《线性代数与解析几何》期终模拟题

模拟试题（二）

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1.设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$,则 $\det(AA^T)$ 的值为__________.

2.设 A、B 均为可逆方阵,则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ =.

3.若线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+ax_3=1 \\ 2x_1+6x_2-8x_3=1 \end{cases}$ 无解,则常数 $a=$

4.已知向量 $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & k \end{pmatrix}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量,则常数 $k=$_____。

5.方程组 $x_1+x_2-x_3=0$ 的基础解系是______.

二、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 设向量 $\alpha=(1,3,-5,4)^T$, ,矩阵 $A=\alpha\alpha^T$,则 $\det(A)$ 等于

$(a)0$.　　$(b)1$.　　$(c)51$.　　$(d)\sqrt{51}$.　　【　　】

2.设 A 为 **3** 则阶方阵, $\det(A)=0$ 的充分必要条件是

(a) A 的列向量组线性无关.　　(b) A 的行向量组线性相关.

(c) A 的秩为 **3.**　　(d) A 中有两行对应成比例.　　【　　】

3.设 **3** 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$,其中 α_i 为 **3** 维行向量($i=1,2,3$),矩阵 $B=\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3-2\alpha_1 \end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则必有

$(a)AP_1P_2=B$.　　$(b)AP_2P_1=B$.　　$(c)P_1P_2A=B$.　　$(d)P_2P_1A=B$.　　【　　】

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性相关,而向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大无关组是

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　　　　　　　(b) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(c) . $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　　　　　　　(d) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$.　　　　　【　　】

5. n阶方阵A正定的充要条件是

(a) $|A|>0$.　　　　　　　　　　(b) A的n个特征值均大于零.

(c) A有n个线性无关的特征向量.　　(d) A为对称阵.　　　　【　　】

三、(12 分)求过三个平面$2x+y-z-2=0,\ x-3y+z+1=0,\ x+y+z-3=0$的交点，且平行于平面$x+y+2z-2=0$的平面方程。

四、(12 分)当a、b为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在其有无穷多解时，求出结构式通解.

五、(12 分) 求向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)$，$\alpha_2=(-1,1,-6,6)$，$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)$，$\alpha_5=(2,4,4,9)$的极大线性无关组与秩，并将其余向量用极大无关组线性表示.

六、(10 分)已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求$A^{50}$.

七、(10 分)判定下面的二次型是否正定

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

八、(8 分)若三阶方阵A有三个互不相等的特征值$1,2,4$，设$B=A^2-2A-I$，求：$\det(B^*)$.

九、（6 分）证明：n阶实矩阵A为正定矩阵的充要条件，是存在n个线性无关的实向量$\alpha_i=(m_{i1},m_{i2},\cdots m_{in}),i=1,2,\cdots,n$，使得$A=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2+\cdots+\alpha_n^{\mathrm T}\alpha_n$.