Module : Analyse 03

Chapitre 00 : **Fonctions de plusieurs variables**

Généralités et Rappels des notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$:

Qu'est- ce que $\mathbb{R}^n$?: Mathématiquement, n étant un entier non nul, on définit $\mathbb{R}^n$ comme le produit cartésien de $\mathbb{R}$ par lui-même n fois : $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des vecteurs à n composantes réelles. Que ce soit en Analyse théorique ou numérique comme en informatique on manipule essentiellement des vecteurs, et on doit leurs appliquer des traitements analogues à ce qu'on faisait avec les nombres : on doit savoir mesurer la proximité de deux vecteurs, pour pouvoir parler de limite, continuité et dérivabilité d'une fonction dont l'ensemble de départ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ mais un ensemble de vecteurs.

Distance :

Dans $\mathbb{R}$: La distance entre deux réels x et y est donnée par $d(x,y) = |x - y|$

Dans $\mathbb{R}^2$: La distance entre deux points X= (x_1, x_2) et Y= (y_1, y_2) est donnée par $d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Dans $\mathbb{R}^n$: La distance entre deux points $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ est donnée par $d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

Norme :

Définition1 : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$
- $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

Définition 2 : La norme d'un élément X de$\mathbb{R}^n$ est sa distance à l'origine (Notons que $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé)

Normes usuelles de $\mathbb{R}^n$: pour tout $X = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

- **La norme euclidienne** : notée$N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

- **La norme du max :** notée$N_\infty(X) = \|X\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$
- **La norme « somme » :** notée$N_1(X) = \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

Ces trois normes sont équivalentes. (Deux normes $N_{1,}N_2$ sont dites équivalentes si et seulement s'il existe A et B positifs vérifiant : $\forall X \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, AN_1(X) \le N_2(X) \le BN_1(X)$)

Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$:

<u>Définition 1 :</u> On appelle boule ouverte de centre $X_0 \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ et de rayon $r > 0$, notée $B(X_0, r)$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dont la distance à X_0 est strictement inférieure à r $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \|X - X_0\| < r\}$

<u>Exemples :</u>

- Les normes usuelles étant confondues dans $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue, donc la boule ouverte $B(x_0, r)$ dans $\mathbb{R}$ n'est autre que l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$
- Dans$\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$, et en utilisant la norme euclidienne, la boule $B(X_0, r) = \left\{X = (x, y) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \; avec \; X_0 = (x_0, y_0)\right\}$est le disque ouvert centré en X_0 et de rayon r.
- La boule ouverte pour la norme du max (dans$\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$**)**, est un carré. En effet : $\|X - X_0\|_\infty < r \Leftrightarrow \max \;\; (|x - x_0|, |y - y_0|) < r \Leftrightarrow \begin{cases} |x - x_0| < r \\ et\ |y - y_0| < r \end{cases}$

Or $|x - x_0| < r$ caractérise une bande verticale de largeur 2r, limitée par les deux droites $x = x_0 - r \; et \; x = x_0 + r$. De même, $|y - y_0| < r$ caractérise une bande horizontale de largeur 2r, limitée par les deux droites y= $y_0 - r \; et \; y = y_0 + r$. L'intersection de ces bandes est un carré dont le centre estX_0.

<u>Définition 2 :</u> On appelle boule fermée de centre $X_0 \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ et de rayon$r > 0$, notée$\bar{B}(X_0, r)$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dont la distance à X_0 est inférieure ou égale à r $\bar{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \|X - X_0\| \le r\}$

Voisinage d'un point : Le voisinage d'un point $X_0 \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ est toute partie de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ contenant une boule ouverte centrée en X_0.

Un voisinage de l'infinie sera une couronne $\{X \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \|X\| > R \; avec \; R > 0 \; très \; grand\}$

Ouvert ou partie ouverte de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$: une partie U de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$est dite ouverte, lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points.

U ouvert $\Leftrightarrow$ $(\forall X_0 \in U; \; \exists r > 0, B(X_0, r) \subset U$

- Par convention, l'ensemble vide $\emptyset \; et \; \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ sont des ouverts de$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.**
- La réunion quelconque des ouverts est un ouvert.
- L'intersection finie des ouverts est un ouvert.

Exemple :

L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$est un ouvert : c'est le demi plan situé au dessous de la première bissectrice (privé de la droite).

Partie fermée de $\mathbb{R}^n$: F est dite partie fermée de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Exemple :$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\} = \mathbb{R}^2 \setminus U$ est un fermé.

Remarque :

- L'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert, son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$ **:** donc$\mathbb{R}^n$ est un fermé. De même , puisque $\mathbb{R}^n$est un ouvert son complémentaire $\emptyset$ est fermé.
- $\emptyset$ *et* $\mathbb{R}^n$ sont les seules parties de $\mathbb{R}^n$ ouvertes et fermées en même temps.
- Une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ n'a aucune raison d'être ouverte ou fermée, on peut trouver des parties qui ne sont ni ouverte ni fermée : l'intervalle semi ouvert n'est ni ouvert ni fermé ; l'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Partie bornée : Une partie P de $\mathbb{R}^n$ est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule. Autrement dit, Une partie P de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si

$\exists R > 0, \forall X \in P, on\ a\ \|X\| \leq R.$

Compact de $\mathbb{R}^n$: Toute partie K de $\mathbb{R}^n$ non vide, fermée et bornée est dite compacte.

Fonctions réelles de plusieurs variables :

Définition :

Une fonction réelle de plusieurs variables est une application

$$\begin{aligned} f: \quad & D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \longmapsto f(X) \end{aligned}$$

D : domaine de définition de f.

Exemple :

- $f(x, y) = 2(x + y)$ fonction à deux variables qui représente le périmètre d'un rectangle de longueur x et largeur y, est définie sur$\mathbb{R}^2$.
- $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $f(P, V, T) = PV - nRT$: fonction de trois variables qui représente la loi du gaz parfait, avec n est la quantité de matière, R est une constante, V est le volume, P la pression et T la température.

Pour n=1 : $y = f(x)$ se présente par une courbe dans le plan$\mathbb{R}^2$.

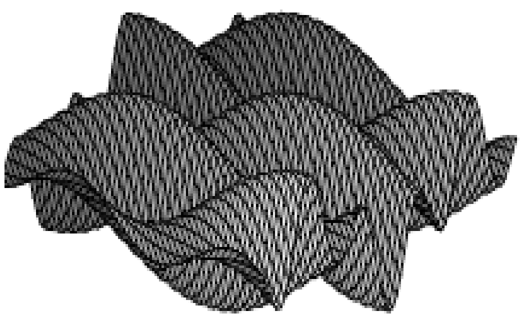
Pour n=2 : $z = f(x, y)$ se présente par une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$

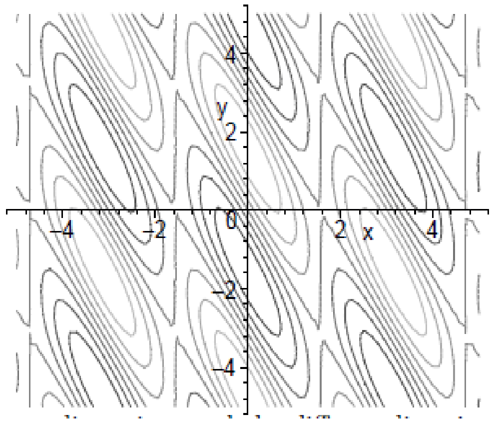
Pour n$\geq$ 3 : la représentation graphique est difficile à visualiser.

Remarque : En fixant la valeur de $z = f(x, y) = k$, on obtient des courbes dites ligne de niveau de la fonction f ; notées $L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = k \ (k \ réel)\}$. Ce terme reflète une réalité physique :

- ✓ Sur une carte topographique on les emploie pour indiquer l'altitude ;
- ✓ Sur une carte marine, elle indique la profondeur (dite ligne de sonde) ;
- ✓ Sur une carte météorologique, les isobares qui relient les points d'égale pression atmosphérique…

Exemple : la représentation ci-dessous est la surface $z = sinx + \cos(2x + y)$ et ses lignes de niveau.





Continuité d'une fonction réelle de plusieurs variables:

Définition : soit f une fonction définie au voisinage d'un point $A \in \mathbb{R}^n$, on dit que f est continue au point A lorsque $\lim_{X\to A} f(X) = f(A)$ i.e : $\forall\varepsilon > 0;\ \exists\alpha > 0;\ \forall X \in B(A, \alpha) on\ a\ |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \forall X \in D_f, \exists\alpha > 0; \|X - A\| < \alpha \Longrightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$$

$$X\ etA \in \mathbb{R}^n\ donc\ X = (x_1, x_2 \dots, x_n)\ et\ A = (a_1, a_2 \dots, a_n); X \to A\ signifie \begin{cases} x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ x_n \to a_n \end{cases}$$

Problème : Dans $\mathbb{R}$, f continue en A $\Leftrightarrow \lim_{\substack{< \\ X\to A}} f(X) = \lim_{\substack{> \\ X\to A}} f(X) = f(A)$; il y a un seul chemin à parcourir pour joindre X à A. Mais dans $\mathbb{R}^n$, $X \to A$ signifie que toutes les coordonnées de X tendent vers les coordonnées de A à la fois et indépendamment : il y a une infinité de chemins à parcourir pour faire tendre X vers A !, donc la définition n'est pas toujours facile à appliquer.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \neq \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y)$$

Techniques utilisées dans la pratique :

- Application de la définition : soit $f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq(0,0) et\ f(0,0)=0$, montrons que f est continue en (0,0) . Soit M=(x,y), $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2}$,
  on a $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|\overrightarrow{OM}\|\ et\ |y|\leq\|\overrightarrow{OM}\|$. Donc $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right|\leq\|\overrightarrow{OM}\|^2$ qui tend vers 0 quand M tend vers l'origine.
  Autrement dit : $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha=\sqrt{\varepsilon}\ tq\|\overrightarrow{OM}\|<\alpha\Rightarrow\ |f(x,y)-f(0,0)|\leq\varepsilon$, d'où la continuité de f en (0,0).
- Changement de variables en coordonnées polaires (dans le cas de 2 variables):

$$\begin{cases}x=r\cos\theta & r>0,\theta\in[0,2\pi]\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

Exemple 1 : $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^4cos^3\theta\ sin\theta}{r^2}=0$

Exemple 2 : $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\cos\theta\sin\theta$, dépend de θ donc la limite n'existe pas.

- Utilisation du développement limité : on définit sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la fonction $f(x,y)=\frac{x(\sin y-y)}{x^2+y^2}$, on sait que $\sin y-y=o(y^2)$ au voisinage de 0 i.e il existe une fonction ε telle que $\forall y\in V(0),\sin y-y=y^2\varepsilon(y) avec\ \varepsilon(y)\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$. Et puisque $|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$on obtient : $|f(x,y)|=\left|\frac{xy^2\,\varepsilon(y)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|y||\varepsilon(y)|}{2}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$. On dit dans ce cas que f est prolongeable par continuité en (0,0).
- Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de trouver deux chemins différents qui donnent deux valeurs différentes de la même limite. Par exemple ; pour montrer que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas, faisons tendre d'abord (x,y) vers l'origine tout en restant sur l'axe (X'OX) d'équation y=0 d'où $f(x,0)=1\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$, puis en parcourant l'axe (Y'OY) d'équation x=0 on obtient $f(0,y)=-1\underset{y\to0}{\longrightarrow}-1$. Ainsi la limite n'existe pas. (la limite, si elle existe, est unique)

Théorème : Soit $f,g\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- Si f et g sont continues en un point$A\in\mathbb{R}^n$, alors $f+g$ et $f.g$ sont continues en A .
- Si f est continue en A et $f(A)\neq0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en A.
- f est dite continue sur une partie $D\subset\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est continue en tout point de D.

Dérivées partielles :

Définition 1 : Soit $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $A = (a_1, a_2 \dots a_n)$ un point intérieur à D_f. Notons

$$g_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto g_i(t) = (a_1 \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots a_n)$$

On appelle dérivée partielle première de f par rapport à sa i^{ème} variable en A ; notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2 \dots a_n)$ la dérivée de la fonction g_i en a_i :

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2 \dots a_n) = g'_i(a_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 \dots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \dots a_n) - f(a_1, a_2 \dots a_n)}{h}$;

Dans le cas d'une fonction à deux variables, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

<u>Exemple :</u> Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \; et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Règle : on calcule la dérivée partielle par rapport à la i^{ème} variable tout en fixant les autres, et en dérivant la fonction à une seule variable ainsi obtenue.

<u>Exemple :</u> soit $f(x,y) = y^x$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\ln y) y^x \; et \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\, y^{x-1}$$

<u>Remarque</u> : Si une fonction réelle d'une seule variable est dérivable en un point alors elle est continue en ce point, dans le cas d'une fonction de plusieurs variables l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point !

<u>Contre exemple :</u> On reprend l'exemple de la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si (x,y) = (0,0) \end{cases}$, qui n'est pas continue à l'origine ; en effet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \cos\theta \sin\theta$; bien que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \; et \; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ existent.

Définition 2 : Soit U un ouvert, une fonction $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^1(U)$ si toutes les fonctions dérivées partielles premières existent et sont continues sur U.

Corollaire : Soit U un ouvert, une fonction $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.Si f est de classe $C^1(U)$ alors elle est continue sur U.

Dérivées partielles d'ordre supérieur : Si f est une fonction de deux variables, ses dérivées partielles premières sont aussi des fonctions de deux variables, qui ont à leurs tours des dérivées partielles, dites dérivées partielles secondes de$f$, notées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Généralement : $nombre\ de\ dérivées\ partielles = (nombre\ de\ variables)^{ordre\ de\ dérivation}$

Définition : Si toutes les fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe C^1 alors f est dite de classe C^2

Théorème de Schwartz : Soient U un ouvert et $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe$C^2(U)$.
$\forall i, j = \overline{1,n}\ tq\ i \neq j, on\ a\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Généralisation : $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^k(U)$ si et seulement si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.

Dérivée partielle d'une fonction composée :

Théorème : Si la fonction $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U, et si la fonction $\gamma: t \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in U$ est aussi de classe C^1(i.e les fonctions $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sont de classeC^1), alors la fonction composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \overset{\gamma}{\to} & \mathbb{R}^n & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ t \longmapsto \gamma(t) \longmapsto f \circ \gamma(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big).\, x_i'(t)$$

Exemple : Soit $F(t) = f(2 + \cos(t), \sin(t))\ et\ f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big).\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big).\, y'(t) avec\ x(t) = 2 + \cos(t) et\ y(t) = sint$$

$$F'(t) = -\big(2x(t) + 3y(t)\big)\sin t + \big(3x(t) - 2y(t)\big) = -4(1 + \cos t)\sin t + 3\cos 2t + 6\cos t$$

Une 2ème approche de la dérivation des fonctions composées dans $\mathbb{R}^2$:

On considère la fonction $f: (x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^1 sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, et les fonctions $\varphi_1: (u, v) \longmapsto x(u, v) et\ \varphi_2: (u, v) \longmapsto y(u, v)$ de classe C^1aussi. Notons la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \end{array}$$

: c'est le cas d'un changement de variables (x,y) en (u,v).

La fonction g est de deux variables, donc la dérivée n'a aucun sens !.Mais, si on applique le théorème d'une fonction composée sur chacune des fonctions suivantes :

$u \longmapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ et $v \longmapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, on pourra exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad ou\ bien \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Cette méthode s'applique pour résoudre certaines équations différentielles aux dérivées partielles.

Exemple :Soit

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction de classe C^1. En passant aux coordonnées polaires, simplifier l'expression $\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ puis en déduire les fonctions de classes C^1 vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Posons $f(x,y) = g(r,\theta) = g(\sqrt{x^2+y^2}, arctg\,(\frac{y}{x}))$

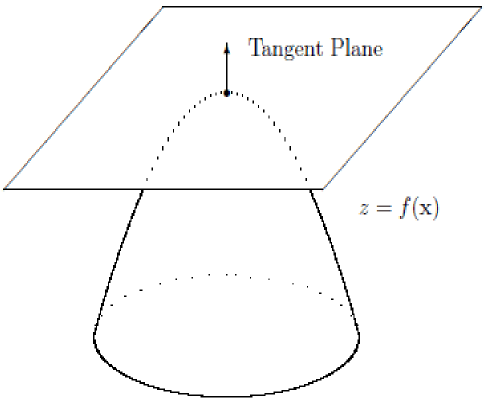
Donc $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\cos\theta + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial r}(-\sin\theta) + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\left(\dfrac{\cos\theta}{r}\right) \end{cases}$

D'où $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ ce qui signifie que g est indépendante de θ

$$\Longrightarrow g(r,\theta) = w(r) = w\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x,y)$$

Dérivée directionnelle :

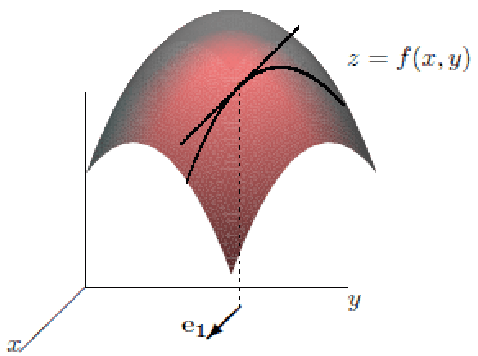
Dans le cas d'une fonction réelle d'une variable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sa dérivée au point $A \in D_f$, notée $f'(A)$, représente la pente de la droite tangente à la courbe de f au point $(A, f(A))$. Dans le cas d'une fonction réelle de deux variables, la dérivée n'a pas de sens et la représentation graphique de la fonction est une surface de l'espace : il existe une infinité de droite tangente à la surface en un point ; en fait il y a un plan tangent.

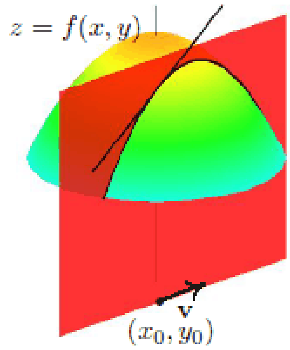


Définition : Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point $A = (a_1, a_2 \dots a_n)$ et soit $\vec{u}(u_1, u_2 \dots u_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle dérivée directionnelle de f suivant la direction de $\vec{u}$ au point A, la dérivée en t=0 (si elle existe) de la fonction réelle:

$t \longmapsto f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, \dots, a_n + tu_n)$. On la note $f'_{\vec{u}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+tu_1,a_2+tu_2,\dots,a_n+tu_n)-f(a_1,a_2\dots a_n)}{t}$, elle est dite aussi pente de f au point A suivant la direction $\vec{u}$.

Dans le cas n=2 : $f'_{\vec{u}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+tu_1,a_2+tu_2)-f(a_1,a_2)}{t}$





Si $\vec{u} = \vec{\imath}(1,0) \hookrightarrow \; f'_{\vec{u}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$

Si $\vec{u} = \vec{\jmath}(0,1) \hookrightarrow \; f'_{\vec{u}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$

Résultat : Les dérivées partielles premières représentent les pentes de la fonction en un point suivant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y) = x^2 + xy$ suivant $\vec{u}(\cos\theta, \sin\theta)$; $\theta \in [0,\pi]$

$f'_{\vec{u}}(1,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t\cos\theta,-1+t\sin\theta)-f(1,-1)}{t} = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

La valeur $f'_{\vec{u}}(1,-1)$ atteint une valeur maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

Interprétation géométrique : En faisant varier θ entre 0 et π, on obtient tous les plans verticaux tangents à la surface en A. La valeur de θqui donne le max $f'_{\vec{u}}(x,y)$ donne la ligne de la plus grande pente au point (x,y).

Différentielle:

Définition : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2 \dots a_n) \in U$. On dit que f est différentiable en A si et seulement si :

$$\lim_{\|(h_1,h_2,\dots h_n)\|\to 0} \frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2\dots a_n+h_n)-f(a_1,a_2\dots a_n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2\dots a_n).h_i}{\|(h_1,h_2,\dots h_n)\|} = 0$$

Cas n=2 : $\lim_{\|(h_1,h_2)\|\to 0} \frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)h_2}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$

Définition : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(U)$ et $A \in U$ On appelle différentielle de f au point A l'application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notée Df_a telle que :

$$Df_a: H = (h_1, \dots h_n) \longmapsto Df_A(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).h_i$$

Résultat : Si f est différentiable au point A, la dérivée directionnelle de f en A suivant $\vec{u}$ est $f'_{\vec{u}}(A) = Df_A(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).u_i$

Théorème : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- f est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.
- Toute application différentiable en un point de U est continue en ce point.
- f est dite de classe $C^1(U)$ si elle est différentiable sur U et sa différentielle est continue.
- Somme, produit, inverse et composée de fonctions de classe C^1 est de classe C^1.

Différentielle d'ordre supérieur :

Cas n=2 : $D^{(m)}f = \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{(m)} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}$ c-à-d

$$Df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$D^2 f = \sum_{p=0}^{2} C_2^p h^p k^{2-p} \frac{\partial^2 f}{\partial x^p \partial y^{2-p}} = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$D^3 f = \sum_{p=0}^{3} C_3^p h^p k^{3-p} \frac{\partial^3 f}{\partial x^p \partial y^{3-p}} = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Cas n=3 :

$$Df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$D^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2kl\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

Développement limité :

- Dans le cas n=1 : $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^m(U), x_0 \in U$. Le développement limité de la fonction f au voisinage de x_0 à l'ordre m est donné par :
  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f"(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^m}{m!}f^{(m)}(x_0) + o((x - x_0)^m)$
- Cas n=2 : $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^m dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$, le développement limité de la fonction f au voisinage de (x_0, y_0) à l'ordre m est donné par :
  $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + D^{(1)}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}D^{(2)}f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{m!}D^{(m)}f(x_0, y_0) + \|(h,k)^m\|\varepsilon(h,k), tq \ \lim_{\|(h,k)\|\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$

- Donc le développement limité de la fonction f au voisinage de (x_0, y_0) à l'ordre 2 est donné par :$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\Big[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (x_0, y_0)\Big] + o(\|(h,k)^2\|)$

<u>Dans la pratique</u> : Pour éviter les calculs, on peut utiliser les techniques de calcul des DLN des fonctions usuelles dans certains cas :

Exemple1 : La fonction $f(x,y) = e^y \cos x$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut calculer son DL(2) au voisinage de(0,0) sans passer par l'application de la définition ; en effet :

$$\begin{cases} e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2} + o(y^2) \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(\|(x,y)^2\|)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1 + y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(\|(x,y)^2\|)$$

Par identification avec la définition, on déduit (sans calcul)les valeurs $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1\ , \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ (0,0) = 1\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$

Exemple 2 : Donner le DL(2) de $f(x,y) = \frac{1+x+y}{1+x-y}$ au voisinage de (0,0) :

$$f(x,y) = \frac{1+x+y}{1+x-y} = (1+x+y)\frac{1}{1+(x-y)}, quand\ (x,y) \in V(0,0) alors (x-y) \in V(0)$$

$$f(x,y) = (1+x+y)(1-(x-y)+(x-y)^2 + o(\|(x,y)^2\|)$$

$$= 1 + 2y - 2xy + 2y^2 + o(\|(x,y)^2\|)$$

Résultat : Si la fonction $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ est différentiable en(x_0, y_0) alors la surface d'équation $z = f(x,y)$ admet, en ce point, un plan tangent d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Application aux calculs approchés :

Soit f une fonction réelle de deux variables admettant un DL au voisinage d'un point (x_0, y_0) : $f(x,y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$

$$\Rightarrow\ f(x,y) - f(x_0, y_0) \simeq (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\Delta y$$

Exemple : Le rayon de la base d'un cône circulaire droit mesure 10 cm et la hauteur 25 cm, avec une incertitude de 0.1cm, sur chaque mesure. Estimez l'incertitude sur le volume du cône calculé sur ces valeurs.

Le volume du cône est donné par la formule $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Donc $\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = \frac{2\pi r h}{3}\Delta r + \frac{\pi r^2}{3}\Delta h$ comme l'erreur ne dépasse pas 0.1 cm, on a $|\Delta r| \leq 0.1\ et\ |\Delta h| \leq 0.1$ d'où $\Delta V = 20\pi\ cm^3$ qui représente l'erreur maximale commise.

Extrema des fonctions réelles de plusieurs variables :

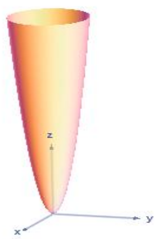
Définition : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum global en A si et seulement si $\forall X \in U; f(X) \leq f(A)$.
- On dit que f admet un minimum global en A si et seulement si $\forall X \in U; f(X) \geq f(A)$.

Remarque : L'étude d'existence d'extrema global sur un domaine qui peut être non borné n'est pas facile à faire.

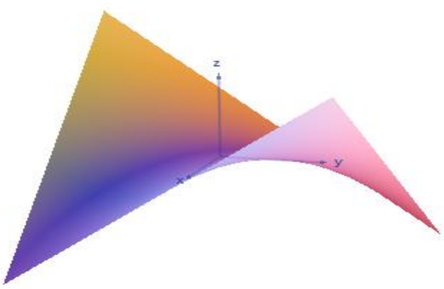
Exemples :

- ✓ La fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ admet un minimum global en (0,0),



car $f(x,y) \geq f(0,0) = 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mais $\lim_{x\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ donc on a pas de maximum global.

- ✓ La fonction $f(x,y) = xy$ n'admet pas d'extrema global car elle n'est pas bornée : $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty} f(x,-x) = -\infty$



Définition : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- On dit que f admet un maximum local en $A \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(A,r) \subset U tq\ f(X) \leq f(A);\ \forall X \in B(A,r)$.
- On dit que f admet un minimum local en $A \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(A,r) \subset U tq\ f(X) \geq f(A);\ \forall X \in B(A,r)$.

Proposition : Soit U un ouvert, $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(U)$

Si f admet un extrema local en un point A de U alors $\forall i = \overline{1,n};\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$

<u>Remarque :</u>Aucune des hypothèse ne doit être omise ; en effet

- La fonction $\begin{cases} f: & [0,1] \times [0,1] \rightarrow \qquad \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$ admet un maximum global en (1,1), mais $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \neq 0$ car $[0,1] \times [0,1]$ n'est pas un ouvert !.
- La fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = |x| + |y| \end{cases}$ f admet un minimum local en (0,0), mais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ et\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas car f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Définition : Soit $f \in C^1(U)$; si toutes les dérivées partielles premières de f sont nulles en A, on dit que A est un point critique de f.

D'après le DL d'ordre 2 ; si f est de classe $C^2(U)$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + D^{(1)}f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}D^{(2)}f(x_0, y_0) + o(\|(h,k)^m\|)$$

$$Si (x_0, y_0)\ est\ un\ point\ critique \Longrightarrow D^{(1)}f(x_0, y_0) = 0$$

$d'où\ f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{1}{2!}D^{(2)}f(x_0, y_0)$ Donc le signe du premier membre est le signe de $D^{(2)}f(x_0, y_0)$.

Proposition : Soit U un ouvert de$\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(U)$ et soit $A \in U$ un point critique.
$Q_A(X) = D^2f(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A).x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A).x_i.x_j$

- Si l'on a $Q_A(X) > 0, \forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ alors f admet un minimum local en A.
- Si l'on a $Q_A(X) < 0, \forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ alors f admet un maximum local en A.
- S'il existe des valeurs X, Y pour les quelles $Q_A(X) > 0 et\ Q_A(Y) < 0$ (c-à-d $Q_A(X)$ n'est pas de signe constant) alors A n'est ni min ni max : c'est un point selle.

<u>Exemple</u> : Trouver les extrema de la fonction

$f(x,y) = x^2 + y^4\ sur\ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ tq\ x^2 + y^2 < 1\} = B\big((0,0);1\big); f \in C^2(U).$

Déterminons d'abord les points critiques :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}2x=0\\ 4y^3=0\end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0)=(0{,}0)$$

$Q_{(0,0)}(X)=Q_{(0,0)}(h,k)=2h^2, mais\ Q_{(0,0)}(0,k)=0\ \forall k, bien\ que\ (0,k)\neq(0{,}0)$ donc on ne peut rien conclure. Cependant on sait que $x^2+y^4\geq 0=f(0{,}0)\Longrightarrow f$ admet (0,0)comme minimum sur D. Si le domaine considéré est **un fermé**, on ne peut pas appliquer la proposition !!, mais on étudie l'existence d'extrema sur l'ouvert puis sur le bord :

<u>Exemple :</u> Trouvons les extrema de la fonction précédente sur $\overline{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ tq\ x^2+y^2\leq 1\}$. Sur l'ouvert U l'étude est déjà faite, et sur le bord i.e le cercle centré en (0,0) et de rayon 1, on a $x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2=1-y^2$, ce qui revient à étudier la fonction $g(y)=1-y^2+y^4; y\in[-1{,}1]$. Or g admet une valeur minimale égale à $\frac{3}{4}$ pour $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et une valeur maximale égale à 1 pour $y=0\ ou\ y=\pm 1$.On en conclut que dans $\overline{U}$ la fonction admet un max aux points $(0,\pm 1) et\ (\pm 1{,}0) et\ un \min au\ point\ (0{,}0)$.

Dans le cas de deux variables :

$$Q(h,k)=D^2f=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, notons\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, r=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ et\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$Q(h,k)=D^2f=s\left[h^2+\frac{k^2t}{s}+2hk\frac{r}{s}\right]=s\left[\left(h+k\frac{r}{s}\right)^2+\frac{ts-r^2}{s^2}k^2\right]$$

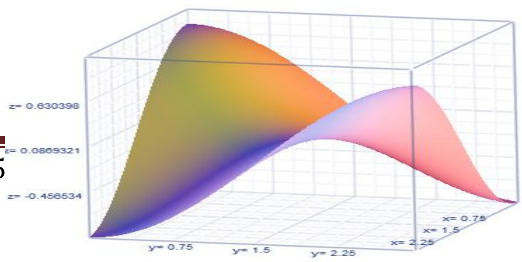
- Si $\Delta= ts-r^2>0\ et\ s>0\Longrightarrow Q(h,k)>0,\forall(h,k)\neq(0{,}0)$ d'où f admet un minimum local
- Si $\Delta= ts-r^2>0\ et\ s<0\Longrightarrow Q(h,k)<0,\forall(h,k)\neq(0{,}0)$ et f admet un maximum local
- Si $\Delta= ts-r^2<0$, $Q(1{,}0)\ a\ le\ signe\ de\ s\ et\ Q\left(-\frac{1}{p},1\right)\ a\ le\ signe\ de\ (-s)$ donc le point critique est un point selle.

<u>Exemple :</u> trouver les extrema de $f(x,y)=\cos x\cos y\ \ sur\ U=\ ]0,\pi[\times]0,\pi[$. Ce domaine est un ouvert, la fonction est de classe $C^2(U)$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}-\sin x\, cosy=0\\ -\cos x\, siny=0\end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$\Delta= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})<0$$

Donc la fonction ne présente aucun extrema sur ce domaine, le point $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$est un point selle.



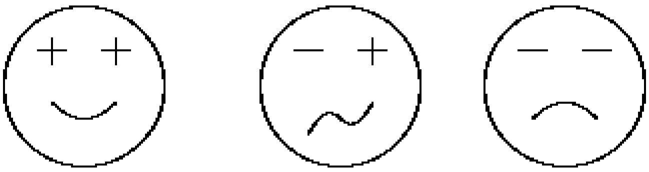
Définition : Soit U un ouvert de$\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(U)$ et soit $A \in U$ .On appelle matrice hessienne de f au point A, notée $H_f(A)$, la matrice définie par :

$$H_f(A) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}$$

Définition : Soit M une matrice carrée. On appelle valeurs propres réelles de M, les solutions λ de l'équation polynomiale $\det(M - \lambda I) = 0$ avec I est la matrice identité.

Proposition : Soit U un ouvert de$\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(U)$ et soit $A \in U$.

- Si toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H_f(A)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en A.
- Si toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H_f(A)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en A.
- S'il y a des valeurs strictement positives et d'autres strictement négatives, alors A est un point selle.



Fonction vectorielle de plusieurs variables :

Une fonction vectorielle de plusieurs variables f est une fonction de la forme :

Définition : Soit $\begin{matrix} f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ X \longmapsto f(X) = (f_1(X), \ldots, f_p(x)) \end{matrix}$, tel que $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et n, p sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

<u>Exemple1 :</u> on peut définir la fonction f de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (2x + y, -x + e^{x-y})$$

<u>Exemple2 :</u> Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $f(x, y, z) = \left(\frac{sinz}{\sqrt[3]{x+y^2}}, ycos(x - z)\right)$

Continuité : On dit qu'une fonction vectorielle f, définie sur un voisinage de a, est continue au point a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \; tel \; que \; pour \; tout x \in B(a, \alpha) on \; a \; \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \; .$$

- Ceci signifie que la fonction f est continue au point a (resp sur U) si et seulement si chacune des composantes f_i,(i=1,…,n) de f est continue en a (resp sur U).
- Toutes les opérations algébriques sur les fonctions continues (somme, produit, composition,…) restent valables pour les fonctions vectorielles continues.

Exemple : L'application $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(cosxcosz, e^{x^2-y-z}, 2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car chacune de ses composantes est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Différentielle d'une fonction vectorielle :

Définition : On dit que l'application f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est différentiable au point a lorsque chacune de ses composantes $f_1, f_2, \dots, f_p$ est différentiable en ce point.

Matrice Jacobienne : On appelle la matrice jacobienne de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ au point $a \in \mathbb{R}^n$ la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

La première colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de f par rapport à la première variable x_1, la deuxième colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de f par rapport à la deuxième variable x_2 et ainsi de suite.

Exemple :

a) Soit la fonction définie par $f(x,y) = (x^2 + xcosy, e^{x-y}, y^3x)$ Son jacobien est la matrice à 3 lignes et 2 colonnes :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + cosy & -xsiny \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ y^3 & 3y^2x \end{pmatrix}$$

b) Calculons le jacobien de la fonction f définie par $f(r,\theta,\varphi) = (rcos\theta cos\varphi, rsin\theta cos\varphi, rsin\varphi)$(Il s'agit du passage en coordonnées sphèriques).

$$J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} cos\theta cos\varphi & -rsin\theta cos\varphi & -rcos\theta sin\varphi \\ sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\varphi & 0 & rcos\varphi \end{pmatrix}$$

Définition : f est dite de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ lorsque chacune des applications coordonnées $f_1, f_2, \dots, f_p$ est de classe C^1 sur U.

Théorème : Une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est différentiable en chaque point de U.

La différentielle de f au point a est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la matrice sur les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$est la matrice jacobienne $J_f(a)$ et on a

$$pour\ tout\ H \in \mathbb{R}^n, df(a)(H) = J_f(a).H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Différentielle d'une application composée : Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans de $\mathbb{R}^p$. Soit g une application de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$contenant $f(U)$ et à valeurs dans de $\mathbb{R}^q$.
Alors la fonction composée $g \circ f$ définie sur U et à valeurs dans de $\mathbb{R}^q$, est de classe C^1sur U et sa matrice jacobienne est donnée, pour tout a∈U par :

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) \times J_f(a)$$

<u>Exemple :</u> Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $g(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2)$.
Calculer le jacobien de l'application h de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $h(x, y) = g(x + y, xy)$.

La fonction h est la composée de g par l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par :

$f(x, y) = (x + y, xy)$ et dont le jacobien est la matrice : $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ et de la fonction g dont le jacobien est : $J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$

La fonction est de classe C^1 et son jacobien est donné par :

$$J_h(x, y) = J_g(x + y, xy) \times J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Expression dans laquelle il faut remplacer u par x+y et v par xy :
$J_h(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + y) + 2xy^2 & 2(x + y) + 2yx^2 \\ 2(x + y) - 2xy^2 & 2(x + y) - 2yx^2 \end{pmatrix}$ ce que l'on pouvait directement en calculant explicitement $h(x, y) = ((x + y)^2 + x^2y^2, (x + y)^2 - x^2y^2)$

<u>**Opérateurs différentiels**</u> **:**

Nabla : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\vec{\nabla}\mathrm{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \overrightarrow{grad} f$ où f est un champs scalaire.(i.e : f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$)

Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ où f est un champs scalaire.

Divergence : $Div\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \vec{\nabla}\vec{f}$ où $f = (f_1, f_2, f_3)$ un champs vectoriel (i.e : f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$)).

Rotationnel : $rot\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$