



# 武汉大学

## 课程 设计 报 告

### 广义逆与解方程组

姓 名：朱鹤然

学 号：2021202120085

任课教师：王文伟

学 院：电子信息学院

专 业：信息与通信工程

二〇二一年十二月

Zhu Heran

## 目 录

1	广义逆矩阵理论 .....	1
1.1	Penrose 广义逆矩阵定义 .....	1
1.2	广义逆矩阵与线性方程组 .....	1
1.2.1	相容方程组的相容及其解 .....	1
1.2.2	矛盾方程组的相容及其解 .....	2
2	广义逆矩阵与线性方程组的求解实验 .....	3
2.1	实验内容 .....	3
2.2	实验步骤 .....	3
2.2.1	求矩阵的广义逆，并且验证矩阵可逆的条件 .....	3
2.2.2	利用广义逆矩阵求解相容方程组的极小范数解 .....	6
2.2.3	利用广义逆矩阵求解矛盾方程组极小范数最小二乘解 .....	7
附录 A	Matlab 代码 .....	9
A.1	广义逆矩阵与线性方程组的求解实验代码 .....	9

# 1 广义逆矩阵理论

## 1.1 Penrose 广义逆矩阵定义

设矩阵  $A \in C^{m \times n}$ ，若矩阵  $X \in C^{n \times m}$  满足如下四个 Penrose 方程

$$\begin{aligned} (1): & AXA = A \\ (2): & XAX = X \\ (3): & (AX)^H = AX \\ (4): & (XA)^H = XA \end{aligned} \tag{1.1}$$

则  $X$  称为  $A$  的 **Moore-Penrose 逆**，记为  $A^+$

Moore-Penrose 伪逆是一种矩阵，可在不存在逆矩阵的情况下作为逆矩阵的部分替代。此矩阵常被用于求解没有唯一解或有无数解的线性方程组。对于任何矩阵  $A$  来说，伪逆  $B$  都存在，是唯一的，并且具有与  $A^T$  相同的维度。

## 1.2 广义逆矩阵与线性方程组

考虑非齐次线性方程组

$$Ax = b \tag{1.2}$$

其中  $A \in C^{m \times n}$ ,  $b \in C^m$  给定，而  $x \in C^n$  为待定向量。如果存在向量  $x$  使得方程组 1.2 成立，那么称方程组**相容**，否则称为**不相容或矛盾方程组**。

### 1.2.1 相容方程组的相容及其解

线性方程组 1.2 相容的充要条件是

$$AA^{(1)}b = b \tag{1.3}$$

且其通解为

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \tag{1.4}$$

其中  $y \in C^n$  是任意的

相容方程组 1.2 的通解同样可以表示特解  $x_0 = A^{(1)}b$  与通解  $z = (I - A^{(1)}A)y \in N(A)$  之和：

$$x = x_0 + z \tag{1.5}$$

对于相容方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解

$$\min_{Ax=b} \|x\| \tag{1.6}$$

极小范数解用欧式范数  $\|\cdot\|$  计算

而相容方程组 1.2 的极小范数解为  $x_0 = A^{(1,4)}b$ ，其中  $A^{(1,4)}b \in A\{1,4\}$

### 1.2.2 矛盾方程组的相容及其解

当线性方程组 1.2 不相容的时候，不存在通常意义下的解，但是许多问题中需要求出极值问题

$$\min_{x \in C^n} \|Ax - b\| \quad (1.7)$$

的解  $x$ ，称为**最小二乘解**。矛盾方程组的最小二乘解不唯一，但是中最小二乘解的集合中，存在一个极小范数的解

$$\min_{\min \|Ax - b\|} \|x\| \quad (1.8)$$

是唯一的，称为**极小范数的最小二乘解**

线性方程组 1.2 的唯一极小范数最小二乘解为  $x = A^+b$

## 2 广义逆矩阵与线性方程组的求解实验

在 Matlab 中，提供了求 Moore-Penrose 伪逆的函数 `pinv()`

### 2.1 实验内容

该部分 Matlab 仿真的矩阵  $A$  来自课本习题 6.4 的第 6 题：

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. 当  $b = (1, 1, 1, 1)^T$  时，方程组  $Ax = b$  是否相容？
2. 当  $b = (1, 0, 1, 0)^T$  时，方程组  $Ax = b$  是否相容？
3. 若方程组相容，求其通解和极小范数解；若方程组不相容，求其极小范数二乘解。

### 2.2 实验步骤

#### 2.2.1 求矩阵的广义逆，并且验证矩阵可逆的条件

首先求出矩阵  $A$  的逆

```

1  >> A = [
2      1, 0, 0, 1;
3      1, 1, 0, 0;
4      0, 1, 1, 0;
5      0, 0, 1, 1
6      ];
7  disp("Matrix A:")
8  disp(A)
9
10 B=pinv(A);
11
12 disp("Generalized Inverse Matrix of Matrix A:")
13 disp(B)
14 Matrix A:
15      1      0      0      1
16      1      1      0      0
17      0      1      1      0
18      0      0      1      1
19
20 Generalized Inverse Matrix of Matrix A:
    
```

21	0.3750	0.3750	-0.1250	-0.1250
22	-0.1250	0.3750	0.3750	-0.1250
23	-0.1250	-0.1250	0.3750	0.3750
24	0.3750	-0.1250	-0.1250	0.3750

对逆矩阵  $B$ ，我们需要验证 **Penrose** 方程的四个条件1.1，以判断逆矩阵  $B$  的类型  
 首先，验证 Penrose 方程 1.1-(1) 条件  $AXA = A$  是否满足

```

1 >> disp("Penrose condition 1:")
2 disp("AXA")
3 disp(A*B*A)
4 disp(A)
5
6 Penrose condition 1:
7 (1) AXA=A
8     1.0000    0.0000    0.0000    1.0000
9     1.0000    1.0000    0.0000    0.0000
10    -0.0000    1.0000    1.0000    0.0000
11    -0.0000         0    1.0000    1.0000
12
13     1     0     0     1
14     1     1     0     0
15     0     1     1     0
16     0     0     1     1
    
```

逆矩阵  $B$  满足 Penrose 方程 1.1-(1) 条件  $AXA = A$ 。因此，逆矩阵  $B$  是  $A$  的  $\{1\}$ -逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(2) 条件  $XAX = X$  是否满足

```

1 >> disp("Penrose condition 2:")
2 disp("(2) XAX=X")
3 disp(B*A*B)
4 disp(X)
5
6 Penrose condition 2:
7 (2) XAX=X
8     0.3750    0.3750   -0.1250   -0.1250
9    -0.1250    0.3750    0.3750   -0.1250
10   -0.1250   -0.1250    0.3750    0.3750
11     0.3750   -0.1250   -0.1250    0.3750
12
13     0.3750    0.3750   -0.1250   -0.1250
14   -0.1250    0.3750    0.3750   -0.1250
15   -0.1250   -0.1250    0.3750    0.3750
16     0.3750   -0.1250   -0.1250    0.3750
    
```

逆矩阵  $B$  满足 Penrose 方程 1.1-(2) 条件  $XAX = X$ 。因此，逆矩阵  $B$  是  $A$  的  $\{1,2\}$ -逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(3) 条件  $(AX)^H = AX$  是否满足

```
1 >> disp("Penrose condition 3:")
2 disp("(3) (AX)^H=AX")
3 disp((A*B)')
4 disp(A*B)
5
6 Penrose condition 3:
7 (3) (AX)^H=AX
8      0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
9      0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
10     -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
11      0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
12
13      0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
14      0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
15     -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
16      0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
```

逆矩阵  $B$  满足 Penrose 方程 1.1-(3) 条件  $(AX)^H = AX$ 。因此，逆矩阵  $B$  是  $A$  的  $\{1,2,3\}$ -逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(4) 条件  $(XA)^H = XA$  是否满足

```
1 >> disp("Penrose condition 4:")
2 disp("(4) (XA)^H=XA")
3 disp((B*A)')
4 disp(B*A)
5
6 Penrose condition 4:
7 (4) (XA)^H=XA
8      0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
9      0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
10     -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
11      0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
12
13      0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
14      0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
15     -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
16      0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
```

逆矩阵  $B$  满足 Penrose 方程 1.1-(4) 条件  $(XA)^H = XA$ 。因此，逆矩阵  $B$  是完全满足 Penrose 方程的四个条件1.1，所以逆矩阵  $B$  是  $A$  的 Moore-Penrose 逆，即  $B = A^+$ 。



### 2.2.2 利用广义逆矩阵求解相容方程组的极小范数解

第 1 问:

当  $b = (1, 1, 1, 1)^T$  时, 根据方程组  $Ax = b$  相容的条件 (式 1.3), 我们通过计算矩阵的逆  $B = A^{(1)}$  是否满足  $Ax_0 = b$  和  $ABb = b$  的条件以判断方程组  $Ax = b$  是否相容。

```

1  >> b=[1;1;1;1];
2  >> x_0=B*b;
3  disp("x_0=")
4  disp(x_0)
5  disp("compute A*x_0=")
6  disp(A*x_0)
7  disp("compute A*A^+*b=")
8  disp(A*B*b)
9
10 x_0=
11     0.5000
12     0.5000
13     0.5000
14     0.5000
15
16 compute A*x_0=
17     1.0000
18     1.0000
19     1.0000
20     1.0000
21
22 compute A*A^+*b=
23     1.0000
24     1.0000
25     1.0000
26     1.0000
    
```

从计算结果可以看出, 对于  $A$  的广义逆  $B = A^{(1)}$  满足  $Ax_0 = b$  和  $ABb = b$  条件。因此, 对于  $b = (1, 1, 1, 1)^T$  时的方程组  $Ax = b$  是相容的。

由于前面我们已经验证, 逆矩阵  $B$  是  $A$  的 Moore-Penrose 逆, 所以可以得出当  $b = (1, 1, 1, 1)^T$  时方程组  $Ax = b$  的方程组的极小范数解为

$$x = A^+b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

通解为

$$\begin{aligned}
 x &= A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于相容方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解，极小范数解用欧式范数  $\|\cdot\|$  计算

$$\min_{Ax=b} \|x\| \tag{2.3}$$

在 Matlab 中，我们也可以用函数 `norm()` 验证该范数的值

```

1 >> disp("\min\limits_x ||x||")
2 disp(norm(x_0))
3
4 \min\limits_x ||x||
5     1.0000
    
```

### 2.2.3 利用广义逆矩阵求解矛盾方程组极小范数最小二乘解

第 2 问：

当  $b = (1, 0, 1, 0)^T$  时，根据方程组  $Ax = b$  相容的条件（式 1.3），我们通过计算矩阵的逆  $B = A^{(1)}$  是否满足  $Ax_0 = b$  和  $ABb = b$  的条件以判断方程组  $Ax = b$  是否相容。

```

1 >> b=[1;0;1;0];
2 >> x_0=B*b;
3 disp("x_0=")
4 disp(x_0)
5 disp("compute A*x_0=")
6 disp(A*x_0)
7 disp("compute A*A^+*b=")
8 disp(A*B*b)
9
10 x_0=
11     0.2500
12     0.2500
13     0.2500
14     0.2500
15
16 compute A*x_0=
17     0.5000
18     0.5000
19     0.5000
    
```

```

20      0.5000
21
22 compute A*A^+*b=
23      0.5000
24      0.5000
25      0.5000
26      0.5000
    
```

从计算结果可以看出，对于  $A$  的广义逆  $B = A^{(1)}$  并不满足  $Ax_0 = b$  和  $ABb = b$  条件。因此，对于  $b = (1, 0, 1, 0)^T$  时的方程组  $Ax = b$  是不相容的，是矛盾方程组。

由此可以得出当  $b = (1, 0, 1, 0)^T$  时，矛盾方程组  $Ax = b$  的极小范数最小二乘解是唯一的，并且可以由 Moore-Penrose 逆表示，由于前面我们已经验证，逆矩阵  $B$  是 Moore-Penrose 逆，所以方程组的极小范数最小二乘解为

$$x = A^+b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

```

1  >> b=[1;0;1;0];
2  >> x_0=B*b;
3  disp("x_0=")
4  disp(x_0)
5
6  x_0=
7      0.2500
8      0.2500
9      0.2500
10     0.2500
    
```

对于矛盾方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解，极小范数解用欧式范数  $\|\cdot\|$  计算

$$\min_{Ax=b} \|x\| \quad (2.5)$$

在 Matlab 中，我们也可以用函数 `norm()` 验证该范数的值

```

1  >> disp("\min\limits_x ||Ax-b||")
2  disp(norm(A*x_0-b))
3
4  \min\limits_x ||Ax-b||
5      1.0000
    
```

## 附录 A Matlab 代码

## A.1 广义逆矩阵与线性方程组的求解实验代码

```

1  clear all;clc;
2
3  %% A
4  A = [
5      1, 0, 0, 1;
6      1, 1, 0, 0;
7      0, 1, 1, 0;
8      0, 0, 1, 1
9  ];
10 disp("Matrix A:")
11 disp(A)
12
13 %% compute Generalized Inverse Matrix
14 B=pinv(A);
15 disp("Generalized Inverse Matrix of Matrix A:")
16 disp(B)
17
18 disp("Penrose condition 1:")
19 disp("(1) AXA=A")
20 disp(A*B*A)
21 disp(A)
22
23 disp("Penrose condition 2:")
24 disp("(2) XAX=X")
25 disp(B*A*B)
26 disp(B)
27
28 disp("Penrose condition 3:")
29 disp("(3) (AX)^H=AX")
30 disp((A*B)')
31 disp(A*B)
32
33 disp("Penrose condition 4:")
34 disp("(4) (XA)^H=XA")
35 disp((B*A)')
36 disp(B*A)

```

```

37
38 %% (1) b=[1;1;1;1];
39 disp("=====")
40 b=[1;1;1;1];
41 disp("for b=")
42 disp(b)
43
44 x_0=B*b;
45 disp("x_0=")
46 disp(x_0)
47 disp("compute A*x_0=")
48 disp(A*x_0)
49 disp("compute A*A^+*b=")
50 disp(A*B*b)
51 disp("A*A^+*b = A*x_0 = b, so Ax=b is a consistent linear
      system, so x_0 = ")
52 disp(x_0)
53 disp("\min\limits_x ||x||")
54 disp(norm(x_0))
55
56 disp("compute A^+*b=")
57 disp(B*b)
58 disp("compute I-A^+*A=")
59 disp(eye(4)-B*A)
60
61
62 %% (2) b=[1;0;1;0];
63 disp("=====")
64 b=[1;0;1;0];
65 disp("for b=")
66 disp(b)
67
68 x_0=B*b;
69 disp("x_0=")
70 disp(x_0)
71 disp("compute A*x_0=")
72 disp(A*x_0)
73 disp("compute A*A^+*b=")
74 disp(A*B*b)
75 disp("A*A^+*b = A*x_0 = b, so Ax=b is a consistent linear
      system, so x_0 = ")
76 disp(x_0)

```

```
77  
78 disp("\min\limits_x ||Ax-b||")  
79 disp(norm(A*x_0-b))
```