西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第四章 *n*维向量与线性方程组

4.1 消元法

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1. n元线性方程组
2. 消元法
3. 线性方程组的解
4. 线性方程组求解举例
5. 齐次线性方程组的解
6. 数域

1 n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

系数矩阵

$$= [A, b]$$

增广矩阵

一些概念：

解，解向量，解集合，一般解（通解），同解的.

- 如何判断线性方程组有没有解？
- 在方程组有解时，它有多少解？

  如何求出它的全部解？
- 如果方程组的解不唯一，那么这些解之间的关系，

  即解的结构如何？

主要内容

1. n元线性方程组
2. 消元法
3. 线性方程组的解
4. 线性方程组求解举例
5. 齐次线性方程组的解
6. 数域

2 消元法

一般消元法的基本思想------ 同解变形

1) 交换某两个方程的位置

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A} \xrightarrow{\quad r_i \leftrightarrow r_j \quad}$$

2) 用非零数k乘第i个方程

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A} \xrightarrow{\quad k r_i \quad}$$

3) 把第i个方程的k倍加至第j个方程

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A} \xrightarrow{\quad r_j + k r_i \quad}$$

例1 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right]$$

解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -7x_3 = -7 \\ 3x_2 - 12x_3 = -27 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & -12 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{-\frac{1}{7}r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_4 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-r_3 + r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = -5 \\ x_1 = 12 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

消元法的一般步骤：用初等行变换将$\overline{A}$化为简化行阶梯形

结论1：当$r(A)=r(\overline{A})$＝未知量的个数时，方程组有唯一解

例2 求解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad = 3. \end{cases}$

解

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

通解 **解的参数形式** **解的向量形式**

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = -4 + x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \end{cases}$$
$(x_4$ 任 意$)$,

或 $$\begin{cases} x_1 = -2 + c \\ x_2 = -4 + c \\ x_3 = -5 + 2c \\ x_4 = c \end{cases}$$
其中c为任意常数

或 $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
其中c为任意常数

结论2

当$r(A)=r(\overline{A})$<未知量个数时，方程组有解且有无穷多解

例3 求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=3 \end{cases}$

解

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

可见方程组无解.

结论 3 当 $r(A)\neq r(\overline{A})$时，方程组无解

主要内容

1 n元线性方程组

2 消元法

3 线性方程组的解

4 线性方程组求解举例

5 齐次线性方程组的解

6 数域

3 线性方程组的解

定理4.1.1（线性方程组有解判定定理）

$A_{m\times n}$，n 元线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

当有解时，解的情况分两种：

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$;

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=r<n$,

此时通解中有n-r个自由未知量.

证明:

设$r(A)=r$, A的前r列所构成的子矩阵中有一个r阶子式不等于零,

$$\overline{A}=[A\mid b]\to\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

从而得到同解方程组

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad x_2 \qquad + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0
\end{cases}
$$

$d_{r+1} \neq 0$ 时无解。

$d_{r+1} = 0$,

(1) $r = n$, (2) $r < n$,

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n = d_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n, \end{cases}$$

唯一解

无穷多解（通解中有*n*-*r*个自由未知量）

主要内容

1 n元线性方程组

2 消元法

3 线性方程组的解

4 线性方程组求解举例

5 齐次线性方程组的解

6 数域

4 线性方程组求解举例

例4 若 $\overline{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & a & -1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)^2\end{bmatrix}$

试判定方程组解的情况，并在有解时，求其全部解．

解： (1) $n=3$，当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时，$r(\overline{A})=r(A)=3$，

方程组有唯一解，将阶梯形进一步化为简化行阶梯形，

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & a & -1\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-1}{a+3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4-\dfrac{3(a-1)}{a+3}\\ 0 & 1 & 0 & -1-\dfrac{a(a-1)}{a+3}\\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-1}{a+3}\end{bmatrix}$$

得唯一解为 $x_1 = \dfrac{a+15}{a+3}, x_2 = \dfrac{-3-a^2}{a+3}, x_3 = \dfrac{a-1}{a+3}.$

(2)当 $a=1$时， $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$,方程组有无穷多解 ，

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 3x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases} (x_3\text{任意}),\text{或}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3c \\ -1-c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c为任意常数)

(3)当 $a=-3$时, $r(A)=2, r(\overline{A})=3$,方程组无解 .

主要内容

1. n元线性方程组
2. 消元法
3. 线性方程组的解
4. 线性方程组求解举例
5. 齐次线性方程组的解
6. 数域

5 齐次线性方程组的解

$Ax=0$有唯一解 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})=n$

$Ax=0$有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})<n$

定理4.1.2 Ax=0的解的情况只有以下两种:

$Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$,

$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$.

推论4.1.1 $A_{n\times n}$, $Ax=0$只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$Ax=0$有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

推论4.1.2 $A_{m\times n}$,且$m<n$, $Ax=0$必有非零解.

例5 求解方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

解:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

(1) 若 $|A| \neq 0$，只有零解，

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \neq 1 \text{且} \lambda \neq -2$$

$$(2)\text{当}\lambda=1\text{时}，\quad A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=-x_2-x_3(\text{其中 }x_2,x_3\text{任意})$$

$$(3)\text{当}\lambda=-2\text{时}，A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}(x_3\text{任意})$$

例6 求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + 2x_5 \end{cases} (x_2, x_4, x_5\text{任意})$$

主要内容

1. n元线性方程组
2. 消元法
3. 线性方程组的解
4. 线性方程组求解举例
5. 齐次线性方程组的解
6. 数域

6　数域

数域—数集F,含有0和1,对数的加、减、乘和除（除数不为零）运算封闭.

Q—有理数域,R —实数域,C —复数域

数域F

第四章 n维向量与线性方程组

4.2 向量组的线性相关性

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1. n维向量及其线性运算
2. 线性组合与线性表示
3. 等价向量组
4. 线性相关与线性无关
5. 线性相关性的有关定理

1 n维向量及其线性运算

定义4.2.1 由数域F中的n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的有序数组

$$\alpha = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \qquad \text{行向量}$$

或

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T \qquad \text{列向量}$$

称为一个n维向量，其中a_i称为第i个分量（坐标）.

实向量，　复向量，　零向量，　负向量.　向量相等.

注：

1. 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量；
2. 行向量和列向量都按照矩阵的运算法则进行运算；
3. 当没有明确说明时，都当作实的列向量.

向量的线性运算

（1）加法 $\alpha=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),\beta=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n),$

规定 $\alpha+\beta=(a_1+b_1 \quad a_2+b_2 \quad \cdots \quad a_n+b_n)$

（2）数乘 $\alpha=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),k\in R$

规定 $k\alpha=\alpha k=(ka_1 \quad ka_2 \quad \cdots \quad ka_n)$

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1 \quad a_2-b_2 \quad \cdots \quad a_n-b_n)$$

运算规律 (设α,β,γ均是n维向量，λ,μ为实数)

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ （交换律）

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ （结合律）

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha)=\mu(\lambda\alpha)$

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

定义4.2.4（n维向量空间 F^n）

数域F上的n维向量的全体，连同上 面定义的向量加法及数乘运算，称为数域F上的n维向量空间，记为F^n.

特别地，有实n维向量空间 R^n，复n维向量空间 C^n.

向量与矩阵的关系

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

有m个n维行向量.　　有n个m维列向量.

线性方程组的向量表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_1}x_1 + \boxed{\alpha_2}x_2 + \cdots + \boxed{\alpha_n}x_n = \boxed{b}$$

即 $Ax = b$ 或 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = b$

主要内容

1 n维向量及其线性运算

2 线性组合与线性表示

3 等价向量组

4 线性相关与线性无关

5 线性相关性的有关定理

2 线性组合与线性表示

定义4.2.5（线性组合与线性表示）

给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，对于任何一组数 $k_1, k_2,\cdots,k_s$，称向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 为向量组的一个线性组合，$k_1, k_2,\cdots,k_s$ 称为组合系数.

对向量 β，如果存在一组数 $k_1, k_2,\cdots,k_s$，使 得

$$\beta = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

则称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示。

定理4.2.1 β可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta)$

表示法唯一 $\Leftrightarrow$ 方程组有唯一解，

表示法无穷 $\Leftrightarrow$ 方程组有无穷多解。

注：

① 若$\alpha = k\beta$，则称向量α与β成比例.

② 零向量O是任一向量组的线性组合.

③ 向量组中每一向量都可由该向量组线性表示.

④ 任一n维向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T$ 都是**基本单位向量组**

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T,$$
$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \cdots,$$
$$\varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T,$$

的一个线性组合. 因为 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$.

例1 设

$$a_1 =, \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\4\\0\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},$$

证明b能由 a_1, a_2, a_3 线性表示，并求出表示式。

解： 令 $A = [a_1 \ a_2 \ a_3]$，$B = [A, \ b]$，

需证 $r(A) = r(B)$

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(A)=r(B)=2,$

b能由 a_1,a_2,a_3 线性表示

方程组$Ax=b$的通解为

$$\begin{cases}x_1=2-3x_3\\x_2=-1+2x_3\\x_3=\quad\quad x_3\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x_1=-3c+2\\x_2=2c-1\\x_3=c\end{cases}$

从而

$$b=(-3c+2)a_1$$
$$+(2c-1)a_2+ca_3.$$

例2 向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\4\\0\\2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\7\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\a\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}3\\10\\b\\4\end{bmatrix},$$

问a,b取何值时， β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？并写出表达式。

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}$$

(1) 当 $b\neq 2$ 时, $r(\overline{A})>r(A)$，方程组无解,

β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(2) $b=2, a\neq 1$, $r(\overline{A})=r(A)=3$, 方程组有唯一解

$x=(-1,2,0)^T\Rightarrow \beta=-\alpha_1+2\alpha_2$

(3) $b=2, a=1$, $r(\overline{A})=r(A)=2$,

$\Rightarrow \beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3$ k为任意常数

主要内容

1. n维向量及其线性运算
2. 线性组合与线性表示
3. 等价向量组
4. 线性相关与线性无关
5. 线性相关性的有关定理

3 等价向量组

定义4.2.6（等价向量组）设有两个向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \quad B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$$

若向量组 A 中每个向量皆可由向量组 B 线性表示，则称向量组 A 可以由向量组 B 线性表示.

即存在 k_{ij}, s.t.

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s \\ \alpha_2 = k_{12}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{s2}\beta_s \\ \cdots\ \cdots \\ \alpha_r = k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s \end{cases}$$

令 $K = (k_{ij})_{s\times r}$，则 $A = BK$

若A和B可以互相线性表示，则称这两向量组等价.

向量组之间的等价关系具有自反性、对称性、传递性.

主要内容

1. n维向量及其线性运算
2. 线性组合与线性表示
3. 等价向量组
4. 线性相关与线性无关
5. 线性相关性的有关定理

4 线性相关与线性无关

(1) 为什么要研究线性相关与线性无关？

(2) 何谓线性相关与线性无关？

(3) 有关线性相关与线性无关的常用性质与判别法.

例3 $\alpha_1=(1,-1,2)^T$ 与 $\alpha_2=(2,-2,4)^T$ 有关系

$\alpha_2=2\alpha_1$ 或 $2\alpha_1-\alpha_2=0$,

几何上，α_1 与 α_2 共线(平行).

例4 $\alpha_1=(1,2,3)^T, \alpha_2=(2,3,4)^T, \alpha_3=(1,1,1)^T$ 有关系

$\alpha_3=\alpha_2-\alpha_1$ 或 $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$,

几何上, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 三向量共面.

例5 对向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(0,5,6)^T$，是否存在不全为零的常 数$x_1,x_2,x_3$，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$?

解： 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$,

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$r(A)=3$, 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=0$只有零解 ，$x_1=x_2=x_3=0$.

称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

定义4.2.7（线性相关与线性无关）

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一组$n$维向量，如果存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性相关，** 否则，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性无关，** 即仅在 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时，才成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

定理4.2.2 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关（线性无关）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

有非零解 (只有零解)

$\Leftrightarrow r([\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s])<s\,(=s)$

推论4.2.1 n个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关（线性无关）

$$\Leftrightarrow \left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\right| = 0\ (\neq 0)$$

推论4.2.2 若$s > n$,则s个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

特别地，$n+1$个n维向量必线性相关.

例6 n维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关.

例7 λ取何值时，$\alpha_1=\begin{bmatrix}\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix}$线性相关？

解： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow \left|\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3\right| = 0$

而$\left|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\right| = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$， 所以，$\lambda=-2$或$\lambda=1$.

例8 证明向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}6\\0\\5\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\-7\\1\\3\end{bmatrix}$$ 线性相关，

并求一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0.$$

解： 令 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0,$

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6&4\\3&0&-7\\1&5&1\\-1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{7}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=2$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 .

要求 k_1,k_2,k_3, 即是求该齐次方程组的 非零解 .

该方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{3}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}$ (x_3任意).

令 $x_3=3$, 则得其一个非零解 $x_1=7, x_2=-2, x_3=3.$

$$\therefore\ 7\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0.$$

主要内容

1. n维向量及其线性运算
2. 线性组合与线性表示
3. 等价向量组
4. 线性相关与线性无关
5. 线性相关性的有关定理

5 线性相关性的有关定理

定理4.2.3 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\,(m\geq 2)$线性相关 $\Leftrightarrow$ 该组中至少有一个向量 可由其余 $m-1$个向量线性表示．

证明：

$\Rightarrow$ **必要性** 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$

不妨设 $k_1\neq 0$，则 $\alpha_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_m}{k_1}\alpha_m$．

所以该组中至少有一个 可由其余的线性表示．

$\Leftarrow$ **充分性** 不妨设 $\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$，则有

$$-\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0$$

因为 $-1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 不全为零，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

逆否命题 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 该组中任一个向量可不 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示 .

一个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$，$\alpha$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0.$

特别地，含有零向量的向量组线 性相关.

定理4.2.4 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示式唯一．

证明： 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关,

所以存在不全为零的常 数$k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，线性无关,

$\therefore\quad k\neq 0.$

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\alpha_m$$

下证表示法唯一

令 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$，

则$(k_1 - \lambda_1)\alpha_1 + (k_2 - \lambda_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - \lambda_m)\alpha_m = 0$,

由于$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，

所以 $k_1 = \lambda_1, k_2 = \lambda_2, k_m = \lambda_m$，即表达式唯一.

定理4.2.5 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$有一个部分组线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关.

注： 部分组线性相关，则整体组线性相关；

整体组线性无关，则部分组线性无关.

例9 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．问 α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？为什么？

解： 已知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

又因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

故 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

第四章 n维向量与线性方程组

4.3 向量组的秩

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1 向量组的极大无关组

2 向量组的秩

3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

4 向量组的秩与矩阵的秩的几个结论

1 向量组的极大无关组

定义4.3.1（极大无关组） 如果向量组 U 有一个部分组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

(2) $\forall\alpha\in U$，α 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 U 的一个极大线性无关组，

简称为极大无关组.

注：向量组 U 与极大无关组等价；

若 U 线性无关，极大无关组就是 U.

问题：若 U 的极大无关组不唯一，其所含向量个数是否相等？

定理4.3.1 设有两个向量组

$$(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s; \qquad (II):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t;$$

且(I)可以由(II)线性表示，则

(1) 当$s>t$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时，必有 $s\le t$

证明： (I)可以由(II)线性表示，则$\exists$矩阵$A_{t\times s}$,

$$[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_s]=[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_t]A$$

$r(A)\le t<s$,所以$AX=O$有非零解 $(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T$

$$\Rightarrow [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s](k_1,k_2,\cdots,k_s)^T$$

$$=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]A(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T=O$$

$\therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

推论4.3.1 如果向量组 $(I),(II)$都线性无关，且 (I)与 (II)等价，则 (I)与 (II)所含向量的个数必相同.

定理4.3.2 设向量组$(I), (II)$都是向量组U的极大无关组，则$(I), (II)$所含向量的个数必相同。

主要内容

1 向量组的极大无关组

2 向量组的秩

3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

4 向量组的秩与矩阵的秩的几个结论

2 向量组的秩

定义4.3.2（向量组的秩） 如果向量组 U仅含零向量，规定U的秩为零；称 U 的极大无关组所含 向量的个数为**向量组的秩**，记为$r(U)$.

定理4.3.3 设 $r(U)=r$,则 U中任意 r个线性无关的向量都可作为 U的极大无关组 .

例1 已知两个向量组

(I): $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}^T, \alpha_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \alpha_3=\begin{pmatrix}9 & 6 & -7\end{pmatrix}^T$;

$(II): \beta_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}^T, \beta_2=\begin{pmatrix}a & 2 & 1\end{pmatrix}^T, \beta_3=\begin{pmatrix}b & 1 & 0\end{pmatrix}^T$.

(1) 求向量组 (I)的秩；

（2）如果向量组 (I)与向量组 (II)有相同的秩，且 β_3可由 (I)线性表示，求常数 a、b的值.

解: (1)α_1,α_2线性无关，且 $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$,

故 α_1,α_2为(I)的极大无关组， 且 $r(I)=2$.

(2)由$r(I)=r(II)=2 \Rightarrow \det[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=0$

由β_3可由(I)线性表示 $\Rightarrow \det[\alpha_1,\alpha_2,\beta_3]=0$ $\Rightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=5 \end{cases}$

主要内容

1. 向量组的极大无关组
2. 向量组的秩
3. 向量组的秩与矩阵的秩的关系
4. 向量组的秩与矩阵的秩的几个结论

3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义4.3.3 称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的列向量组的秩为 A 的列秩；行向量组的秩为 A 的行秩

定理4.3.4 对于任意矩阵 A，有

$$r(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}\ .$$

例4.3.2 求下列向量组的秩 $:\alpha_1=(1,2,3,4)^T$

$\alpha_2=(2,3,4,8)^T,\alpha_3=(3,7,-1,0)^T\ \alpha_4=(0,1,2,0)^T$.

解: 所求向量组的秩等于下 列矩阵A的秩：

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&3&7&1\\3&4&-1&2\\4&8&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 该向量组的秩为 3.

例4.3.3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}$

求向量组 A 的列向量组的秩及一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\xrightarrow{ERT}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 A 的列向量组的秩为 3.

故极大无关组所含向量的个数为 3 个.

显然极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{ERT} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以可得 $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_4$, $\alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4$.

主要内容

1 向量组的极大无关组

2 向量组的秩

3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

4 向量组的秩与矩阵的秩的几个结论

4 向量组的秩与矩阵的秩的几个结论

定理4.3.5 若向量组(I)可以由(II)线性表示则 $r(I)\le r(II)$.

推论4.3.2 若(I)与(II)等价，则$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

例4.3.5 设α_1,α_2线性无关，试求向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$的秩.

解: 由已知，β_1,β_2可由 α_1,α_2线性表示，

又因 $\alpha_1=\dfrac{1}{2}\beta_1+\dfrac{1}{2}\beta_2,\alpha_2=\dfrac{1}{2}\beta_1-\dfrac{1}{2}\beta_2$

故两向量组等价，$\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2.$

定理4.3.6 （1）对 $A_{m\times n}, B_{n\times p}$，有 $r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$

（2）对 $A_{m\times n}, B_{m\times n}$，有 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

证明:（1）：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$，并设 A 按列分块为

$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$，则 AB 的第 j 列为

$$A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n,$$

$$j=1,2,\cdots,p$$

$\Rightarrow AB$ 的列向量组可由 A 的列向量线性表示，

$\Rightarrow AB$ 的列秩 $\le A$ 的列秩，$\Rightarrow$ 即 $r(AB)\le r(A)$.

$\Rightarrow r(AB)=r(AB)^T=r(B^T A^T)\le r(B^T)=r(B)$.

(2)：设A,B按列分块为

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \cdots & \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix}$$

设A列向量组的极大无关 组为$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$(故$r(A)=r$);

设B列向量组的极大无关 组为$\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js}$(故$r(B)=s$),

$\Rightarrow A+B$的每个列向量可由向量 组

$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js}$线性表示，

$$\Rightarrow r(A+B)\le r(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js})$$

$$\le r+s=r(A)+r(B)$$

#

第四章 n维向量与线性方程组

4.4 线性方程组的解的结构

数学与统计学院
张永怀

主要内容

1. 齐次线性方程组
2. 齐次线性方程组的基础解系
3. 求解齐次线性方程组举例
4. 非齐次线性方程组的解
5. 求解非齐次线性方程组举例
6. 小结

1 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow Ax = 0. \quad (1)$$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 使得方程$Ax=0$成立，

则 $x = \xi_1 = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{bmatrix}$ 称为方程组（1）的**解向量**，

它也就是向量方程$Ax=0$的解.

齐次线性方程组解的性质

（1）若 $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2$ 为$Ax=0$的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$

也是$Ax=0$的解.

（2）若 $x_1=\xi_1$ 为$Ax=0$的解，k为实数，则$x=k\xi_1$

也是$Ax=0$的解.

方程组的全体解构成的集合记为S,

若 $S_0: \xi_1, \ \xi_2, \cdots \xi_t$ 是S的一个极大无关组,

则(1)的任一解都可由 S_0 线性表示。

主要内容

1. 齐次线性方程组
2. 齐次线性方程组的基础解系
3. 求解齐次线性方程组举例
4. 非齐次线性方程组的解
5. 求解非齐次线性方程组举例
6. 小结

2 齐次线性方程组的基础解系

定义4.4.1(基础解系)

如果齐次方程组$Ax=0$的一组解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 满足:

① $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关;

② 方程组$Ax=0$的任一解都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性表示,

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 为齐次线性方程组的一个**基础解系**.

方程组$Ax=0$的**通解**可表示为:

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_t\xi_t,$$ ……………… 结构解

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 为任意实数.

如果 $r(A_{m\times n})=n$，则 $Ax=0$ 只有零解，

$\Rightarrow Ax=0$ 不存在基础解系

定理4.4.1 如果 $r(A_{m\times n})=r<n$，

则 $Ax=0$ 必存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

证明: 设齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r<n$，

则方程组通解中有 r 个约束未知量， $n-r$ 个自由未知量，

不妨设 $x_1, x_2, \ldots x_r$ 为约束未知量，

因此，方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n, \end{cases}$$

写成列向量，则有

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n \\ x_{r+1} + 0 + \cdots + 0 \\ 0 + x_{r+2} + \cdots + 0 \\ \vdots \\ 0 + 0 + \cdots + x_n \end{bmatrix}$$

$$x = x_{r+1}\begin{bmatrix} c_{1,r+1} \\ c_{2,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{r+2}\begin{bmatrix} c_{1,r+2} \\ c_{2,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

或 $x = x_{r+1}\boxed{\xi_1} + x_{r+2}\boxed{\xi_2} + \cdots + x_n\boxed{\xi_{n-r}}$，

易知 ξ_1，$\xi_2, \cdots$，ξ_{n-r} 是 $Ax = 0$ 的基础解系，

因为是解向量，线性无关，任意解可由其线性表示。

主要内容

1 齐次线性方程组

2 齐次线性方程组的基础解系

3 求解齐次线性方程组举例

4 非齐次线性方程组的解

5 求解非齐次线性方程组举例

6 小结

3 求解齐次线性方程组举例

例1 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

解: 对方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则通解为

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$ （x_3，x_4是自由未知量）

令x_3=1，x_4=0，得$\xi_1=\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，令$x_3$=0，$x_4$=1，得$\xi_2=\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ξ_1，ξ_2是基础解系。

所以结构式通解为 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \ (c_1, c_2 \in R)$.

或令自由未知量$x_3=c_1$，$x_4=c_2$，并将通解写成向量形式则有

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8c_1-7c_2 \\ -6c_1+5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=c_1\underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boxed{\xi_1}}+c_2\underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boxed{\xi_2}} \quad (c_1,c_2\in R).$$

基础解系

例2 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 4x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 + 3x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

从而基础解系为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix};$

通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2.$

定理4.4.2 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r<n$, 则$Ax=0$的任何$n-r$个线性无关的解向量都可作为基础解系。

例3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$Ax=0$ 的基础解系，证明：

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\ \beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\ \beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$$

也是$Ax=0$的基础解系。

证： 是解向量，

线性无关，

3个。

例4 设 $A_{m\times n}$， $B_{n\times p}$且$AB=0$, 证明

$$r(A)+r(B)\le n.$$

证： 如果B=0, 显然成立。

如果$B\neq 0$, 令$B=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_p]$, 则有

$$0=AB=A[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_p]$$

$$=[A\beta_1 \quad A\beta_2 \quad \cdots \quad A\beta_p]$$

所以 $A\beta_j=0 \qquad (j=1,2,\cdots p)$,

即β_j是$Ax=0$的解, 所以$r(B)\le n-r(A)$,

$$r(A)+r(B)\le n.$$

#

主要内容

1 齐次线性方程组

2 齐次线性方程组的基础解系

3 求解齐次线性方程组举例

4 非齐次线性方程组的解

5 求解非齐次线性方程组举例

6 小结

4 非齐次线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

则上述方程组（2）可写成向量方程$Ax=b$

$Ax = 0$

导出组

非齐次线性方程组解的性质

（1）若 $x_1 = \eta_1, x_2 = \eta_2$ 为$Ax=b$的解，则 $x = \eta_1 - \eta_2$

是对应的齐次线性方程组$Ax=0$ 的解.

$$A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0.$$

（2）若 $x=\xi$ 为$Ax=0$的解，$x=\eta$ 为$Ax=b$的解，

则 $x=\xi+\eta$ 也是$Ax=b$的解.

$$A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b.$$

（3）若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 都为$Ax=b$的解，则 $\dfrac{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_s}{s}$

也是$Ax=b$的解.

$$A\frac{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_s}{s}=\frac{1}{s}A(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_s)$$

$$=\frac{1}{s}(sb)=b.$$

非齐次线性方程组的通解

定理4.4.3（非齐次线性方程组解的结构定理）

若 η^* 是 $Ax=b$ 的一个特解，则方程组的任一解 x 可以表示为

$$x=\eta^*+\xi,$$

其中 ξ 为对应的 $Ax=0$ 的某个解。

证： $x=\eta^*+(x-\eta^*),$

令 $\xi=x-\eta^*$，有 $x=\eta^*+\xi,$

易知 ξ 是 $Ax=0$ 的解。

非齐次线性方程组$Ax=b$的通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

结构解

其中$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$为对应的$Ax=0$的通解，

η^*为$Ax=b$的任意一个特解.

主要内容

1. 齐次线性方程组
2. 齐次线性方程组的基础解系
3. 求解齐次线性方程组举例
4. 非齐次线性方程组的解
5. 求解非齐次线性方程组举例
6. 小结

5 求解齐次线性方程组举例

例5 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2,$

方程组有无穷多解。

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases},$$

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取$x_2 = x_4 = 0$，得$x_1 = x_3 = 1/2$，

即得方程组的一个解 $\eta^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

对应的齐次方程组是 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$,

取 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则基础解系是 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$,

于是所求通解为

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta^*$$

$$=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{bmatrix}.$$

例6 求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

解:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $R(A) = R(\overline{A}) = 3 < 4$，所以线性方程组有无穷多解.

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{即} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

主要内容

1. 齐次线性方程组
2. 齐次线性方程组的基础解系
3. 求解齐次线性方程组举例
4. 非齐次线性方程组的解
5. 求解非齐次线性方程组举例
6. 小结

6 小结

齐次方程组$Ax=0$的通解可表示为：

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

非齐次方程组$Ax=b$的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

n元齐次方程组

有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$

只有零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$

n元非齐次方程组

有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) = n$

有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) < n$

无解 $\Leftrightarrow R(A) \neq R(\bar{A})$

第四章　n 维向量与线性方程组

4.5 课后习题选讲

数学与统计学院
张永怀

主要内容

第4章习题：例1-----例22

习题4.2　B组题目：例23–例24

习题4.3　B组题目：例25–例27

习题4.4　B组题目：例28–例34

备注:教材为 魏战线,李继成,线性代数与解析几何,第二版,高等教育出版社出版

例1 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$，向量$\alpha=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，已知$A\alpha$与$\alpha$线性相关，则$a=$ __−1__ .

解 由$A\alpha$与α线性相关，$A\alpha=k\alpha$

即$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$\Rightarrow\begin{cases}a=ka\\ 2a+3=k,\\ 3a+4=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\ a=-1\end{cases}$.

例2 设4阶矩阵A按列分块为$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$，其中

$\alpha_1=(-3,5,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(4,-3,7,-1)^{\mathrm{T}}$，若$A$行等价于

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，则向量$\alpha_3=$____，$\alpha_4=$____.

解 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$，

计算可得$\alpha_3=(-2,7,11,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(9,-4,23,-2)^{\mathrm{T}}$.

例3 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2, 则向量组$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_2=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\beta_3=5\alpha_1+6\alpha_2+7\alpha_3$的秩$=$____.

解

$$[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&3&6\\0&4&7\end{bmatrix},$$

设$A=\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&3&6\\0&4&7\end{bmatrix}$,则易知$A$可逆,

所以向量组β_1,β_2,β_3的秩与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$相同，也为2.

例4 已知向量$(1,\lambda,2)^T$可由向量组$(\lambda+1,1,1)^T,(1,\lambda+1,1)^T,(1,1,\lambda+1)^T$线性表示且表示式不惟一，则$\lambda=$____.

解 由题意，

方程组$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda+1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{bmatrix}$有无穷多解，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \lambda \\ \lambda+1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

例4 已知向量$(1,\lambda,2)^T$可由向量组$(\lambda+1,1,1)^T,(1,\lambda+1,1)^T$,$(1,1,\lambda+1)^T$线性表示且表示式不惟一，则$\lambda=$_____.

$$-\lambda^2-3\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\text{或}-3,$$

$\lambda=0$时，方程组无解，所以$\lambda=$-3

例5 A为n阶矩阵,已知非齐次线性方程组AX=b有不同解 η_1,η_2,η_3,且$A^*\neq O$,则方程组$Ax=0$的基础解系所含向量的个数为 <u>1</u>____.

解

由于$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1, \\ 0 & r(A)\leq n-2 \end{cases}$

$A^*\neq O$,则$r(A^*)\geq 1$

由于AX=b有不同解,所以$r(\overline{A})=r(A)<n$,

$r(A)=n-1,\quad n-r(A)=1.$

例6 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$,已知齐次线性方程组

$(2I-A)x=0$的基础解系含2个向量,则$a=$ __5__ .

解 $3-r(2I-A)=2,\ \Rightarrow r(2I-A)=1,$

$$2I-A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2-a\end{bmatrix},\ \Rightarrow a=5.$$

例7 设4元非齐次线性方程组$Ax=b$有解$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其中

$\alpha_1=(0,1,2,3)^T$，$2\alpha_2+\alpha_3=(3,6,9,12)^T$，且$r(A)=3$，

则$Ax=b$的通解为$x=$____.

解 $r(A)=r(\overline{A})=3$，

所以$Ax=0$的基础解系含1个解向量，

$$2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1=2(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_1),$$

所以$2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1=(3,3,3,3)^T$为$Ax=0$的解，

$Ax=b$的通解为$k(3,3,3,3)^T+\alpha_1$.

例8 设矩阵 A 按列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$, 又向量 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$, 则方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=$ ______.

解 由 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$ 知 $A(1,2,3,4)^T=\beta$,

即 $Ax=\beta$ 有解，所以 $r(A)=r(\overline{A})=3<4$,

$Ax=0$ 的基础解系含1个解向量,

由 $\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$ 可知, $1\alpha_1-2\alpha_2+0\alpha_3+1\alpha_4=A(1,-2,0,1)^T=0$

所以 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=k(1,-2,0,1)^T+(1,2,3,4)^T.$$

例9 设有n维列向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$A$为$m\times n$矩阵，向量组(II)为：$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$，则下列结论正确的是（A）.

（A）若(I)线性相关，则(II)线性相关.

（B）若(I)线性相关，则(II)线性无关.

（C）若(I)线性无关，则(II)线性相关.

（D）若(I)线性无关，则(II)线性无关.

解 $[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s]=A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]$

所以若(I)线性相关，则(II)线性相关.

例10 设A为$m\times n$矩阵, B为$n\times m$矩阵, 已知$AB=I_m$, 则（B）.

（A）$r(A)=m, r(B)=n$.（B）$r(A)=r(B)=m$.

（C）$r(A)=n, r(B)=m$.（D）$r(A)=r(B)=n$.

解

$$m=r(AB)\le r(A)\le m,$$

$$m=r(AB)\le r(B)\le m,$$

例11 设A, B为满足$AB=O$的任意两个非零矩阵，则必有（A）.

（A）A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关.

（B）A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

（C）A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关.

（D）A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

解 设$B=[\beta_1\ \beta_2\ \ldots\beta_n]$，则$A[\beta_1\ \beta_2\ \ldots\beta_n]=O$，

即$\beta_1\ \beta_2\ \ldots\beta_n$为$Ax=0$的解，从而$Ax=0$有非零解，

所以A的列向量组线性相关.

又$AB=O\Rightarrow B^TA^T=O$，所以B^T的列向量组线性相关，

即B的行向量组线性相关.

例12 设$Ax=0$是非齐次线性方程组$Ax=b$对应的齐次线性方程组，下列结论正确的是（ D ）.

（A）若$Ax=0$有非零解，则$Ax=b$有无穷多解.

（B）若$Ax=0$仅有零解，则$Ax=b$有惟一解.

（C）若$Ax=b$有无穷多解，则$Ax=0$仅有零解.

（D）若$Ax=b$有无穷多解，则$Ax=0$有非零解.

解

例13 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，则线性方程组$(AB)x=0$

(A)当$n>m$时仅有零解．　(B)当$n>m$时必有非零解．

(C)当$m>n$时仅有零解．　(D)当$m>n$时必有非零解．（D）

解　$r(AB)_m\le \min\{r(A),r(B)\}$,

当$m>n$, $r(AB)<n<m$,

所以方程组必有非零解．

例14 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为方程组$Ax=0$的基础解系，则下列 向量组中可以作为$Ax=0$的基础解系的是(　　)

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3.$

$(B)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1.$

$(C)\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3.$

$(D)\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3.$

解 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为基础解系，$n-r(A)=3$

只需讨论各选项中的向量组哪个线性无关即可

例14 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为方程组$Ax=0$的基础解系，则下列 向量组中可以作为$Ax=0$的基础解系的是(C)

$(A)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3.$

$(B)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1.$

$(C)\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3.$

$(D)\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3.$

解 $[\alpha_1+2\alpha_2\ \ 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\ \ \alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3]$

$$=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\\0&4&5\end{bmatrix}$$

设$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\\0&4&5\end{bmatrix}$，则$A$可逆，从而$(C)$线性无关.

例15 设有齐次线性方程组$Ax=0$和$Bx=0$,其中A,B均为$m\times n$矩阵，现有4个命题：

(1) 若$Ax=0$的解均是$Bx=0$的解，则$r(A)\geq r(B)$.

(2) 若$r(A)\geq r(B)$，则$Ax=0$的解均是$Bx=0$的解.

(3) 若$Ax=0$与$Bx=0$同解，则$r(A)=r(B)$.

(4) 若$r(A)=r(B)$，则$Ax=0$与$Bx=0$同解.

以上命题中正确的是 (B)

(A) (1)(2). (B) (1)(3). (C) (2)(4). (D) (3)(4).

解 若$Ax=0$的解均是$Bx=0$的解，则$n-r(A)\leq n-r(B)$,

$r(A)\geq r(B)$. 若$Ax=0$与$Bx=0$同解，则$r(A)=r(B)$.

例16 设实向量 $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T,\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T,\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$，则 Oxy 平面上3条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0$,(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0$, $i=1,2,3$)交于一点的充要条件是(D)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(C) $r[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]=r[\alpha_1\ \alpha_2]$. (D) α_1,α_2 线性无关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

解 3条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0,(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)$ 交于一点

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases} \text{有唯一解} \Leftrightarrow r[\alpha_1\ \alpha_2]=r[\alpha_1\ \alpha_2\ \ -\alpha_3]=2$$

例17 设有向量组(I)：$\alpha_1=(1,0,2)^T,\alpha_2=(1,1,3)^T,\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$；

向量组(II)：$\beta_1=(1,2,a+3)^T,\beta_2=(2,1,a+6)^T,\beta_3=(2,1,a+4)^T$.

(1)求r(II)；(2)问a取何值时，(I)与(II)等价？a取何值时，(I)与(II)不等价？

解 (1) $[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-3&-3\\0&-a&-a-2\end{bmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{II})=3$

(2) $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&a\end{bmatrix}\Rightarrow a\neq-1$时，$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，

I和II等价；

(3) $a=-1$时，$r(\mathrm{I})=2,r(\mathrm{II})=3$，I和II不等价.

例18 设有向量组(I)：$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T,$

$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T.$

(1)问a取何值时,(I)线性相关？

(2)在(I)线性相关时，求其一个极大无关组并用极大无关组线性表示(I)的其他向量。

解

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -a & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & 0\\ -a & 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

若$a=0$,向量组(I)线性相关，α_1为一个极大无关组， $\alpha_k=k\alpha_1.$

$a \neq 0$时，

$$\begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad 设 B=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4]=\begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|B| = 10 + a$,所以 $a = -10$时， $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$线性相关，

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$也线性相关 ；

$\beta_2, \beta_3, \beta_4$线性无关，

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$也线性无关，是 (I)的一个极大无关组

$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$

例19 设有向量组(I)：$\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(1,3,-1,-5)^T$，

$\alpha_3=(2,6,-a,-10)^T,\alpha_4=(3,1,15,12)^T$，又向量$\beta=(1,3,3,b)^T$.

问a,b取何值时，

(1)β能由(I)线性表示且表示式唯一；

(2)β不能由(I)线性表示；

(3)β能由(I)线性表示且表示式不唯一，并求出一般表示式.

解 (1) 设$A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]$，$\beta$能由(I)线性表示且表示式唯一，

即$Ax=\beta$有唯一解.

$$[A\,|\,\beta]=\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-a-6&6&0\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&-a+2&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}$$

所以$a\neq 2$时,$r(A)=r(A\,|\,\beta)=4$,β能由(I)线性表示且表示式唯一.

(2) $a=2$时,

$$[A|\beta]\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&b-1\end{bmatrix}$$

所以$a=2$且$b\neq 1$时,$r(A)=3, r(A|\beta)=4$，β不能由(I)线性表示.

(3) $a=2$且$b=1$时,

$$[A|\beta]\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

β能由(I)表示且表示式不唯一，$\beta=-8\alpha_1+(3-2c)\alpha_2+c\alpha_3+2\alpha_4$.

例20 求解齐次线性方程组$Ax=0$,其系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 1 & -1\\ -3 & -8 & a-1 & 1\\ 3 & 7 & 4 & b-1\end{bmatrix}.$$

解

$$A\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & -2 & a+8 & -2\\ 0 & 1 & -5 & b+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & a-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b+1\end{bmatrix}$$

$a\neq 2$且$b\neq -1$时，只有零解；

$a=2$且$b\neq-1$时,

$$A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&13&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

通解为$x=c(-13,5,1,0)^T$.

$a\neq 2$且$b=-1$时,

$$A\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

通解为$x=c(3,-1,0,1)^T$.

$a=2$且$b=-1$时，

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通解为$x=c_1(-13,5,1,0)^T+c_2(3,-1,0,1)^T$.

例21 已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$有3个线性无关的解，

(1)证明该方程组的系数矩阵的秩为2;

(2)求a,b的值及该方程组的通解.

解

记$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$,

设方程组的3个线性无关的解为η_1,η_2,η_3,

则$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$,为$Ax=0$的线性无关的解,

所以$4-r(A)\geq 2$，则$r(A)\leq 2$，

又$r(A)\geq 2$，所以$r(A)=2$.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2a&b+4a-5\end{bmatrix}$$

$a=2,b=-3,$

方程组的通解为$x=(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T$.

例22 设A为$m\times n$矩阵,B为$n\times p$矩阵,矩阵$C=AB$.证明

(1)若A,B的列(行)向量组均是线性无关的，则C的列(行)向量组也是线性无关的；

(2)若B的列向量组是线性相关的,则C的列向量组也是线性相关的.

证明 (2) 若B的列向量组是线性相关的,则$Bx=0$有非零解,

$ABx=0$,即$Cx=0$也有非零解,

从而C的列向量组是线性相关的.

(1) 反证法.假设C的列向量组线性相关，则$Cx=0$有非零解,

即$ABx=0$有非零解,由A的列向量组线性无关知$Bx=0$有非零解,

所以B的列向量组线性相关,矛盾.

例23

设A为n阶方阵，k为正整数，α为齐次线性方程组$A^k x = 0$的解向量，但$A^{k-1}\alpha \neq 0$,证明：向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关.

证明

设$\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$,两边左乘 A^{k-1}得：

$\lambda_1 A^{k-1}\alpha = 0$,又因为$A^{k-1}\alpha \neq 0$,所以$\lambda_1 = 0$;

再于等式两边左乘 A^{k-2}得$\lambda_2 = 0, \cdots$,这样可证

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$,故向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关.证毕.

例24 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T\in R^n\,(i=1,2,\cdots,r;r<n)$，已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，$\alpha_r$线性无关，且$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$是齐次线性方程组$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\,(i=1,2,\cdots,r)$的非零解向量．试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$的线性相关性．

解

记$A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_r^T\end{bmatrix}$,

则$A\beta=0$,即$\alpha_i^T\beta=0$,

$\beta^T\alpha_i=0$,

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0$,

两边同乘β^T,有$k_{r+1}\beta^T\beta=0$,

$\Rightarrow k_{r+1}=0\Rightarrow k_i=0\ \ (\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{r})$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性无关.

例25 设有矩阵$A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，且$m > n$，证明：$\det(AB) = 0$.

证明 $r(AB) \le r(A) \le n < m$,

所以$\det(AB) = 0$.

例26 设$\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n$是一组$n$维向量，证明：它们线性无关的充要条件是任一$n$维向量都可由它们线性表示.

证明 充分性：

基本单位向量组 $e_1,e_2,\ldots,e_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示，所以$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关。

必要性：

设β是任意一个n维向量，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$是$n+1$个$n$维向量，线性相关，而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，所以 β可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表示。

例27　设A为$m\times n$矩阵，证明：

(1)存在矩阵$P_{n\times m}$,使得$AP=I_m\Leftrightarrow r(A)=m$;

(2)存在矩阵$Q_{n\times m}$,使得$QA=I_n\Leftrightarrow r(A)=n.$

证明 (1) 充分性：$r(A)=m\Rightarrow r(A\,|\,I_m)=m=r(A)$,

所以矩阵方程$AX=I_m$有解,记其解为$P_{n\times m}$,则$AP=I_m$.

必要性:由于$AP=I_m$,

所以有$m=r(I_m)=r(AP)\le r(A)\le m$，从而$r(A)=m.$

(2) 由(1), 存在矩阵$Q_{n\times m}$, 使得$A^TQ^T=I_n\Leftrightarrow r(A^T)=n$,

即$QA=I_n\Leftrightarrow r(A)=n.$

例28

设n阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{bmatrix}$,

其中,$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. 问常数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b$满足何种关系时, 齐次线性方程组$Ax=0$存在非零解?并在$Ax=0$有非零解时, 求出其结构解.

解 $A \to \begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix}$, $b=0$时, $A \to \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,

$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$，不妨设$a_1 \neq 0$,则通解为

$$x = c_1(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^T + c_2(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^T + \cdots c_{n-1}(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^T;$$

$b \neq 0$时，

$$A \to \begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b+\sum_{i=1}^{n} a_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

所以$b \neq 0$且$b+\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$时，$|A| \neq 0$,方程组只有零解；

$b+\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$时，|方程组的通解为$x = c(1,1,\cdots 1)^T$.

例29 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，又$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_m=t_1\alpha_m+t_2\alpha_1$，其中$t_1,t_2$为实常数，问当$t_1,t_2$满足什么条件时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也可作为$Ax=0$的基础解系？

解

$$[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\beta_m]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\alpha_m]\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{bmatrix}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\alpha_m]C,$$

$|C|=t_1^m+(-1)^{m+1}t_2^m\neq 0$时，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$是基础解系，

即当m为奇数时，$t_1\neq -t_2$；当m为偶数时，$t_1\neq t_2$.

例30 设A为$m\times n$实矩阵，证明：

(1)方程组$Ax=0$与$A^TAx=0$同解；

(2)$r(A)=r(A^TA)=r(A^T)=r(AA^T)$

证明 (1) $Ax=0$的解显然都是$A^TAx=0$的解，

反之，若x是$A^TAx=0$的解，

则$x^T(A^TAx)=0$，即$(Ax)^T(Ax)=0$

可得$Ax=0$，即x也是方程组$Ax=0$的解，

故$Ax=0$与$A^TAx=0$同解.

(2) 由(1)知$r(A)=r(A^TA)$，

$r(AA^T)=r(A^T)=r(A)$，故$r(AA^T)=r(A)$.

例31 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式$\det(A)=0$，其$(2,1)$元素的代数余子式$A_{21}\neq 0$（元素a_{ij}的代数余子式记为A_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n$），证明：齐次线性方程组$Ax=0$的通解为

$$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T\ (k为任意常数)$$

证明 $A_{21}\neq 0$，则$r(A)=n-1$，

从而$Ax=0$的基础解系只含一个解向量，

设$\xi=(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})$，由于$A_{21}\neq 0$知，$\xi\neq 0$；

$A\xi$的第i个分量为$\sum_{k=1}^{n}=\begin{cases}0, & i\neq 2\\ |A|=0, & i=2\end{cases}$，

所以ξ是$Ax=0$的一个非零解，结论得证.

例32 设A为n（$n\geq 2$）阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，证明：

$$r(A^*)=\begin{cases} n, 当r(A)=n, \\ 1, 当r(A)=n-1, \\ 0, 当r(A)\leq n-2. \end{cases}$$

证明 (1)当$r(A)=n$时，$|A|\neq 0$，所以$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，知$r(A^*)=n$.

(2)当$r(A)=n-1$时，A至少有一个$n-1$阶子式非零，且$|A|=0$；

所以A^*至少有一个元素非零，从而$r(A^*)\geq 1$；

而$AA^*=|A|I=O$，所以$r(A)+r(A^*)\leq n$，

从而得$r(A^*)\leq n-r(A)=1$；故有$r(A^*)=1$.

(3)若$r(A)\leq n-2$，则$A^*=O$，故$r(A^*)=0$

例33 设$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^T$为$n$维实向量（$i=1,2,\cdots,r;r<n$），且$x_1,x_2,\cdots x_r$线性无关.令矩阵$A=[x_1x_2\cdots x_r]^T$,则$A$是秩为$r$的$r\times n$矩阵，设齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为实向量组$x_{r+1},\cdots x_n$,试证：向量组$x_1,x_2,\cdots x_n$线性无关（此题表明：从$R^n$中任何$r(r<n)$个线性无关向量出发进行扩充，必可得到$R^n$中$n$个线性无关的向量）.

证明： A的第 i行为 x_i^T , x_j是$Ax=0$的解，满足 $Ax=0$ 的第 i个方程，从而有

$$x_i^T x_j=0(i=1,\ldots,r;j=r+1,\ldots n)$$

设有一组系数 $k_1,\ldots,k_r,k_{r+1},\ldots,k_n$，使得

$$k_1x_1+\ldots+k_rx_r+k_{r+1}x_{r+1}+\ldots+k_nx_n=0$$

左乘$(k_1x_1+\ldots+k_rx_r)^T$，得$(k_1x_1+\ldots+k_rx_r)^T(k_1x_1+\ldots+k_rx_r)=0$,

即向量$k_1x_1+\ldots+k_rx_r$的各分量平方和为0，故$k_1x_1+\ldots+k_rx_r=0$;

又$x_1,\ldots,x_r$线性无关，得 $k_1=\ldots=k_r=0$;

代入式，得 $k_{r+1}x_{r+1}+\ldots+k_nx_n=0$,

注意到$x_{r+1},\ldots,x_n$是基础解系，线性无关 ，

所以$k_{r+1}=\ldots=k_n=0$.

至此$k_1=\ldots=k_r=k_{r+1}=\ldots=k_n=0$; 故$x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n$线性无关.

例34（1）设矩阵$A_{n\times r}$的秩为$r(r<n)$，由定理知存在n阶可逆方阵P，使$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O_{(n-r)\times r} \end{bmatrix}$，令矩阵$B=P^{-1}\begin{bmatrix} O_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$，

证明：n阶方阵$[A\ \ B]$的列向量组线性无关，并指出B与P^{-1}的列向量之间的关系。

解

$$[A\ \ B]=\left[P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O_{(n-r)\times r} \end{bmatrix}\quad P^{-1}\begin{bmatrix} O_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}\right]=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & I_{n-r} \end{bmatrix}=P^{-1},$$

所以$[A\ \ B]$的列向量组线性无关，

且B的列向量组是P^{-1}的后$n-r$个列向量.

（2）设$x_1,\cdots,x_r(r<n)$是F^n中的线性无关向量组，证明：必可找到F^n中的$n-r$个向量$x_{r+1},\cdots,x_n$，使得向量组$x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$线性无关（此题表明：从$F^n$中任何$r$个线性无关向量出发进行扩充，必可 得到$F^n$中$n$个线性无关的向量）。

证明 设$A=[x_1,\cdots,x_r]$,则$\exists$可逆阵P，$PA=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$,

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix},\quad 令B=P^{-1}\begin{bmatrix} O \\ I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$[A\ \ B]=P^{-1},$$

令$B=[x_{r+1},\cdots,x_n]$，则$x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n$线性无关.