武漢大學

课 程 设 计 报 告

广义逆与解方程组

姓　　名：朱鹤然

学　　号：2021202120085

任课教师：王文伟

学　　院：电子信息学院

专　　业：信息与通信工程

二〇二一年十二月

Zhu Heran

目　　录

1 广义逆矩阵理论

1.1 Penrose 广义逆矩阵定义

设矩阵 $A \in C^{m\times n}$，若矩阵 $X \in C^{n\times M}$ 满足如下四个 Penrose 方程

$$\begin{aligned} &(1): \quad AXA = A \\ &(2): \quad XAX = X \\ &(3): \quad (AX)^H = AX \\ &(4): \quad (XA)^H = XA \end{aligned} \tag{1.1}$$

则 X 称为 A 的 **Moore-Penrose 逆**，记为 A^+

Moore-Penrose 伪逆是一种矩阵，可在不存在逆矩阵的情况下作为逆矩阵的部分替代。此矩阵常被用于求解没有唯一解或有许多解的线性方程组。对于任何矩阵 A 来说，伪逆 B 都存在，是唯一的，并且具有与 A^T 相同的维度。

1.2 广义逆矩阵与线性方程组

考虑非齐次线性方程组

$$Ax = b \tag{1.2}$$

其中 $A \in C^{m\times n}, b \in C^m$ 给定，而 $x \in C^n$ 为待定向量。如果存在向量 x 使得方程组 1.2 成立，那么称方程组**相容**，否则称为**不相容**或**矛盾方程组**。

1.2.1 相容方程组的相容及其解

线性方程组 1.2 相容的充要条件是

$$AA^{(1)}b = b \tag{1.3}$$

且其通解为

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \tag{1.4}$$

其中 $y \in C^n$ 是任意的

相容方程组 1.2 的通解同样可以表示特解 $x_0 = A^{(1)}b$ 与通解 $z = (I - A^{(1)})y \in N(A)$ 之和:

$$x = x_0 + z \tag{1.5}$$

对于相容方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解

$$\min_{Ax=b} ||x|| \tag{1.6}$$

极小范数解用欧式范数 $||\cdot||$ 计算

而相容方程组 1.2 的极小范数解为 $x_0 = A^{(1,4)}b$ ，其中 $A^{(1,4)}b \in A\{1,4\}$

1.2.2 矛盾方程组的相容及其解

当线性方程组 1.2 不相容的时候，不存在通常意义下的解，但是许多问题中需要求出极值问题

$$\min_{x\in C^n} ||Ax - b|| \tag{1.7}$$

的解 x ，称为**最小二乘解**。矛盾方程组的最小二乘解不唯一，但是中最小二乘解的集合中，存在一个极小范数的解

$$\min_{\min ||Ax-b||} ||x|| \tag{1.8}$$

是唯一的，称为**极小范数的最小二乘解**

线性方程组 1.2 的唯一极小范数最小二乘解为 $x = A^{+}b$

2　广义逆矩阵与线性方程组的求解实验

在 Matlab 中，提供了求 Moore-Penrose 伪逆的函数 `pinv()`

2.1　实验内容

该部分 Matlab 仿真的矩阵 A 来自课本习题 6.4 的第 6 题：

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 当 $b = (1, 1, 1, 1)^T$ 时，方程组 $Ax = b$ 是否相容?
2. 当 $b = (1, 0, 1, 0)^T$ 时，方程组 $Ax = b$ 是否相容?
3. 若方程组相容，求其通解和极小范数解；若方程组不相容，求其极小范数二乘解.

2.2　实验步骤

2.2.1　求矩阵的广义逆，并且验证矩阵可逆的条件

首先求出矩阵 A 的逆

```
>> A = [
    1, 0, 0, 1;
    1, 1, 0, 0;
    0, 1, 1, 0;
    0, 0, 1, 1
    ];
disp("Matrix A:")
disp(A)

B=pinv(A);

disp("Generalized Inverse Matrix of Matrix A:")
disp(B)
Matrix A:
    1      0      0      1
    1      1      0      0
    0      1      1      0
    0      0      1      1

Generalized Inverse Matrix of Matrix A:
```

```
     0.3750    0.3750   -0.1250   -0.1250
    -0.1250    0.3750    0.3750   -0.1250
    -0.1250   -0.1250    0.3750    0.3750
     0.3750   -0.1250   -0.1250    0.3750
```

对逆矩阵 B，我们需要**验证 Penrose 方程的四个条件1.1**，以判断逆矩阵 B 的类型

首先，验证 Penrose 方程 1.1-(1) 条件 $AXA = A$ 是否满足

```
>> disp("Penrose condition 1:")
disp("AXA")
disp(A*B*A)
disp(A)

Penrose condition 1:
(1) AXA=A
    1.0000    0.0000    0.0000    1.0000
    1.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000    1.0000    0.0000
   -0.0000         0    1.0000    1.0000

     1     0     0     1
     1     1     0     0
     0     1     1     0
     0     0     1     1
```

逆矩阵 B 满足 Penrose 方程 1.1-(1) 条件 $AXA = A$。因此，逆矩阵 B 是 A 的 $\{1\}$-逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(2) 条件 $XAX = X$ 是否满足

```
>> disp("Penrose condition 2:")
disp("(2) XAX=X")
disp(B*A*B)
disp(X)

Penrose condition 2:
(2) XAX=X
    0.3750    0.3750   -0.1250   -0.1250
   -0.1250    0.3750    0.3750   -0.1250
   -0.1250   -0.1250    0.3750    0.3750
    0.3750   -0.1250   -0.1250    0.3750

    0.3750    0.3750   -0.1250   -0.1250
   -0.1250    0.3750    0.3750   -0.1250
   -0.1250   -0.1250    0.3750    0.3750
    0.3750   -0.1250   -0.1250    0.3750
```

逆矩阵 B 满足 Penrose 方程 1.1-(2) 条件 $XAX = X$。因此，逆矩阵 B 是 A 的 {1,2}-逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(3) 条件 $(AX)^H = AX$ 是否满足

```
>> disp("Penrose condition 3:")
disp("(3) (AX)^H=AX")
disp((A*B)')
disp(A*B)

Penrose condition 3:
(3) (AX)^H=AX
    0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
    0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
   -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500

    0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
    0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
   -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
```

逆矩阵 B 满足 Penrose 方程 1.1-(3) 条件 $(AX)^H = AX$。因此，逆矩阵 B 是 A 的 {1,2,3}-逆。

验证 Penrose 方程 1.1-(4) 条件 $(XA)^H = XA$ 是否满足

```
>> disp("Penrose condition 4:")
disp("(4) (XA)^H=XA")
disp((B*A)')
disp(B*A)

Penrose condition 4:
(4) (XA)^H=XA
    0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
    0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
   -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500

    0.7500    0.2500   -0.2500    0.2500
    0.2500    0.7500    0.2500   -0.2500
   -0.2500    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -0.2500    0.2500    0.7500
```

逆矩阵 B 满足 Penrose 方程 1.1-(4) 条件 $(XA)^H = XA$。因此，逆矩阵 B 是完全满足 Penrose 方程的四个条件1.1，所以逆矩阵 B 是 A 的 Moore-Penrose 逆，即 $B = A^+$。

2.2.2　利用广义逆矩阵求解相容方程组的极小范数解

第 1 问:

当 $b=(1,1,1,1)^T$ 时，根据方程组 $Ax=b$ 相容的条件（式1.3），我们通过计算矩阵的逆 $B=A^{(1)}$ 是否满足 $Ax_0=b$ 和 $ABb=b$ 的条件以判断方程组 $Ax=b$ 是否相容。

```
>> b=[1;1;1;1];
>> x_0=B*b;
disp("x_0=")
disp(x_0)
disp("compute A*x_0=")
disp(A*x_0)
disp("compute A*A^+*b=")
disp(A*B*b)

x_0=
    0.5000
    0.5000
    0.5000
    0.5000

compute A*x_0=
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000

compute A*A^+*b=
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

从计算结果可以看出，对于 A 的广义逆 $B=A^{(1)}$ 满足 $Ax_0=b$ 和 $ABb=b$ 条件。因此，对于 $b=(1,1,1,1)^T$ 时的方程组 $Ax=b$ 是相容的。

由于前面我们已经验证，逆矩阵 B 是 A 的 Moore-Penrose 逆，所以可以得出当 $b=(1,1,1,1)^T$ 时方程组 $Ax=b$ 的方程组的极小范数解为

$$x=A^{+}b=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

通解为

$$
\begin{aligned}
x &= A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

对于相容方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解，极小范数解用欧式范数 $||\cdot||$ 计算

$$\min_{Ax=b} ||x|| \tag{2.3}$$

在 Matlab 中，我们也可以用函数 `norm()` 验证该范数的值

```
>> disp("\min\limits_x ||x||")
disp(norm(x_0))

\min\limits_x ||x||
    1.0000
```

2.2.3 利用广义逆矩阵求解矛盾方程组极小范数最小二乘解

第 2 问:

当 $b = (1, 0, 1, 0)^T$ 时，根据方程组 $Ax = b$ 相容的条件（式1.3），我们通过计算矩阵的逆 $B = A^{(1)}$ 是否满足 $Ax_0 = b$ 和 $ABb = b$ 的条件以判断方程组 $Ax = b$ 是否相容。

```
>> b=[1;0;1;0];
>> x_0=B*b;
disp("x_0=")
disp(x_0)
disp("compute A*x_0=")
disp(A*x_0)
disp("compute A*A^+*b=")
disp(A*B*b)

x_0=
    0.2500
    0.2500
    0.2500
    0.2500

compute A*x_0=
    0.5000
    0.5000
    0.5000
```

```
    0.5000

compute A*A^+*b=
    0.5000
    0.5000
    0.5000
    0.5000
```

从计算结果可以看出，对于 A 的广义逆 $B = A^{(1)}$ 并不满足 $Ax_0 = b$ 和 $ABb = b$ 条件。因此，对于 $b = (1, 0, 1, 0)^T$ 时的方程组 $Ax = b$ 是不相容的，是矛盾方程组。

由此可以得出当 $b = (1, 0, 1, 0)^T$ 时，矛盾方程组 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解是唯一的，并且可以由 Moore-Penrose 逆表示，由于前面我们已经验证，逆矩阵 B 是 Moore-Penrose 逆，所以方程组的极小范数最小二乘解为

$$x = A^{+}b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

```
>> b=[1;0;1;0];
>> x_0=B*b;
disp("x_0=")
disp(x_0)

x_0=
    0.2500
    0.2500
    0.2500
    0.2500
```

对于矛盾方程组 1.2 来说有无穷多个解，但是可以求出极小范数解，极小范数解用欧式范数 $||\cdot||$ 计算

$$\min_{Ax=b} ||x|| \tag{2.5}$$

在 Matlab 中，我们也可以用函数 `norm()` 验证该范数的值

```
>> disp("\min\limits_x ||Ax-b||")
disp(norm(A*x_0-b))

\min\limits_x ||Ax-b||
    1.0000
```

附录 A　Matlab 代码

A.1　广义逆矩阵与线性方程组的求解实验代码

```
clear all;clc;

%% A
A = [
    1, 0, 0, 1;
    1, 1, 0, 0;
    0, 1, 1, 0;
    0, 0, 1, 1
    ];
disp("Matrix A:")
disp(A)

%% compute Generalized Inverse Matrix
B=pinv(A);
disp("Generalized Inverse Matrix of Matrix A:")
disp(B)

disp("Penrose condition 1:")
disp("(1) AXA=A")
disp(A*B*A)
disp(A)

disp("Penrose condition 2:")
disp("(2) XAX=X")
disp(B*A*B)
disp(B)

disp("Penrose condition 3:")
disp("(3) (AX)^H=AX")
disp((A*B)')
disp(A*B)

disp("Penrose condition 4:")
disp("(4) (XA)^H=XA")
disp((B*A)')
disp(B*A)
```

```
%% (1) b=[1;1;1;1];
disp("=================================")
b=[1;1;1;1];
disp("for b=")
disp(b)

x_0=B*b;
disp("x_0=")
disp(x_0)
disp("compute A*x_0=")
disp(A*x_0)
disp("compute A*A^+*b=")
disp(A*B*b)
disp("A*A^+*b = A*x_0 = b, so Ax=b is a consistent linear
    system, so x_0 = ")
disp(x_0)
disp("\min\limits_x ||x||")
disp(norm(x_0))

disp("compute A^+*b=")
disp(B*b)
disp("compute I-A^+*A=")
disp(eye(4)-B*A)


%% (2) b=[1;0;1;0];
disp("=================================")
b=[1;0;1;0];
disp("for b=")
disp(b)

x_0=B*b;
disp("x_0=")
disp(x_0)
disp("compute A*x_0=")
disp(A*x_0)
disp("compute A*A^+*b=")
disp(A*B*b)
disp("A*A^+*b = A*x_0 = b, so Ax=b is a consistent linear
    system, so x_0 = ")
disp(x_0)
```

```
disp("\min\limits_x ||Ax-b||")
disp(norm(A*x_0-b))
```