ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.
Символьные вычисления и операции с полиномами в Maxima

Цель работы – получить навыки символьных вычислений, выполнения операции с полиномами и решения систем алгебраических вычислений в системе компьютерной алгебры Maxima.

4.1. Полиномы и операции с полиномами

Наиболее известными функциями являются степенные многочлены – полиномы, которые описывают огромное разнообразие кривых на плоскости. Еще большее число разнообразных кривых можно описать с помощью рациональных полиномиальных выражений в виде отношения полиномов. Достоинствами полиномов являются единообразное представление зависимостей и использование только арифметических операций для их вычислений. Производные от полиномов и интегралы с подынтегральными функциями-полиномами легко вычисляются и имеют простой вид. Также разработаны простые алгоритмы для вычисления всех корней полиномов. Возможность описания различных кривых с помощью полиномиальных преобразований и простота представления полиномов широко используются на практике, в частности, для аппроксимации других функций.

Формально полином определяется следующим образом. Рассмотрим K область целостности и независимую переменную x. Выражение вида

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

где $a_i \in K,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, называется *полиномом от* x *с коэффициентами из* K или *полиномом от* x *над* K [1]. Каждое выражение $a_i x^i$ называется членом (одночленом или мономом) степени i полинома $p(x)$. Если коэффициент при x^n не равен 0, то n – степень полинома, который обозначается $deg[p(x)]$. Коэффициент при x^n называется старшим коэффициентом полинома $p(x)$ и обозначается $lc[p(x)]$; если $lc[p(x)] = 1$ (единичный элемент области K), то полином называется нормированным.

Два полинома $p_1(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$, и $p_2(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$ с коэффициентами из K равны тогда и только тогда, когда $m = n$ и $c_i = d_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Для этих полиномов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ определяем их сумму и произведение следующим образом:

$$p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^{max(m,n)} (c_i + d_i) x^i,$$

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \sum_{h=0}^{m+n} \sum_{i+j=h} (c_i \cdot d_i) x^h.$$

Можно показать, что множество полиномов от x с коэффициентами из области целостности K само является *областью целостности*, обозначаемой $K[x]$.

Maxima позволяет производить манипуляции с полиномами и рациональными функциями. В таблице 4.1 представлено описание функций упрощения алгебраических выражений.

Таблица 4.1. Описание функций СКА Maxima для решения задач математического анализа

Функция	Описание функции
`expand (expr)`	Раскрытие скобок выражения `expr`
`ratsimp (expr)`	Выполняет упрощение выражения `expr`
`radcan (expr)`	Выполняет упрощение выражения `expr,` содержащее логарифмы, экспоненты и радикалы.
`solve ([eqn_1, . . . , eqn_n], [x_1, . . . , x_n])`	Решает систему уравнений `eqn_1, . . . , eqn_n` относительно переменных `x_1, . . . , x_n`

4.2. Алгоритм Бухбергера

Основная задача, которая будет здесь рассмотрена — решение систем полиномиальных уравнений. Под полиномами здесь подразумевается многочлены от многих переменных. Каждая рассматриваемая система обычно может быть преобразована к более простой системе некоторыми “элементарными” преобразованиями.

Пусть $I \in K[x_1, \dots, x_n]$ —идеал и $f_1, \dots, f_m$ – его базис.

Определение 4.1. Говорят, что многочлены f_i и f_j имеют зацепление, если их старшие члены f_{iC} и f_{jC} делятся одновременно на некоторый одночлен w, отличный от константы.

Если f_i и f_j имеют зацепление, т. е. $f_{iC} = w\,q_1$, $f_{jC} = w\,q_2$, где w—наибольший общий делитель f_{iC} и f_{jC}, то рассмотрим многочлен $F_{i,j} = f_i\,q_2 - f_j\,q_1 \in I$. (Его принято называть S-многочленом пары f_i , f_j и обозначать $S(f_i, f_j)$ или $S(i,j)$.) Редуцируем многочлен $F_{i,j}$ с помощью базиса $f_1, \dots, f_m$ до тех пор, пока это возможно. В результате получим нередуцируемый многочлен $\tilde{F}_{i,j}$. Если $\tilde{F}_{i,j} \equiv 0$, то будем говорить, что зацепление разрешимо. Иначе добавим $\tilde{F}_{i,j}$ к базису идеала I: $f_{m+1} = \tilde{F}_{i,j}$. В новом базисе $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}$ будем вновь искать возможные зацепления и редуцировать соответствующие многочлены $F_{i,j}$.

Пример 4.1. Рассмотрим идеал $I = (x^2 - y,\ x^2 - z)$. Здесь $f_1 = x^2 - y$, $f_2 = x^2 - z$. Имеется зацепление . $f_{1C} \vdots x^2$, $f_{2C} \vdots x^2 \Rightarrow F_{1,2} = -y + z$. Положим $f_3 = y - z$. Других зацеплений нет.

Пример 4.2. Пусть $I = (f_1 = x^2 + y^2 + z^2,\ f_2 = x + y - z,\ f_3 = y + z^2)$. Зацепление имеют только f_1 и f_2: $F_{1,2} = f_1 - xf_2 = y^2 + z^2 - xy + xz = -xy + xz + y^2 + z^2$. Редуцируем с помощью f_2:

$$-xy + xz + y^2 + z^2 \to (y - z)y - (y - z)z + y^2 + z^2 = 2y^2 + 2z^2 - 2yz$$

Редуцируем с помощью f_3:

$$2y^2 + 2z^2 - 2yz \to 2z^4 + 2z^3 + 2z^2$$

Дальше редуцировать нельзя, поэтому $f_4 = 2z^4 + 2z^3 + 2z^2$. На константу можно сократить и считать, что $f_4 = z^4 + z^3 + z^2$. Других зацеплений нет.

Оказывается, что и в общем случае возможно лишь конечное число неразрешимых зацеплений.

Теорема 4.1. Для каждого набора многочленов $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ после редуцирования конечного числа зацеплений мы получим набор $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_M$, в котором каждое зацепление разрешимо.

Теорема 4.2. (Diamond Lemma). Базис $f_1, \dots, f_m$ идеала I является базисом Грёбнера тогда и только тогда, когда в нем нет зацеплений или каждое зацепление разрешимо.

Теоремы 4.1 и 4.2 обосновывают существование эффективного алгоритма для построения базиса Грёбнера идеала. Этот алгоритм называется алгоритмом Бухбергера. Повторим еще раз его этапы. Пусть $f_1, \dots, f_m$ – набор многочленов, являющийся базисом идеала I.

1) Проверим, есть ли в наборе зацепления. Если зацеплений нет, то набор является базисом Грёбнера идеала I, иначе переходим к пункту 2.

2) По найденному зацеплению (i, j) многочленов f_i и f_j положим $f_{iC} = w\, q_1, f_{jC} = w\, q_2$, и составим многочлен $F_{i,j} = f_i\, q_2 - f_j\, q_1$. Редуцируем многочлен $F_{i,j}$ с помощью набора {fi} до тех пор, пока это возможно. Если многочлен $F_{i,j}$ редуцировался к ненулевому многочлену f, то переходим к пункту 3, иначе к пункту 4. (Отметим, что редуцируемость многочлена $F_{i,j}$ к нулю и вид многочлена f, вообще говоря, зависят от выбранной нами последовательности применяемых редукций. В алгоритме мы используем любую применимую последовательность редукций и, получив нередуцируемый многочлен f, переходим к пункту 3, более никогда зацепление (i, j) не рассматривая.)

3) Добавляем многочлен f к набору $f_1, \dots, f_k$ в качестве f_{k+1} и переходим к пункту 4.

4) В построенном к настоящему моменту множестве многочленов $\{f_i\}$ рассматриваем зацепление, которое не было рассмотрено ранее, и переходим к пункту 2. Если все имеющиеся зацепления ранее рассматривались, алгоритм завершен.

За конечное число шагов мы получим набор $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_M$, где каждое зацепление разрешимо. Это и есть базис Грёбнера идеала $I = (f_1, \dots, f_m)$ (см. примеры 4.1, 4.2).

4.3.Решение системы алгебраических уравнений с применением базисов Грёбнера

Решение системы алгебраических уравнений с применением базисов Грёбнера описывается в главе 5 учебного пособия [2].

В Maxima имеется библиотека `grobner`, функции которой можно использовать при выполнении работы. Библиотека устанавливается командой `load(grobner)`. Демонстрация возможностей библиотеки – `demo("grobner.demo")`.

4.4.Задание на лабораторную работу

В системе компьютерной алгебры Maxima решить задачи:

– упростить алгебраическое выражение;
– раскрыть скобки и привести подобные слагаемые;
– разложить алгебраические выражения на множители;
– разложить рациональную дробь на простейшие дроби;
– построить графики многочленов и найти их корни;
– решить систему алгебраических уравнений с помощью стандартного метода `algsys`;
– реализовать алгоритм Бухбергера и решить систему алгебраических уравнений.

4.3.Варианты заданий

Варианты заданий содержатся в разделах 1.1. – 1.5 учебного пособия [4], в главе 2 учебника [5] и на стр. 46 [1].

Таблица 4.2. Варианты заданий для решения задач

№	Из учебного пособия [4]	Из сборника задач [5]
1.	1 (раздел 1.1-1.5)	2.068, 2.187
2.	2 (раздел 1.1-1.5)	2.069, 2.188
3.	3 (раздел 1.1-1.5)	2.070, 2.189
4.	4 (раздел 1.1-1.5)	2.071, 2.190
5.	5 (раздел 1.1-1.5)	2.073, 2.191
6.	6 (раздел 1.1-1.5)	2.074, 2.194
7.	7 (раздел 1.1-1.5)	2.075, 2.195
8.	8 (раздел 1.1-1.5)	2.076, 2.196
9.	9 (раздел 1.1-1.5)	2.079, 2.197
10.	10 (раздел 1.1-1.5)	2.080, 2.198
11.	11 (раздел 1.1-1.5)	2.082, 2.199
12.	12 (раздел 1.1-1.5)	2.085, 2.200
13.	13 (раздел 1.1-1.5)	2.086, 2.203
14.	14 (раздел 1.1-1.5)	2.089, 2.208
15.	15 (раздел 1.1-1.5)	2.090, 2.209
16.	16 (раздел 1.1-1.5)	2.091, 2.210
17.	17 (раздел 1.1-1.5)	2.092, 2.211
18.	18 (раздел 1.1-1.5)	2.093, 2.212
19.	19 (раздел 1.1-1.5)	2.094, 2.213
20.	20 (раздел 1.1-1.5)	2.095, 2.214

Таблица 4.3. Варианты заданий для решения системы алгебраических уравнений

№	Из учебного пособия [2]	№	Из учебного пособия [2]
1.	$\begin{cases} x^2-1=0, \\ (x-1)y=0, \\ (x+1)z=0. \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0, \\ x+y-z=0, \\ y+z^2=0. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} xz+2y+1=0, \\ yz-1+z=0, \\ yz+xyz+z=0. \end{cases}$	7.	$\begin{cases} x^3yz-xz^2=0, \\ xy^2z-xyz=0, \\ x^2y^2-z=0. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} xy^2-z-z^2=0, \\ x^2y-y=0, \\ y^2-z^2=0. \end{cases}$	8.	$\begin{cases} xy+z-1=0, \\ x-y-z^2=0, \\ x^2-2y+1=0. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} xz-y-x+xy=0, \\ yz-z+x^2+yx^2=0, \\ x-x^2+y=0. \end{cases}$	9.	$\begin{cases} xy+xz+y^2=0, \\ yz-x^2+x^2y=0, \\ x-xy+y=0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} yz+x^2+z=0, \\ xyz+xz-y^3=0, \\ xz+y^2=0. \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x^2+z^2y+yz=0, \\ y^2-zx+x=0, \\ xy+z^2-1=0. \end{cases}$

Литература

1. *Бухбергер Б.* Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. — М.: Мир, 1986. — 392 с.
2. *Аржанцев И.В.* Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. – М.: МЦНМО, 2003. — 68 с.
3. *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра: Перевод с франц. Москва. Из-во: Мир, 1991 г. — 352 с.
4. *Малышев И.А.* Компьютерная алгебра: сборник заданий для упражнений. – Спб.: Изд-во СПГПУ, 2012. – 28 с.
5. *Сканави М.И.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы. (с решениями). Кн. 1. Алгебра. – М.: Высшая школа, 1992. – 528 с.