西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

高等数学下期中模拟题（一）答案

中国大学MOOC

一. 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. 曲面$z=\sin x\sin y\sin(x+y)$上点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$处法线与$z$轴夹角的正弦为(C).

A. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$; B. $\frac{3\sqrt{26}}{26}$; C. $\frac{\sqrt{65}}{13}$; D. $\frac{1}{\sqrt{26}}$.

解 切平面的法向量为$\vec{n}=(z_x,z_y,-1)\big|_{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},-1\right)\parallel(3,1,-4)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot(0,0,1)}{\|\vec{n}\|}=\frac{-4}{\sqrt{26}},\qquad \sin\theta=\sqrt{\frac{5}{13}}=\frac{\sqrt{65}}{13}.$$

2. 设D: $x^2+y^2\le r^2$，则$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=($ C $)$.

A. π;　　B. $\dfrac{1}{\pi}$;　　C. 1;　　D. -1.

解

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2$$

$$=\lim_{r\to 0}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$$

$$=1.$$

中国大学MOOC

3. 二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$可以写成(D).

A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$;

B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$;

D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy.$$

4. 设$f(x,y)=e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在(0,1)点处的两个偏导数$f_x(0,1)$和$f_y(0,1)$的情况为(B).

A. $f_x(0,1)$不存在，$f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$;

B. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$, $f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$;

C. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$, $f_y(0,1)$不存在;

D. 两个偏导数都不存在.

解

$$f_x(0,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x+1}(\Delta x-1)^{\frac{2}{3}}-e}{\Delta x}=\frac{1}{3}e$$

$$f_y(0,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,1+\Delta y)-f(0,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{1+\Delta y}(1+\Delta y)^{\frac{1}{3}}-e}{\Delta y}=\frac{4}{3}e.$$

5. 在曲线$x=t, y=-t^2, z=t^3$的所有切线中与平面$x+2y+z=4$平行的切线(B).

A 只有一条； B 只有2条； C 至少有3条； D 不存在.

解 曲线$x=t, y=-t^2, z=t^3$的所有切线方向向量为$\vec{\Gamma}=(1,-2t,3t^2)$

平面$x+2y+z=4$的法向量为$\vec{n}=(1,2,1)$

$$\vec{n}\perp\vec{\Gamma}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{\Gamma}=0$$

即$1-4t+3t^2=0$，解得$t=1$, $t=\dfrac{1}{3}$.

中国大学MOOC

二. 填空题（每题4分，总计20分）

1.函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$M(1,2,-2)$处的梯度$\mathrm{grad}\, u\big|_M=\dfrac{2}{9}(1,2,-2)$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\mathrm{grad}\, u\big|_M==(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})_M=(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{-4}{9})=\frac{2}{9}(1,2,-2).$$

二. 填空题（每题4分，总计20分）

2.设$f(x,y)=\arctan\sqrt{x^{y}}$，则$f_{x}(x,1)=$ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $f(x,1)=\arctan\sqrt{x},$

则$f_{x}(x,1)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

中国大学MOOC

二. 填空题（每题4分，总计20分）

3.设$z=z(x,y)$由方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$确定，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{z^2}{(z+x)^3}$.

解 对方程$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$两边微分得$\dfrac{zdx-xdz}{z^2}=\dfrac{1}{z}dz-\dfrac{1}{y}dy$

$$dz=\frac{z}{z+x}dx-\frac{z^2}{y(z+x)}dy,\qquad 则\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}(z+x)-z(\dfrac{\partial z}{\partial x}+1)}{(z+x)^2}=-\frac{z^2}{(z+x)^3}.$$

二. 填空题（每题4分，总计20分）

4.设$u=2xy-z^2$，则u在点M$(2,-1,1)$处方向导数的最大值为$2\sqrt{6}$.

解 函数$u=2xy-z^2$在点M$(2,-1,1)$处方向导数的最大值为该函数在M点梯度向量模长.

$$gradu=(2y,2x,-2z)$$

$$gradu\big|_{M}=(4,-2,-2)$$

$$\left\|gradu\big|_{M}\right\|=2\sqrt{6}.$$

中国大学MOOC

二. 填空题（每题4分，总计20分）

5.设椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$，则它在点$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$处切平面方程为 $x+2y-z=2.$

解 $F=x^2+2y^2+z^2-1,\quad F_x=2x,F_y=4y,F_z=2z)$

切平面法向量为$\vec{n}=(2x,4y,2z)|_M=(1,2,-1)$

切平面方程为$x-\frac{1}{2}+2(y-\frac{1}{2})-(z+\frac{1}{2})=0$

即：$x+2y-z=2.$

三. (10分) 设$z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中f具有二阶连续的偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}f_1+\frac{1}{y}f_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}f_1+e^{x+y}(e^{x+y}f_{11}-\frac{x}{y^2}f_{12})+\frac{1}{y}(e^{x+y}f_{21}-\frac{x}{y^2}f_{22})-\frac{1}{y^2}f_2$$

$$=e^{x+y}f_1+e^{2(x+y)}f_{11}-e^{x+y}\frac{x-y}{y^2}f_{12}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{y^2}f_2.$$

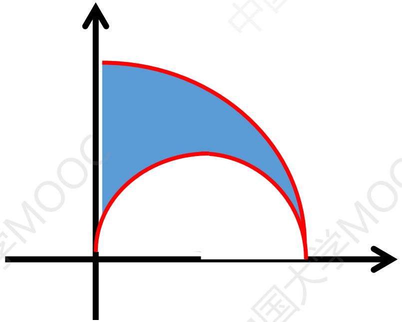
四. 计算二重积分$I=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中$D$是由$x^2+y^2=a^2$和$x^2+y^2=ax$及$x=0$所围在第一象限的区域$(a>0)$.

解

$$I=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,y\ge 0}}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le ax\\ y\ge 0}}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a(1-\rho)\rho d\rho-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}(1-\rho)\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{8}a^2-(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9})a^3.$$



五. (12分) 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

在点$(0,0)$处 (1) 偏导数的存在性; (2) 偏导数的连续性; (3) 可微性.

解 (1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=0$ 同理$f_y(0,0)=0$

所以函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处的偏导数存在.

(2) $(x,y)\neq(0,0)$, $f_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$不存在, 所以函数$f_x(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

同理函数$f_y(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

五. (12分) 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

在点$(0,0)$处 (1) 偏导数的存在性; (2) 偏导数的连续性; (3) 可微性.

解

(3) 因为 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

所以函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

六（10分）求球面$x^2+y^2+z^2-3z=0$与平面$2x-3y+5z-4=0$的交线在点(1, 1, 1)处的切线和法平面方程.

解 分别对两个方程关于x求偏导得$\begin{cases} 2x+2yy'+2zz'-3z'=0 \\ 2-3y'+5z'=0 \end{cases}$

将点(1,1,1)代入得$\begin{cases} 2y'-z'=-2 \\ 3y'-5z'=2 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} y'(1)=-\dfrac{12}{7} \\ z'(1)=-\dfrac{10}{7} \end{cases}$，切向量为(7,−12,−10)

切线方程为$\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{-12}=\dfrac{z-1}{-10}$

法平面方程为$7(x-1)-12(y-1)-10(z-1)=0$, 即$7x-12y-10z+15=0$.

七. (10分) 已知平面两定点$A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\ge 0, y\ge 0)$$圆上求一点C, 使ΔABC的面积最大?

解 $AB=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$

椭圆上一点(x,y)到直线AB的距离

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}|x+3y-10|$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|x+3y-10|$$

$$L(x,y,\lambda)=(x+3y-10)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x=2(x+3y-10)+\frac{2}{9}\lambda x=0 \\ L_y=6(x+3y-10)+\frac{1}{2}\lambda y=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$$

解得$x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$,(3,0),(0,2)代入比较,

ΔABC的面积在(3,0)处最大.

八（10分）设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$ 求$f(x)$.

解

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}\rho\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

两端同时关于t求导数，可得$f'(t)=8\pi t\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi t f(t)$, 且$f(0)=1$

解微分方程得$f(t)=4\pi t^2\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+C\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}$ 由$f(0)=1$,得$C=1$

因此$f(t)=4\pi t^2\,\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\mathrm{e}^{4\pi t^2}$.