期中考试模拟题（六）2022.11

一、 单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列命题正确的是(　　)

(A)任何两个无穷小量之比的极限必存在(极限值为有限实数或∞).

(B)若数列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛，则数列$\{a_n\}$必收敛.

(C)若数列$\{a_n\}$收敛，数列$\{b_n\}$发散，则数列$\{a_nb_n\}$必发散.

(D)若数列$\{a_n\}$单调增，数列$\{b_n\}$单调减，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

2. 当$x\to 0$时，$x-\sin ax$与$x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　)

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=2$，则在 x_0 处 $f(x)$（　　）

(A)可导且$f'(x_0)\neq 0$　　(B)不可导　　(C)取得极小值　　(D)取得极大值

4. 设$f(x)=\begin{cases}ae^x, & x<0,\\ b+\ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 若f在$x=0$处可导, 则(　　)

(A) $a=-1,b=-1$　　(B) $a=1,b=1$

(C) $a=2,b=2$　　(D) $a=2,b=1$

5. 设函数f在$[a,b]$上连续, 则f在$[a,b]$上具有的性质是(　　)

(A)存在$\xi\in(a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(B)存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.

(C)存在$\xi\in[a,b]$，使$f(x)\leqslant f(\xi),x\in[a,b]$.

(D)存在$\xi\in(a,b)$，使$f(x)>f(\xi),x\in[a,b]$.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{2x-1}$，则$\mathrm{d}y=$______________.

2. 函数$f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$的可去间断点的个数为____________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1-x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$______________.

4. 设 $y = x^2\ln(1+x)$，则其麦克劳林公式中x^n项的系数是__________.

5. 设$x = g(y)$是$y = \ln x + \arctan x$的反函数, 则$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ________.

三、解答题(每小题 8 分，共 48 分)

1. 已知 $y = e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y' .

2. 求曲线$f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$的凹区间和拐点.

3. 已知$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)]$， 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = e$. 求$c$的值.

4. 设$f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin\pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}$，$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. 补充定义$f(1)$使$f(x)$在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上连续.

5. 设$f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x}{2+x^2-\mathrm{e}^{tx}}$，讨论$f(x)$的可导性，并在可导点处求$f'(x)$.

6. 设$y = y(x)$是由方程组 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ t\mathrm{e}^y = y \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

四、(12 分) 设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在, 并求该极限；　　(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

五、(10 分) 设$y = f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数，且$f''(x) \neq 0$，证明:

(1) 对于$(-1,1)$内的任意$x \neq 0$，存在唯一的$\theta(x) \in (0,1)$，使

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x];$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$.