西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学期中模拟题（二）答案

一. 单选题（每小题3分，共18分）

1. $x=2$是函数$f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$的（ C ）.

A. 连续点　B. 可去间断点　C. 跳跃间断点　D第二类间断点

解

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\arctan\frac{1}{2-x}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\arctan\frac{1}{2-x}=-\frac{\pi}{2}$$

$x=2$是函数$f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$的跳跃间断点.

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2 g(x), x\le 0\end{cases}$，其中$g(x)$有界函数，则$f(x)$在$x=0$处（D）

A. 极限不存在　B. 极限存在但不连续　C. 连续但不可导　D. 可导

解

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2 g(x)=0=f(0)$$

函数$f(x)$在$x=0$处连续.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-} x g(x)=0$$

则$f'(0)=0.$

3. 函数$f(x)=(x^2-x-2)\left|x^2-x\right|$不可导点的个数是（C ）

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

解　$f(x)=(x^2-x-2)|x^2-x|=(x^2-x-2)|x|\cdot|x-1|$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-x-2)(-x)\cdot|x-1|}{x}=2$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2-x-2)x\cdot|x-1|}{x}=-2$$

$f(x)$在$x=0$处不可导

$$f_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2-x-2)|x|\cdot(1-x)}{x-1}=2$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-x-2)|x|\cdot(x-1)}{x-1}=-2$$

$f(x)$在$x=1$处不可导

4. 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在$x=a$处（B）

A. $f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$　B. $f(x)$取得极大值

C. $f(x)$取得极小值　D. $f(x)$的导数不存在

解　$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)=0$$

由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$ 知存在$\overset{0}{U}(a,\delta),x\in\overset{0}{U}(a,\delta),\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$

$f(x)-f(a)<0\Rightarrow f(x)<f(a)$　　$f(x)$在$x=a$处取得极大值

5. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导, 周期为4, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处切线的斜率为（ B ）

A. 2　B. −2　C. 1　D. −1

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2$

$$f'(5)=f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=-2$$

6. 在区间(a,b)内, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$, 则$f(x)$的图像在区间(a,b)内是（ A ）

A. 单增且凸　B. 单减且凸　C. 单增且凹　D. 单减且凹

二. 计算题（每小题7分，共49分）

1.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}}=2$

2.设$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$,求$dy$.

解 $dy=d\left(x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}\right)=d\left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$

$=\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\arctan x dx$

3.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

4. 设函数$y=f(x)$由方程$e^y+6xy+x^2-1=0$确定, 求$y'(0)$.

解 $x=0, y=0$

$$e^y y'+6y++6xy'+2x=0 \qquad y'(0)=0$$

5. 设函数$y = f(x)$由方程$\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$确定，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解

$$\dot{x} = 3t^2 + 9, \dot{y} = 2t - 2, \quad \ddot{x} = 6t, \ddot{y} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-2}{3t^2+9}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{2(3t^2+9) - 6t(2t-2)}{(3t^2+9)^3} = \frac{-2t^2+4t+6}{9(t^2+3)^3}$$

6.证明：当$x>0$时，$e^x-1<xe^x$.

证明

$$f(x)=xe^x-e^x+1\ (x>0)$$

$$f'(x)=xe^x>0\quad (x>0)$$

$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

$$f(x)>f(0)=0$$

$xe^x-e^x+1>0$　　即$e^x-1<xe^x$.

7.求函数$f(x)=x+2\cos x$的最大值, 其中$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

解 $f'(x)=1-2\sin x$, $f'(x)=0, x=\frac{\pi}{6}$

$f(0)=2, f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

函数$f(x)$最大值为$f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

三（8分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, x\le 0 \\ \sin ax, \quad x>0 \end{cases}$,问$a,b$为何值时, $f(x)$在$x=0$处可导, 并求 $f'(x)$.

解 $\because f(x)$在$x=0$处可导, $\therefore f(x)$在$x=0$处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ 即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin ax=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{2x}+b)$ $\quad 1+b=0$

则 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}-1, x\le 0 \\ \sin ax, \quad x>0 \end{cases}$ $\quad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$

$\Rightarrow a=2$ $\quad$ 则 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}-1, x\le 0 \\ \sin 2x, \quad x>0 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x}, x<0 \\ 2 \quad, x=0 \\ 2\cos 2x, \quad x>0 \end{cases}$

四. （12分）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$,求

(1) 函数 $f(x)$单调区间与极值;

(2)曲线$y=f(x)$的凹凸区间拐点及渐近线.

解 (1) $f'(x)=\dfrac{2x(2x^2+4x+2)-x^2(4x+4)}{4(x+1)^4}=\dfrac{x}{(x+1)^3}$

由$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	>0	<0		>0
$f(x)$	单调增	单调减		单调增

$f(x)$极小值为$f(0)=0$,

无极大值.

解 (2) $f''(x)=\dfrac{1-2x}{(x+1)^4}$ 由$f''(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f''(x)$	>0	>0		<0
$f(x)$	凹	凹		凸

$f(x)$图形的拐点为$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{18})$

$$\lim_{x\to-1}=\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\infty,\quad x=-1\text{为铅垂渐近线;}$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}\text{为水平渐近线.}$$

四. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$

五. （7分）设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0,\ f(0)=0$，$f(1)=1,\ f'(0)=0$，证明：存在 $c\in(-1,1)$，使 $f'''(c)\geq 3$.

证明

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

$$=\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3,\ \xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间}$$

令 $x=-1,\ f(-1)=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\eta_1)}{6}$，　即：$0=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\eta_1)}{6},\ \eta_1\in(-1,0)$

令 $x=1,\ f(1)=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\eta_2)}{6}$，　即：$1=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\eta_2)}{6},\ \eta_2\in(0,1)$

$$\frac{f'''(\eta_1)}{6}+\frac{f'''(\eta_2)}{6}=1$$　　$f'''(\eta_1)$ 与 $f'''(\eta_2)$ 中至少有一个大于等于3

$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$　　存在 $c\in(-1,1)$，使 $f'''(c)\geq 3$.

六（6分）设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$可导, 且$f(0)=0, f(1)=1,$

证明:在$(0,1)$内存在不同两点x_1, x_2,使 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

分析: $f(x)$在$[0,c],[c,1]$分别应用拉格朗日中值定理

$$\text{存在}x_1\in(0,c,)\text{使}f'(x_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}$$

$$\text{存在}x_2\in(c,1)\text{使}f'(x_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c}$$

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{c}{f(c)}+\frac{1-c}{1-f(c)}=2 \qquad \text{只要}f(c)=\frac{1}{2}$$

六（6分）设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$可导，且$f(0)=0,\ f(1)=1$，

证明：在$(0,1)$内存在不同两点x_1, x_2，使$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

证明： $f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=0,\ f(1)=1$，

根据介值定理存在$c\in(0,1)$，使得$f(c)=\dfrac{1}{2}$

$f(x)$在$[0,c],[c,1]$分别应用拉格朗日中值定理

存在$x_1\in(0,c)$使$f'(x_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{1}{2c}$，

存在$x_2\in(c,1)$使$f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{1}{2(1-c)}$，

在$(0,1)$内存在不同两点x_1, x_2，$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2c+2(1-c)=2.$

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY