期末考试模拟题（三）答案 2020.6

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分，只有一个正确）

1.（A）；2.（C）；3.（ D）；4.（D）；5.（B）.

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. $\frac{\pi}{2}$ ；2. $-\ln\cos 1$；3. 4π；4. 8；5. $x^4e^{x^3}$.

三、计算下列各题（共 56 分，每小题 8 分）

1. 解： 由 $y=\sin x$ 得 $dy=\cos xdx$，

对 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两边微分得 $2x\varphi_1dx+e^y\varphi_2dy+\varphi_zdz=0$

解得 $\frac{dy}{dx}=\cos x,\frac{dz}{dx}=-\frac{2x\varphi_1+e^y\varphi_2\cos x}{\varphi_z}$

则 $\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}+f_z\frac{dz}{dx}=f_x+\cos xf_y-\frac{2x\varphi_1+e^y\varphi_2\cos x}{\varphi_z}f_z.$

2. 解： $f_x=2x-2xy^2$ 由 $\begin{cases}f_x=2x-2xy^2=0\\f_y=4y-2x^2y=0\end{cases}$ 得驻点 $M(0,0)$

$f_{xx}=2-2y^2,f_{xy}=-4xy,f_{yy}=4-2x^2$

在 $M(0,0)$ 处， $AC-B^2>0,A=2>0,$ 极小值 $f(0,0)=0$

在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4,y\ge 0\right\}$ 的边界上 $y^2=4-x^2$，则

$f(x,y)=g(x)=x^2+2(4-x^2)-x^2(4-x^2)=8-5x^2+x^4\quad -2\le x\le 2$

$g'(x)=-10x+4x^3=0$， $\Rightarrow x=0,x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$g\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{15}{4},g(0)=8,g(\pm 2)=4$

则 $f_{\max}(0,2)=8,f_{\min}(0,0)=0.$

3. 解： $\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\\1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$ 将 $(1,-2,1)$ 代入得 $\begin{cases}1-2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\\1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=0,\frac{dz}{dx}=-1$， n 平行于向量 $(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})=(1,0,-1)$，则 $n=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

$$f_x(x,y,z)=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\ f_y(x,y,z)=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\ f_z(x,y,z)=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{(01,2)}=f_x(0,1,2)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})+f_y(0,1,2)\cdot 0+f_z(0,1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

4. 解: $V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$

$$=2\pi-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=2\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(\rho^2+\rho\right)\rho d\rho=\frac{5\pi}{6}.$$

$$S_1=\iint\limits_{z=2-x^2-y^2}1\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho=\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}.$$

$$S_2=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1}1\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\sqrt{2}\pi.$$

则 $S=S_1+S_2=\dfrac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}+\sqrt{2}\pi.$

5. 解： $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x,Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x$， $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x$，

所以 $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，线积分与路径无关，则

$$\int_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=\left(x^2y^3-y^2\sin x+y\right)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)}=\frac{\pi^2}{4}.$$

6. 解：由高斯公式知

$$\oiint\limits_S xf(x)dy\wedge dz-xyf(x)dz\wedge dx-e^{2x}zdx\wedge dy=\iiint\limits_\Omega\left(xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right)dV=0$$

由 S 的任意知　　$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0$，

即 $f'(x)+\dfrac{1-x}{x}f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$

则 $f(x)=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left(\int\dfrac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx+C\right)$

$$=e^{x-\ln x}\left(\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\ln x-x}dx+C\right)=\frac{e^x}{x}\left(\int e^x dx+C\right)=\frac{e^x}{x}\left(e^x+C\right)=\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\Rightarrow C=-1$，则 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}.$

7. 解：$\iiint\limits_{(V)}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2dv=\iiint\limits_{(V)}[(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2+2(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac})]dv$

$=\iiint\limits_{(V)}[(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2]dv=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{(V)}x^2dv+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{(V)}y^2dv\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{(V)}z^2dv$

$\iiint\limits_{(V)}x^2dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)dv=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{4\pi R^5}{15}$

则 $\iiint\limits_{(V)}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2dv=\frac{4\pi R^5}{15}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$

四、（1）解：$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},x\in(-1,1)$

则 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1]$

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2},\quad x\in[-1,1],x\neq 0$$

（2）由(1)可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\frac{f(x)}{1+x^2}=\frac{\arctan x}{x}$

取 $x=1$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}==\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}-1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

五、证明： 由题意可知 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}f(x)d(\sin nx)$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[f(x)\sin nx|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sin nxdx\right]=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}f'(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}f'(x)d(\cos nx)=\frac{2}{n^2\pi}\left[f'(x)\cos nx|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[f'(\pi)\cos n\pi-f'(0)-\int_0^{\pi}f''(x)\cos nxdx\right]$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有二阶连续导数，

则 $\exists A>0,B>0,x\in[-\pi,\pi],|f'(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，则

$$|a_n|\le\frac{2}{n^2\pi}\left[|f'(\pi)\cos n\pi|+|f'(0)|+\int_0^{\pi}|f''(x)\cos nx|dx\right]$$

$$\le \frac{2}{n^2\pi}\left[\left|f'(\pi)\cos n\pi\right| + \left|f'(0)\right| + \int_0^{\pi}\left|f''(x)\right|dx\right] \le \frac{2}{n^2\pi}(2A+B\pi)$$

由于$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n^2\pi}(2A+B\pi)$收敛，所以$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$绝对收敛.