

升起的烟花：从侧面看，是圆的还是扁的？

孟宪喆

自动化创新实验班 2401 班

U202410203

华中科技大学，人工智能与自动化学院，武汉 430074

摘要

在科学观测及日常生活中，目测法因便捷性广泛应用，但人们常忽视其结果与实际状况存在显著偏差，尤其在侧面观测等常规场景下更为突出。本文通过设想线段水平距离趋于无穷远的极端情境，直观展现人类视觉感知对现实世界呈现的局限性。为深入探究视觉感知规律，文章提出视觉感知核心公理体系，剖析外像与视像映射关系，并探讨多种外界物体观测方式，推导不同模式下视像成像特性。以绽放烟花的侧面视觉效果为案例，具象化呈现理论应用，并将研究结论推广至一般性图形，挖掘其性质。研究表明，合理利用观测偏差，可在视觉感知仿生学领域开辟新方向，同时为观测结果修正及相关领域实践发展提供理论支撑。

关键词：目测法；视觉感知偏差；坐标系变换

1 引言

在科学观测与日常生活中，目测法凭借其便捷性成为最常用的观测手段，人们往往下意识认为目测结果与实际情况完全吻合。然而，这种认知实则是一种错觉。事实上，目测结果与真实状况之间普遍存在显著差异，尤其是在侧面观测等常规场景下，这种偏差更为明显。

为了更清晰地揭示这一现象，不妨设想一个极端情境。如图 1 与图 2 所示，图 1 呈现的是常规观测状态下的视觉效果，而在图 2 中，当线段与人眼的前后距离恒定，水平距离趋向于无穷远时，原本的直线在视觉感知中逐渐收缩，最终退化为一个点。这一现象直观地表明，人类的视觉感知并非对现实世界的精准复刻，而是存在天然的局限性。

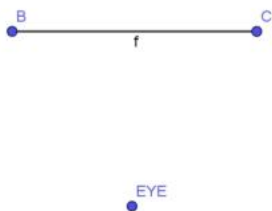


图 1



图 2

这种观测偏差的存在，使得我们对视觉感知的可靠性产生深刻质疑。在实际应用中，若将这种偏差无限放大，极有可能导致对人造景观等观测对象的认知出现巨大误差。因此，对

观测结果进行科学修正显得尤为必要。与此同时，这种看似不利的观测差异，若能加以合理利用，有望在视觉感知仿生学领域开辟全新的研究方向，为相关技术发展提供创新思路。

基于此，本文将展开系统性研究：首先，提出视觉感知的核心公理体系，深入剖析外像与视像之间的映射关系；其次，详细探讨多种外界物体观测方式，并推导不同观测模式下视像的成像特性；接着，以绽放的烟花为例，具象化呈现侧面视角下的视觉效果；然后，将研究结论推广至一般性图形，挖掘并阐述其蕴含的性质；最后，结合实际场景，探索该理论的具体应用路径，为相关领域的实践与发展提供理论支撑。

2 视觉感知的基本理论

在本章中，我们将系统阐述视觉感知的两个引理。首先深入剖析假说形成的理论基础与现实依据，继而给出严格的数学推导与证明。随后，围绕坐标系这一核心工具，提出构建新型坐标系的方法论框架，并系统探究该坐标系的基本性质与数学特征。通过假说的提出与验证、坐标系的构建，为后续视觉感知现象的定量分析与模型建立奠定理论基石。

2.1 视觉感知的分类

视觉感知的有关定义如下表所示：

表 1：对于视觉感知的基本定义

名词	解释
视垂线 l_v	过视觉等效点沿竖直方向所作的一条直线
标准视线 l_s	视觉等效点向一个基准点所连的直线
正视线	人为确定的一条眼睛观察外界的直线
视平面	垂直于正视线且过人眼的平面
正视	所要观察的点恰好在正视线上
侧视	所要观察的点不在正视线上
全侧视	所要观察的物体的所有点都不在正视线上
垂视	观察物体在正视线和视垂线确定的平面上
侧视角 θ_f	等效点和观测点的连线与正视线的夹角
垂视角 θ_v	等效点和观测点的连线与视垂线的夹角

2.2 基本假设

以下三个假设，将成为我们进行下一步推理的基石：

假设 1：人眼可以抽象为两点一般透镜观测系统。

假设 2：在非极端条件下，人眼可以判断侧视角和垂视角的大小。

假设 3：人眼可以判断，过正视线上点的直线，与正视线是否垂直。

2.3 等效点的近似存在性

根据几何光学中的点光源成像原理，当物体距离观察者足够远时，其发出的光线可近似为平行光束，经角膜与晶状体折射后会在视网膜上形成近似点状的像。[1]此时物体可视为位于无限远处的点光源，符合小角度近似条件下的成像规律。根据该直观感受，我们可以得到以下引理：

引理 1（双目视觉简化模型）：当目标物体距离 $D > 22.35m$ 时，双目视觉系统可近似等效为单眼观测模型。

证明：对于瞳孔间距 IPD ，观测误差容限 θ_{\max} ，目标物体距离 D 这三个物理量，我们有视轴夹角：

$$\theta = \frac{IPD}{2D}$$

由视网膜相差感知阈值，有 $\theta_{\max} = 5'$ ；[2]

成年人瞳孔间距在 $55mm$ 到 $73mm$ 之间，取 $IPD = 65mm$ ；

可得到 $D_{\min} = 22.35m$ ，得证。

实际上，当 D 略小于 $22.35m$ ，由于处在距离的边界条件上，视觉效果也可以近似等效为单眼观测模型，这也为我们分析问题提供了灵活性。

根据以上推理，我们可以在两眼的中间位置任取一点作为等效点，采用单眼观测模型进行估计。

2.4 正视轴的距离测定

对于正视轴上的某个点，我们设眼睛观察它的焦距为 f 。[3]我们另设对于正视轴上足够短的线段，其大小为 dx ，设线段与视平面平行，线段与视觉等效点的距离为 l 。我们假设，对于与视觉等效点不同连线上的点对应的眼睛的焦距，随着直线与正视线角度的变化呈现连续性。于是，可以用 f 估计 dx 对应的焦距。假设该线段在视网膜上成像的长度是 ds ，则有：

$$\frac{dx}{l} = \frac{ds}{f}$$

变形可得：

$$ds = \frac{f \cdot dx}{l} \quad (*)$$

为下面的表述方便，我们引入以下概念：

定义：以视觉等效点为球心，以足够长的固定长度 r 为半径，作一个球面。在该球面上，任意位置放置一个球体微元。我们取球体的任意两点，这两点与视觉等效点的夹角的最大值称为最大视角。最大视角最大时的位置与视觉等效点的连线，称为球心与视觉等效点的连线为视觉等效点在半径 r 下的轴。（该定义的几何直观见图 3）

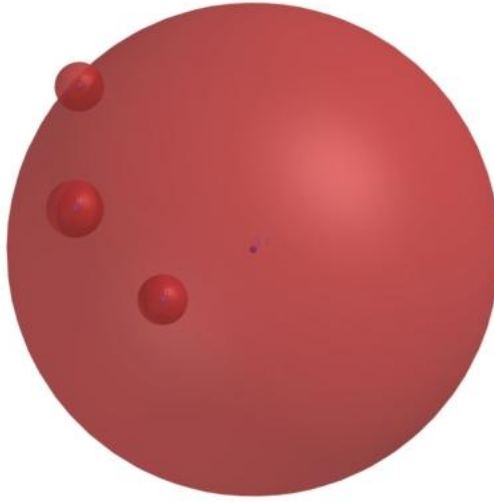


图 3

结合(*)式和上述定义，利用球的对称性，我们很容易得出以下引理：

引理 2（主视轴任取性质）：半径 r 下的轴可以任取。

有了以上内容，我们可以对烟花模型进行理论分析，并给出一般形式的推广。

3 对于烟花的分析

绽放的烟花可简化为以爆炸中心为原点的三维辐射状结构。假设烟花颗粒沿各向同性方向均匀发射，形成半径为 $R(t)$ 的球形发光体（ t 为爆炸后的时间）。当观测者从侧面（即非正视方向）观察时，需建立观测者坐标系与烟花坐标系的变换关系。设观测者位于 x 轴正方向，正视线沿 x 轴指向爆炸中心，视平面为 yOz 平面。

对于烟花表面任意一点 $P(X, Y, Z)$ ，其侧视角 θ_f 为该点与视觉等效点连线和正视线的夹角，满足：

$$\tan \theta_f = \frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{X}$$

根据视觉感知的投影关系，该点在视平面上的成像坐标 (y, z) 可通过透视变换推导：

$$y = \frac{f \cdot Y}{X}, z = \frac{f \cdot Z}{X}$$

其中 f 为人眼焦距（近似为常数）。若烟花实际形状为标准球体,即:

$$Y^2 + Z^2 + (X - X_0)^2 = R^2$$

其中 X_0 为爆炸中心的 x 坐标，其侧视成像满足:

$$\left(\frac{yR}{f}\right)^2 + \left(\frac{zR}{f}\right)^2 = \left(1 - \frac{X_0}{X}\right)^2$$

当观测者与烟花的水平距离 $X \rightarrow \infty$ 时，成像方程退化为:

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{f \cdot R}{X}\right)^2$$

此时视像趋近于圆心在视平面原点的正圆形。然而，当水平距离 X 有限时，成像会呈现椭圆畸变，长轴与短轴之比为:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{X}\right)^2}}$$

即水平距离越近，椭圆扁率越大。

4 推广

4.1 二维性质

将烟花案例的结论推广至任意二维图形 $F(x, y) = 0$ ，我们用同样的分析过程，不难得出其侧视成像方程可表示为:

$$F\left(\frac{f \cdot x'}{\tan\theta_f}, \frac{f \cdot y'}{\tan\theta_f}\right) = 0$$

其中 (x', y') 为视平面坐标， θ_f 为图形各点对应的侧视角。对于中心对称图形（如椭圆、正多边形），侧视成像将保持对称性，但形状参数（如椭圆离心率、多边形边长比）会随观测角度变化。

4.2 三维性质

对于三维物体，其视像的拓扑性质（如连通性、孔洞数）在透视变换下保持不变，但度量性质（如长度、角度、面积）会发生改变。定义视像形变因子 $\lambda(\theta_f, \theta_v)$ 为:

$$\lambda = \frac{L_{view}}{L_{reality}} = \frac{f}{L \cdot \sin\theta_f}$$

其中 L 为物体到视觉等效点的实际距离。我们不难给出推广：

1)对于正视的情况， $\theta_f \rightarrow 0^\circ, \lambda \rightarrow \infty$ 。

2)对于侧视的情况， $\theta_f \rightarrow 90^\circ, \lambda \rightarrow 0$ 。

5 其他方向的应用

5.1 观测结果的几何修正

基于上述理论，可构建观测偏差修正算法：

1. 测量目标物体的侧视角 θ_f 和垂视角 θ_v ；
2. 根据公式 $\lambda(\theta_f, \theta_v)$ 计算形变因子；
3. 对视觉感知结果进行逆向尺度变换，还原实际几何参数。

通过以上方式，我们可以对观测结果进行修正，也可以通过想要得到的观测结果，进行被观测事物的处理，于是引出了下列仿生学的应用。

5.2 仿生学

观测偏差的可控性为仿生视觉系统提供了设计思路。例如，鱼镜头的广角成像机制可模拟全侧视条件下的视野特征，配合预畸变算法能生成符合人眼感知习惯的平面图像。在虚拟现实领域，通过构建侧视角相关的形变模型，可优化立体显示的深度感知效果，使三维场景的透视关系更贴近真实视觉体验。

从仿生学的应用，我们不难做出一个推广，给出其在艺术领域的应用。例如，舞台美术设计中，通过预置特定角度的投影畸变，可在固定观演位置形成悬浮、透视压缩等超现实视觉效果。建筑投影艺术中，图像形变算法能消除复杂立面结构产生的观测偏差。

6 结论

本文通过构建视觉感知的公理体系与坐标变换模型，揭示了侧面观测中视觉感知与实际几何形状的偏差规律。以烟花为例的研究表明，物体的侧视成像会因观测距离和角度发生形状畸变，且这种畸变可通过数学模型定量描述。研究成果不仅为观测结果的科学修正提供了理论依据，还为视觉仿生技术、工程测量等领域开辟了新的应用路径。未来研究可进一步拓展至动态场景的实时偏差校正，以及多目视觉系统的联合建模。

参考文献

- [1] L. R. B. Feynman. R. P., Sands. M, *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, 1965.
- [2] R. J. G. Campbell. F. W., " Stereoscopic vision. *Journal of Physiology*," vol. 197, p. 16, 1968.
- [3] 王大珩, *应用光学*. 北京: 机械工业出版社, 2012.