No. 1
Date 19.4.12

解析I

媒介変数表示された曲線

$y=F(x)$: xの関数 $\Leftrightarrow$ 曲線 $\Leftrightarrow \begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ …①

により表されるとき、①を(媒介変数tによる)$y=F(x)$の媒介変数表示という。

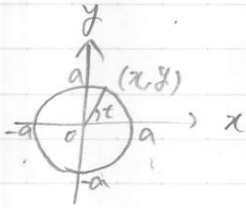
①でtを消す $\Leftrightarrow$ $y=F(x)$

$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

例) (1) 円 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$

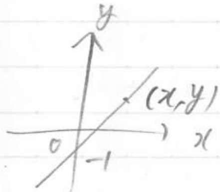
$(0\leq t<2\pi)$



(2) $y=2x-1$　$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, 方向ベクトル$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

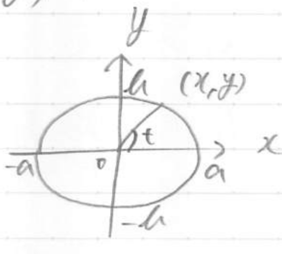
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \end{cases}$



(3) だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

$(0\leq t<2\pi)$



例(1)で

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$-a$	0	a
y	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	0	$-a$	0

媒介変数表示と微分

定義（接線ベクトル）

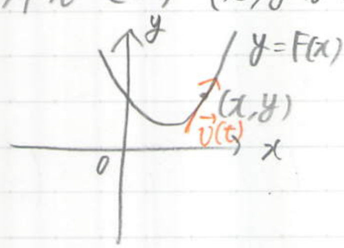
$y=F(x)$ が $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \end{cases}$ …①

により媒介変数表示されるとする

次の $\vec{v}(t)$ を①の接線ベクトルという（x, y は t で微分可能とする）

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$



定理（媒介変数表示された曲線の接線）

上の定義の設定で

$t=t_0$ に対応する点 $P_0\,(f(t_0), g(t_0))$ における接線 l 上の点 $P(x, y)$ について

・l の媒介変数表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ g(t_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} f'(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = f(t_0) + sf'(t_0) \\ y = f(t_0) + sg'(t_0) \end{cases}$$

・l の方程式

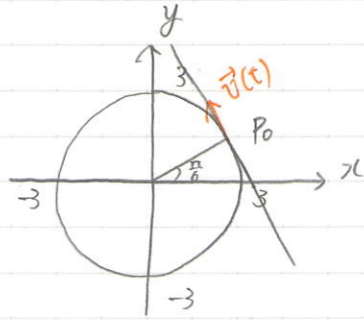
$$\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)}$$

例題1.2'

円 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(0 \leq t < 2\pi)$ 上の $t = \frac{\pi}{6}$ に対応する点 P_0 における

接線ベクトル、接線の方程式を求めよ

解) 円の接線ベクトルは



$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} (3\cos t)' \\ (3\sin t)' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow P_0\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad //$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + 3s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}s \\ y = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\frac{x-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$y = -\sqrt{3}x + 6 \quad //$$

No. 4

Date 19 4 12

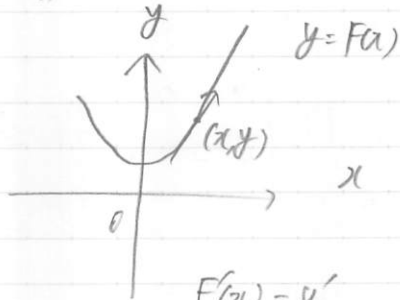
定理

$$y = F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

y は x で微分可能

x, y は t で 〃

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$



$F'(x) = y'$

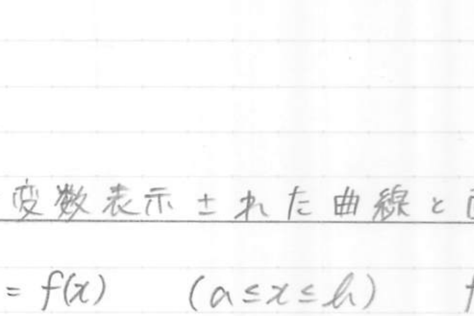
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}\right)$$

媒介変数表示された曲線と面積

$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad f(x) \geq 0$ とする



$x=a$, $x=b$, x軸で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b y\,dx$$

$y = f(x) \quad (a \le x \le b) \iff \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

例) $x^2 + y^2 = 1 \iff \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t < 2\pi)$

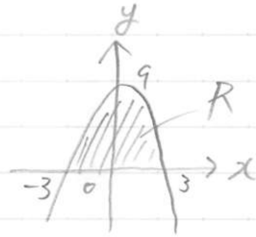
t	α		β
x	a		b

例1.7′ $y = 9 - x^2 \cdots$ ① と x軸で囲まれた図形Rの面積S

$$S = 2\int_0^3 (9 - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= 18$$



例1.7 曲線 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9 - 9t^2 \end{cases}$ $(-1 \le t \le 1)$ と x軸で囲まれた

図形Rの面積S

① $S = 2\int_0^3 f(x)\,dx$ $\quad f(x) \iff \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$

② 置換積分をする(与えられた媒介変数表示を用いる)

$x = 3t \iff y = 9 - 9t^2$

$\frac{dx}{dt} = 3 \iff dx = 3dt$

x	0	3
t	0	1

従って $S = 2\int_0^3 y\,dx$

$$= 2\int_0^1 (9 - 9t^2)\cdot 3dt$$

$$= 6\left[9 - 3t^3\right]_0^1 = 36$$