

Report : Exploiting 3D Framlets to Extract Structural Sparsity from 3D patches

Huang Yijun

2022 年 5 月 18 日

1 基于Patch的重建模型

假设 $u \in R^N$ 是MRI图像的向量形式，则图像 u 可以被划分为若干个具有重叠位置且大小为 $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ 的图像patch。若给定一个目标图像patch，我们可以通过在该MRI图像中寻找其相似patch，并将这些相似patch通过堆叠的方式组成3D patch结构，进而使用3D紧框架提取特征。因此，使用算子 R_i 表示图像块匹配操作，即 $R_i x$ 表示通过图像块匹配操作将第 i 个patch与其相似patch构造成3D结构，则我们可以写出如下模型：

$$\min \frac{1}{2} \|Mu - g\|_2^2 + \lambda \sum_i^I \|WR_i u\|_1 \quad (1)$$

其中 $M = PFS$ ， P 为采样矩阵， F 为傅里叶变换， S 是线圈灵敏度矩阵， g 表示k空间欠采样数据， W 是3D紧框架变换矩阵， λ 为正则化参数，用于权衡数据精确项和稀疏项。

如图1所示，该图说明了算子 R_i 具体的操作流程，首先对于目标patch，我们使用patch match的算法寻找对应目标patch的相似patch，然后将所有patch堆叠成三维的结构(需要按照相似性进行排序)，然后对该三维结构的数据进行三维紧框架变换，得到三位紧框架系数，紧接着使用软阈值算法对系数去伪影或者噪声，对处理后的系数进行重构，最后将重构后的数据放回原图中，即 R_i^T 操作。

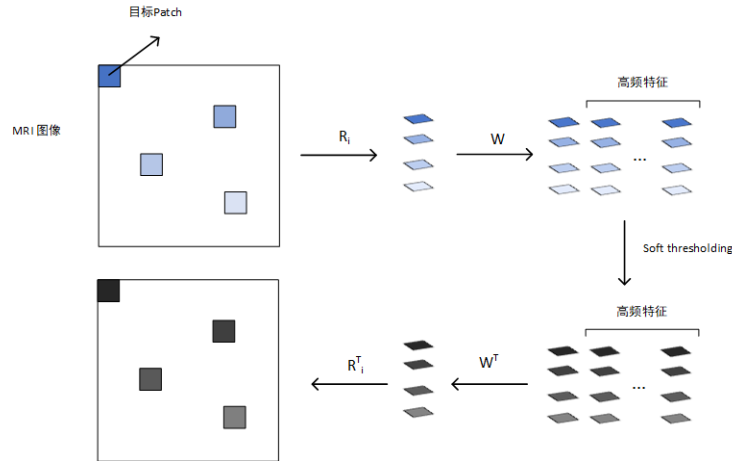


Figure 1: 图像块匹配 R_i ，及其伴随算子 R_i^T 等说明。

2 模型求解

模型(1)是一个Group Lasso问题，因此可以直接通过ADMM求解，模型可以重新写为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|Mu - g\|_2^2 + \lambda \sum_i^I \|z_i\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & WR_i u = z_i, i = 1, \dots, I \end{aligned} \quad (2)$$

模型(2)的增广拉格朗日形式为：

$$\min \quad \frac{1}{2} \|Mu - g\|_2^2 + \lambda \sum_i^I \|z_i\|_1 + \frac{\rho}{2} \sum_i^I (\|WR_i u - z_i + y\|_2^2 - \|y\|_2^2) \quad (3)$$

其中 y 是对偶变量， $\rho > 0$ 。则ADMM算法迭代如下：

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= (M^T M + \rho \sum_i^I R_i^T R_i)^{-1} (M^T g - \rho \sum_i^I R_i^T W^T (y^k - z_i^k)) \\ z_i^{k+1} &= \text{soft}(WR_i u^k + y^k, \frac{\lambda}{\rho}) \\ y^{k+1} &= y^k + WR_i u^k - z_i^k \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\sum_i^I R_i^T R_i$ 表示每个像素点被分配到patch相似组中的次数。