

Multi Slice pMRI Model

Henry

日期: July 12, 2021

1 Multi slice pMRI reconstruction model by 3D regularization

pMRI 设备采集到的是包含多个切片的 k-space 数据, 每个切片数据通过傅里叶逆变换之后都可以得到对应切片的图像。因此我们可以使用 3D 正则化的方法对多个相近的切片进行约束, 以达到更好的重建质量。

第 i 个切片图像的第 l 个线圈数据定义为

$$g_{il} = PFS_{il}u_i + \eta_{il}, l = 1, \dots, p \quad (1)$$

其中 η_{il} 白噪声, S_{il} 是对应的敏感度矩阵, F 表示傅里叶变换, P 为采样矩阵, 其对角元素为 0 或者 1, u_i 是第 i 个切片图像。

将单个切片的所有线圈数据进行组合, 可以得到

$$g_i = QM_iu_i + \eta_i \quad (2)$$

其中 g_i 是 $g_{il}, l = 1, \dots, p$ 通过堆叠而成的矩阵, 各个符号的具体定义为

$$g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} \\ \vdots \\ g_{ip} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F & & \\ & \ddots & \\ & & F \end{bmatrix}, M_i = F \begin{bmatrix} S_{i1} \\ \vdots \\ S_{ip} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{bmatrix}, \eta_i = \begin{bmatrix} \eta_{i1} \\ \vdots \\ \eta_{ip} \end{bmatrix} \quad (3)$$

如果我们同时用两张切片图像进行重建, 此时的重建模型为

$$\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\} = \underset{u_1, u_2}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 + \left\| \Gamma W_{3D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\|_1 \right\} \quad (4)$$

令 $u = [u_1 \ u_2]^T, g = [g_1 \ g_2]^T$, 此时 (4) 可以写成

$$\hat{u} = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|QMu - g\|_2^2 + \|\Gamma W_{3D}u\|_1 \right\} \quad (5)$$

其中 Γ 为正则化参数矩阵, 对角线上元素非 0, W_{3D} 是 3 维紧框架变换矩阵。

2 Algorithm

令 $K = QM, A = W_{3D}$, 并且定义函数 f 和 h 分别为:

$$f(u) = \frac{1}{2} \|Ku - g\|_2^2, h(u) = \|\Gamma u\|_1 \quad (6)$$

因此 (5) 可以写成

$$\min_u \{f(u) + h(Au)\} \quad (7)$$

此时用于求解模型 (7) 的 PD3O 算法步骤为

$$s^{k+1} = prox_{\delta h^*}((I - \gamma \delta A A^T)s^k + \delta A(u^k - \gamma \nabla f(u^k))) \quad (8)$$

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \nabla f(u^k) - \gamma A^T s^{k+1} \quad (9)$$

其中 $\nabla f(u) = K^T(Ku - g)$, 因此 f 的梯度为 $\|K\|_2^2 - Lipschitz$ 连续函数。

参考文献