

高等数学期末考试模拟试题(三)

一. 单项选择题(共5道小题,每小题3分,共15分)



1. 设函数f 在[a,b]上连续,在(a,b)内二阶可导,且存在 $c \in (a,b)$,使得 $f(c) > \max\{f(a), f(b)\},$ 则().

A.对任意 $x \in (a,b)$, 有f''(x) < 0;

B.必存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$;

C.对任意 $x \in (a,b)$, 有 $f''(x) \ge 0$;

D.必存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$;

2. 下列曲线中必有斜渐近线的是().



A.
$$y = x + \cos x$$
;

$$C. y = x + \cos\frac{1}{x};$$

$$\mathbf{B.}\ y = x + \cos^2 x;$$

$$\mathbf{D}.\ y = x^2 + \cos\frac{1}{x}.$$

$$A.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{1+\cos^2 x} dx;$$

$$C.\int_0^{2\pi} \sin^5 x dx;$$

$$\mathbf{B}.\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x;$$

$$\mathbf{D}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x+\cos x}{2}\mathrm{d}x.$$

4. 下列广义积分中,发散的是().



$$A.\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x \cos x}; \quad B.\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx; \quad C.\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}; \quad D.\int_{0}^{1} \ln x dx.$$

- 5. 下列选项中,不是某个二阶常系数线性微分方程的一组 解的是().
- A. $e^x + x, x 2e^{-2x}, e^{-2x} + x;$ B. $e^x + xe^{-x}, 2xe^x + xe^{-x}, xe^x + xe^{-x};$
- C. $e^x x + 1, 2 x, e^x x;$ D. $x(e^x + 1), xe^x 2e^{-x}, xe^x + 2x + 2e^{-x}.$

二. 填空题(共5道小题, 每题3分, 总计15分)



1.设可微函数y=f(x)由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则

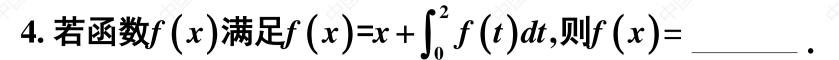
$$\lim_{n\to\infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = \underline{\qquad}$$

2.已知函数y = f(x)由参数方程 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ v = 3\sin t \end{cases} (0 < t < \pi)$ 确定,则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

3.设 $f(x)=(x-1)\ln(2-x)(\forall x < 2)$,则f(x)的最大值是___.

3.设
$$f(x)=(x-1)\ln(2-x)(\forall x < 2)$$
,则 $f(x)$ 的最大值是___.





5. 微分方程
$$yy' + xy^2 = 5x$$
的通解为:

1.设函数
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[\ln(x+1)\right]e^{nx} + ax + b}{e^{nx} + 1}$$

$$(1)$$
求 $f(x)$ 的表达式;

$$(2)$$
试确定常数 a,b , 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2.计算极限 $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}$.

3.设函数
$$\Phi(u) = \int_0^u (x^2 - 1) e^x dx$$
的极值.

4.计算定积分
$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+2e^x-2^{2x}}} dx$$
.

5.计算不定积分
$$\int \ln(1+\sqrt{x}) dx$$
.
6.求微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ 求的通解.

四. 应用题(本题7分) 求曲线 $y = 3(1-x^2)$ 与x轴围成的封闭

图像绕y=3旋转一周所得的旋转体的体积.

五. (本题7分) 若f(x)在(0,1)内可导,且有最大值1, 最小值0. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f''(\xi) > 2$.

六. (本题7分)设f(x)具有二阶导数,且 $f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

证明: $(1)f''(x)-f'(\pi-x)=\cos x;$ (2)求f(x)的表达式.

. (本题7分) 设f(x)的导函数f'(x)在[a,b]上连续,



$$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f^2(x) dx = 1.$$

求证:
$$(1)(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt \ge f^2(x);$$

$$(2)\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \ge \frac{8}{(b-a)^2}.$$