西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　高等数学 1(下)

学　　院 ________　　考试日期　2023 年 4 月　日

专业班号 ________

姓　　名 ________　　学　号________　　期中 √　期末

一、单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续，则(　　).

(A) $f(x_0,y_0)$必不存在；　　(B) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$必不存在；

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$必不存在；　　(D) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处必不可微.

2.若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 则下列结论中不一定成立的是(　　).

(A) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的二重极限存在;　(B) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续;

(C) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数存在; (D) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数连续.

3.已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则(　　).

(A) $f_x(0,0)$存在, $f_y(0,0)$不存在;　(B) $f_x(0,0),f_y(0,0)$都不存在;

(C) $f_x(0,0)$不存在, $f_y(0,0)$存在;　(D) $f_x(0,0),f_y(0,0)$都存在.

4. 设函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义,且$f_x'(0,0)=3,f_y'(0,0)=1$,则(　　).

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$;

(B) 曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的法向量为$\{3,1,1\}$;

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$;

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{3,0,1\}$.

5.设圆域$D:x^2+y^2\leqslant R^2$在第一象限的部分为D_1,则$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$(　　).

(A) $4\iint_{D_1}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　(B) 0;　(C) $16\iint_{D_1}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　(D) $4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}=$________.

2.改变二次积分的积分次序: $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$________.

3. 函数$f(x,y)=x^2y^3$在点$(2,1)$处梯度为______, 沿$\vec{i}+\vec{j}$的方向导数为______.

4.设$f(x,y,z)=xy^2z^3$，其中$z=z(x,y)$是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$所确定的隐函数,则 $f_x(1,1,1)=$________________.

5.设$F(t)=\iint\limits_{D} e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为$x^2+y^2\le t^2$,则$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{F'(t)}{t}=$________________.

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1.已知函数$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$,其中$f,g$具有二阶连续导数,求$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$的值.

2. 求曲线$\begin{cases}x^2+z^2=10,\\ y^2+z^2=10.\end{cases}$在点(1,1,3)处的切线和法平面方程.

3.已知向量值函数 $\overrightarrow{w}=\vec{f}(\overrightarrow{u})=\begin{pmatrix}u_1\cos u_2\\ u_1u_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}=\vec{g}(\overrightarrow{x})=\begin{pmatrix}\sin x_2\\ \ln x_1-\cos x_2)\\ x_1^3x_2\end{pmatrix}$,其中 $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2)^T$, $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$, $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2)^T$,求复合函数$(f\circ g)$在(1,0)点处的导数及微分.

4.已知方程组$\begin{cases}u^3+xv=y\\ v^3+yu=x\end{cases}$确定了隐函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

5.设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数且满足$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.确定常数$a,b$的值，使上述等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下简化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

四、（12 分）设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在点(0,0)处的连续性、偏导数和可微性.

五、（8 分）在椭球面$4x^2+y^2+z^2=4$的第一卦限部分上求一点，使得过此点的切平面与三个坐标面围成的三棱锥的体积最小.

六、（8 分）若函数$z=z(x,y)$具有一阶连续偏导数，证明$z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ 的充要条件是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

七、（7 分）设$f(x,y)$为连续函数，且$f(x,y)=x\mathrm{e}^{x^2+y^2}+y\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中区域$D=\{(x,y)\ x^2+y^2\leqslant 1\}$,求：(1) $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; (2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.