西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第八章　线性变换

8.1 线性变换及其性质

数学与统计学院
刘康民

主要内容

1. 线性变换的定义及其性质
2. 线性变换的核与值域
3. 线性变换的运算

线性变换的定义

定义8.1.1（线性变换）

设$T:V\to W$是从线性空间V到W的一个映射.
如果$\forall\alpha,\beta\in V,k\in F$,恒有

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$;

则称T是V到W的一个线性变换. V到W的线性变换的全体记为$L(V,W)$. V到自身的线性变换的全体记为$L(V)$. 如果$T\in L(V)$, 则称T是V上的线性算子.

注1 定义中的条件(1)(2)与如下等式等价

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, \forall k_1, k_2 \in K$ 有

$$T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = k_1T(\alpha_1) + k_2T(\alpha_2).$$

注2 如果两个线性空间同构, 则它们之间的同构映射是线性变换. 反之不真, 因线性变换未必是双射.

例1 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, 定义 $T: R^n \to R^m$ 为

$$T(x) = Ax \qquad \forall x \in R^n$$

由定义易知 $T \in L(R^n, R^m)$.

例2 线性空间 V 上的恒等变换 I 是线性算子:

$$\forall \alpha \in V,\ I(\alpha) = \alpha.$$

例3 设 k 是数域 F 中的一个数, 定义 $T: V \to V$ 为

$$T(\alpha) = k\alpha \qquad \forall \alpha \in V$$

由定义易知 $T \in L(V)$, 称 T 为**数乘算子**.

例4 线性空间 V 上的**零变换** O 是线性算子:

$$\forall \alpha \in V,\ O(\alpha) = 0.$$

例5 设 $e_1, \ldots, e_n$ 是线性空间 V 的一个基底, 对于 $\alpha \in V$,

$\alpha = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n$, 定义 $T: V \to F^n$ 为

$$T(\alpha) = (k_1, \ldots, k_n)^T,$$

则易知 $T \in L(V, F^n)$, 称为**坐标映射**, 是同构映射.

线性变换的基本性质

定理8.1.1（基本性质） 设 $T\in L(V,W)$, 则

(1) $T(0)=0$;　　(2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)$;

(4) T 把 V 中线性相关向量组映射为 W 中线性相关组.

证 仅证(4). 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V$ 线性相关, 则有 $k_1,\ldots,k_r$ 不全为零, 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$,

$$0=T(0)=T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)$$

所以, $T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_r)$ 是 W 中的线性相关组. ■

注意：线性变换可能把无关组映射成相关组。

线性变换的本质特征是保持线性运算. 由此可知:

线性变换完全由它在空间的基上的作用确定.

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基, $\alpha = k_1e_1+\cdots+k_ne_n \in V$,

$T\in L(V,W)$, 则有

$$T(\alpha)=k_1T(e_1)+\cdots+k_nT(e_n)$$

由此可见，只要规定了基中每个向量在 T作用下的像, 也就规定了线性变换 T. 因此, T 由 $T(e_1),\cdots,T(e_n)$ 决定.

设 $T,S\in L(V,W)$, 如果 $\forall\alpha\in V$, 均有 $T(\alpha)=S(\alpha)$, 则称**线性变换 T 与 S 相等**, 记为 $T=S$.

$$T=S \Leftrightarrow T(e_i)=S(e_i)\ (i=1,\cdots,n)$$

主要内容

1 线性变换的定义及其性质

2 线性变换的核与值域

3 线性变换的运算

线性变换的核与值域

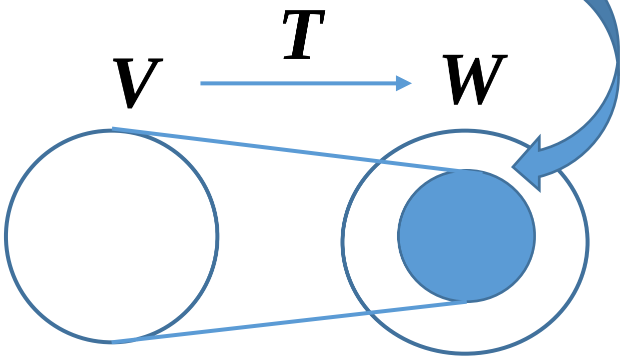
定义8.1.2（核与值域）

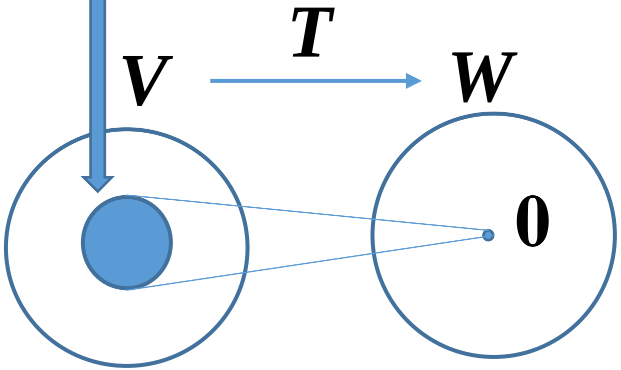
设$T \in L(V,W)$，称 V 的子集 $\{\alpha \in V \mid T(\alpha)=0\}$

为T 的**核**或**零空间**，记为 $\ker(T)$ 或 $T^{-1}(0)$，$\mathrm{null}(T)$.

称 W 的子集 $\{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$ 为 T 的**值域**或**像空间**，

记为 $R(T)$ 或 $T(V)$.





例6 设 T 是R^3 到 oxy 平面的正交射影:

$$T(x,y,z)^T=(x,y,0)^T \qquad \forall (x,y,z)^T\in R^3$$

易知 $\ker(T)$ 就是 z 轴, $R(T)$ 就是 oxy 平面.

$\boxed{\text{线性代数基本定理}}$

例7 设 A 是$m\times n$实矩阵, $T(x)=Ax \quad (\forall x\in R^n)$,

则 $\ker(T)$ 就是 $Ax=0$ 的解空间, 记为 $N(A)$;

$R(T)$ 就是A 的列空间, 记为 $R(A)$. $\boxed{N(A)=\left(R(A^T)\right)^{\perp}}$

$$\boxed{\dim(N(A))+\dim(R(A))=n-r(A)+r(A)=\dim(R^n).}$$

两例中, $\ker(T)$ 和 $R(T)$ 都是相应空间的子空间,

而且 $\dim(\ker(T))+\dim(R(\mathrm{T}))$ 都等于定义域的维数.

定理8.1.2 设 $T \in L(V,W)$, 则

(1) $\ker(T)$ 是 V 的子空间; (2) $R(T)$ 是 W 的子空间.

证 只要证明 $\ker(T)$ 非空且对 V 的线性运算封闭.

因为 $T(0)=0$, 故 $0 \in \ker(T)$, $\ker(T)$ 非空. $\forall \alpha, \beta \in \ker(T)$, $k, l \in F$, 因为 $T(k\alpha + l\beta) = kT(\alpha) + lT(\beta) = 0 + 0 = 0$, 所以, $k\alpha + l\beta \in \ker(T)$, $\ker(T)$ 是 V 的子空间.

类似可证, $R(T)$ 是 W 的子空间. ■

称 $\ker(T)$ 的维数为 T **的零度**, 记为 $\text{nullity}(T)$;

称 $R(T)$ 的维数为 T **的秩**, 记为 $\text{rank}(T)$, 即

$$\text{nullity}(T) = \dim(\ker(T)), \qquad \text{rank}(T) = \dim(R(T)).$$

线性变换基本定理

定理8.1.3（秩+零度定理） 设 $T\in L(V,W)$, $\dim(V)=n$, 则

$$\mathrm{nullity}(T)+\mathrm{rank}(T)=n.$$

证 设 $1\le \mathrm{nullity}(T)=r<n$. 取 $\ker(T)$ 的基 $e_1,\dots,e_r$, 将它扩充成 V 的基：$e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n$. 如果能证明 $T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$ 是 $R(T)$ 的基, 则有 $\mathrm{rank}(T)=\dim(R(T))=n-r$, 从而有 $\mathrm{nullity}(T)+\mathrm{rank}(T)=r+n-r=n$.

对 $\forall\alpha\in V$, $\alpha=c_1e_1+\cdots+c_re_r+c_{r+1}e_{r+1}+\cdots+c_ne_n$, 有

$T(\alpha)=c_{r+1}T(e_{r+1})+\cdots+c_nT(e_n)$, 所以, $R(T)$ 由 $T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$ 生成. 下证 $T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$ 线性无关.

设 $k_{r+1}T(e_{r+1})+\cdots+k_nT(e_n)=0$, 则有

$$T(k_{r+1}e_{r+1}+\cdots+k_ne_n)=0,$$

所以, $k_{r+1}e_{r+1}+\cdots+k_ne_n\in\ker(T)$, 从而, 存在 $k_1,\ldots,k_r$, 使

$$k_{r+1}e_{r+1}+\cdots+k_ne_n=k_1e_1+\cdots+k_re_r,$$

又 $e_1\cdots e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$ 是 V 的基, 线性无关,所以

$k_1\cdots k_r,k_{r+1},\cdots,k_n$ 均为0, 从而 $T(e_{r+1}),\ldots,T(e_n)$ 线性无关.

故 $T(e_{r+1}),\ldots,T(e_n)$ 是 $R(T)$ 的基. ■

线性变换是单射的等价条件

定理8.1.4 设 $T \in L(V,W)$, 则下列条件等价

(1) T 是单射$(T(\alpha)=T(\beta) \Rightarrow \alpha=\beta)$; (2) $\ker(T)=\{0\}$;

(3) T 把 V 中线性无关向量组映射为 W 中线性无关组.

证 $(1) \Rightarrow (2)$ 设 T 是单射. 任取 $\alpha \in \ker(T)$, 则 $T(\alpha)=0$;

又 $T(0)=0$, 由单射定义知: $\alpha=0$; 所以, $\ker(T)=\{0\}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 V 中任一线性无关组,

$$k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_rT(\alpha_r)=0 \Rightarrow T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0$$

又 $\ker(T)=\{0\}$, 所以 $k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$. 而 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 无关,

所以 $k_1=\cdots=k_r=0$, 故 $T(\alpha_1),\ldots,T(\alpha_r)$ 线性无关.

$(3)\Rightarrow(1)$ 若 $\alpha,\beta\in V,\alpha\neq\beta$, 则 $\alpha-\beta\neq 0$;

即 $\alpha-\beta$ 线性无关. 由(3)知 $T(\alpha-\beta)$ 线性无关,

$T(\alpha-\beta)\neq 0$ ➡ $T(\alpha)-T(\beta)\neq 0$ ➡ $T(\alpha)\neq T(\beta)$ ➡ T 是单射.■

定理8.1.5 设 $T\in L(V,W)$, $\dim(V)=n$, 则

$$T \text{ 是单射} \Leftrightarrow (4)\ \operatorname{rank}(T)=n.$$

证 $\operatorname{nullity}(T)+\operatorname{rank}(T)=\dim(V)=n$,

$(4)\Rightarrow(2)$ $\operatorname{rank}(T)=n$ ➡ $\operatorname{nullity}(T)=0$ ➡ $\ker(T)=\{0\}$.

$(2)\Rightarrow(4)$ $\ker(T)=\{0\}$ ➡ $\operatorname{nullity}(T)=0$ ➡ $\operatorname{rank}(T)=n$ ■

主要内容

1 线性变换的定义及其性质

2 线性变换的核与值域

3 线性变换的运算

线性变换的乘积

定义8.1.3（映射的乘积）

设 $T_2:U\to V, T_1:V\to W$ 是两个映射. 定义 $T_1T_2:U\to W$ 为: $T_1T_2(\alpha)=T_1\left(T_2(\alpha)\right)\ \forall\alpha\in U$, 称 U 到 W 的映射 T_1T_2 为 T_1 与 T_2 的乘积(或复合).

注1 映射的乘积满足结合律: $(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$.

注2 若 T_1,T_2 都是线性变换, 则 T_1T_2 也是线性变换.

注3 设 T 是 V 上的线性算子, 则可以定义 T 的幂:

$$T^0=I, T^k=TT^{k-1}\quad (k=1,2,\cdots)$$

定义8.1.4（可逆映射）

设 $T_1: V \to W$, 若存在映射 $S: W \to V$, 使得

$$TS = I_W \quad ST = I_V$$

则称 T 为可逆映射, 并称 T 为 S 的逆,记为 T^{-1}.

如果线性变换 T 是可逆映射,则称 T 是可逆线性变换.

注1　T 和 T^{-1} 互为逆映射, 且 $(T^{-1})^{-1} = T$.

注2　T 可逆 $\Leftrightarrow T$ 是双射(既是单映射又是满映射).

注3　若 T 是可逆线性变换, 则 T^{-1} 也是线性变换.

$$\forall \alpha \in W, \forall k \in F, \quad T(T^{-1}(k\alpha)) = (TT^{-1})(k\alpha) = I_W(k\alpha) = k\alpha$$

$$T(kT^{-1}(\alpha)) = kT(T^{-1}(\alpha)) = k(TT^{-1})(\alpha) = k\alpha \quad T^{-1}(k\alpha) = kT^{-1}(\alpha)$$

线性变换可逆的等价条件

定理8.1.6 设 $T\in L(V,W)$, 则 T 可逆的充要条件是 $\ker(T)=\{0\}$ 且 $R(T)=W$.

证 T 是单射 $\Leftrightarrow \ker(T)=\{0\}$, T是满射 $\Leftrightarrow R(T)=W$.

定理8.1.7 设 $T\in L(V,W)$, $\dim(V)=\dim(W)=n$, 则下列条件等价 $\quad \text{nullity}(T)+\text{rank}(T)=n$

(1) T 是可逆线性变换; (2) T 是单射; (3) T 是满射;

(4) $\text{rank}(T)=n$; (5) $\text{nullity}(T)=0$.

证 $(2)\Rightarrow(3)$ T 是单射 $\rightarrow \ker(T)=\{0\} \rightarrow \text{nullity}(T)=0$ $\rightarrow \text{rank}(T)=n \rightarrow R(T)=W \rightarrow T$ 是满射;

$(3)\Rightarrow(2)$ 以上各步均可倒推. ■

例8 设 R^3 上的线性算子 T 为:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \forall (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$$

证: T 可逆, 并求 T^{-1}.

证 $T(x) = Ax$ 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 显然, A 可逆.

故 $\ker(T) = \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}$, 所以, T 可逆.

$$T^{-1}(x) = A^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

线性变换的和、数乘

定义8.1.3（线性变换的和与数乘）

设 $T_1,T_2,T\in L(V,W),k\in F$, 定义 T_1 的 T_2 加法为:

$$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)\quad \forall\alpha\in V.$$

称 V 到 W 的映射 T_1+T_2 为 T_1 与 T_2 的和. 定义数 k 与 T 的数量乘法为:

$$(kT)(\alpha)=kT(\alpha)\qquad \forall\alpha\in V.$$

称 V 到 W 的映射 kT 为 k 与 T 的数量乘积(简称数乘).

易证: 线性变换的和与数乘都是线性变换; $L(V,W)$ 关于线性变换的加法和数乘构成 F 上的线性空间.

第八章　线性变换

8.2 线性变换的矩阵表示

数学与统计学院
刘康民

主要内容

1 线性变换的矩阵

2 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

线性变换的矩阵

设 $\dim(V)=n, \dim(W)=m$，它们的基分别是 B 和 B'，其中 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$.

对于 $T\in L(V,W)$，设

$$\begin{cases} T(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{m1}\beta_m, \\ T(\alpha_2)=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{m2}\beta_m, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ T(\alpha_n)=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_m. \end{cases} \qquad A\triangleq\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称 A 为线性变换 T 关于基B, B'的矩阵，简称为**线性变换 T 的矩阵**.

将 $\begin{cases} T(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{m1}\beta_m, \\ T(\alpha_2)=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{m2}\beta_m, \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ T(\alpha_n)=a_{1n}\beta_1+a_{2n}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_m. \end{cases}$ 形式地记为

$$\boxed{\begin{aligned} T(\alpha_1 \cdots \alpha_n) &= (T(\alpha_1)\cdots\ T(\alpha_n)) \\ &= (\beta_1 \cdots \beta_m)A \end{aligned}}$$

A 的第 k 列是 $T(\alpha_k)$

在基 B' 下的坐标向量

在给定线性空间 V 和 W 的基 B 和 B' 的条件下，有如下结论:

(1) 对于 $\forall T \in L(V,W)$, T 的矩阵 A 存在且唯一;

(2) 对于 $\forall A \in F^{m\times n}$, 由

$$(T(\alpha_1)\cdots\ T(\alpha_n)) = (\beta_1\ \cdots\ \beta_m)A$$

确定的 V 到 W 的映射 T 是线性变换.

$$\boxed{L(V,W) \text{ 与 } F^{m\times n} \text{ 同构}, \dim(L(V,W)) = m\times n.}$$

(3) 设 $C \in F^{n\times p}$, 有 $T((\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)C) = T(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)C.$

$$
\begin{aligned}
T((\alpha_1 \cdots \alpha_n)C) &= T\left(\sum_{k=1}^{n} c_{k1}\alpha_k \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{n} c_{kn}\alpha_k\right) \\
&= \left(T\left(\sum_{k=1}^{n} c_{k1}\alpha_k\right) \quad \cdots T\left(\sum_{k=1}^{n} c_{kn}\alpha_k\right) \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k1}T(\alpha_k) \quad \cdots \sum_{k=1}^{n} c_{k1}T(\alpha_k) \right) \\
&= \big(T(\alpha_1) \cdots T(\alpha_n)\big)C \\
&= T(\alpha_1 \cdots \alpha_n)C
\end{aligned}
$$

用矩阵表示线性变换

定理8.2.1 设 $T\in L(V,W)$ 关于基 B,B' 的矩阵为 A, V 中的向量 α 在基 B 下的坐标为 x, $T(\alpha)$ 在基 B' 下的坐标为 y, 则有 $y=Ax$.

证 设 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)x$, 则

$$\begin{aligned}T(\alpha)&=T\big((\alpha_1\cdots\alpha_n)x\big)\\&=T(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)x\\&=(\beta_1\ \cdots\ \beta_m)Ax\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "B"'] & T(\alpha) \arrow[d, leftrightarrow, "B'"] \\
x \arrow[r, "A"] & y=Ax
\end{tikzcd}$$

又 $T(\alpha)=y_1\beta_1+\cdots+y_m\beta_m=(\beta_1\ \cdots\ \beta_m)y$

因为,向量在给定基下的坐标唯一,所以 $y=Ax$. ∎

例1 零变换,恒等变换和数乘变换在任何基下的矩阵分别为 O, I 和 kI.

例2 设 $V = span\{\sin t, \cos t, e^t\}$, $D \in L(V)$ 定义如下:

$$D(f(t)) = \frac{d f(t)}{dt} \quad \forall f(t) \in V, \quad B = (\sin t, \cos t, e^t)$$

求 D 在基 B 下的矩阵.

解

$$D(\sin t) = \cos t = 0 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t + 0 \cdot e^t$$

$$D(\cos t) = -\sin t = (-1) \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t + 0 \cdot e^t$$

$$D(e^t) = e^t = 0 \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t + 1 \cdot e^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例3 设 $T\in L(R^2)$ 定义如下:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2x_1+4x_2 \end{pmatrix}\quad \forall (x_1,x_2)\in R^2,\ \ B=(\alpha_1\ \alpha_2)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

是 R^2 的一个基, 求 T 在基 B 下的矩阵.

解 $T(\alpha_1\ \alpha_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$$T(\alpha_1\ \alpha_2)=(\alpha_1\ \alpha_2)A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}A$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

定理8.2.2 由$T(\alpha)=(\beta_1\cdots\beta_m)Ax$所表示的$L(V,W)$与$F^{m\times n}$之间的对应关系满足如下性质:

(1) 线性变换的和对应于矩阵的和;

(2) 线性变换的数量积对应于矩阵的数量积;

(3) 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积.

证 仅证(3). 设$T_2:U\to V$, $T_1:V\to W$是两个线性变换, $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $B'=\{\beta_1,\dots,\beta_p\}$, $B''=\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$分别是$U,V,W$的基,在此基下,$T_2$的矩阵为$C$,$T_1$的矩阵为$A$,即有

$$T_2(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\dots\beta_p)C \quad T_1(\beta_1\dots\beta_p)=(\gamma_1\dots\gamma_m)A$$

$$T_1T_2(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = T_1(T_2(\alpha_1 \cdots \alpha_n)) \;\; = T_1((\beta_1 \ldots \beta_p)C)$$
$$= T_1(\beta_1 \ldots \beta_p)C \;\; = (\gamma_1 \ldots \gamma_m)AC$$

故 T_1T_2 在基 B, B'' 下的矩阵为 AC. ■

定理8.2.3 设 $T \in L(V,W)$, T 在 V,W 的基 B, B' 下的矩阵为 A，则有

(1) $R(T)$ 与 A 的列空间 $R(A)$ 同构;

(2) $\ker(T)$ 与 $Ax = 0$ 的解空间 $N(A)$ 同构.

证 (1)$R(T)$ 中的向量 $T(\alpha) = T(x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_m)Ax$

从而 $Ax \in R(A)$ 是 $T(\alpha)$ 在 B' 下的坐标，向量空间在给定基下到坐标空间的坐标映射是同构映射, 所以, $R(T)$ 与 $R(A)$ 同构.

(2) 的证明与 (1) 类似. ■

例4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 V 的一个基, $T\in L(V)$,

T 在此基下的矩阵为

$$A=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$$

求 T 的值域与核.

解 由于 $R(T)$ 与 $R(A)$ 同构, 先求 $R(A)$ 的基.

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然, A 的前两列是 $R(A)$ 的一个基, 从而

$$T(\alpha_1)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4$$

$$T(\alpha_2)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A_2=2\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$$

是 $R(T)$ 的基, $R(T)=span\{T(\alpha_1),T(\alpha_1)\}$.

$Ax=0$ 的基础解系: $x_1=(4,3,-2,0)^T, x_2=(1,2,0,-1)^T$, 可作为 $N(A)$ 的基;

由于 $\ker(T)$ 与 $N(A)$ 同构, 所以, $4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3$ 和 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$ 是 $\ker(T)$ 的基. $\ker(T)=span\{4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4\}$.

定理8.2.4 设 $T \in L(V,W)$, $\dim(V)=\dim(W)=n$, B 和 B' 分别 V 和 W 的基, T 在 B, B' 下的矩阵为 A, 则 T 可逆 $\Leftrightarrow$ A 可逆, 且当 T 可逆时, T^{-1}在基 B', B 下的矩阵为 A^{-1}.

证 必要性 $(\Rightarrow)$ 设 T 可逆, T^{-1} 对应的矩阵为 C, 则有 $TT^{-1}=I_W$ 对应于 $AC=I$, $T^{-1}T=I_V$ 对应于 $CA=I$, 所以, A 可逆, 且 $A^{-1}=C$.

充分性$(\Leftarrow)$$A$ 可逆 $\Rightarrow \dim(R(A))=n \Rightarrow \operatorname{rank}(T)=n$

故 T 可逆.

主要内容

1. 线性变换的矩阵
2. 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

定理8.2.5 设 $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 和 $B'=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ 是 V 的两个不同的基，$T\in L(V)$, T 在 B,B' 下的矩阵分别为 A 和 D, 且知 B 到 B' 的过渡阵为 C, 则有 $C^{-1}AC=D$, 即**线性算子 T 在不同基下的矩阵是相似的.**

证 由已知,有 $T(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)A$

$\boxed{T(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)=(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)D,}$ $(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)C,$

所以, $T(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)=T((\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)C)$

$=(T(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n))C=(\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n)AC=(\beta_1\ \cdots\ \beta_n)C^{-1}AC,$

由于线性算子在给定基下的矩阵唯一, 所以有

$$C^{-1}AC=D.$$

第八章　线性变换

课后习题选讲

数学与统计学院

主要内容

例7-12：

习题8.1　A 4,5,8,9,　B 1,2

例7 设$e_1, e_2, \cdots, e_n$为线性空间V的基，$T \in L(V, W)$.

证明：T为零变换的充要条件是$T(e_i) = 0(i = 1, \cdots, n)$.

证明： 必要性：因为是$T(\alpha)$零变换，所以，$\forall \alpha \in V, T(\alpha) = 0.$

故$T(e_i) = 0(i = 1, \cdots, n)$

充分性：设$e_1, e_2 \cdots, e_n$是线性空间V的基.

$\forall \alpha \in V$,则$\alpha = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n$

$$T(\alpha) = T(k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n)$$
$$= k_1 T(e_1) + k_2 T(e_2) + \cdots + k_n T(e_n)$$

因为$T(e_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$

故$T(\alpha) = 0, T$ 为零变换.

例8 证明：$T\in L(R^n,R)$的充要条件是存在实常数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$$

证明：充分性：因为存在常数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$

有 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$

所以, $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in R^n,k\in R,$

$$T\left[(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}+(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\right]=T\left[(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$=a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2)+\cdots+a_n(x_n+y_n)$$

$$=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)+(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n)$$

$$=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}+T(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

$$T\left[k(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\right]=T(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)^{\mathrm{T}}$$

$$=a_1kx_1+a_2kx_2+\cdots+a_nkx_n=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$$

$$=kT(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

故 $T\in L(R^n,R)$

必要性： 设 $T\in L(R^n,R)$， $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是R^n中的基本单位向量组，

则有$T(e_i)=a_i \quad i=1,2,\cdots,n. \quad a_i\in R$

$$\forall\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n,\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

根据线性变换的性质有：

$$T(\alpha)=T(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$$

$$=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

例9 设$T \in L(R^4, R^3)$，定义

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}} = (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, 6x_1 - 9x_3 + 9x_4)^{\mathrm{T}},$$

(1)判别下列向量中哪些是$R(T)$中的向量：$\alpha_1 = (6,8,6)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (6,8,6)^{\mathrm{T}}$;

(2)判别下列向量中哪些是$\ker(T)$中的向量：$\xi_1 = (-3,8,-2,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (2,0,0,1)^{\mathrm{T}}$;

(3)求出$\ker(T)$及$R(T)$的基，指出T的零度及秩.

解： $T \in L(R^4, R^3)$，且

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}} = (4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, 6x_1 - 9x_3 + 9x_4)^{\mathrm{T}},$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Ax$$

(将线性变换用矩阵乘法表示)

(1) $T\in L(R^4,R^3), T=Ax, R(T)$即为矩阵A的列空间.

要判断α_1,α_2是否属于$R(T)$，即判断α_1,α_2能否由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表示；

也即非齐次线性方程组$Ax=\alpha_1, Ax=\alpha_2$,是否有解,

也就是判断是否有：$r(A)=r(A|\alpha_1); r(A)=r(A|\alpha_2)$.

经计算$r(A)=r(A|\alpha_1)=3, r(A)=r(A|\alpha_1)=3$. 故$\alpha_1,\alpha_2\in R(T)$.

(2) $T\in L(R^4,R^3), T=Ax, \ker(T)$即为方程组$Ax=0$的解空间.

要判断ξ_1,ξ_2是否属于$\ker(T)$，即判断ξ_1,ξ_2能否为齐次线性方程组$Ax=0$的解；

经计算得:$Ax=0$的基础解系为：$k(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$. 故$\xi_1\in\ker(T)$.

(3) $\ker(T)$为方程组$Ax=0$的解空间. $Ax=0$的基础解系为：$k(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$.

$\ker(A)$的基为:$(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$. 零度为1.

$R(T)$为矩阵A的列空间, $R(T)$的基即为矩阵A的列向量组的极大无关组.

经计算得:$R(T)$的基为:$(4,2,6)^{\mathrm{T}},(1,1,0)^{\mathrm{T}},(-3,-4,9)^{\mathrm{T}}$.

例10

设$T \in L(R^3)$，定义为$T(x)=Ax, \forall x \in R^3$，其中$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(1)证明：几何上$R(T)$代表过原点的平面，并求该平面的方程；

(2)证明：几何上$\ker(T)$代表过原点的直线，并求该直线的方程.

证明：

$T \in L(R^3)$，定义为$T(x)=Ax, \forall x \in R^3$，其中$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

由前面的知识可知：$R(T)$即为矩阵A的列空间. 要想清楚$R(T)$的几何意义，就必须求出矩阵A的列向量组的极大线性无关组，即$R(T)$的基；

$\ker(T)$为齐次线性方程组$Ax=0$的解空间. 要想清楚$\ker(T)$的几何意义，就必须求出齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系, 即$\ker(T$的基).

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}$.经计算得：矩阵$A$的列空间的基为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\6\\4\end{pmatrix}$

所以$R(T)$中的每一个向量$\alpha=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$均可由$\alpha_1=(1,5,7)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,6,4)^{\mathrm{T}}$线性表示

即$\alpha=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=(1,5,7)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,6,4)^{\mathrm{T}}$是共面的，故$\left|\alpha\ \ \alpha_1\ \alpha_2\right|=0$.

得$2x+y-z=0$.即$R(T)$为过原点的平面方程.

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{bmatrix}$.经计算得：方程组$Ax=0$的解空间的基为：$\xi_1=(-14,19,11)^{\mathrm{T}}$.

所以:$\ker(T)$中的每一个向量$\xi=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$均与$\xi_1=(-14,19,11)^{\mathrm{T}}$共线. 即$\xi=k\xi_1$.

得:$\dfrac{x}{-14}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z}{11}$.即$\ker(T)$为过原点的直线.

例11 设V_1,V_2,V_3都是有限维线性空间,$T_2\in L(V_1,V_2),T_1\in L(V_2,V_3)$.

证明:$rank(T_1T_2)\le \min\{rank(T_1),rank(T_2)\}$.

证法1:$rank(T_1T_2)=\dim\{T_1T_2(V_1)\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le \dim\{T_1(V_2)\}=rank(T_1)$

(因为T_2不一定是满射，所以$T_2(V_1)\subseteq V_1$).

$rank(T_1T_2)=\dim\{T_1T_2(V_1)\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le \dim\{T_2(V_1)\}=rank(T_2)$

(因为T_1不一定是单射).

故得:$rank(T_1T_2)\le \min\{rank(T_1),rank(T_2)\}$.

证法2: V_1,V_2,V_3都是有限维线性空间,$T_2\in L(V_1,V_2),T_1\in L(V_2,V_3)$.

设$T_2\in L(V_1,V_2)$对应的矩阵为A,$T_1\in L(V_2,V_3)$对应的矩阵为B.

因为：$rank(T_2)=r(A),rank(T_2)=r(B)$.线性变换的乘积对应于矩阵的乘积.

所以：T_1T_2对应的矩阵为AB,$rank(T_1T_2)=r(AB)$

故得：$rank(T_1T_2)=r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}=\min\{rank(T_1),rank(T_2)\}$

例12 设V上的线性算子T满足$T^2=T$，证明：$V=\ker(T)\oplus R(T)$.

证明： $\forall\alpha\in V,\alpha=(\alpha-T(\alpha))+T(\alpha),$

$$T(\alpha-T(\alpha))=T(\alpha)-T^2(\alpha)=T(\alpha)-T(\alpha)=0$$

因为 $\alpha-T(\alpha)\in\ker(T)$， $T(\alpha)\in R(T)$，所以有$V=\ker(T)+R(T)$.

$\forall\beta\in R(T)$,有$\alpha\in V$,使得$T(\alpha)=\beta$， $T(\beta)=T(T(\alpha))=T^2(\alpha)=T(\alpha)=\beta$

若$\beta\neq 0,T(\beta)\neq 0$,所以 $\beta\notin\ker(T)$,由此有:$\ker(T)\cap R(T)=\{0\}$.

故得： $V=\ker(T)\oplus R(T)$.

主要内容

例13-19：

习题8.2-A 4,6, B 1,2,3,4,5

例13 设$T\in L(R^4,R^3)$, T在基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, $B'=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\alpha_1=(0,1,1,1)^T$, $\alpha_2=(2,1,-1,-1)^T$, $\alpha_3=(1,4,-1,2)^T$, $\alpha_4=(6,9,4,2)^T$; $\beta_1=(0,8,8)^T$, $\beta_2=(-7,8,1)^T$, $\beta_3=(-6,9,1)^T$.

求$\alpha=(1,-2,1,-2)^T$在基B下的坐标，并求$T(\alpha)$.

解： 先求出α在基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的坐标$x$,

接着求$T(\alpha)$在基$B'=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的坐标$y$, 再求$T(\alpha)$.

设$\alpha=x_1\alpha_1+x_1\alpha_1+x_1\alpha_1+x_1\alpha_1$，即$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)x=(1\ ,-2\ ,1,\ -2)^T$,

解得 $x=(1,1,-1,0)^T$. 由公式 $y=Ax$ 得 $y=(2,5,-10)^T$.

$T(\alpha)=B'y=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)y=(25,-50,-5)^T$.

例14

设T是$F[x]_2$上的线性算子，T在基$\{x^2,x,1\}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$.

求T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵

解： 先求基$\{x^2,x,1\}$到基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵C.

再求T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵D.

$$(x^2,x^2+x,x^2+x+1)=(x^2,x,1)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=(x^2,x,1)C.$$

则：$D=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$.

例15 设$T\in L(R^3)$, $T(\alpha_1)=(-5,0,3)^{\mathrm{T}}$, $T(\alpha_2)=(0,-1,6)^{\mathrm{T}}$, $T(\alpha_3)=(-5,-1,9)^{\mathrm{T}}$.

其中$\alpha_1=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,1,1,)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

求在基$\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵.

解： 容易得出：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基$B$. 线性算子$T$在基$B$下的矩阵为$A$.

$$T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A \quad \text{解得} A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

基B到基B': $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的过渡矩阵为$C$,即$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C$.

则线性算子T基B'下的矩阵为D. $D=C^{-1}AC=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}$

例16 设$T\in L(V)$，证明：如果T在V的任一基下的矩阵都相同，
则T是数乘变换.

证明： $T\in L(V)$，设A是线性变换T在某个基下的矩阵，对任意可逆矩阵C，
有$C^{-1}AC$也是线性变换T在另外一个基下的矩阵.

由题意由$C^{-1}AC=A$,即$AC=CA$.

特别取$C=E_{ij}$,其中:$1\le i<j\le n$.

E_{ij}矩阵为：将单位矩阵的第i行第j列处元素变为1，
其余元素不变所得的矩阵.

则由$AE_{ij}=E_{ij}A$得，A为数量矩阵.

例17 设V为复数域C上的线性空间，$T\in L(V)$，若存在数$\lambda_0\in C$及V中非零向量α，使得$T(\alpha)=\lambda_0\alpha$，则称$\lambda_0$为$T$的一个特征值，称$\alpha$为$T$的对应于特征值$\lambda_0$的特征向量. 设$T$在$V$的基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$，证明：$\lambda_0$为$T$的特征值且$\alpha$为对应的特征向量$\Leftrightarrow$ λ_0为A的特征值且为x对应的特征向量，其中x为α在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的坐标向量.

证明:

设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)x$，其中:$x=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots x_n)^{\mathrm{T}}$

则 $T(\alpha)=T((e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)x)=(T(e_1)\ \ T(e_2)\ \ \cdots T(e_n))x=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)Ax$,

$\lambda_0\alpha=\lambda_0(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)=\lambda_0(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)x=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)\lambda_0x$

故$T(\alpha)=\lambda_0\alpha\Leftrightarrow(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)Ax=(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)\lambda_0x\Leftrightarrow(e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n)(Ax-\lambda_0x)=0$

由于$e_1\ \ e_2\ \ \cdots e_n$线性无关$\Leftrightarrow Ax=\lambda_0x.\alpha\in V$为非零向量，则$x\in C^n$也为非零向量

故得：λ_0为T的特征值且α为对应的特征向量

$\Leftrightarrow\lambda_0$为A的特征值且为x对应的特征向量.

例18 设$T\in L(V)$，T在V的基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的矩阵为$A$.

证明：T在V的某基$B'=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$下的矩阵为对角矩阵$D$

$\Leftrightarrow$ A相似于对角矩阵D.并在A可相似对角化时，求出基B'.

证明: 必要性：$T\in L(V)$,T在V的基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的矩阵为$A$.

T在V的某基$B'=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$的矩阵为对角矩阵$D$.

则由定理8. 25知，A与D相似，说明A相似于对角矩阵D.

充分性：设A相似于对角矩阵D，即存在可逆矩阵C,满足$C^{-1}AC=D$.

由于$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为$V$的基，$T$在$V$的基$B$下的矩阵为$A$.

故$B'=BC=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$也为$V$的基.

且$T(B')=T(\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C)=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}AC=B'\cdot C^{-1}AC=B'D.$

T在V的基$B'=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$的矩阵为$C^{-1}AC=D.$

例19 设T是n维欧氏空间V上的线性算子，如果$\forall \alpha,\beta\in V$，都有$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，则称$T$为正交变换. 设$T\in L(V)$，证明下列各命题是相互等价的：

(1)T是正交变换；

(2)T是保长度的，即$\forall\alpha\in V$，都有$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$；

(3)如果$e_1,\cdots,e_n$是V的标准正交基，则$T(e_1),\cdots,T(e_n)$也是V的标准正交基；

(4)T在任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明： $(1)\Rightarrow(2)$ 若T是正交变换，则$\forall\alpha,\beta\in V$，有$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，

故$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle\Rightarrow\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，即$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$.

$(2)\Rightarrow(1)$ 若$\forall\alpha\in V$，都有$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$，两边平分得$\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，

即$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$，$\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=\langle\beta,\beta\rangle$，

故$\langle T(\alpha+\beta),T(\alpha+\beta)\rangle=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle$

$$\Rightarrow 2\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle+\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle+\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=2\langle \alpha,\beta\rangle+\langle \alpha,\alpha\rangle+\langle \beta,\beta\rangle$$

$\Rightarrow \langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle$.即$T$是正交变换.

$(1)\Rightarrow(3)$　设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组标准正交基，则$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

若T是正交变换，则有$\langle T(e_i),T(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

即$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的一组标准正交基.

$(3)\Rightarrow(1)$　设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组标准正交基，$T\in L(V)$,

$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的一组标准正交基.

设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$,$\beta=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$

$$T(\alpha)=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n),T(\beta)=y_1T(e_1)+y_2T(e_2)+\cdots+y_nT(e_n)$$

由标准正交基的性质得：.

$$\langle \alpha,\ \beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

故得:$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle \alpha,\beta\rangle$.即$T$是正交变换.

$(3)\Rightarrow(4)$ 设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组标准正交基，T在该基下的矩阵为A

有 $T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

若$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基

则矩阵A相当于欧氏空间V的两组标准正交基间的过渡矩阵

故 A一定是正交矩阵.

$(4)\Rightarrow(3)$ 设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的一组标准正交基，T在该基下的矩阵为A

A是正交矩阵

则 $T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

$$(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))^{\mathrm{T}}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A((e_1,e_2,\cdots,e_n)A)^{\mathrm{T}}$$

$$=(e_1,e_2,\cdots,e_n)AA^{\mathrm{T}}(e_1,e_2,\cdots,e_n)^{\mathrm{T}}=E$$

故 $T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的一组标准正交基.

主要内容

例1-6：第8章习题

例1 设有 R^2 的基 $B: \varepsilon_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\ \varepsilon_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$; R^3 的基 $B': \alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}; T\in L(R^2,R^3)$, 定义为 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$ $\forall x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$. (1) 求 T 的值域与秩、核与零度；

(2) T 是否为单射？是否为满射？(3) 求 T 在基 B, B' 下的矩阵.

解 由定义 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$ 得

$$T(x)=x_1(\alpha_1+\alpha_3)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)=x_1(1,2,1)^{\mathrm{T}}+x_2(1,1,2)^{\mathrm{T}}$$

(1) $R(T)=span((1,2,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^{\mathrm{T}})$. 所以, $rank(T)=2$.

令 $T(x)=0$, 即得 $x_1(1,2,1)^{\mathrm{T}}+x_2(1,1,2)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$

可得： $x_1=0, x_2=0 \Rightarrow x=(0,0)^{\mathrm{T}}$. 故 $\ker(T)=\{0\}$, $\mathrm{nullity}(T)=0$.

例1 设有 R^2的基$B:\varepsilon_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\ \varepsilon_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$; R^3 的基 $B':\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$; $T\in L(R^2,R^3)$, 定义为 $T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$ $\forall x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$. (1) 求 T 的值域与秩、核与零度;
(2) T 是否为单射? 是否为满射? (3) 求 T 在基 B,B' 下的矩阵.

解 (2) 因为 $\ker(T)=\{0\}$, 所以T是单射;

因为 $rank(T)=2<\dim(R^3)=3$, 所以，所以T不是满射.

(3) $$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2))=(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

T在基B,B'的下矩阵是 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$

（或先作第三问由定理8.2.3）

例2 设$T\in L\left(R[x]_2\right)$, 定义为$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$,

$\forall f(x)\in R[x]_2$. (1) 求T在基$\{1, x, x^2\}$下的矩阵A;

(2)求T在基$\{1, x, 1+x^2\}$下的矩阵B;

(3)求矩阵S使得$B=S^{-1}AS$;

(4)若$f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$, 求$T^n(f(x))(n=2,3,\cdots)$

解 因为 $T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$.

(1) $T(1,x,x^2)=(T(1),T(x),T(x^2))=(0,x,2x^2+2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(2) $T(1,x,1+x^2)=(T(1),T(x),T(1+x^2))=(0,x,2x^2+2)=(1,x,1+x^2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

例2 设$T\in L\left(R[x]_2\right)$, 定义为$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$, $\forall f(x)\in R[x]_2$.(1) 求T在基$\{1,x,x^2\}$下的矩阵A;

(2)求T在基$\{1,x,1+x^2\}$下的矩阵B;

(3)求矩阵S使得$B=S^{-1}AS$;

(4)若$f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$, 求$T^n(f(x))(n=2,3,\cdots)$

解

$$(3)A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$(1,x,1+x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(1,x,x^2)S \quad 故 \quad B=S^{-1}AS$$

例2 设$T\in L\left(R[x]_2\right)$, 定义为$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$, $\forall f(x)\in R[x]_2$.(1) 求T在基$\{1, x, x^2\}$下的矩阵A;

(2)求T在基$\{1, x, 1+x^2\}$下的矩阵B;

(3)求矩阵S使得$B=S^{-1}AS$;

(4)若$f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$,求$T^n(f(x))(n=2,3,\cdots)$

解 (4) $f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)=(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$.

$$T^n(f(x))=T^n((1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}})=T^{n-1}[T(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}].$$

$$=T^{n-1}[(1,x,1+x^2)B(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}]=T^{n-2}[(1,x,1+x^2)B^2(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}].$$

$$=\cdots=(1,x,1+x^2)B^n(a_0,a_1,a_2)^{\mathrm{T}}=a_1x+2^na_2(1+x^2).$$

例3 已知$T\in L(R^3)$,T在基$B:\alpha_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}\alpha_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$.(1)求$T$在基$B'$:

$\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵;

(2)求$T(1,2,-5)^{\mathrm{T}}$

解

(1) 由已知得：由B'到B的过渡矩阵为$C=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

则：由B到B'的过渡矩阵为$C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$

例3 已知$T\in L(R^3)$,T在基$B:\alpha_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}\alpha_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$.(1)求$T$在基$B'$:

$\varepsilon_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵;

(2)求$T(1,2,-5)^{\mathrm{T}}$

解

故：T在基B'下的矩阵为$D=CAC^{-1}$

(2) $T(1,2,-5)^{\mathrm{T}}=T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(1,2,-5)^{\mathrm{T}})=D(1,2,-5)^{\mathrm{T}}=(-9,6,13)^{\mathrm{T}}$

例4

设$T \in L(V)$, T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\-4&3&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$.

(1)T是否可逆？若可逆，求T^{-1};

(2)试求V的另一基，使得T在该基下的矩阵为对角矩阵.

解

(1) $|A|=25$，故A可逆，所以T可逆.$A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}$

对于$\alpha=(e_1,e_2,e_3)x\in V$，$T^{-1}(\alpha)=(e_1,e_2,e_3)\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}x$.

例4

设$T\in L(V)$,T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\-4&3&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$.

(1)T是否可逆？若可逆，求T^{-1};

(2)试求V的另一基，使得T在该基下的矩阵为对角矩阵.

解

(2)将矩阵A对角化. 求矩阵的特征值及特征向量.

$|\lambda I-A|=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=5$;特征向量$\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$,

$\alpha_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$.　$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(e_1,e_2,e_3)P=(e_2+e_3,e_1-2e_2,e_1-2e_3).$$

T在基(η_1,η_2,η_3)下的矩阵为对角矩阵$diag(1,5,5)$.

例5

设$T \in L(V)$,T在V的基$B: e_1, e_2, e_3$下的矩阵为$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(1)证明 $T^2 = T$;(2)求$R(T)$及$\ker(T)$的基，并证明将它们合在一起可构成V的基B';(3)求T在基B'下的矩阵;(4)证明：$\forall \alpha \in R(T)$,恒有$T(\alpha) \in R(T)$,$\forall \beta \in \ker(T)$,恒有$T(\beta) \in \ker(T)$.

解 (1)线性变换相乘，等于对应的矩阵相乘.要证明$T^2 = T$.

只要证明$A^2 = A$就可以了. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$

故: $T^2 = T$

(2) $R(T)=T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)A$, 所以$R(T)=span(e_1,-e_2+2e_3)$.

$Ax=0$的解为$\ker(T)$中的元素在基e_1,e_2,e_3下的坐标.

$Ax=0$的基础解系为$(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 故$\ker(T)=span(e_2-e_3)$

(3) $R(T)$的基为：$e_1,-e_2+2e_3$.$\ker(T)$的基为：e_2-e_3.

又因为$(e_1,-e_2+2e_3,e_2-e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)P,|P|\neq 0$

$R(T)$的基与$\ker(T)$的基合在一起构成V的基B': $e_1,-e_2+2e_3,e_2-e_3$.

T在基B'下的矩阵为$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(4) $\forall\alpha\in R(T),\exists\beta\in V,$使得$T(\beta)=\alpha.$

故得$T(\alpha)=T(T(\beta))=T^2(\beta)=T(\beta)=\alpha.$

所以$T(\alpha)\in R(T).$

$\forall\beta\in\ker(T),T(\beta)=0,T^2(\beta)=T(T(\beta))=T(0)=0.$

故$T(\beta)\in\ker(T).$

例6 设$T \in L(V,W)$，V为有限维空间，已知$T(e_1),\cdots,T(e_r)$为$R(T)$的基
(其中$e_i \in V, i=1,\cdots,r$)，又知$\beta_1,\cdots,\beta_s$为$\ker(T)$的基.
试证明向量$(I): e_1,\cdots,e_r, \beta_1,\cdots,\beta_s$是的$V$基.

证明：已知$T(e_1),\cdots,T(e_r)$为$R(T)$的基. $\beta_1,\cdots,\beta_s$为$\ker(T)$的基.

设存在一组常数$k_1,k_2\cdots,k_r, l_1,l_2\cdots,l_s$满足

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s=0 \quad (1)$$

$$T(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s)=T(0)$$

$$k_1T(e_1)+k_2T(e_2)+\cdots+k_rT(e_r)=0 \quad \Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

将$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$代入 (1) 得 $l_1=l_2=\cdots=l_s=0$

所以$e_1,\cdots,e_r, \beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关

证法一： 再证明V中任意向量α都可由(I)线性表示

设$T(\alpha)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_rT(e_r)$

记向量$\alpha_0=\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r)$

$$T(\alpha_0)=T(\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r))=T(\alpha)-T(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r)=0$$

所以$\alpha_0\in\ker(T)$，α_0可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，即$\alpha_0=b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$

故 $\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r+b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$

因此，$e_1,\cdots,e_r,\ \beta_1,\cdots,\beta_s$是的$V$基.

证法二：

由秩加零度定理：$\dim(V)=\dim(R(T))+\dim(\ker(T))=r+s$

因此 $e_1,\cdots,e_r,\ \beta_1,\cdots,\beta_s$是的$V$基.