期末考试模拟题（五）答案 2022.6.16

一．单选题

1. D　2. B　3. C　4. A　5. A

二．填空题

1. $\dfrac{1-4\mathrm{e}}{3}$；2. $\dfrac{2}{3}$；3. -8π；4. $(-2,0]$；5. $0<a<1$或$a=1$，$b>1$.

三．计算题

1. 由$\begin{cases} f_x = 2x(2+y^2)=0 \\ f_y = 2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$ 得驻点$(x,y)=\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$处, $A=f_{xx}\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=2\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0$, $B=f_{xy}\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=0$, $C=f_{yy}\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\mathrm{e}$,

$H=AC-B^2>0$, 所以 $f(x,y)$ 在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$处取到极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2. 原积分$=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le z^2\\ x\ge 0,y\ge 0}} x\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} x\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$.

也可用球面坐标,或柱面坐标，如柱面坐标$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^z \rho^2\cos\varphi\,\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}\rho$.

3. 令$P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$，则$P_y=\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}=Q_x$，（$x^2+y^2\ne 0$）

取$C_1: x^2+y^2=1$，逆时针方向，根据 Green 公式，有

$$\oint\limits_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\oint\limits_{C_1^-}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0,$$

所以，$\displaystyle\oint\limits_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint\limits_{C_1}\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint\limits_{C_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

$=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$.　也可用参数方程$\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}, t:0\to 2\pi$.

4. 记$D=\{(x,y)\,|\,x+y<1, x\ge 0, y\ge 0\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_D y^2\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

5. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ （$-1<x<1$），

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1\le x<1).$$

6. 因$f(x)$为偶函数,故$b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$ $a_0=\dfrac{4}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\dfrac{4}{3}$,

$$a_n=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx=\frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)\cos\frac{2n\pi x}{3},\quad \because s(x)=f(x)$$

$\therefore s(-2)=s(3-2)=s(1)=1$. 同理可知$s(3)=0,\ s(\dfrac{9}{2})=1$.

7. $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 可得$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}$，且由条件可得

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=S(x)$$,从而$S''(x)-S(x)=0$,

注意到$S(0)=a_0=3$，$S'(0)=a_1=1$，可得$S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

四. $F(t)=\dfrac{2\int_0^t f(r^2)\cdot r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\cdot r\mathrm{d}r}$，$F'(t)=\dfrac{2tf(t^2)\int_0^t(t-r)rf(r^2)\mathrm{d}r}{\left(\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right)^2}>0$ （$\forall t\in(0,+\infty)$）

故$F(t)$在$(0,+\infty)$上严格单调递增.

五. 记$S(n)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2=n^2\right\}$， 由 Gauss 公式及条件可知

$$A_n=\iint_{S(n)}(f_x,f_y,f_z)\cdot\frac{(x,y,z)}{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{n}\iint_{S(n)}\left(xf_x+yf_y+zf_z\right)\mathrm{d}S=12\pi n+4\pi+o(1)$$

$\dfrac{1}{A_n}=\dfrac{1}{12\pi n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，注意到$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{12\pi n}$条件收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{A_n}$条件收敛.