $c_1\vec{x_1}(t) + c_2\vec{x_2}(t)$ 也是该方程组的解，其中 c_1, c_2 为常数。

② 线性相关与线性无关：设有 n 个解 $\vec{x_1}(t),\vec{x_2}(t),\ldots,\vec{x_n}(t)$，如果它们的线性组合

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\vec{x_k}(t)=0$$

对于常数 $c_1,c_2,\ldots,c_n$，当且仅当 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ 时，解系才称为线性无关；若不全为零，则称为线性相关。

对齐次线性微分方程组的任意 m 个解 $\vec{x_1}(t),\vec{x_2}(t),\ldots,\vec{x_m}(t)$，它们在区间 (a,b) 上线性相关的充要条件是：存在某个时刻 $t_0\in(a,b)$，使得 $\vec{x_1}(t_0),\vec{x_2}(t_0),\ldots,\vec{x_m}(t_0)$ 线性相关。

结论：方程组的通解由 n 个线性无关的解构成，且这些解的线性组合是所有解的集合。

③ Wronski 行列式：

给定 n 个向量值函数 $\vec{x_1}(t),\vec{x_2}(t),\ldots,\vec{x_n}(t)$,其分量 $x_{ij}(t)$ 依次作为列向量构成 $n\times n$ 的行列式：

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \ldots & x_{n1}(t)\\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \ldots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=\left(\vec{X}_1(t),\vec{X}_2(t),\ldots,\vec{X}_n(t)\right) \tag{3.5}$$

(i) 如果 $\vec{X}_1(t),\vec{X}_2(t),\ldots,\vec{X}_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关，则 $W(t)=0$；

(ii) 如果 $\vec{X}_1(t),\vec{X}_2(t),\ldots,\vec{X}_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关,则充要条件是 $\forall t\in[a,b],W(t)\neq 0$。

结论：对于方程组的 n 个解 $\vec{X}_1(t),\vec{X}_2(t),\ldots,\vec{X}_n(t)$，在区间 $[a,b]$ 上，$W(t)$ 要么恒为零，要么恒不为零。

④ 基本解组：方程组一定存在 n 个线性无关的解，构成一个基本解组（不唯一）。其通解为这 n 个解的线性组合：

$$\vec{X}(t)=c_1\vec{x_1}(t)+c_2\vec{x_2}(t)+\cdots+c_n\vec{x_n}(t)$$

其中 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 为常数。

⑤ 基解矩阵：基解矩阵 $X(t)$ 由 n 个线性无关的解构成：

$$X(t)=(\vec{x_1}(t),\vec{x_2}(t),\ldots,\vec{x_n}(t))$$

其中，$\vec{x_1}(t),\vec{x_2}(t),\ldots,\vec{x_n}(t)$ 是线性无关的。

(i) 对于任意解 $\vec{\psi}(t)$，可以表示为：

$$\vec{\psi}(t)=X(t)\vec{C}$$

其中，$\vec{C}$ 为常数列向量。

(ii) 如果 $W(t)\neq 0$，则该解是有效的（即解在该区间内不为零）。

(iii) 若常数矩阵 C 可逆，则 $X(t)C$ 也是一个基解矩阵。

(iv) 对于两个基解矩阵 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$，一定存在可逆矩阵 C 使得:

$$\Phi(t) = \Psi(t)C$$

即基解矩阵之间存在基变换。

2. 非齐次线性微分方程组的解的结构

① 通解的结构：非齐次线性微分方程组的通解可以表示为:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C} + \vec{x}^*(t)$$

其中，$X(t)$ 是对应齐次线性微分方程组的基解矩阵，$\vec{C}$ 是常向量，$\vec{x}^*(t)$ 是该非齐次方程组的一个特解。

② 常数变易法求特解：设 $X(t)$ 为齐次线性微分方程组的基解矩阵，且 $\vec{x}^*(t_0) = 0$ 为初始条件，特解可以表示为:

$$\vec{x}^*(t) = X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

其中，$f(t)$ 是非齐次项。

③ 通解的具体表达：结合初值条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$，可以得到通解的具体形式:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C} + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

代入初值条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$，我们可以解得:

$$\vec{C} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0$$

因此，特解可以进一步表示为:

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

3.2.3 常系数线性微分方程组

1. 常系数线性齐次方程组

基本形式为:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

待定系数法：假设方程组的解为 $\phi(t) = \vec{r}e^{\lambda t}$，其中 $\vec{r}$ 为待定常向量。将其代入原方程，得到:

$$\vec{r}\lambda e^{\lambda t} = A\vec{r}e^{\lambda t}$$

因此，有:

$$(A - \lambda E)\vec{r} = 0$$

即:

$$A - \lambda E = 0, \quad \det(A - \lambda E) = 0$$

步骤：

① **求特征根：**通过解方程 $\det(A-\lambda E)=0$ 求得特征根 λ。

② **求出基解矩阵，写出通解：**根据特征根，得到相应的特征向量，从而构造基解矩阵并写出通解。

(1) A 有 n 个线性无关的特征向量：

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{r_1},\vec{r_2},\ldots,\vec{r_n}$，对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$。则基解矩阵为:

$$X(t)=\left(\vec{r_1}e^{\lambda_1 t},\vec{r_2}e^{\lambda_2 t},\ldots,\vec{r_n}e^{\lambda_n t}\right)$$

(2) A 没有 n 个线性无关的特征向量：

设 λ_i 为矩阵 A 的重特征值，n_i 为其重数，$\vec{r_0}$ 为齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}=0$ 的非零解。则方程组的解为:

$$\vec{x}(t)=e^{\lambda_i t}\left(\vec{r_0}+\frac{t}{1!}\vec{r_1}+\frac{t^2}{2!}\vec{r_2}+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{n_i-1}\right)$$

其中:

$$\vec{r_1}=(A-\lambda_i E)\vec{r_0},\quad \vec{r_2}=(A-\lambda_i E)\vec{r_1},\quad \ldots,\quad \vec{r}_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)\vec{r}_{n_i-2}.$$

(3) A 有复特征值：

设 $\vec{x_1}(t)=\vec{u}(t)+i\vec{v}(t)$ 为方程组的一个复值解，$\vec{x_2}(t)=\vec{u}(t)-i\vec{v}(t)$ 为其共轭向量，则 $\vec{u}(t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 均为方程组的解。用 $\vec{u}(t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 代替 $\vec{x_1}(t)$ 和 $\vec{x_2}(t)$，则所得的矩阵仍为基解矩阵。复值基解矩阵变为实值基解矩阵。

例题 3.5(往年考题)

求方程组$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - 3y - \mathrm{e}^t \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 2y - \mathrm{e}^t \end{cases}$ 的通解.

解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(t)$$

其中$x = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{bmatrix}.$

易得，A 的特征值为$1, -1$, 对应的特征向量为$(3,1)^{\mathrm{T}}, (1,1)^{\mathrm{T}}$, 故基解矩阵为

$$X(t) = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}, \quad \text{且有} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

故可得特解

$$x^* = \int_0^t X(t-\tau)X^{-1}(0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\tau-t} \\ \mathrm{e}^{2\tau-t} \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

故通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + x^*$$

$$= \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 例题

3.3.1 题目

1. 求解微分方程的初值问题 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)\tan x, y(0)=2$。

2. 求微分方程 $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解。

3. 求解微分方程 $(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

4. 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x} f(\frac{t}{3})\,dt+e^{2x}$，求 $f(x)$。

5. 求微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

6. 求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$ 满足初始条件 $y(0)=\frac{1}{2}$ 的特解。

7. 求微分方程 $y'''=\ln x$ 的通解。

8. 求解下列方程：$xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$

9. 求解微分方程 $y^3y''+1=0$，$y(1)=1, y'(1)=0$

10. 设函数 $y=f(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2, y'(0)=-4 \end{cases}$$

求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$。

11. 求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$。

12. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$。

13. 设函数 $y=y(x)$ 由方程

$$(1+x)y=\int_0^x[2y+(1+t)^2y''(t)]\,\mathrm{d}t-\ln(1+x)$$

所确定，其中 $x\geq 0$，且 $y'(0)=0$，试求 $y(x)$

14. 设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 A(0,1),B(1,0) 的一段连续曲线，M(x,y) 为曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点。若梯形 OCMA 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式。

15. 已知 $f(x)$ 可微，且满足 $\int_1^x \frac{f(t)}{t^3f(t)+t}\mathrm{d}t=f(x)-1$，求 $f(x)$。

3.3.2 答案

1. 求解微分方程的初值问题 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)\tan x, y(0)=2$。
解:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)\tan x\\ \Rightarrow\ &(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y})\mathrm{d}y=2\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

两边同时积分，得:

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+\ln\cos^2 x=\ln C_1$$

其中 C_1 是不为 0 常数。由于 y(0)=2，不妨设 y>1，则有

$$\ln\frac{1+y}{y-1}+\ln\cos^2 x=\ln C_1$$

C_1 是不为 0 常数。代入 $x=0, y=2$, 得 $C_1=3$。
因此，特解为

$$y=\frac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$$

2. 求微分方程 $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解。
解:

$$\begin{aligned}&(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0\\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2-2\frac{y}{x}-1}{(\frac{y}{x})^2+2\frac{y}{x}-1}\end{aligned}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得:

$$\begin{aligned}&u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}\\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u\\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

两边同时积分，得:

$$\begin{aligned}&\ln|x|+\ln|C|=\ln\left|\frac{u+1}{u^2+1}\right|\\ \Rightarrow\ &u+1=Cx(u^2+1)\end{aligned}$$

代入 $u=\frac{y}{x}$，得通解 $x+y=C(x^2+y^2)$。由 $y(1)=1$，得 $C=1$，故特解为

$$x+y=x^2+y^2$$

3. 求解微分方程 $(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解。
解：令 $x=X+h, y=Y+k$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X, \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 代入原方程，得:

$$(2X+Y+2h+k-4)\mathrm{d}X+(X+Y+k+h-1)\mathrm{d}Y=0$$

解方程组

$$\begin{cases}2h+k-4=0\\ k+h-1=0\end{cases}$$

解得 $h=3,k=-2$，令 $x=X+3,y=Y-2$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{2X+Y}{X+Y}=-\frac{2+\dfrac{Y}{X}}{1+\dfrac{Y}{X}}$$

令 $\dfrac{Y}{X}=u$，则 $Y=uX,\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，方程化为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=-\frac{2+u}{1+u}$$

分离变量，得

$$-\frac{u+1}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

两边积分，得

$$\ln C_1-\frac{1}{2}\ln u^2+2u+2=\ln X$$

即

$$Y^2+2XY+2X^2=C_2,C_2=(C_1)^2$$

将 $X=x-3,Y=y+2$ 代入上式化简得

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C_2-10$$

4. 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f(\frac{t}{3})\,dt+e^{2x}$，求 $f(x)$。

解：两边同时对 x 求导，得

$$\dot{f}(x)-3f(x)=2e^{2x}$$

解此方程，得

$$f(x)=\left(\int 2e^{2x}e^{-3x}\,dx+C\right)e^{2x}=Ce^{3x}-2e^{2x}$$

由 $f(0)=1$，得 $C=3$. 故

$$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$$

5. 求微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解：原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y},P(y)=\frac{1}{y\ln y},Q(y)=\frac{1}{y}$$

代入公式，得

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\left(\int\tfrac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right)=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y+C_1\right)$$

故原方程通解为

$$2x\ln y=\ln^2 y+C,C=\frac{1}{2}C_1$$

6. 求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$ 满足初始条件 $y(0)=\dfrac{1}{2}$ 的特解。

解：将原方程改写为

$$y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3}=\frac{2x}{3(1+x^2)}$$

令 $z=y^{-3}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3y^{-4}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入上述方程得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2x}{1+x^2}z=-\frac{2x}{1+x^2}\qquad ①$$

化简后的方程对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2x}{1+x^2}z=0$$

积分得其通解为 $z=C(1+x^2)$ 令 $z=(1+x^2)u(x)$ 为方程①的解，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1+x^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2xu$$

代入方程①中，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

两边积分，得 $u=\frac{1}{1+x^2}+C$，故方程①的通解为 $\frac{1}{y^3}=1+C(1+x^2)$。由初始条件 $y(0)=\frac{1}{2}$ 得 $C=7$。故所求的特解为

$$y^3=(7x^2+8)^{-1}$$

7. 求微分方程 $y'''=\ln x$ 的通解。

解：

$$y''=\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$$

$$y'=\int x\ln x-x+C\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+Cx+C_2$$

$$y=\int(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+Cx+C_2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}Cx^2+C_2x+C_3$$

8. 求解下列方程：$xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$

解：令 $y'=p$，原方程化为 p 的一阶方程

$$xp'=p+x\sin\frac{p}{x}$$

令 $\frac{p}{x}=u$，上面的方程化为 $xu'=\sin u$，解得通解为 $\tan\frac{u}{2}=C_1x$，C_1 为任意常数。故

$$\frac{p}{x}=2\arctan C_1x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\arctan C_1x$$

积分，得原方程通解为

$$\begin{cases} y=x^2\arctan C_1x-\dfrac{x}{C_1}+\dfrac{1}{{C_1}^2}\arctan C_1x+C_2(C_1\neq 0)\\ y=C_2(C_1=0)\end{cases}$$

其中 C_2 为任意常数。

9. 求解微分方程 $y^3y''+1=0$，$y(1)=1,y'(1)=0$

解：令 $y'=p,y'=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，则原方程化为

$$p\mathrm{d}p=-\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y$$

两边同时积分并整理，得

$$p^2=\frac{1}{y^2}+2C_1$$

由 $y(1)=1,y'(1)=0$ 得 $2C_1=-1$，故 $p^2=\frac{1}{y^2}-1,p=\pm\sqrt{y^{-2}-1}$。分离变量，整理得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得

$$-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$$

代入 $y(1)=1$，得 $C_2=\mp 1$，故特解为

$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

10. 设函数 $y=f(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y(0)=2, y'(0)=-4 \end{cases}$$

求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$。

解：特征方程为 $r^2+4r+4=0$，解得 $r_1=r_2=-2$，原方程通解为

$$y=(C_1+C_2X)e^{-2x}$$

由 $y(0)=2, y'(0)=-4$ 得 $C_1=2, C_2=0$。因此微分方程特解为 $y=2e^{-2x}$

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}2x=1$$

11. 求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$。

解：原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+a^2=0$，解得 $r=\pm ai$，故齐次方程通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$。

(1)$a\neq 1$ 时，设原方程特解为 $y^*=A\sin x+B\cos x$，代入原方程得

$$A(a^2-1)\sin x+B(a^2-1)\cos x=\sin x$$

比较系数，得 $A=\dfrac{1}{a^2-1}, B=0$，故 $y^*=\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$。

(2)$a=1$ 时，设原方程特解为 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$，代入原方程得

$$2A\cos x-2B\sin x=\sin x$$

比较系数，得 $A=0, B=-\dfrac{1}{2}$, 故 $y^*=-\dfrac{1}{2}x\cos x$

综上，当 $a\neq 1$ 时，通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$；当 $a=1$ 时，通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$。

12. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$。

解：由 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

两边再对 x 求导，得

$$f''=-\sin x-f(x)$$

对应的齐次方程特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm i$。故对应的齐次方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 设非齐次方程的特解为

$$y^*=x\,(a\sin x+b\cos x)$$

由待定系数法，解得 $a=0, b=\dfrac{1}{2}$，故特解 $y^*=\dfrac{x}{2}\cos x$，非齐次方程通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$$

由条件知 $f(0)=0, f'(0)=1$，代入得 $C_1=\dfrac{1}{2}, C_2=0$ 故

$$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

13. 设函数 $y=y(x)$ 由方程

$$(1+x)y=\int_0^x[2y+(1+t)^2y''(t)]\,\mathrm{d}t-\ln(1+x)$$

所确定，其中 $x\geq 0$，且 $y'(0)=0$，试求 $y(x)$

解：将方程两边求导，得

$$y+(1+x)y'=2y+(1+x)^2y''-\frac{1}{1+x} \qquad ①$$

令 $1+x=e^t$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$，即 $y'=\frac{1}{x+1}y_t',y''=\frac{1}{(x+1)^2}(y_t''-y_t')$，则方程①化为

$$y_t''-2y_t'+y=e^{-t}$$

对应的特征方程为 $r^2-2r+1=0$，解得 $r_1=r_2=1$，所以齐次方程通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^t$$

由于 $f(t)=e^{-t},r=-1$ 不是特征根，设特解为 $y^*=Ae-t$，代入解得 $A=\frac{1}{4}$，故通解为

$$y=[C_1+C_2\ln(1+x)](1+x)+\frac{1}{4(1+x)}$$

代入 $y(0)=0,y'(0)=0$，解得 $C_1=-\frac{1}{4},C_2=\frac{1}{2}$。故原方程的解为

$$y=[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x)](1+x)+\frac{1}{4(1+x)}$$

14. 设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 A(0,1),B(1,0) 的一段连续曲线，M(x,y) 为曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点。若梯形 OCMA 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式。

解：根据题意，有

$$\frac{x}{2}[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}[1+f(x)]+\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2$$

当 $x\neq 0$ 时，得

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x-\frac{1}{x}$$

解得 $f(x)=x^2+1+Cx$，C 为任意常数。当 $x=0$ 时，$f(0)=1$；$x=1$ 时，$f(1)=0$，解得 $C=-2$，故

$$f(x)=(x-1)^2$$

15. 已知 $f(x)$ 可微，且满足 $\int_1^x\frac{f(t)}{t^3f(t)+t}\,\mathrm{d}t=f(x)-1$，求 $f(x)$。

解：令 $x=1$，得 $f(1)=1$。对原方程两边求导，得

$$\frac{f(x)}{x^3f(x)+x}=f'(x)$$

代数变形，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=x^3 \qquad ①$$

令 $z=x^{-2}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-2x^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$。代入方程①整理得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=-2$。解得

$$z=-\frac{2}{3}y+Cy^{-2}$$

即 $\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3}f(x)+C(f(x))^{-2}$。代入 $f(1)=1$, 解得 $C=\frac{5}{3}$, 则 $f(x)$ 为 $\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{2}{3}f^3(x)=\frac{5}{3}$ 确定的隐函数。