



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

《高等数学》期末考试模拟题(四)

数学与统计学院：张芳



一. 单选题 (共5道小题, 每小题3分, 共15分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处().

- A. 连续且取极大值; B. 连续且取极小值;
C. 可导且导数不为零; D. 可导且导数为零.

2. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续且 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().

- A. 不可导; B. 可导且 $f'(0) \neq 0$;
C. 取得极大值; D. 取得极小值.



一. 单选题 (共5道小题, 每小题3分, 共15分)

3. 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解可设为 (a, b 为常数) ().

A. $ae^x + b$;

B. $axe^x + b$;

C. $ae^x + bx$;

D. $axe^x + bx$.

4. 函数 $y = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x - 2)}$ 的间断点个数是 ().

A. 1;

B. 2;

C. 3;

D. 4.



一. 单选题（共5道小题，每小题3分，共15分）

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是().

- A. 无界的但不是无穷大量 ; B. 无穷大量;
C. 有界的但不是无穷小量 ; D. 无穷小量 .

二. 填空题 (共5道小题, 每小题3分, 共15分)



1. 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林公式中 x^{2021} 项的系数为 _____ .

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \underline{\hspace{2cm}} .$

3. 反常积分 $\int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{2-x}} dx = \underline{\hspace{2cm}} .$

4. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}} .$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{n} \right)^2 \tan \frac{1}{n^3} = \underline{\hspace{2cm}} .$

三. 计算题 (共7道小题, 每小题6分, 共42分)



1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \sin t + \tan^3 t \ln t) dt}{\cos x \int_0^x \ln^2(1+t) dt}$.

2. 讨论函数 $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} - 2 \cos x$ 的零点个数.

3. 求微分方程 $(y+1)y'' + (y')^2 = (1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的解.

4. 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$.



三. 计算题 (共7道小题, 每小题6分, 共42分)

5. 将圆周 $x^2 + y^2 = 4x - 3$ 绕 y 轴旋转一周, 求所得旋转体的体积.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x + b \sin x + c, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^k \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

连续可微, 讨论常数 a, b, c 以及 k 的取值.

7. 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.



四.(本题10分) 求微分方程组 $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的通解 .

五.(本题6分)证明等式 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x})dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab})dt$,
其中 $a, b > 0$, 且等式两端的二个积分 都收敛 .

六.(6分)设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} (n = 1, 2, \cdots)$,
证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

七.(6分)设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$,
证明: (1) $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$; (2) $\exists \eta \in (0, 1)$, 使 $f''(\eta) - f(\eta) = 0$.