期中考试模拟题（五）2022.5.8

一、　单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的一个邻域内有定义，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（　　）.

（A） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 均存在；

（B） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数均存在；

（C） $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；

（D） $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

2. 设 (V) 由曲面 $x^2+y^2=z^2+9$ 与平面 $z=0,z=4$ 围成，则在柱坐标下，$\iiint\limits_{(V)} f(x^2+y^2+z^2)dV$ 可化为（　　）.

（A） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\rho d\rho\int_0^4 f(\rho^2+z^2)dz$　；

（B） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5\rho d\rho\int_{\sqrt{\rho^2-9}}^4 f(\rho^2+z^2)dz$；

（C） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\rho d\rho\int_0^4 f(\rho^2+z^2)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_3^5\rho d\rho\int_{\rho^2-9}^4 f(\rho^2+z^2)dz$；

（D） $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\rho d\rho\int_0^4 f(\rho^2+z^2)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_3^5\rho d\rho\int_{\sqrt{\rho^2-9}}^4 f(\rho^2+z^2)dz$.

3. 设有二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin x-\sin(2y)}{x-2y}$，则此极限为（　　）.

（A）0；　（B）1；　（C）不存在但非∞；　（D）∞；

4. 设 $f(x,y)$ 满足 $f_{yy}(x,y)=2, f(x,0)=1, f_y(x,0)=x$，则有（　　）.

（A） $f(x,y)=1-xy+y^2$；　　（B） $f(x,y)=1+xy+y^2$；

（C） $f(x,y)=1-x^2y+y^2$；　　（D） $f(x,y)=1+x^2y+y^2$.

5. 设 $(\sigma)=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\sin x\}$，则 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$ 等于（　　）.

（A） $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$　；　　（B） $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$；

（C） $\int_0^1 dy\int_0^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$；　　（D） $\int_0^1 dy\int_0^{\pi} f(x,y)dx$.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在点 $P(0,0,1)$ 处沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外法线方向的方向导数为_______.

2. 设 $f(x,y)=xe^{x+y}+\ln y\cdot\arctan\dfrac{x+y}{1+x^2y^2}$， 则 $f_x(1,1)=$_______.

3. 设 $x^z+y=z^y+x^2$ 决定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $dz|_{(1,1)}=$________.

4. 交换积分次序：

$$\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_{\sqrt{2}}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5. 设 $(V)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则 $\iiint\limits_{(V)}(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2dV=$______.

三、计算(每小题 8 分，共 56 分)

1. 设 f 具有连续的二阶偏导数， $z=f(2x-y,y\sin x)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 设有隐函数方程组 $\begin{cases}x=-u^2+v+z\\ y=u+vz\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

3. 求曲面 $x^2+x+\cos(xy)+yz=0$ 上点 $P(0,1,-1)$ 处的切平面与法线方程.

4. 设 $(\sigma)=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算 $\iint\limits_{(\sigma)}e^{\max(x^2,y^2)}d\sigma$.

5. 设 (V) 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成立体，计算

$$I=\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2dV .$$

6. 求 $f(x,y)=x^3+y^3+(x+y)^2$ 的极值.

7. 已知 $\vec{f}(u,v)=\begin{pmatrix}u^2+v^2\\ uv\end{pmatrix}$， $\vec{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\cos x+\sin y+\tan z\\ e^{x+y+z}\end{pmatrix}$，

设 $\vec{w}=\vec{w}(x,y,z)=\vec{f}\circ\vec{g}$，求 $D\vec{w}(0,0,0)$.

四、（本题 14 分）设 $f(x,y)=x^{2022}+y^{2022}$.

（1）（8 分）求 $f(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值与最小值;

（2）（6 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，如果非负函数 $g(x,y)$ 在区域 D 上有连续的偏导数，且在边界 $x^2+y^2=1$ 上满足 $g(x,y)=f(x,y)$. 证明：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $[g_x(\xi,\eta)]^2+[g_y(\xi,\eta)]^2<4$.