西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 高等数学下期末模拟试题（二）

## 一、填空（3分×5=15分）

1. 函数$u=2xy-z^2$ 在点 (2,−1,1) 处沿 $\vec{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数是 ________

2. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域是__________

3. 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $M_0(2,1,4)$ 处的切平面方程为________________

4. 设$L$ 是从点 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,2,2)$ 的直线段, 则线积分 $\int_L x\mathrm{e}^{yz}\,\mathrm{d}s=$ ________.

5. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$, 其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\ldots)$, 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$ ________.

## 二、计算题（6分×3=18分）

1. 设函数 $u = f(x,y,z)$, $f$ 有二阶连续偏导，$z = e^x \sin y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 计算 $\oint_C -y^2 dx + x dy + z^2 dz$，其中曲线 $C$ 是平面 $y+z=4$ 与柱面 $x^2+y^2=2y$ 的交线，且从 $z$ 轴正向往下看是逆时针方向.

3. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (x^2+y^2) dS$，其中 $\Sigma$ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$ 部分.

## 三、计算题（7分×3=21分）

1. 求曲面 $z = x^2+y^2$ 与圆锥面 $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围空间区域 $\Omega$ 的体积.

2. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的和函数 $S(x)$.

3. 计算 $\iiint_\Omega (2\sin y + z) dV$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 2z, z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

## 四、解答题（8分×3=24分）

1. 计算 $I=\int_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 $L$ 为 $\begin{cases} x=t-\sin t-\pi \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的弧段.

2. 求椭圆 $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ 上的点到 $M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

3. 求向量场 $\vec{A}=\left(2x+z,y^2,z\right)$ 通过 $\Sigma:z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 下侧的通量.

4. 将函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数.

五.（8分） 将 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展成 $x$ 的幂级数, 并求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

六.（6分） 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\right\}$, $L$ 为 $D$ 的正向边界.

证明: $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\ge\frac{5}{2}\pi^2$.