ÉCOLE SUPÉRIEURE EN SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATIQUE ET DU NUMÉRIQUE

2022/2023

2CP

CORRIGÉ DE QUELQUES QUESTIONS DE LA SÉRIE DE TD D'ANALYSE 4

Fonctions définies par des intégrales

Exercice 1. Posons :

$$\mathscr{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{1-x}}.$$

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $\mathscr{F}$.

(2) Étudier la continuité de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{D}$.

(3) Calculer $\mathscr{F}(x+1) + \mathscr{F}(x)$, pour tout $x \in \mathscr{D}$.

(4) Déduire un équivalent de $\mathscr{F}$ en 0^+.

(5) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{F}(x)$.

Corrigé de l'exercice 1. Posons $f(t,x) = \frac{1}{(1+t)t^{1-x}}$.

(1) Nous distinguons les deux cas suivants (selon de signe de $1-x$) :

(a) **1^{er} cas (si $x \geq 1$).** Dans ces cas, la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ est bien définie. Par conséquent, la fonction $\mathscr{F}$ est définie en x.

(b) **2^{nd} cas (si $x < 1$).** Dans ce cas, la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est définie sur $]0,1]$ mais pas en 0 ; l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ est donc impropre en 0. Puisque la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est positive sur $]0,1]$ et $f(t,x) \sim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{1-x}}$, alors, d'après le théorème d'équivalence, les deux intégrales $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, \mathrm{d}t$ ont la même nature. Puisque l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x < 0$ (i.e., $x > 0$), alors l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ converge seulement quand $x > 0$. D'où $\mathscr{F}(x)$ est définie seulement quand $x > 0$.

On en déduit des deux points précédents que $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.

(2) Nous partageons l'étude de continuité de $\mathscr{F}$ en deux parties :

(a) **Continuité de $\mathscr{F}$ sur $[1, +\infty[$.** La fonction f est clairement continue sur $[0,1] \times [1, +\infty[$. Il s'ensuit (en vertu du théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales ordinaires) que la fonction $\mathscr{F}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

(b) **Continuité de $\mathscr{F}$ sur $]0,1[$.** Étudions d'abord la convergence normale de l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ sur $]0,1[$. On a pour tout $t \in]0,1]$:

$$\sup_{x \in]0,1[} |f(t,x)| = \frac{1}{t(1+t)} \sup_{x \in]0,1[} t^x = \frac{1}{t(1+t)} \quad (\text{car } \lim_{x \to 0} t^x = 1 \text{ et } t^x \leq 1).$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t(1+t)}\, \mathrm{d}t$ est divergente (on peut le vérifier par un calcul direct ou en utilisant le théorème d'équivalence) ; donc l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ ne converge pas normalement sur $]0,1[$; donc on ne peut rien conclure sur la convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ dans l'intervalle $]0,1[$. Nous allons restreindre notre étude sur les intervalles $[c,d] \subset]0,1[$ (ça peut se faire aussi sur des intervalles du type $[c,1[\subset]0,1[$). Soit donc $[c,d] \subset]0,1[$. On a : f est clairement continue sur $]0,1] \times [c,d]$, l'intégrale $\int_0^1 f(t,x)\, \mathrm{d}t$ converge normalement (donc uniformément) sur $[c,d]$ (car pour tout $t \in]0,1]$: $\sup_{x\in[c,d]} |f(t,x)| = \frac{1}{(1+t)t^{1-c}} = f(t,c)$ et l'intégrale $\int_0^1 f(t,c)\, \mathrm{d}t$ converge d'après la première question). D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales impropres la fonction $\mathscr{F}$ est continue sur $]0,1[$.

D'où $\mathscr{F}$ est continue sur $\mathscr{D} =]0,1[$.

(3) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(x+1) + \mathscr{F}(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{-x}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{1-x}} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t)t^{-x}} + \frac{1}{(1+t)t^{1-x}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{t}{(1+t)t^{1-x}} + \frac{1}{(1+t)t^{1-x}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1+t}{(1+t)t^{1-x}}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

(4) D'après la question précédente, on a :

$$x\mathscr{F}(x+1) + x\mathscr{F}(x) = 1, \quad (\forall x > 0).$$

En passant à la limite quand x tend vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathscr{F}(x) = 1.$$

En effet, on a puisque $\mathscr{F}$ est continue en 1 : $\lim_{x\to 0} \mathscr{F}(x+1) = \mathscr{F}(1) \in \mathbb{R}$; donc $\lim_{x\to 0^+} x\mathscr{F}(x+1) = 0$. Cela montre que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathscr{F}(x)}{1/x} = 1$ et donc $F(x) \sim_{0^+} \frac{1}{x}$.

(5) Puisque la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est positive sur $]0,1]$ pour tout $x > 0$, alors $\mathscr{F}(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. On a par conséquent :

$$0 \leq \mathscr{F}(x) \leq \mathscr{F}(x+1) + \mathscr{F}(x) = \frac{1}{x} \quad (\forall x > 0).$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors : $\lim_{x\to+\infty} \mathscr{F}(x) = 0$.

Exercice 2. Considérons les deux fonctions F et G définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

(1) Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F' et G'.

(2) Montrer que la fonction $F+G$ est constante.

(3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé de l'exercice 2.

(1) La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \longmapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cela entraîne que la fonction $G : x \longmapsto \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$G'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons $f(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. On a :

(a) La fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est clairement continue sur $[0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales ordinaires, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus on a pour tout réel x :

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) Il suffit de prouver que $(F+G)' = 0$. En effet, on a clairement $(F+G)'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\text{où l'on a posé } u = tx) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui confirme le résultat requis.

(3) Cette question sera traitée dans la séance prochaine en TD.