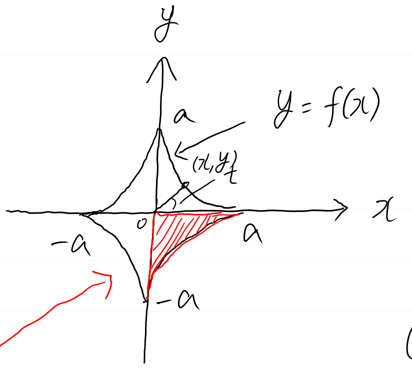
4/17 アステロイド

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

により媒介変数表示される曲線 $y = f(x)$ をアステロイドという。

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



$(a > 0,$ 定数$)$

例題1.3

アステロイド $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$

で囲まれた図形の面積 S を求めよ

解　$S = 4\boxed{\int_0^a y\,dx}$

$x = a\cos^3 t$
$y = a\sin^3 t$ とおく
$(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

$$S = 4\int_{\boxed{\frac{\pi}{2}}}^{0} \underbrace{a\sin^3 t}_{y} \underbrace{(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt}_{dx}$$

$dx = a(\cos^3 t)'\,dt$
$= a\cdot 3\cos^2 t\cdot(\cos t)'\,dt$
$= -3a\cos^2 t\sin t\,dt$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1 - \sin^2 t)\,dt$$

x	0	a
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$= 12a^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,dt\right\}$$

$0 = a\cos^3 t$　　$a = a\cos^3 t$
$\cos t = 0$　　$\cos t = 1$
$t = \frac{\pi}{2}$　　$t = 0$

$$= 12a^2\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \cancel{12}^{3}a^2\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{4}\pi a^2\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{2}} = \underline{\frac{3}{8}\pi a^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n:偶) \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3} & (n:奇) \end{cases}$$

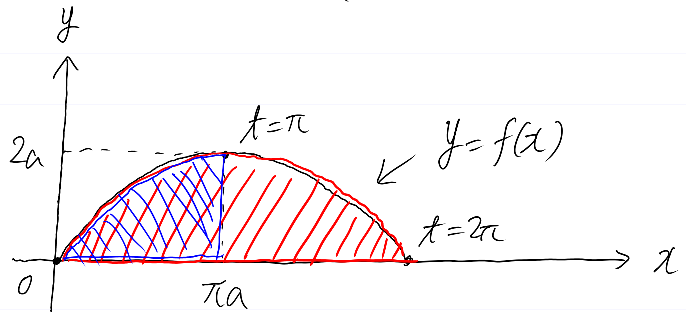
サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

により媒介変数表示される曲線をサイクロイドという。

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
x	0	$a(\frac{\pi}{2}-1)$	πa	$2\pi a$
y	0	a	$2a$	0

$(0\leq t\leq 2\pi)$



例

サイクロイド $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0\leq t\leq 2\pi)$

とx軸で囲まれた図形の面積Sを求めよ。

解

$$S = 2\boxed{\int_0^{\pi a} y\,dx}$$

$x = a(t-\sin t)$ とおく
$y = a(1-\cos t)$

$$dx = a(t-\sin t)'dt = a(1-\cos t)dt$$

x	0	$\to$	πa
t	0	$\to$	π

$$S = 2\int_0^{\pi} \underbrace{a(1-\cos t)}_{y}\cdot\underbrace{a(1-\cos t)dt}_{dx}$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt \quad \cdots (*)$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos t\right)dt$$

$(*)$の計算2

$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ より

$$(*) = 2a^2\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2dt$$

$$= 2^3a^2\int_0^{\pi}\sin^4\boxed{\frac{t}{2}}dt \quad \cdots (*)'$$

$u = \frac{t}{2}$ とおくと

$$du = \frac{1}{2}dt \iff 2du = dt$$

t	0	$\to$	π
u	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

以上より

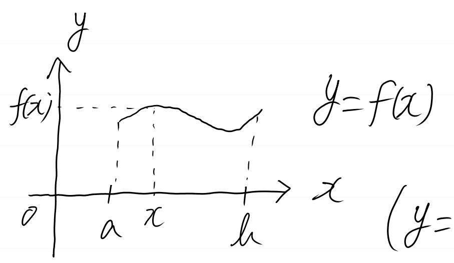
$$(*)' = 2^4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,du$$

$$= 2^4\cdot a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \underline{3\pi a^2}\ //$$

媒介変数表示された曲線の長さ

$y=f(x)$ $(a \leq x \leq b)$



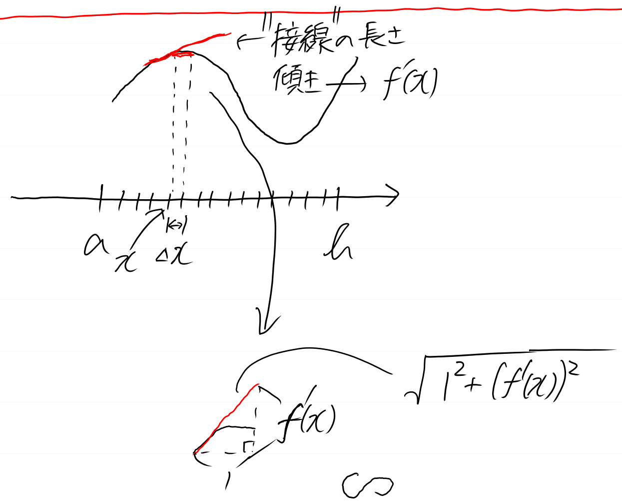
($y=f(x)$ は x で微分可能とする。)

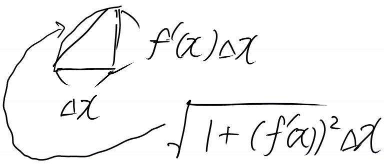
定理 関数表示された曲線の長さ

上の設定の下で、$y=f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ が表す曲線の長さを L とする。

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$



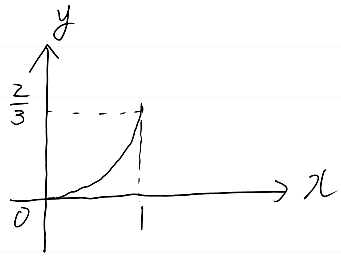


$$\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \int \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

例 1.8'

次の曲線 L の長さを求めよ

(1) $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leq x \leq 1)$



$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+x}$$

$$\therefore L = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$