第一章　行列式

1.1 行列式的定义与性质

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1 2阶行列式的定义

2 n阶行列式的定义

3 行列式的基本性质

二阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1、引例 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (2) \end{cases}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$(1)\times a_{22}-(2)\times a_{12}$消去$x_2$得

$$\underline{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

$(2)\times a_{11}-(1)\times a_{21}$消去$x_1$得 $\underline{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时,方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{D_2}{D}.$$

2、二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

例1 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 3\times 4 = -10$

设方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为其系数行列式.

例2 解方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$ 解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$ $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$ 故$x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = -\frac{3}{7}.$

主要内容

1 2阶行列式的定义

2 n阶行列式的定义

3 行列式的基本性质

n阶行列式的定义

定义1（n阶行列式）

由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行n列的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij}也称为(i,j)元

称为n阶行列式. 简记为$\det(a_{ij})$，并用它表示一个数.

当$n=1$时，规定 $\mathrm{D}=|a_{11}|=a_{11}$.

当$n=2,3\cdots$时，用以下公式递归定义n阶行列式的值为

$$D \overset{\text{def}}{=\!=} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

n阶行列式等于它的第1行的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称M_{1j}为元素a_{1j}的余子式，

A_{1j}为元素a_{1j}的代数余子式.

定义2（余子式与代数余子式）在n阶行列式$\det(a_{ij})$中，称删去a_{ij}所在的行与列后形成的$n-1$阶行列式为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的代数余子式.

例1 设$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$,写出$a_{23}$的余子式$M_{23}$和代数余子式$A_{23}$.

解 $M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8-2=6$

$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-6.$

例2 求三阶行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$的值.

解 $D=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=3$

3阶行列式的计算公式（对角线法则）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例3 求$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}$

解 D

$= x^2 - 5x + 6$

例4 证明n阶下三角行列式（对角线上边的元素全为0）

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 对阶数n用数学归纳法. 当n=2时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$ 结论成立.

假设结论对n-1阶下三角行列式成立，则有

$$D_n=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{n-1\text{阶}}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证毕.

同理可证，副对角线上边的元素全为0的行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

特别的，对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n; \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

主要内容

1. 2阶行列式的定义
2. n阶行列式的定义
3. 行列式的基本性质

性质1 行列式的行与列（按原顺序）互换，其值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D^{\mathrm{T}}$$

称为D的转置行列式.

行列式对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

以下仅以“行”或“列”的一种情形来论述行列式的其他性质.

性质2 互换行列式两行的位置，行列式的值反号.

性质3 行列式等于它的任一行各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

称上式为**行列式按第i行展开的公式.**

证

$$D = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{i-1}[a_{i1}(-1)^{1+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{1+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{1+n}M_{in}]$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \cdots + a_{in}A_{in}$$

性质4 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用性质3，将行列式按照第k行展开，提出公因子k，即可证明性质4

推论1　若行列式D中某行元素全为零，则D=0.

性质5 若行列式某行的每个元素都是两数之和, 则可将此行列式写成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 若行列式D中有两行的对应元素都相等，则$D=0$.

证 设D的第i行与第j行相同，将这两行互换，有

$$D=-D,$$

故$D=0$.

推论2 若行列式D中有两行元素成比例，则$D=0$.

以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

性质7 行列式的某行加上另一行的k倍，行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质8 行列式D的任一行各元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和等于0；即

$$\text{当} i \neq k \text{时}，\quad a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0.$$

证

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

设$i \neq k$，把第k行的元素换成第i行的对应元素，则有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \quad (i \neq k)$$

利用行列式的性质1、性质3、及性质8，可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

上述公式是行列式理论中最基本也是最重要的公式，它们不仅可以简化行列式的计算，在有关的理论研究中也起着重要的作用.

第一章　行列式

1.2 行列式的计算

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1. 行列式的计算
2. 范德蒙行列式的计算
3. 块对角行列式的计算

行列式的计算

例1 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

解 按对角线法则，求得左端行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

则有 $x^2 - 5x + 6 = 0,$

解得 $x = 2,$ 或 $x = 3.$

例2 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

（按0元素较多的行或列展开）

解 按照第3列展开

$$D = (-1)^{3+3} 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-6) \cdot (-7) = 42$$

例3 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

解 按第n列展开

$$D_n = n(-1)^{n+n} M_{nn} = n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)! = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

例4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & -3 & 7 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -5 & 10 & 3\\ 2 & -3 & 5 & 4\end{vmatrix}$

r_j+kr_i（c_j+kc_i）
表示第i行（列）乘以k倍加到第j行（列）

解 $D \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix}0 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ -1 & -5 & 10 & 3\\ -1 & -3 & 5 & 4\end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_4} \begin{vmatrix}0 & -3 & 7 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 5 & 4\end{vmatrix}$

$$=(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-3 & 7 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 5 & -1\end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_3]{r_1+r_3} \begin{vmatrix}-5 & 12 & 0\\ -3 & 8 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-5 & 12\\ -3 & 8\end{vmatrix}=4$$

例5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

爪子（箭）型行列式

解

$$D \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,3]{c_4+\sum c_i} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} x^4 \quad = x^4$$

例6 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

“行和相等”

解 把第2列至第n列加至第1列，提取第1列公因子，$r_i-r_1(i=2,\cdots,n)$

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\left(x+(n-1)a\right)\left(x-a\right)^{n-1}$$

三、 Vandermonde（范德蒙）行列式的计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$ 称为n阶Vandermonde行列式

例7 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ 都是范德蒙行列式.

证明n阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)$$

$$(x_4-x_3)(x_5-x_3)\cdots(x_n-x_3)$$

$$\cdots$$

$$(x_n-x_{n-1})$$

$$=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

证明 对行列式的阶数n用数学归纳法

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$. 结论成立.

假设对$n-1$阶范德蒙行列式，结论成立.

对于D_n,从第$n-1$行开始(向上),依次把每行的$(-x_1)$倍加至下一行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\prod_{n \ge i > j \ge 2} (x_i - x_j)$$

按第一列展开，并把每一列的公因子提出，得

$$D_n = \underbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)}_{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

n−1阶范德蒙行列式

所以结论对n阶范德蒙行列式成立.

n阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

例8

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(3-2)(-1-2)(-1-3)$$

$$=12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

例9 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}$.

解

$$D_n=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\ \cdots\ [n-(n-1)]$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

四、块对角行列式的计算

例10 证明 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

证 按照第一行展开，有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

一般有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

例11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$

解 对换第2列和第5列，得

$$D=-\begin{vmatrix} a & a & a & 0 & 0 \\ b & d & c & 0 & 0 \\ b^2 & d^2 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc & ab \\ 0 & 0 & 0 & da & cd \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & d & c \\ b^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} bc & ab \\ da & cd \end{vmatrix}$$

$$=a(d-b)(c-b)(c-d)bd(a^2-c^2)$$

第一章　行列式

1.3 Cramer法则

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1 非齐次与齐次线性方程组的概念

2 Cramer法则

非齐次与齐次方程组的概念

设有n个未知数m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

当常数项$b_1, b_2, \cdots, b_m$不全为零时,称为n元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

当常数项$b_1, b_2, \cdots, b_m$全为零时,称为n元齐次线性方程组

对于n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是它的解，称它为n元齐次线性方程组的零解.

如果有一组不全为零的数是(2)的解，则称其为(2)的非零解.

齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解.

例如 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 只有零解； 而 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

主要内容

1 非齐次与齐次线性方程组的概念

2 Cramer法则

定理1 Cramer法则

对于n个未知数n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}.$

其中D_j是将D的第j列元素依次用右端的常 数项替换所得到的 n阶行列式.

例1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 17, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$ 所以方程组有唯一解 .

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 17 & 2 & -5 \\ 13 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 56, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 17 & -5 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix} = 84, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 17 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -28,$$

得方程组的唯一解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 2, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 3, \ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = -1.$

例2 用Cramer法则解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ x_1 + x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 2, \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2. \end{cases}$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)! \neq 0,$ 故线性方程组有**唯一解**.

当$i \neq n$时，

$$D_i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 2 \cdots 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots 2 \cdots 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots 2 \cdots 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots 2 \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 2 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D$$

故线性方程组的**唯一解为：**

$$x_i=\frac{D_i}{D}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n-1), \qquad x_n=\frac{D_n}{D}=2.$$

例3 设曲线$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$通过四点(1,3)、(2,4)、(3,3)、(4,–3)，求系数a_0，a_1，a_2，a_3。

解 把四个点的坐标代入曲 线方程，得线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3, \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3. \end{cases}$$

其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12.$

(范德蒙德行列式)

而 $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ -3 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 36$; $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -18$;

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & -3 & 64 \end{vmatrix} = 24$; $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & -3 \end{vmatrix} = -6.$

得方程组的唯一解为 $a_0 = 3,\ a_1 = -\dfrac{3}{2},\ \ a_2 = 2,\ a_3 = -\dfrac{1}{2}$,

故曲线方程为 $y = 3 - \dfrac{3}{2}x + 2x^2 - \dfrac{1}{2}x^3$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 12$$

将Cramer法则用于齐次线性方程组，可得

推论1 对于n个方程n个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

如果它的系数行列式$D \neq 0$,则该齐次线性方程组只有零解.

推论2 如果齐次线性方程组（3）有非零解，则它的系数行列式必为零.

例4 λ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\x+\lambda y+z=0\\x+y+\lambda z=0\end{cases}$有非零解？

解 若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式$D=0$.

而 $$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1 & 1\\\lambda+2 & \lambda & 1\\\lambda+2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

由$D=0$，得$\lambda=1$或$\lambda=-2$. 当$\lambda=1$时，方程组为$\begin{cases}x+y+z=0,\\x+y+z=0,\\x+y+z=0\end{cases}$

$x=1,y=1,z=-2$为一组非零解.

不难验证，当$\lambda=-2$时，所给方程组也的确有非零解.

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第一章　行列式

课后习题选讲

数学与统计学院
张 芳

主要内容

例1-14：第1章习题

例15-18：

习题1.1,A 6， B 1,2

例19-26：

习题1.2,A 4,6， B 1,2

例27-28：

习题1.3,A 4， B

例1 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \underline{140}$.

解 利用公式(1.2.6)可得

$$\left|\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 140.$$

例2 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\quad 48 \quad}$.

解 利用行列式的性质，将 第2,3,4行分别加到第 1行，再将第1行的 -1倍分别加到第 2,3,4行.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

例3 关于x的代数方程$\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$的全部根为_____.

解 由行和相同得

$$\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & x-4 & 0 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 3 & x-5 \end{vmatrix}=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$\therefore$ 关于x的代数方程的全部根为 1,2,3.

例4 已知n阶行列式D的值为$a \neq 0$，且D的每行元素之和都等于常数b,则D的第1列元素的代数余子式之 和

$$A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \underline{\qquad}.$$

解 利用行列式的性质，将 第$2,\cdots,n$列都加到第1列,再按第1列展开可得

$$D = b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b(A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1}) = a.$$

$\because \ a \neq 0, \ \therefore \ b \neq 0.$ $\quad \therefore \ A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \dfrac{a}{b}.$

例5 若方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$,只有零解，则常数 λ与μ

应满足的条件是 ____ .

解 利用$Cramer$法则的推论1.3.1知：

$$\text{系数行列式}\, D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \mu(1-\lambda) \neq 0$$

$\therefore$ λ和μ应满足的条件是： $\lambda \neq 1$且 $\mu \neq 0$.

例6 已知n阶行列式$D=0$，则(**D**)

(A) D中必有一行(列)元素全为零.

(B) D中必有两行(列)元素对应成比例.

(C)以D为系数行列式的非齐次 线性方程组必有惟一解.

(D)以D为系数行列式的齐次线 性方程组必有非零解.

解

(A)和(B)可以分别举反例$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$和$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$

(C)不满足$Cramer$法则的条件.

(D)利用$Cramer$法则的推论1.3.2反证可得. 应选 D.

例7

设A_{ij}为$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的代数余子式，

则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=$（A）

(A)0.　　(B)1.　　(C)-1.　　(D)16.

解

由行列式的性质有，$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

第1行和第3行完全一样,行列式等于0,$\therefore$选A.

或者利用行列式的性质 1.1.8: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0, i\neq k$, $\therefore$选A.

例8 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为$f(x)$，则方程

$f(x)=0$的根的个数为（B）

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

解 第2,3,4列分别减去第 1列，得$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=0$$

$\therefore$ 应选B.

例9 设M_{ij}为行列式$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的余子式，

试计算$M_{13}+2M_{23}+5M_{33}$.

解 $M_{13}+2M_{23}+5M_{33}=(-1)^{1+3}M_{13}-2(-1)^{2+3}M_{23}+5(-1)^{3+3}M_{33}$

$$=A_{13}-2A_{23}+5A_{33}+0A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-105$$

例10 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_4]{\substack{r_1 - 3r_4 \\ r_2 - 2r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 + 4c_1]{c_2 - 2c_1} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18.$$

例11 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & -7 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2 + 2c_1 \\ c_3 - 3c_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -13 & 8 \\ -2 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142.$$

例12 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$.

解

$$D \underset{拆c_1}{=} \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & xy & xz \\ 0 & y^2+1 & yz \\ 0 & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ y & y^2+1 & yz \\ z & yz & z^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2+1 & yz \\ yz & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + y^2+z^2+1 = x^2+y^2+z^2+1$$

例13 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.

三对角行列式

$$\begin{vmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{vmatrix}$$

解 按第1行展开有

$$D_5=2aD_4-a^2D_3$$

$$=2a(2aD_3-a^2D_2)-a^2D_3=3a^2D_3-2a^3D_2$$

$$=3a^2(2aD_2-a^2D_1)-2a^3D_2=4a^3D_2-3a^4D_1$$

$$=4a^3\cdot 3a^2-3a^4\cdot 2a=6a^5.$$

例14 用Cramer法则求解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = \dfrac{1}{2}, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 1. \end{cases}$$

解

$$\because\ D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 15 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 15 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}D,$$

由Cramer知：$x_i = \dfrac{D_i}{D}, i = 1,2,3,4.$

且D_2, D_3, D_4中都有两列成比例，所 以都等于0

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_i = 0, i = 2,3,4.$$

例15 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

稀疏行列式

解 按第n行展开,有

$$D=n\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=n\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

或者,利用行列式的性质，通 过交换列,将其化为对角行列式,再计算。

例16 计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$ **稀疏行列式**

解 按第1列展开,有

$$D = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n.$$

例17 设b为非零常数，分别用 b^{i-j}去乘行列式 $D=\det(a_{ij})$的(i,j)元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,证明所得行列式与 D相等.

证明

由题设所得行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ b^{2}a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \cdots & b^{3-n}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-3}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

每列提出$b^{2-j}(j=1,\cdots,n)$

$$= bb^{0}b^{-1}\cdots b^{2-n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-1}a_{13} & \cdots & b^{-1}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ba_{31} & ba_{32} & ba_{33} & \cdots & ba_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-2}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-2}a_{n3} & \cdots & b^{n-2}a_{nn} \end{vmatrix}$$

每行提出$b^{i-2}(i=1,\cdots,n)$

$$= D$$

例18 就3阶行列式 来验证行列式的性质 1.1.1，即$D^T = D$.

证明 按第1行展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$

按第1行展开

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$

比较可得$D^T = D$成立.

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例19 计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.　　行和相同

解 将第$2,3,\cdots,n$行分别加到第1行，

$$D=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

再用第$2,3,\cdots,n$行分别减去第1行.

例20 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$.

解 将第$2,\cdots,n$列加到第1列

行和相同

$$D=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)b^{n-1}.$$

再将第 $2,3,\cdots,n$行分别减去第 1行.

例21 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解 将第$2,3,\cdots,n$行分别减去第1行，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$ 按第2行展开.

$$=-2(n-2)!$$

例22

计算n阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

解 第$2,3,\cdots,n$行分别减去第1行，

爪形

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{a_1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

再将第 k列的$\frac{a_1}{a_k}$倍分别加到第1列，

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

例23 利用$Vandermonde$行列式计算$n+1$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解 第$k(k=n+1,\cdots,2)$行依次与第$k-i(i=1,\cdots,k-1)$行交换.

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-1)^n \end{vmatrix}$$

第$k(k=n+1,\cdots,2)$行依次与第$k-i(i=1,\cdots,k-1)$行交换.

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

第$k(k=n+1,\cdots,2)$列依次与第$k-i(i=1,\cdots,k-1)$列交换.

$$=(-1)^{n(n+1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=n!(n-1)!\cdots 2!1!$$

例24 利用(1.2.2)式及行列式的性质证明：

$$D_{m+n}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

分析：(1.2.2)式是分块下三角行列式

$$D_{m+n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

例24 利用(1.2.2)式及行列式的性质证明：

$$D_{m+n}=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \hdashline b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array}\right|$$

$$=(-1)^{mn}\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{array}\right|$$

相邻列的交换移到第 n列;

共经过mn次交换后，

再利用(1.2.2)式即得到结论 。

例25 计算行列式 $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|, i,j=1,\cdots,n.$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

第 i 行减去第 $i-1$ 行 $(i=n,\cdots,2)$.

第 n 列分别加到其余列 .

$$=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例26 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix},\quad a_1\neq 0.$$

解

第$i(i=2,\cdots,n)$行加上第1行的$(-\frac{a_i}{a_1})$倍. 第$j(j=2,\cdots,n)$列$\frac{a_j}{a_1}$倍加到第1列.

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2).$$

例27 证明：过平面上两个不 同点$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$的直线的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明 过平面上的两个不同点 M_1,M_2的直线方程为：

$$y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & 0 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

例28 设$a_i(i=0,1,2,3)$为常数，且$a_3\neq 0$，试利用$Cramer$法则和$Vandermonde$行列式的结论证明：3次代数方程

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$不会有4个不同的根。

证明 反证法 设该3次代数方程有 4个不同的根$x_i(i=1,2,3,4)$,则

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+a_3x_i^3=0 \quad (i=1,2,3,4)$$

该方程组是以 a_0,a_1,a_2,a_3为未知量的齐次线性方程组，

且系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\neq 0$$

$\therefore$ 该方程组只有零解，即 $a_0=a_1=a_2=a_3=0$，矛盾 $\therefore$ 结论成立。