

6.2 Deformierbare feste Körper

Unter dem Einfluss äußerer Kräfte kann ein fester Körper seine Gestalt ändern. Wenn nach Beendigung der Krafteinwirkung die Deformation wieder vollständig verschwindet, der Körper also seine ursprüngliche Gestalt wieder einnimmt, nennen wir den Körper **elastisch**. Bei einem **plastischen** Körper bleibt eine Formänderung zurück.

6.2.1 Hookesches Gesetz

Wirkt auf einen elastischen Körper der Länge L mit dem Querschnitt A , der bei $x = 0$ festgehalten wird, eine Zugkraft F in x -Richtung (Abb. 6.6), so verlängert sich die Länge L um ΔL . Die Experimente zeigen, dass bei genügend kleinem ΔL für den Betrag $F = |F|$ gilt:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}. \quad (6.2)$$

Die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul** mit der Dimension N/m^2 . In der Technik wird die Dimension $\text{kN/mm}^2 = 10^9 \text{ N/m}^2$ verwendet. Tabelle 6.1 gibt Zahlenwerte für einige Materialien.

Bei Materialien mit großem Elastizitätsmodul E braucht man eine große Kraft, um eine vorgegebene relative Längenänderung zu erreichen. Körper mit großem E zeigen also bei vorgegebener Kraft eine kleine Längenänderung!

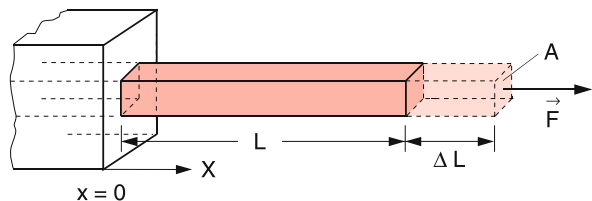


Abb. 6.6. Ein bei $x = 0$ eingespannter Stab verlängert sich bei $x = L$ unter der Einwirkung einer Kraft F um $\Delta L = L \cdot F/(E \cdot A)$

Tabelle 6.1. Elastizitätskonstanten einiger Festkörper: Elastizitätsmodul E , Schubmodul G , Kompressionsmodul K und Poissonzahl μ . Literatur [6.1]

Material	E 10^9 N/m^2	G 10^9 N/m^2	K 10^9 N/m^2	μ
Aluminium	71	26	74	0,34
Gusseisen	64–181	25–71	48–137	0,28
Stahl, ferritisch	108–212	42–83	82–161	0,28
V2A-Stahl	200	80	167	0,3
Kupfer	125	46	139	0,35
Wolfram	407	158	323	0,29
Blei	19	7	53	0,44
Quarzglas	75	32	38	0,17
Eis (-4°C)	10	3,6	9	0,33

Führt man die Zugspannung (Zugkraft pro Fläche)

$$\sigma \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{F}{A}$$

und die relative Dehnung $\varepsilon = \Delta L/L$ ein, so erhält man aus (6.2) das Hookesche Gesetz in der übersichtlichen Form

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (6.2a)$$

Für genügend kleine Dehnungen ε sind relative Dehnung und Zugspannung einander proportional. In diesem Proportionalitätsbereich ändern sich die atomaren Abstände nur in einem engen Bereich um r_0 (Abb. 6.1), in dem die Kraft $F(r)$ näherungsweise einen linearen Verlauf hat, die potentielle Energie $E_p(r)$ also durch eine Parabel angenähert werden kann.

Man beachte:

Dieser lineare Zusammenhang ist nur eine Näherung für relativ kleine Dehnungen! Bei größeren Auslenkungen aus der Ruhelage treten nichtlineare Rückstellkräfte auf.

Entwickelt man $E_p(r)$ in eine Taylor-Reihe um die Gleichgewichtslage r_0 :

$$E_{\text{pot}}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r-r_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n E_{\text{pot}}}{\partial r^n} \right)_{r=r_0} \quad (6.3a)$$

und legt den Nullpunkt von E_p in das Minimum (d. h. $E_p(r_0) = 0$), so verschwinden wegen $|\partial E_p / \partial r|_{r=0} = 0$ die beiden ersten Glieder der Reihe und man erhält:

$$E_p(r) = \frac{1}{2}(r-r_0)^2 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} + \frac{1}{6}(r-r_0)^3 \left(\frac{\partial^3 E_p}{\partial r^3} \right)_{r=r_0} + \dots \quad (6.3b)$$

Für kleine Auslenkungen ($r-r_0$) kann man alle höheren Terme mit Potenzen $n \geq 3$ vernachlässigen und man erhält aus (6.3b) für die Kraft $F(r) = -\text{grad } E_p(r)$ den linearen Zusammenhang des Hookeschen Gesetzes. Für größere Auslenkungen spielen jedoch die höheren Glieder durchaus eine nicht zu vernachlässigende Rolle.

Überschreitet man den Proportionalitätsbereich P , so wächst die Dehnung stärker als die Zugspannung (Abb. 6.7). Zunächst kehrt der Körper jedoch nach Beendigung der äußeren Einwirkung fast wieder in seinen Ausgangspunkt zurück. Oberhalb der Fließgrenze F setzen innere Gefügeänderungen und Verschiebungen von Atomebenen (Netzebenen) gegeneinander ein. Der Körper wird plastisch, er beginnt zu „fließen“ und auch nach Beendigung der Zugspannung bleiben dauernde Formänderungen zurück.

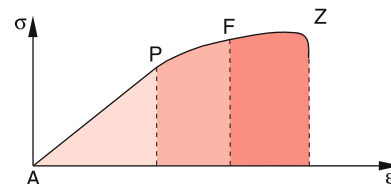


Abb. 6.7. Relative Längenänderung ε eines Körpers unter dem Einfluss einer Zugspannung σ . Im Punkt P geht die lineare Ausdehnung über in einen nichtlinearen Bereich, F markiert die Fließgrenze, Z die Zerreißgrenze

Während bei der elastischen Dehnung die Abstände r zwischen allen Nachbaratomen in Zugrichtung um $\Delta r \approx (\Delta L/L)r_0$ vergrößert werden, kann man den Fließvorgang z. B. durch eine Verschiebung der Netzebenen gegeneinander erklären, wie dies in Abb. 6.8 dargestellt ist.

Dies kann man sich im atomaren Modell an Hand von Abb. 6.9 klar machen, in der die potentielle Energie eines Atoms A einer Ebene im Kristall dargestellt ist als Funktion der Verschiebung Δs dieser Ebene

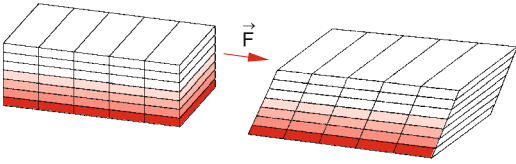


Abb. 6.8. Modell des Fließvorganges als Verschiebung von Gitterebenen

gegenüber der Nachbarebene. Um von einem Potentialminimum in das Nachbarminimum zu gelangen, muss die angreifende äußere Kraft so groß sein, dass alle Atome einer solchen Netzebene über das dazwischenliegende Maximum kommen können. Da man den Abstand zwischen den Atomen bei einer solchen Verschiebung von Netzebenen nicht sehr stark ändert, sind die Minima in Abb. 6.9 wesentlich flacher als das Potentialminimum der Abb. 6.1 bei der Bindung zweier Atome. Die Höhe der Maxima und die Modulationsperiode hängt von der Richtung im Kristall ab.

In einem realen Kristall treten Gitterfehler und Versetzungen auf, und beim Fließvorgang wandern diese Versetzungen, was energetisch günstiger ist, als wenn sich ganze Ebenen gegeneinander verschieben.

Wenn Versetzungen sich verschieben, brauchen nicht alle Atome einer Netzebene über solche Potentialmaxima gebracht werden, sodass man insgesamt eine geringere Kraft braucht.

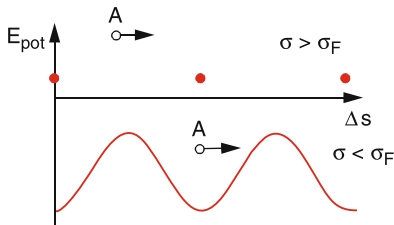


Abb. 6.9. Potentialverlauf für ein Atom A einer Gitterebene als Funktion der Verschiebung Δs dieser Ebene gegen die Nachbarebene für Zugspannungen unterhalb und oberhalb der Fließgrenze

6.2.2 Querkontraktion

Bei der Dehnung eines Körpers unter dem Einfluss einer Zugspannung ändern sich auch die Querdimensionen. Für einen Stab der Länge L mit dem quadratischen

Querschnitt d^2 gilt dann für die Volumenänderung ΔV bei der Längsdehnung ΔL und Querkontraktion Δd mit $\Delta d < 0$ (Abb. 6.10)

$$\begin{aligned}\Delta V &= (d + \Delta d)^2 \cdot (L + \Delta L) - d^2 L \\ &= d^2 \Delta L + 2L \cdot d \Delta d \\ &\quad + (L \Delta d^2 + 2d \Delta d \Delta L + \Delta L \Delta d^2) .\end{aligned}$$

Für kleine Verformungen ($\Delta L \ll L$, $\Delta d \ll d$) können die durch die Klammer zusammengefassten Glieder, die für ΔL , $\Delta d \rightarrow 0$ quadratisch bzw. kubisch gegen Null gehen, vernachlässigt werden, und wir erhalten:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} . \quad (6.4)$$

Man definiert als **Querkontraktionszahl** oder **Poissonzahl** μ das Verhältnis

$$\mu \stackrel{\text{Def}}{=} - \frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta L}{L} \quad (6.5)$$

von Querkontraktion zu Dehnung.

Damit wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} \left(1 + \frac{2\Delta d/d}{\Delta L/L} \right) = \varepsilon (1 - 2\mu) . \quad (6.6a)$$

Da durch eine Zugspannung das Volumen größer wird (also $\Delta V > 0$), folgt für die Querkontraktionszahl $\mu < 0,5$. Nach dem Hookeschen Gesetz (6.2a) ist $\Delta L/L = \sigma/E$, und aus (6.6a) wird:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) . \quad (6.6b)$$

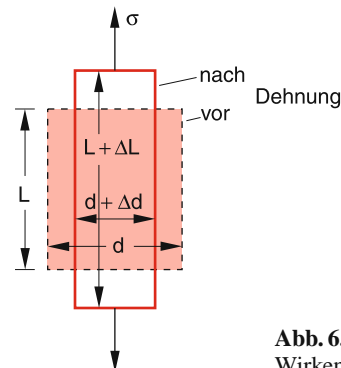


Abb. 6.10. Querkontraktion beim Wirken einer Zugspannung σ

Wirkt statt der Zugspannung σ der Druck $p = -\sigma$ auf die beiden gegenüberliegenden Seiten mit der Fläche d^2 , so werden ΔL und ΔV negativ, Δd positiv, weil die Länge L zusammengedrückt wird und sich dabei die Querdimensionen vergrößern. Man erhält dann die relative Volumenänderung aus (6.6b), wenn man σ durch $-p$ ersetzt. In beiden Fällen ist $\mu > 0$, da bei der Zugspannung $\Delta L > 0$, $\Delta d < 0$, bei einer Druckkraft auf die beiden Stirnflächen $\Delta L < 0$, $\Delta d > 0$ wird.

Steht der Körper von allen Seiten unter dem Druck $p = -\sigma$, so kann man sich die dann erfolgende Volumenverringernung ΔV folgendermaßen klar machen: Der auf die Stirnflächen d^2 wirkende Druck verkürzt die Länge L um $\Delta L = -L \cdot p/E$, der auf ein Seitenflächenpaar $L \cdot d$ wirkende Druck verkürzt die Kantenlänge d um $\Delta d = -d \cdot p/E$. Infolge der Querbeflussung durch die Querkontraktion $\mu = -(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ verlängert sich die Länge jedoch wieder um $\Delta L = +\mu L p/E$. Insgesamt wird die Länge durch den Druck auf zwei Seitenflächenpaare und ein Stirnflächenpaar also geändert um

$$\Delta L = -(L \cdot p/E) (1 - 2\mu) . \quad (6.7)$$

Entsprechend wird die Querdimension d geändert um

$$\Delta d = -(d \cdot p/E) (1 - 2\mu) .$$

Da $\Delta L \ll L$ und $\Delta d \ll d$ gilt, kann man höhere Terme in der Querbeflussung vernachlässigen, sodass das Volumen V sich ändert um

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} = -\frac{3p}{E} (1 - 2\mu) . \quad (6.8)$$

Führt man den **Kompressionsmodul** K ein durch die Definition

$$p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad (6.9)$$

und die **Kompressibilität** $\kappa = 1/K$, so erhält man aus (6.8) die Relation

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \quad (6.10)$$

zwischen Kompressionsmodul K , Kompressibilität κ , Elastizitätsmodul E und Poissonzahl μ .

6.2.3 Scherung und Torsionsmodul

Als Scherungskräfte werden solche Kräfte bezeichnet, die tangential an einer Fläche A angreifen (Abb. 6.11). Als Schubspannung, bzw. Scherspannung

$$\tau = \frac{F}{A}$$

wird die pro Flächeneinheit wirkende tangentielle Kraft F bezeichnet.

Unter dem Einfluss der Scherspannung τ werden die Kanten L des Quaders in Abb. 6.11 um den Winkel α verkippt. Experimentell findet man, dass bei genügend kleinem Scherwinkel α der Betrag τ der Scherspannung τ und der Scherwinkel α einander proportional sind.

$$\tau = G \cdot \alpha . \quad (6.11)$$

Die Konstante G heißt **Schubmodul** (oft auch **Schermodul** oder **Torsionsmodul** genannt).

Da die Rückstellkräfte bei der Scherung ebenso wie bei der Dehnung eines Körpers auf die zwischenatomaren Kräfte zurückführbar sind, müssen die elastischen Konstanten E , μ , K und G miteinander verknüpft sein. Wie in [6.2] gezeigt wird, gilt für isotrope Körper die Relation:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu . \quad (6.12a)$$

Umschreiben von (6.10) liefert

$$\frac{E}{3K} = 1 - 2\mu . \quad (6.12b)$$

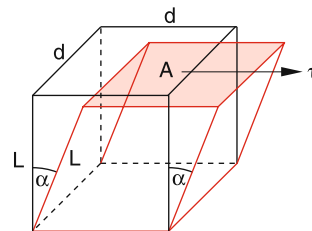


Abb. 6.11. Scherung eines Quaders unter dem Einfluss einer Schubspannung τ

Division von (6.12a) durch (6.12b) ergibt

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu} \quad (6.12c)$$

BEISPIEL

Torsion eines Drahtes. An einem zylindrischen Draht mit Radius R und Länge L möge am oberen Ende eine Kraft \vec{F} tangential angreifen, die zu einer Torsion des Drahtes führt. Denken wir uns den Draht aufgeteilt in konzentrische Zylinderhülsen zwischen den Radien r und $r + dr$ (Abb. 6.12) und in radiale Segmente mit der Winkelbreite $d\varphi$. Dreht sich das obere Ende des Drahtes unter dem Einfluss der Torsionskraft \vec{F} um den Winkel φ , so erfährt die in Abb. 6.12 herausgezeichnete prismatische Säule eine Scherung um den Winkel α , der für $r \cdot \varphi \ll L$ durch $\alpha = r \cdot \varphi / L$ angenähert werden kann.

Die zur Scherung dieser Säule um den Winkel α notwendige Scherspannung ist dann nach (6.11)

$$\tau = G \frac{r \cdot \varphi}{L}.$$

Da alle Flächenelemente auf dem oberen Kreisring mit der Fläche $2\pi r dr$ um den gleichen Winkel φ verdreht werden gegenüber ihrer Lage für $\tau = 0$, ist der Betrag dF der Kraft, die zur Scherung der Zylinderhülse führt:

$$dF = \tau \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi r^2 dr \cdot \varphi}{L} G$$

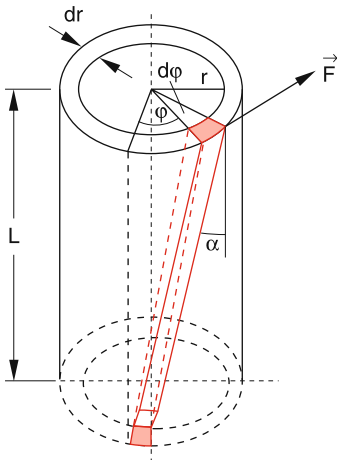


Abb. 6.12. Torsion eines Kreiszyinders

und der Betrag des entsprechenden Drehmomentes

$$D = r \cdot dF = \frac{2\pi r^3 dr \cdot G \cdot \varphi}{L}.$$

Zur Verdrillung des gesamten massiven Zylinders vom Radius R um den Winkel φ wird daher das Drehmoment

$$D = \frac{2\pi G \varphi}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \cdot \varphi \quad (6.13)$$

benötigt. Im Gleichgewicht muss das durch die elastischen Kräfte verursachte rücktreibende Drehmoment des verdrehten Drahtes entgegengesetzt gleich sein.

Man erhält daher das rücktreibende Drehmoment

$$D^* = -D_r \cdot \varphi \quad \text{mit} \quad D_r = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}. \quad (6.14)$$

Die vom Schermodul G abhängige Konstante D_r heißt das **Richtmoment** (Drehmoment pro Winkeleinheit) des Drahtes, das proportional zur 4. Potenz des Drahtradius R anwächst!

Hängt man an das untere Ende des Drahtes einen Körper mit dem Trägheitsmoment I bezüglich der Drahtachse, so führt dieses **Drehpendel** bei Verdrillung des Drahtes Drehschwingungen aus (vgl. Abschn. 5.6.2) mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D_r}} = \frac{2\pi}{R^2} \sqrt{\frac{2L \cdot I}{\pi \cdot G}}. \quad (6.15)$$

Solche Drehpendel sind bei Verwendung sehr dünner Drähte äußerst empfindliche Geräte zur Messung kleiner Drehmomente. Beispiele sind die Eötvössche Drehwaage zur Messung der Gravitationskonstante (siehe Abschn. 2.9.6), die Coulombsche Drehwaage zur Messung der elektrischen Kraft zwischen Ladungen (Bd. 2, Kap. 1) oder alle Arten von Galvanometern (Bd. 2, Kap. 2).

6.2.4 Biegung eines Balkens

Für technische Konstruktionen (Gebäude, Brücken) ist die Frage der Durchbiegung von Balken und Trägern unter dem Einfluss der Gewichtskraft, die auf dem Balken lastet, von größter Bedeutung. Wir wollen diese Frage hier nur kurz an einem einfachen Beispiel

illustrieren: Die Berechnung solcher Biegungen von Körpern mit beliebigem Querschnitt ist kompliziert und kann oft nur numerisch durchgeführt werden.

Wir nehmen an, ein Balken mit rechteckigem Querschnitt $q = d \cdot b$ sei an einem Ende fest eingespannt und werde in der Entfernung $x = L$ von der Einspannstelle durch die Kraft F_0 belastet (Abb. 6.13). Der Balken biegt sich dadurch etwas nach unten. Wir können die Biegung beschreiben, indem wir für ein kleines Stück ℓ des Balkens die gekrümmten Kanten durch Kreisbögen annähern. Die gestrichelte Mittellinie in Abb. 6.14 möge den Krümmungsradius r haben. Die Länge der Oberkante ist dann $(r + d/2)\varphi$, die der Unterkante $(r - d/2)\varphi$.

Während sich die Länge der Mittelebene (neutrale Faser) nicht ändert, wird eine Schicht mit der Länge $\ell(z)$ an der oberen Hälfte des Balkens um den Betrag

$$\Delta\ell(z) = z \cdot \varphi = z \cdot \ell / r$$

länger. Eine entsprechende Schicht in der unteren Balkenhälfte wird um diesen Betrag kürzer.

Um eine solche Längenänderung zu erreichen, muss für jede Schicht in der oberen Hälfte nach (6.2) eine Zugspannung

$$\sigma = \frac{E \cdot \Delta\ell}{\ell} = z \cdot \frac{E}{r}$$

aufgewendet werden, während für die untere Hälfte eine entsprechende Druckspannung

$$p = -\sigma = -|z| \cdot E/r$$

auftritt. Auf eine rechteckige Schicht des Balkenstückes, welche die Breite b , die Höhe dz und den

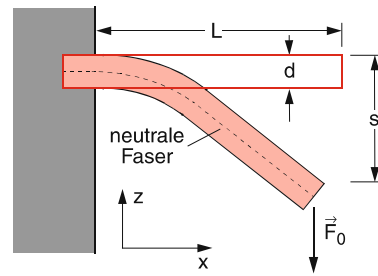


Abb. 6.13. Durchbiegung eines einseitig eingespannten Balkens unter dem Einfluss einer Kraft F_0

Abstand z von der neutralen Faser hat, wirkt eine Kraft

$$dF = \sigma b dz = \frac{bE}{r} z dz. \quad (6.16a)$$

Die Kraft bewirkt ein Drehmoment

$$dD_y = \frac{bE}{r} z^2 dz \quad (6.16b)$$

in y -Richtung.

Integriert man dieses infinitesimale Drehmoment dD_y über die ganze Balkenhöhe, so erhält man

$$D_y = \frac{bE}{r} \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 dz = \frac{Ed^3b}{12r}. \quad (6.17)$$

Dieses Drehmoment wird durch die Biegung bewirkt, welche durch die Kraft F_0 am Ende des Balkens verursacht wird. Diese Kraft erzeugt aber an unserer betrachteten Stelle x das Drehmoment

$$D_y = F_0(L - x) \quad \text{mit} \quad F_0 = |F_0|. \quad (6.18)$$

Der Balken biegt sich so, dass das rücktreibende Drehmoment $-D_y$ der elastischen Kräfte im Balkenmaterial, das durch (6.17) beschrieben wird, dieses

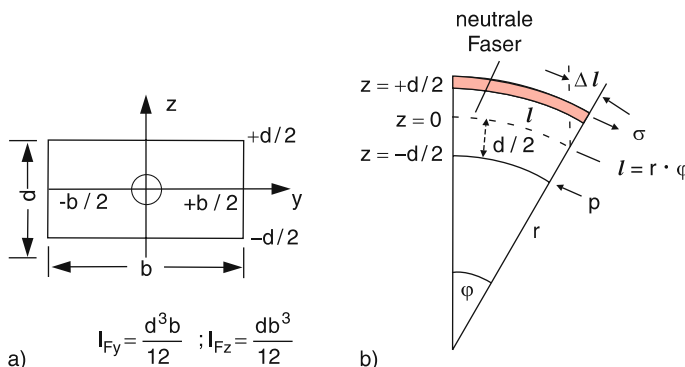


Abb. 6.14a,b. Zur Definition der neutralen Faser: (a) Querschnitt und Flächenträgheitsmoment des Balkens; die neutrale Faser ist die Ebene $z = 0$. (b) zur Herleitung von (6.17)

äußere Drehmoment gerade kompensiert. Gleichsetzen von (6.17) und (6.18) liefert die Krümmung $1/r$ des Balkens als Funktion des Abstandes x vom Einspannpunkt $x = 0$

$$\frac{1}{r} = -\frac{12F_0}{Ed^3b} \cdot (L - x). \quad (6.19)$$

Wir wollen die neutrale Faser des *unbelasteten* Balkens durch $z(x) \equiv 0$ beschreiben. Welche Form hat sie dann bei Belastung? Wie in der Differentialgeometrie gezeigt wird [6.3], ist die Krümmung einer Kurve $z(x)$ gegeben durch

$$\frac{1}{r} = \frac{z''(x)}{[1 + z'(x)^2]^{3/2}}.$$

Für kleine Durchbiegungen ist $z'(x) \ll 1$, und daher wird $\frac{1}{r} \approx z''(x)$. Integration der Gleichung

$$z''(x) = a(L - x) \quad \text{mit } a = -\frac{12F_0}{Ed^3b}$$

gibt mit den Randbedingungen $z(0) = 0$ und $z'(0) = 0$ die Kurve für die neutrale Faser des belasteten Balkens

$$z(x) = \frac{a}{2}Lx^2 - \frac{a}{6}x^3 \quad \text{mit } a < 0.$$

Das Balkenende ($x = L$) biegt sich um

$$s_{\max} = z(L) = -4\frac{L^3}{E \cdot d^3b} F_0 \quad (6.20)$$

gegenüber dem unbelasteten Balken. Man nennt die Durchbiegung des Balkenendes auch den **Biegepfel** $s = z(L)$.

Die Durchbiegung s wächst mit L^3 und ist umgekehrt proportional zur dritten Potenz der Balkendicke d .

Für $x = 0$, d.h. an der Einspannstelle wird die Krümmung $1/r$ maximal (6.19). Dort ist die Zugspannung an der Oberkante des Balkens ($z = +d/2$)

$$\sigma_{\max} = \frac{E \cdot d}{2r} = \frac{12F_0 \cdot L}{2d^2b}. \quad (6.21)$$

Sobald σ_{\max} die Reißgrenze des Balkenmaterials überschreitet, beginnt der Balken sich an der Oberkante einzukrümme und bricht dann ab!

Anmerkung

Man kann die Durchbiegung von Trägern mit Längsachse in x -Richtung mit beliebigem Querschnitt $A = \int dy dz$ analog behandeln, wenn man das **Flächenträgheitsmoment**

$$I_F \stackrel{\text{Def}}{=} \iint z^2 dy dz \quad (6.22a)$$

einführt, wobei z die Richtung der wirkenden Kraft ist. Für den Balken mit rechteckigem Querschnitt $d \cdot b$ (Abb. 6.14a) gilt:

$$I_F = \int_{z=-d/2}^{+d/2} \int_{y=-b/2}^{+b/2} z^2 dy dz = \frac{1}{12} d^3 b. \quad (6.22b)$$

Die maximale Biegung $s_{\max} = z(L)$ ist dann, unabhängig von der Form des Querschnittes, gegeben durch:

$$s_{\max} = -\frac{L^3}{3E \cdot I_F} F. \quad (6.23)$$

Für einen runden Balken mit Querschnittsradius R wird

$$I_F = \frac{1}{4} \pi R^4 \quad \text{und damit} \quad s_{\max} = -\frac{4L^3}{3\pi E R^4} F, \quad (6.24)$$

während für einen Doppel-T-Träger (Abb. 6.15) gilt:

$$I_F = \frac{1}{12} (b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3). \quad (6.25)$$

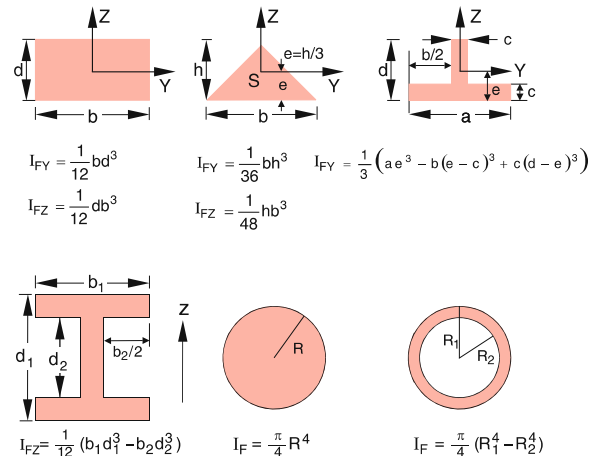


Abb. 6.15. Flächenträgheitsmomente für verschiedene Querschnitte. I_{FY} bei Biegung um y -Achse, I_{FZ} um z -Achse

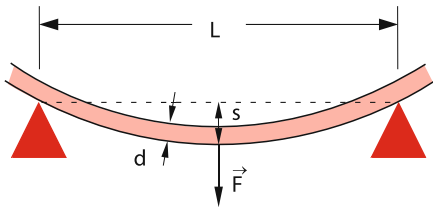


Abb. 6.16. Durchbiegung eines Balkens, der an beiden Enden gelagert ist

Ein Balken der Länge L , der an beiden Seiten auf festen Lagern liegt, erfährt durch eine Kraft F , die in der Mitte des Balkens angreift (Abb. 6.16), die maximale Durchbiegung

$$s_{\max} = -\frac{1}{4E} \frac{L^3}{d^3 b} \cdot F. \quad (6.26)$$

Man beachte, dass hier die Durchbiegung um einen Faktor 16(!) kleiner ist als bei einseitiger Einspannung. Die Kraft F verteilt sich nun je zur Hälfte auf beide Balkenhälften der Länge $L/2$.

6.2.5 Elastische Hysterese, Deformationsarbeit

Wirkt auf einen vorher noch nicht deformierten Körper eine Zugspannung σ , so folgt die Dehnung $\varepsilon = \Delta L/L$ der Kurve OA (Abb. 6.17), wobei A bereits im nichtlinearen Bereich liegen soll. Wird nun die Zugspannung wieder verringert, so geht die Dehnung im Allgemeinen *nicht* auf derselben Kurve zurück, sondern folgt der Kurve AB. Die Gründe dafür sind plastische Verformungen des Körpers, wie z. B. Verschiebungen von Netzebenen, Änderungen von Fehlstellen im Gitter u. a.

Auch wenn die äußere Zugspannung auf Null zurückgeht, kehrt der Körper dann nicht mehr in seine ursprüngliche Gestalt zurück. Man nennt diese Erscheinung **elastische Hysterese**, weil der elastische Zustand des Körpers von seiner Vorbehandlung abhängt. (Im Griechischen heißt *hysteresis* das Zurückbleibende.)

Übt man nun auf den im Punkte B der Kurve kräftefreien Körper einen Druck $p = -\sigma$ auf die beiden Stirnflächen aus, so gelangt man zum Punkt C in (Abb. 6.17, der im atomaren Bild dem Bereich $r < r_0$ im nichtlinearen Teil des Potentials entspricht). Wieder verläuft die Stauchung (= negative Dehnung $-\varepsilon$) bei

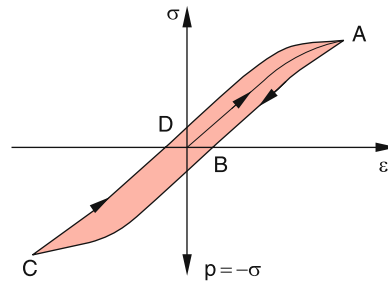


Abb. 6.17. Mechanische Hysteresekurve

Zurücknahme des Druckes nicht auf derselben Kurve, sondern man erreicht für $\sigma = p = 0$ den Punkt D.

Insgesamt durchläuft man bei periodischer Dehnung und Stauchung eine geschlossene Kurve ABCDA, die man *elastische Hysterese-Schleife* nennt. Bei Durchlaufen eines Zyklus muss man Arbeit gegen die anziehenden bzw. abstoßenden atomaren Kräfte aufwenden. Um einen Quader mit Querschnitt q und Länge L um ΔL zu dehnen, wird die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\Delta L} F \, dL = \int_0^{\Delta L} q \cdot \sigma \, dL \\ &= \int_0^{\varepsilon} q \sigma \cdot L \, d\varepsilon = V \cdot \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \end{aligned} \quad (6.27)$$

aufgewendet. Das Integral $\int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon$ gibt also die pro Volumeneinheit aufzuwendende Arbeit bei der relativen Längenänderung ε an.

Solange das Hookesche Gesetz gilt, ist $\sigma = E \cdot \varepsilon$, und man erhält für die elastische Energie eines um ΔL verlängerten Körpers:

$$W_{\text{elast}} = \frac{1}{2} E \cdot V \cdot \varepsilon^2. \quad (6.28)$$

Bei Rückkehr in den spannungsfreien Zustand wird diese Energie wieder frei.

BEISPIEL

Ausdehnung einer elastischen Spiralfeder bei der Schwingung einer Masse, die an dieser Feder hängt. Elastische Energie wird periodisch in kinetische Energie der schwingenden Masse umgewandelt (siehe Kap. 10).

Dies gilt nicht mehr für den nichtlinearen Fall. Hier wird die Arbeit $\int_0^{\varepsilon_A} \sigma \, d\varepsilon$ pro Volumenarbeit aufgewendet, um den Körper auf der Kurve OA auszudehnen (dies entspricht der Fläche unter der Kurve OA), aber man gewinnt bei Rücknahme der Zugspannung nur die Energie $\int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon_A} \sigma \, d\varepsilon$, d. h. die Fläche unter der Kurve AB in Abb. 6.17 zurück.

Insgesamt muss daher bei dem zyklischen Vorgang ABCDA von Dehnung und Stauchung die Netto-Energie $\oint \sigma \, d\varepsilon$ (\oint bedeutet Integration über den geschlossenen Weg ABCDA) pro Volumeneinheit aufgewendet werden, die bei der periodischen Verformung als elastische Energie verlorengeht, weil sie zur plastischen Verformung gebraucht wird und letztlich in Wärmeenergie des Körpers übergeht. Diese pro Volumeneinheit in Wärmeenergie umgewandelte Verformungsenergie ist gleich der Fläche, die von der Hysterese-Schleife in Abb. 6.17 umschlossen wird.

6.2.6 Die Härte eines Festkörpers

Die **Härte** eines festen Körpers ist ein Maß für den Widerstand, den der Körper dem Eindringen eines anderen Körpers entgegensetzt. Je nach dem Messverfahren erhält man etwas unterschiedliche Härtemaße. Bei dem **Ritzverfahren** ist ein Körper A härter als ein anderer Körper B, wenn man mit A den Körper B ritzen kann. Hierauf beruht die Härteskala von *Mohs*, in der die Härte an Hand von 10 empirisch ausgesuchten Mineralien in 10 Härtegrade eingeteilt ist (Tabelle 6.2).

Bei dem Ritzverfahren wird eigentlich nur die Härte der Oberfläche des Körpers geprüft. Diese Oberflächenhärte ist allerdings in der Technik auch von besonderer Bedeutung, da der Verschleiß von Achsen und Lagern oder Werkzeugen von der Härte der Oberfläche abhängt. Deshalb wurden eine Reihe von Verfahren entwickelt, um die Härte der Oberflächen-

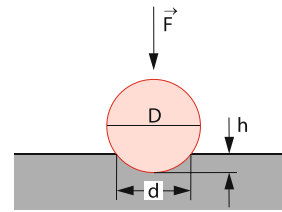


Abb. 6.18. Härteprüfung nach Brinell

schichten eines Werkstückes zu erhöhen. Man erreicht dies z. B. bei Umwandlung einer dünnen Oberflächenschicht in den amorphen Zustand durch Bestrahlung mit Lasern oder durch Aufbringen einer harten Fremdschicht (z. B. Titan oder NiC) auf die Oberfläche eines Werkzeuges (Bohrer, Schneidstähle).

Bei der technischen Härteprüfung wird oft das von *Brinell* schon 1900 angegebene Verfahren benutzt, bei dem eine gehärtete Stahlkugel mit Durchmesser D unter definierter Prüfkraft $F = a \cdot D^2$ senkrecht in die Probe gedrückt wird (Abb. 6.18). Aus dem Durchmesser d der konkaven Eindrucksfläche kann die Eindrucktiefe h bestimmt werden, die ein Maß für die *Brinellhärte* ist [6.9].

Tabelle 6.2. Härteskala nach Mohs

Definitions-Mineralien		Beispiele	
1 Talk	6 Feldspat	Aluminium	2,3–2,9
2 Gips	7 Quarz	Blei	1,5
3 Kalkspat	8 Topas	Chrom	8
4 Flussspat	9 Korund	Eisen	3,5–4,5
5 Apatit	10 Diamant	Graphit	1
		Wolfram	7

9.4 Volumen- und Gestaltselastizität

Im Allgemeinen ändern sich bei elastischen Verformungen sowohl das Volumen als auch die Gestalt der festen Körper. Nur in besonders einfachen Fällen tritt die eine oder die andere Verzerrung isoliert auf; mit solchen wollen wir uns zunächst befassen.

Volumenelastizität. Wir betrachten einen Festkörper beliebiger Gestalt, auf dessen Oberfläche ein überall konstanter Druck p wirken möge (Abb. 9.18). Das kann dadurch geschehen, dass man den Körper in eine Flüssigkeit einbettet, die in einem Gefäß mit beweglichem Stempel eingeschlossen ist, und nun durch Belastung des Stempels auf die Flüssigkeitsoberfläche den gewünschten Druck wirken lässt. Wie wir in Kap. 10 sehen werden, wirkt dann dieser Druck an allen Stellen der Flüssigkeit und überträgt sich durch sie auf den eingelagerten Festkörper. Dann wird einfach dessen Volumen verkleinert, wie es Abb. 9.18 andeutet, ohne dass eine Gestaltsänderung auftritt. Statt den Körper durch gleichmäßigen Druck zu komprimieren, kann man ihn auch durch Zug dehnen, etwa, indem man ihn vom Atmosphärendruck in ein Vakuum bringt; auch in diesem Fall ändert sich nur das Volumen. Greift man im Inneren des Körpers irgendwie gelegene Teilvolumina gleicher Größe heraus, so erfährt jedes von ihnen die gleiche Volumenänderung, ein Beweis dafür, dass in jedem Punkt des Körperinneren gleichfalls der Druck p herrscht. Natürlich ist die absolute Volumenänderung umso größer, je größer das Ausgangsvolumen ist; d. h., es kommt immer nur auf die sogenannte „relative“ Volumenänderung, an.

Das Hooke'sche Gesetz verlangt nun in Übereinstimmung mit dem Experiment, dass die relative Volumenänderung proportional zum wirkenden Druck p ist. Hat also das Volumen beim Druck null den Anfangswert V_0 und ändert es sich beim Druck p auf $V_0 + \Delta V$, so ist

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{K} \cdot p. \quad (9.10)$$

Diese experimentell gefundene Beziehung spricht eben aus, dass die relative Volumenverminderung $-\Delta V/V_0$ proportional zum wirkenden Druck p , d. h. zur Normal-(Druck-)

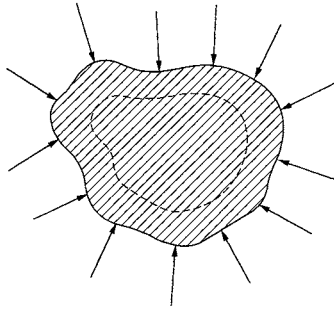


Abb. 9.18 Volumenelastizität eines festen Körpers

Spannung σ , ist; der Proportionalitätsfaktor $1/K$, der von Material zu Material verschieden ist, heißt (kubische) *Kompressibilität* des Festkörpers; der reziproke Wert K ist der *Kompressionsmodul*. Die Dimension von K ist die eines Druckes.

Die Kompressibilität ist bei den festen Körpern im Allgemeinen sehr klein, ihr Kehrwert K also sehr groß. Das heißt: Es bedarf sehr großer Drücke, um eine kleine relative Volumenverminderung zu erzielen. Zum Beispiel liegt die Kompressibilität von Gläsern zwischen $1,7 \cdot 10^{-11}$ und $3,3 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$, d. h., bei einer Drucksteigerung um 10^5 Pa (1 bar) verringert sich das Volumen nur um wenige ppm. Der Kompressionsmodul der Gläser hat also Werte zwischen $3 \cdot 10^{10}$ und $6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$. Da diese Zahlen sehr groß sind, pflegt man den Kompressionsmodul nicht auf Quadratmeter, sondern auf Quadratmillimeter zu beziehen, so dass wir hier 30 kN/mm^2 bzw. 60 kN/mm^2 erhalten (s. Tab. 9.6, Abschn. 9.6).

Noch größer ist der Kompressionsmodul von Metallen wie Kupfer oder Eisen, nämlich 140 bzw. 170 kN/mm^2 , was einer Kompressibilität von weniger als 10^{-11} Pa^{-1} entspricht.

Wasser hat bei 20°C die Kompressibilität $46 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ (für Drücke bis zu 5 MPa).

Übrigens ist die hier geschilderte Methode zur Bestimmung von K umständlich und daher nur selten angewendet worden; in Abschn. 9.5 werden geeignetere Anordnungen behandelt, bei denen es sich allerdings nicht um reine Volumenänderung handelt.

Gestaltselastizität. Das Gegenstück zu dem hier betrachteten Fall haben wir dann, wenn wir auf die Oberseite eines Würfels der Kantenlänge a eine tangentielle Kraft F wirken lassen, während die Unterfläche festgehalten wird (Abb. 9.19). Der Würfel wird dann in der aus der Figur ersichtlichen Weise deformiert (*Scherung* des Würfels): Die Ebene parallel zur Grundfläche des Würfels bleibt ein Quadrat; sie wird nur nach rechts um einen gewissen Betrag verschoben, so dass die parallel zur Zeichenebene liegenden Flächen Parallelogramme werden; die beiden letzten Flächen werden Rechtecke. Man erkennt

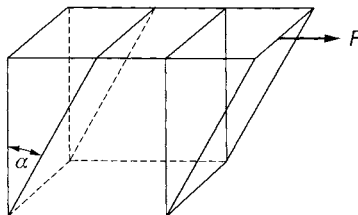


Abb. 9.19 Gestaltselastizität eines festen Körpers, als Beispiel: Scherung eines Würfels

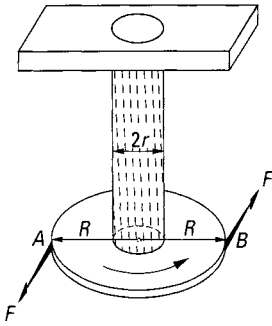


Abb. 9.20 Torsion eines Stabes

sofort, dass das Volumen des Würfels erhalten bleibt; wir haben es also wirklich mit einer reinen Gestaltsänderung zu tun, die durch die Größe des Winkels α charakterisiert wird. Da die Kraft F sich auf eine Fläche vom Inhalt a^2 verteilt, ist die Schubspannung $\tau = F/a^2$, die auch an jeder Stelle im Inneren des Würfels wirksam ist. In Übereinstimmung mit dem Experiment und dem Hooke'schen Gesetz ist die Schubspannung τ proportional zu diesem Winkel α (genauer $\tan \alpha$):

$$\tau = G\alpha. \quad (9.11)$$

G , der vom Material abhängende Proportionalitätsfaktor, wird als *Schubmodul* oder, aus einem gleich ersichtlichen Grund, als *Torsionsmodul* bezeichnet. Hier haben wir es also mit einer zweiten elastischen Materialkonstanten zu tun, die erfahrungsgemäß völlig unabhängig vom Kompressionsmodul K ist:

- Volumenelastizität und Gestaltselastizität sind zwei voneinander verschiedene, sich gegenseitig nicht beeinflussende Wirkungen der atomaren Bindungskräfte.

Nach Gl. (9.11) ist die Dimension des Torsionsmoduls identisch mit der der Schubspannung τ , da der Winkel α dimensionslos ist; er wird also, wie der Kompressionsmodul, z. B. in N/mm^2 (= MPa) angegeben.

Die einfache Anordnung der Abb. 9.19 sollte nur dazu dienen, den Vorgang bei einer reinen Beanspruchung auf Gestaltsänderung deutlich zu machen; zur Bestimmung des Torsionsmoduls wäre sie zwar im Prinzip verwertbar, ist tatsächlich jedoch nie benutzt worden. Dagegen ergeben sich Methoden zur Bestimmung des Torsionsmoduls durch Betrachtung der *Torsion* oder *Drillung* eines Stabes (Abb. 9.20).

Das obere Ende eines Stabes der Länge L und vom Durchmesser $2r$ sei fest eingeklemmt. Am unteren Ende ist eine Scheibe vom Radius R mit dem Stab starr verbunden. An dieser Scheibe greifen an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten A und B zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte vom Betrag F in tangentialer Richtung an. Dadurch erfährt das untere Stabende ein Drehmoment und wird um den Winkel φ verdreht. An dieser Drehung nehmen alle anderen Stabquerschnitte mit einem Betrag teil, der proportional zum Abstand dieser Querschnitte vom oberen eingeklemmten Stabende ist. Dabei bleibt, wie auch bei der schematischen Anordnung in Abb. 9.19, jeder Querschnitt, für sich betrachtet, starr und wird nur gegen die benachbarten Querschnitte um einen kleinen Winkel verdreht. Dadurch treten zwischen den einzelnen Querschnitten Schubspannungen auf. Denken wir uns auf dem Stabmantel eine Anzahl zur Stabachse paralleler Linien gezogen, so werden diese nach der Drillung die Form von Schraubenlinien haben, die gegen die

Vertikale die Neigung α haben mögen; so lässt sich auch die Drillung des Stabes sichtbar machen. Bei einem kreisförmigen Querschnitt bleibt während der Torsion das Volumen konstant; auch die Gestalt des Stabes erfährt – äußerlich! – keine Veränderung, wenn man von der schraubenförmigen Verzerrung der Oberfläche absieht (*latente* Gestaltsänderung). Solche Verdrehungen treten z. B. bei jeder Transmissionswelle auf, an deren einem Ende der Motor und an deren anderem die zu treibende Maschine mit ihren Drehmomenten angreift.

Wir denken uns zunächst statt des massiven Zylinders einen Hohlzylinder vom Radius r und der Wandstärke dr (Abb. 9.21). Er sei am unteren Ende durch eine am Zylinderquerschnitt angreifende unendlich kleine Kraft vom Betrag dF um den Winkel φ verdreht. Ist die Zylinderlänge L , so wird jede der Zylinderachse ursprünglich parallele Gerade um den Winkel $\alpha = r\varphi/L$ gegen sie geneigt. Nach dem Hooke'schen Gesetz muss nun die am unteren Querschnitt des Zylinders angreifende Schubspannung zum Drillungswinkel proportional sein. Da die Querschnittsfläche $dA = 2\pi r dr$ ist, wird die Schubspannung:

$$\tau = \frac{dF}{dA} = \frac{dF}{2\pi r dr}$$

und wir erhalten nach Gl. (9.11):

$$\tau = G\alpha = G\frac{r}{L}\varphi$$

oder, wenn wir wieder die Kraft dF einführen:

$$dF = G 2\pi r^2 dr \frac{\varphi}{L}.$$

Durch Multiplikation mit dem Abstand r von der Drehachse erhalten wir den Betrag dT des (infinitesimalen) Drehmoments:

$$dT = \frac{2\pi\varphi}{L} Gr^3 dr.$$

Gehen wir nun vom Hohlzylinder auf einen Vollzylinder über, den wir uns aus einer Reihe ineinandergeschobener Hohlzylinder zusammengesetzt denken können, so finden wir das

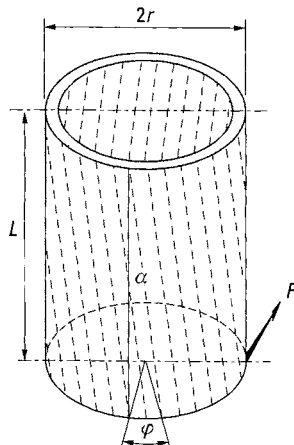


Abb. 9.21 Drillung eines Hohlzylinders

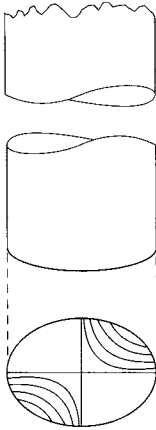


Abb. 9.22 Querschnittsverwölbung bei Torsion eines Stabes mit elliptischem Querschnitt

gesamte Drehmoment seinem Betrag nach durch eine Integration über r zwischen den Grenzen 0 und r . Das liefert:

$$T = 2\pi \frac{\varphi}{L} G \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{L} G r^4. \quad (9.12)$$

Daraus ergibt sich für den Torsionsmodul G die Gleichung

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{L}{r^4 \varphi} T. \quad (9.13)$$

Lässt man die den Zylinder verdrehenden Kräfte F nicht am Mantel des Zylinders selbst angreifen, sondern (Abb. 9.20) an zwei diametral gegenüberliegenden Punkten des Umfangs einer größeren Scheibe mit dem Radius R , so ist $T = 2RF$. Damit wird:

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{L}{r^4 \varphi} 2RF. \quad (9.14)$$

Diese Gleichungen (9.13) oder (9.14) können zu einer bequemen und genauen Bestimmung des Torsionsmoduls dienen, da man die Länge L und den Radius r messen kann, ebenso wie das Drehmoment T ; der Torsionswinkel φ ergibt sich unter Benutzung einer Spiegelablesung. Zahlenwerte für G finden sich in Tab. 9.6, Abschn. 9.6. Sie liegen etwa in der Größenordnung von 1 bis 100 N/mm².

Nur bei der Torsion eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt bleiben die einzelnen Querschnitte eben, wie wir es vorausgesetzt haben. Bei Stäben von quadratischem, rechteckigem oder elliptischem Querschnitt erfahren dagegen bei jeder Verdrillung die Querschnitte eine Verwölbung, wie Abb. 9.22 für einen Stab elliptischen Querschnittes zeigt. Diese Komplikation erschwert die exakte Berechnung der Torsion solcher Stäbe erheblich.

Dynamische Messung des Torsionsmoduls. Die soeben besprochene Methode zur Bestimmung des Torsionsmoduls ist eine statische; vielfach wird auch die folgende dynamische benutzt, die gewisse Vorzüge vor jener besitzt. Befestigt man am unteren Ende eines oben eingeklemmten Drahtes einen Körper mit dem Trägheitsmoment J und verdrillt man

den Draht, so wirkt das in Gl. (9.12) angegebene Drehmoment rücktreibend auf den angehängten Körper ein. Der Draht führt infolgedessen Torsionsschwingungen um die Drahtachse aus, deren Schwingungsdauer τ durch die Gleichung für das physikalische Pendel

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (9.15)$$

gegeben ist. Hierin bedeutet D das Richtmoment, d. h. das – sich aus Gl. (9.12) ergebende – Drehmoment pro Winkel:

$$D = \frac{T}{\varphi} = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{L} G.$$

Diese Torsionsschwingungen stellen ein bequemes Verfahren sowohl zur Bestimmung von Trägheitsmomenten als auch zur Ermittlung des Torsionsmoduls dar.

Torsionsschwingungen spielen bei verschiedenen Messinstrumenten, z. B. bei Galvanometern, eine große Rolle. Das System, auf das eine magnetische oder elektrostatische Anziehungs- und Abstoßungskraft wirkt, hängt an einem sehr dünnen Faden, der tordiert wird. Man verwendet meist Quarzfäden, die „geschossen“ werden; d. h., man zieht einen Tropfen von geschmolzenem Quarzglas im Gebläse mit Hilfe von Pfeil und Bogen sehr schnell auseinander. Solche sehr dünnen Fäden sieht man nur bei starker seitlicher Beleuchtung auf schwarzem (Samt-)Untergrund. – In besonderen Fällen verwendet man natürliche Spinnenfäden, die man leicht dadurch erhält, indem man eine Spinne durch ein vertikal aufgestelltes Glasrohr fallen lässt. – Eine wichtige Anwendung findet die Torsion auch bei den Torsionswaagen. Ein horizontal liegender Faden ist an beiden Enden fest eingespannt. In der Mitte dieses Fadens ist ein ebenfalls horizontal liegender dünner Stab befestigt, dessen Richtung aber senkrecht zum Torsionsfaden liegt. Wird der Stab nun auf einer Seite belastet, so wird der Faden tordiert. Sehr genaue, käufliche Torsionswaagen haben z. B. Messbereiche von 0.002 mg bis zu 10 mg.

9.5 Dehnung und Biegung

Bei den bisher besprochenen Deformationen hatten wir es entweder nur mit einer reinen Volumenänderung unter Beibehaltung der Gestalt (Volumenelastizität) oder mit einer reinen Gestaltsänderung unter Beibehaltung des Volumens (Scherung bzw. Torsion eines Kreiszylinders) zu tun. Wir wenden uns jetzt solchen Verzerrungen zu, bei denen sowohl das Volumen als auch die Gestalt des betreffenden Körpers verändert wird. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir einen Körper nur in einer einzigen Richtung dehnen oder zusammendrücken. Wie Abb. 9.23 in übertriebenem Maßstab zeigt, geht ein Würfel, der in der Vertikalen gedehnt wird, in die Form eines Quaders über, dessen Volumen größer als das des Würfels ist, und umgekehrt kann ein Quader von quadratischer Grundfläche bei einer bestimmten Stauchung in der Längsrichtung zu einem Würfel von kleinerem Volumen verformt werden. Es findet also eine Vergrößerung der Linearausdehnung in Richtung des Zuges statt, aber gleichzeitig eine Verkürzung der Querausdehnungen; beide zusammen bestimmen neben der Volumenänderung die Gestaltsänderung.

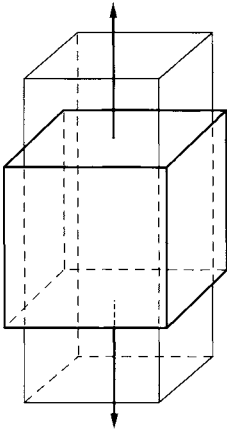


Abb. 9.23 Zur Erklärung der Querkontraktion

Querkontraktion isotroper Körper. Dass bei einer einseitigen Dehnung stets auch eine *Querkontraktion* auftritt, kann man durch folgenden Versuch von Wilhelm Conrad Röntgen (1845 – 1923) zeigen: Auf ein ungespanntes Gummiband wird mit Tusche ein Kreis vom Radius R aufgezeichnet; dehnt man das Band, so wird aus dem Kreis eine Ellipse, deren kleine Achse b kleiner und deren große Achse a größer als R ist (Abb. 9.24).

Eine solche einseitige Dehnung liegt z. B. vor, wenn wir einen an einem Ende fest aufgehängten Draht am anderen Ende durch ein angehängtes Gewicht belasten: Wir können dann mit einem Mikroskop, das wir auf eine am unteren Ende des Drahtes angebrachte Marke einstellen, eine Verlängerung des Drahtes beobachten. Gleichzeitig nehmen seine Querabmessungen ab. Bei einem Metalldraht ist dies freilich nicht ohne Weiteres zu sehen; nimmt man aber einen dickwandigen Gummischlauch (Vakuumschlauch), über den eng passend ein Ring geschoben ist, so zieht sich der Schlauchquerschnitt bei Dehnung so stark zusammen, dass der Ring vollkommen frei beweglich wird, z. B. herabfällt, wenn der Schlauch vertikal gehalten wird. Verändern wir die Größe des am Draht angehängten Gewichtes, so finden wir im Einklang mit dem Hooke'schen Gesetz, dass die Verlängerung ΔL zur wirkenden Kraft proportional ist. Variieren wir ferner die Länge L und die Querschnittsfläche A des Drahtes, so ergibt sich weiter, dass die Verlängerung zur Länge L

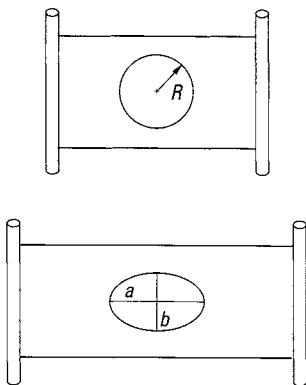


Abb. 9.24 Nachweis der Querkontraktion bei einem gespannten Gummiband

direkt und zur Querschnittsfläche des Drahtes umgekehrt proportional ist. Das muss nach dem Hooke'schen Gesetz so sein; denn die Dehnung ε soll ja zur Spannung proportional sein. Bei der Belastung des Drahtes oder des Gummischlauchs durch ein Gewicht kommt selbstverständlich nur eine senkrecht zur Querschnittsfläche A gerichtete Normalkraft F_N in Betracht. Die Normal-(Zug-)Spannung σ ist nach Gl. (9.8) gleich dem Quotienten Normalkraft F_N /Fläche A . Also ist die Dehnung ε oder die relative Längenänderung $\Delta L/L$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_N}{A} \quad (9.16)$$

oder

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (9.17)$$

Die Proportionalitätskonstante ist der *Elastizitätsmodul* E , eine Materialkonstante. Der Elastizitätsmodul E ist also das Verhältnis von Normal-Spannung σ zur relativen Längenänderung $\Delta L/L$. E wird gleich σ , wenn $\Delta L/L$ gleich 1 ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Gummiband auf die doppelte Länge gedehnt wird.

Gemessen wird die Dehnung z. B. einfach dadurch, dass ein an einem festen Punkt aufgehängter Draht mit einem Gewicht belastet wird. Ein markierter Strich am unteren Ende des Drahtes wird mit dem Mikroskop beobachtet. Man kennt die Länge des Drahtes L , die Querschnittsfläche A und die Kraft, nämlich das angehängte Gewicht G . Man misst die Verlängerung ΔL und erhält so den Elastizitätsmodul E .

Eine andere Methode zur Messung der Dehnung benutzt die Änderung des elektrischen Widerstandes eines dünnen, belasteten Drahtes. Diese *Dehnungsmessstreifen* werden fest auf die Probe geklebt, deren Dehnung gemessen werden soll. Bei der Dehnung wird der dünne Messdraht ebenfalls mitgedehnt. Infolge der Verlängerung und der Querkontraktion vergrößert sich der elektrische Widerstand, der gemessen wird. Um die Wirkung zu erhöhen, ist der dünne Messdraht etwa 50-mal in der Messrichtung hin und her gelegt. Er ist fest in einem Kunststoff eingebettet. Diese Dehnungsmessstreifen werden hauptsächlich dazu benutzt, aus der gemessenen Dehnung bei bekanntem Elastizitätsmodul die Zugspannung zu bestimmen, die in Baukonstruktionen (Brücken, Hochhäuser) wegen etwaiger Überbeanspruchung laufend geprüft werden sollten. Man kann nach dieser Methode noch Dehnungen bis herab zu $\Delta L/L = 10^{-6}$, d. h. Spannungen z. B. in Stahl bis herab zu 0.2 N/mm^2 , messen.

Die Dimension von E ist die eines Druckes. Um zu große Zahlen zu vermeiden, misst man E in N/mm^2 . Die Zahlenwerte von E sind etwa in der Größenordnung von 3 bis 300 N/mm^2 (s. Tab. 9.6, Abschn. 9.6).

Wie wir bereits in Abb. 9.23 und 9.24 sahen, ist jede elastische Dehnung eines Körpers in der zur Dehnung senkrechten Richtung mit einer Kontraktion verbunden. Diese muss nach dem Hooke'schen Gesetz zur relativen Dehnung proportional sein. Das Verhältnis von Querkontraktion ε_S zur Längsdehnung ε_N wird gekennzeichnet durch die *Poisson-Zahl*

$$\mu = -\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_N} = -\frac{(\Delta L/L)_{\text{quer}}}{(\Delta L/L)_{\text{längs}}}. \quad (9.18)$$

μ ist also eine reine Zahl; sie ist kleiner als $\frac{1}{2}$. Danach hat der aus dem Würfel der Kantenlänge L entstandene Quader die Kantenlängen:

$$L \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right); \quad L \left(1 - \frac{\mu \sigma}{E}\right); \quad L \left(1 - \frac{\mu \sigma}{E}\right);$$

das ursprüngliche Volumen des Würfels $V_0 = L^3$ hat sich verändert in:

$$V_0 + \Delta V = L^3 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) \left(1 - \frac{\mu\sigma}{E}\right) \left(1 - \frac{\mu\sigma}{E}\right),$$

oder, da σ/E und $\mu\sigma/E$ klein gegen 1 sind und ihre Quadrate bzw. Produkte untereinander vernachlässigt werden dürfen, angenähert:

$$V_0 + \Delta V = L^3 \left[1 + \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)\right].$$

Die relative Volumenänderung ist also:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu). \quad (9.19)$$

Da bei einem Zug das Volumen V_0 sich natürlich vergrößern muss, muss nach Gl. (9.19) $1 - 2\mu > 0$ sein, d. h., μ unterliegt im Einklang mit der Erfahrung der Bedingung:

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}. \quad (9.20)$$

Für feste Stoffe ergibt sich: $0.2 < \mu < 0.5$ und für Flüssigkeiten in etwa der Grenzfall $\mu = 0.5$, d. h., Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel.

Die Konstanten der Elastizität. Mit der Größe μ haben wir nun im Ganzen vier elastische Konstanten: Kompressionsmodul K , Torsionsmodul G , Elastizitätsmodul E und Poisson-Zahl μ . Sie sind nicht unabhängig voneinander; vielmehr lassen sich zwei von ihnen durch die beiden anderen ausdrücken, so dass ein isotroper Festkörper durch zwei Moduln vollkommen in seinem elastischen Verhalten charakterisiert ist.

Den Zusammenhang zwischen K , E und μ wollen wir zunächst ableiten. Zu dem Zweck denken wir uns in Abb. 9.23 statt des Zuges σ zunächst einen einseitigen Druck σ wirkend; dieser verkürzt die Kantenlänge L in seiner Richtung und dehnt diejenigen senkrecht zu ihm. Statt einer Volumenvergrößerung erhalten wir eine Volumenverminderung, die durch die gleiche Formel (9.19) ausgedrückt wird, nur dass links ein Minuszeichen hinzuzufügen ist.

Wenn man jetzt nach Abb. 9.23 auch auf die anderen Seitenflächen des Würfels den Druck σ wirken lässt, so bewirkt dieser genau dasselbe wie vorher der einseitige Druck: Die Kanten in Richtung des Druckes werden verkürzt, die dazu senkrechten Kanten werden verlängert. Während einseitiger Druck die parallele Kante um $L\sigma/E$ verkürzt, erzeugen die dazu senkrechten Drücke eine Verlängerung um $2\mu L\sigma/E$, so dass jede Kantenlänge L übergeht in:

$$L \left[1 - \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)\right];$$

das Volumen $V_0 = L^3$ ändert sich also in:

$$V_0 + \Delta V = L^3 \left[1 - \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)\right]^3 = L^3 \left[1 - \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu)\right],$$

d. h., die relative Volumenverminderung unter allseitigem Druck σ hat den Wert:

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu). \quad (9.21)$$

Das muss aber übereinstimmen mit Gl. (9.10): $-\Delta V/V_0 = \sigma/K$, wobei K der Kompressionsmodul ist. Der Vergleich ergibt also:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (9.22)$$

Damit ist der Kompressionsmodul K durch E und μ ausgedrückt; für die Kompressibilität $1/K$ ergibt sich also:

$$\frac{1}{K} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}. \quad (9.23)$$

Die meisten K -Bestimmungen fester Körper sind so auf indirektem Weg gemacht worden: Sie wurden aus E und μ berechnet. Die gewonnenen Zahlenwerte sind in Tab. 9.6 (Abschn. 9.6) angegeben.

Eine weitere Beziehung besteht zwischen E , G und μ . Wir betrachten wieder den Würfel der Abb. 9.19 der Kantenlänge a auf dessen oberer Fläche a^2 eine tangentielle Kraft F wirkt, während die Grundfläche festgehalten wird; die Schubspannung τ ist gleich F/a^2 ; diese bewirkt wie in Abb. 9.19 eine Scherung, d. h., die beiden parallel zur Zeichenebene liegenden Quadrate werden Parallelogramme.

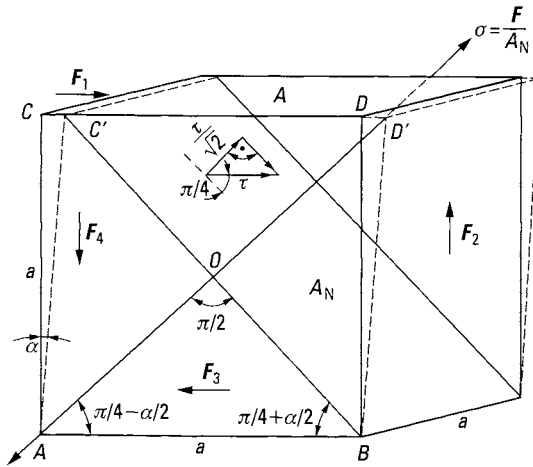


Abb. 9.25 Zur Ableitung der Beziehung: $\frac{E}{2G} = 1 + \mu$

In Abb. 9.25 zeigen wir nur die Vorderfläche des Würfels im unverzerrten und verzerrten Zustand. Es ist dann gemäß Gl. (9.11): $\alpha = \tau/G$. Die ursprünglichen Diagonalen AD und BC werden durch diese Verzerrung übergeführt in die neuen AD' und BC' , von denen die erstere verlängert und die letztere verkürzt ist. Sie schneiden sich zwar immer noch unter einem rechten Winkel, aber der rechte Winkel BAC ist übergegangen in Winkel $BAC' = \pi/2 - \alpha$, und da dieser Winkel durch die Diagonale AD' halbiert wird, wird der Winkel $BAD' = \pi/4 - \alpha/2$, wie in Abb. 9.25 eingetragen; der entsprechende Winkel bei B ist $C'BA = \pi/4 + \alpha/2$. Die Schubspannung τ herrscht nun in jedem Punkt des Würfelinernen, und wir wollen diejenige, die in den Punkten der in Abb. 9.25 zu $C'B$ verkürzten Diagonalfäche herrscht, in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zur

Diagonalfäche zerlegen; beide Komponenten sind bei geringen Scherungen gleich $\tau/\sqrt{2}$, da τ einen Winkel von 45° mit der Diagonale bildet.

Die Schubspannungskomponente $\tau/\sqrt{2}$ ergibt, mit der Würfelfläche a^2 multipliziert, den Teilbetrag der Kraft F_1 , der in Richtung AD' wirkt. Im Kräftegleichgewicht wirkt in der Fläche von BD' (nach hintenweisend) ebenfalls die Schubspannung τ und damit in Richtung AD' der Teilbetrag der Kraft $F_2 = a^2 \cdot \tau/\sqrt{2}$. Beide Teilbeträge sind gleich groß und addieren sich zu der Kraft F , die die Zugspannung in Richtung AD' hervorruft. (Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Fläche A_N senkrecht zur Zugspannung gleich $a^2\sqrt{2}$ ist.) Die Gleichgewichtsbedingung lautet somit

$$2(\tau/\sqrt{2})a^2 = \sigma \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\tau = \sigma.$$

Längs der Diagonalen AD' wirkt also eine der Größe τ entsprechende Zugspannung, die Diagonale AD vergrößernd; längs BC wirkt eine Druckspannung, die, wie genauso abzuleiten ist, ebenfalls τ entspricht und die Diagonale BC verkürzt. Die Verlängerung von AD in AD' wird nun nicht allein durch den Zug in Richtung AD , sondern – über die negative Querkontraktion – auch durch den Druck in Richtung BC hervorgerufen. Gleiches gilt für die Verkürzung von BC . Das liefert, wie schon vorher berechnet:

$$\begin{aligned} AD' &= AD + \Delta AD \\ &= a\sqrt{2} + a\sqrt{2} \cdot \frac{\tau}{E} + a\sqrt{2} \cdot \frac{\mu \cdot \tau}{E} \\ &= a\sqrt{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \right\} \\ BC' &= a\sqrt{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \right\}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Die eine Diagonale wird also um ebenso viel verlängert, wie die andere verkürzt. Was wir hier gemacht haben, ist einfach eine andere Auffassung der Wirkung der Schubspannung τ , die parallel zur Fläche CD wirkt: Statt zu sagen, τ deformiere das Quadrat $ABDC$ in das Parallelogramm $ABD'C'$, wobei der ursprünglich rechte Winkel bei A in $\pi/2 - \alpha$ übergeht, können wir auch sagen, dass die beiden Diagonalen in der durch Gl. (9.24) angegebenen Weise verlängert bzw. verkürzt werden. Nun ist im Dreieck AOB :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2} \left[1 - \frac{\tau}{E}(1 + \mu)\right]}{a\sqrt{2} \left[1 + \frac{\tau}{E}(1 + \mu)\right]} = \frac{1 - \frac{\tau}{E}(1 + \mu)}{1 + \frac{\tau}{E}(1 + \mu)}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $\alpha/2$ und $\tan(1 + \mu)/E$ kleine Größen sind, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \approx 1 - \alpha; \\ \frac{1 - \frac{\tau}{E}(1 + \mu)}{1 + \frac{\tau}{E}(1 + \mu)} &\approx \left[1 - \frac{\tau}{E}(1 + \mu)\right]^2 \approx 1 - \frac{2\tau}{E}(1 + \mu). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt also:

$$\alpha = \frac{2}{E}(1 + \mu)\tau;$$

aber α ist, nach der ersten Methode als Scherung betrachtet, gleich τ/G ; also folgt weiter:

$$\frac{1}{G} = \frac{2(1 + \mu)}{E},$$

oder endlich:

$$\frac{E}{2G} = (1 + \mu). \quad (9.25)$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen E , G und μ ; sie dient dazu, aus den beiden ersten Moduln die Poisson-Zahl zu gewinnen (Zahlenwerte in Tab. 9.6, Abschn. 9.6).

Nebenbei sieht man, da $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ ist, dass der Torsionsmodul G zwischen $E/2$ und $E/3$ liegen muss.

Mit Hilfe der Gln. (9.22) und (9.25) kann man alle elastischen Konstanten isotroper Stoffe durch E und G ausdrücken; dies ist zweckmäßig, weil diese beiden Moduln sich leicht genau bestimmen lassen.

Hier noch einmal die drei Gleichungen:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu, \quad \frac{E}{3K} = 1 - 2\mu, \quad \frac{2G}{3K} = \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu}.$$

So tritt auch deutlich zutage, dass isotrope (und auch quasi-isotrope) Körper nur zwei elastische Konstanten besitzen.

Kristalline Körper. Im Gegensatz zur relativen Einfachheit des elastischen Verhaltens isotroper Festkörper steht der komplizierte Charakter der Kristalle, da hier viel mehr Konstanten benötigt werden, um die Verzerrungen zu charakterisieren; wie viele, das hängt von den Symmetrieverhältnissen des Kristalls ab. Im allgemeinsten Fall, dem asymmetrischen oder triklinen System (Kupfersulfat), sind nicht weniger als 21 elastische Moduln vorhanden; beim monoklinen System (Gips) sind es 13, beim rhombischen (Topas, Baryt) 9, beim trigonalen (Kalkspat, Quarz) 6, ebenso viele (6) beim tetragonalen System (Zirkon, Rutil), 5 beim hexagonalen (Beryll) und schließlich beim regulären System (Steinsalz, Sylvin, Flussspat) noch 3 elastische Konstanten.

Biegung. Unter die Rubrik *einseitige Dehnung* gehört auch ein zunächst ganz anders aussehender Vorgang, die *Biegung* von Stäben beliebigen, z. B. rechteckigen Querschnittes. Lässt man auf das freie Ende eines einseitig eingeklemmten Stabes der Länge L , der Breite b und der Dicke d ein Gewicht G senkrecht zur Stabachse wirken, so wird der Stab gebogen (Abb. 9.26a); die Senkung s des freien Endes heißt der *Biegungspfeil*. Durch die Biegung wird die Oberseite des Stabes länger und die Unterseite kürzer als die ursprüngliche Länge L des Stabes; mit anderen Worten: Der Stab ist auf der Oberseite gedehnt, auf der Unterseite gestaucht. Auf der Oberseite muss also eine Zugspannung, auf der Unterseite eine Druckspannung herrschen. Den Übergang bildet eine in der Mitte liegende Schicht des Stabes, in der keine Spannungen herrschen, die also ihre ursprüngliche Länge L bewahrt hat, die sogenannte *neutrale Faser* (Abb. 9.26b). Sie kann (bei durchsichtigen Stäben) mit optischen Verfahren direkt sichtbar gemacht werden. Die obige

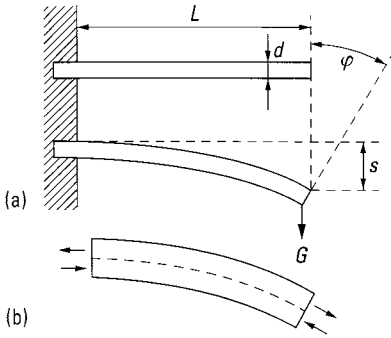


Abb. 9.26 Biegung eines einseitig eingeklemmten Stabes

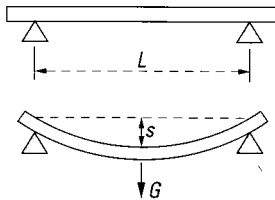


Abb. 9.27 Durchbiegung eines an beiden Enden aufliegenden Stabes

Analyse des Biegungsvorganges zeigt uns schon, dass die hier maßgebende elastische Konstante der Elastizitätsmodul E ist; ferner folgt aus dem Hooke'schen Gesetz, dass der Biegepfahl (oder auch der Winkel φ) proportional zum Gewicht G sein muss. Die Theorie liefert für den einseitig eingeklemmten Balken den folgenden Ausdruck für den Biegepfahl s :

$$s = \frac{4}{E} \frac{L^3}{bd^3} G \quad (G = \text{Gewicht}) \quad (9.26)$$

und für den in Abb. 9.27 dargestellten Fall der Biegung eines mit beiden Enden aufliegenden Stabes:

$$s = \frac{1}{4E} \frac{L^3}{bd^3} G \quad (G = \text{Gewicht}). \quad (9.27)$$

Beide Gleichungen können mit Vorteil benutzt werden, um den Elastizitätsmodul E zu bestimmen.

Flächenträgheitsmoment. Zur Berechnung der Biegung eines Balkens betrachtet man die auf den Balken wirkenden Drehmomente. An jeder Stelle y eines in y -Richtung liegenden Balkens wirkt einerseits ein Drehmoment $T_G = y \cdot G$, das durch die äußere Belastung mit einem Gewicht G hervorgerufen wird. Andererseits ergibt sich aus der Spannung des gebogenen Balkens ein Drehmoment T_y , das auf die in der x - y -Ebene liegende Querschnittsfläche A_y des Balkens wirkt. Im statischen Gleichgewicht kompensieren sich an jedem Ort y die dort angreifenden Drehmomente.

Da mit zunehmendem Abstand z von der neutralen Faser die Dehnung (für $z > 0$) bzw. Stauchung (für $z < 0$) linear wächst, führt die Berechnung des Drehmoments T_y auf das Integral $I_y = \int z^2 dA_y$. Für einen rechteckigen Querschnitt (Abb. 9.28) mit der Höhe h

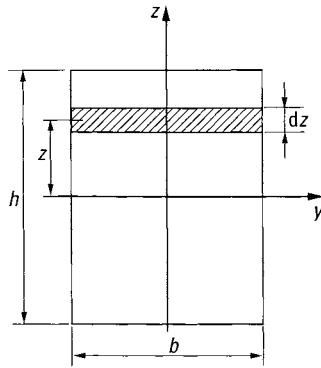


Abb. 9.28 Zur Berechnung des Flächenträgheitsmoments

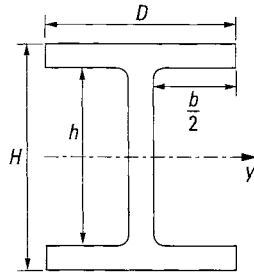


Abb. 9.29 Berechnung des Flächenträgheitsmoments für den Doppel-T-Träger

und der Breite b ist

$$I_y = 2 \int_0^{h/2} bz^2 \cdot dz = \frac{bh^3}{12}.$$

Für den Doppel- T -Träger (Abb. 9.29) erhält man

$$I_y = \frac{1}{12}(DH^3 - bd^3).$$

Die Größe I_y heißt *Flächenträgheitsmoment* (in Analogie zum Massenträgheitsmoment, Abschn. 8.2). Bei gleicher Belastung werden verschiedene Balken, wenn sie gleiche Flächenträgheitsmomente haben, in gleicher Weise gebogen. Bei Biegebeanspruchungen wird man demnach aus Gründen der Baustoffersparnis die Trägerquerschnittsfläche A so wählen, dass – bei gleichem Flächenträgheitsmoment $I = \int y^2 dA$ – die Fläche A möglichst klein wird. Darin liegt der besondere Vorteil des Doppel- T -Trägers. So lässt sich auch eine flache Klinge, also ein Messer, leicht biegen, wie die tägliche Erfahrung lehrt, wenn man es über die flache Seite biegt; dagegen kann man es, hochkant gestellt, praktisch nicht biegen.

Messverfahren. Elastizitätsmodul und Torsionsmodul eines Materials können in einfacher Weise mit einer Wendelfeder gemessen werden. Wenn man eine Wendelfeder durch Zug verlängert, so wird das Material hauptsächlich auf Torsion (nur wenig auf Biegung) beansprucht; man sieht das leicht ein, wenn man den extremen Fall betrachtet, dass man die Feder vollkommen auszieht: Dann ist der Draht so oft um 360° tordiert, wie die Feder

Windungen hat. Umgekehrt: Tordiert man die Feder, so wird der Draht in der Hauptsache auf Biegung (nur wenig auf Torsion) beansprucht. Wären die Windungen der Feder streng zueinander parallel, so hätten wir es im ersten Fall nur mit Torsion, im zweiten nur mit Biegung zu tun; in Wirklichkeit sind beide Vorgänge miteinander gekoppelt. Da man jedoch die Kopplung annähernd vernachlässigen kann, lässt sich die Verlängerung einer Feder dazu benutzen, den Torsionsmodul G zu bestimmen. Eine Torsion der Feder liefert dagegen den Elastizitätsmodul E .

Erwähnenswert ist auch ein Verfahren zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls E mit dem Kundt'schen Rohr (siehe Akustik), das sich für Stäbe und Rohre eignet. Aus der gemessenen Schallgeschwindigkeit c und der Dichte ϱ , die für das zu untersuchende Material bekannt sein muss, ergibt sich nach der von Newton angegebenen Beziehung der Elastizitätsmodul E aus $c = \sqrt{E/\varrho}$.

Den Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und den vier elastischen Konstanten geben die folgenden Gleichungen für feste, flüssige und gasförmige Stoffe (unendlich ausgedehntes Medium):

$$\begin{aligned} \text{feste Stoffe:} \quad c_{\text{long}} &= \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}; \quad c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}; \\ c_{\text{long}} &= \text{Geschwindigkeit der Longitudinalwelle;} \\ c_{\text{trans}} &= \text{Geschwindigkeit der Transversalwelle;} \\ \text{mit } G &= \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{ist} \quad \left(\frac{c_{\text{long}}}{c_{\text{trans}}}\right)^2 = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}; \end{aligned}$$

$$\text{Flüssigkeiten:} \quad c = \sqrt{\frac{K}{\varrho}};$$

$$\text{Gase:} \quad c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\varrho}}; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \left\{ \begin{array}{l} \text{Verhältnis der spezifischen Wärme-} \\ \text{kapazitäten bei konstantem Druck } p \\ \text{bzw. konstantem Volumen } V. \end{array} \right.$$

9.6 Grenzen der Elastizität

Übersicht. Die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ist, wie mehrfach betont, auf sehr kleine Deformationen beschränkt; so lange es gilt, d. h. innerhalb der sogenannten *Proportionalitätsgrenze* (Abschn. 9.3), haben wir es mit den eigentlich elastischen Vorgängen zu tun. An die Proportionalitätsgrenze schließt sich ein Gebiet an, in dem die Verzerrungen nicht mehr proportional zu den Spannungen sind, sondern höhere Potenzen (z. B. das Quadrat) der Spannungen auftreten. Obwohl auch in diesem Gebiet zwischen Proportionalitätsgrenze und sogenannter *Elastizitätsgrenze* (Abschn. 9.3) die Verzerrungen im Allgemeinen nach dem Aufhören der deformierenden Kräfte wieder verschwinden, hat man es doch mit einem Nachlassen der elastischen Kräfte zu tun. Denn wenn wir z. B. einen Draht durch Gewichte so weit dehnen, dass die Verlängerungen auch vom Quadrat des Gewichtes abhängig werden, d. h. wenn im Gegensatz zu Gl. (9.16) gilt (relative

Längenänderung $\varepsilon = \Delta L/L$:

$$\frac{\Delta L}{L} = a\sigma + b\sigma^2, \quad (9.28)$$

wo b und a positive Konstanten sind, so heißt dies, dass die Verzerrungen größer sind, als sie nach dem Hooke'schen Gesetz sein sollten. Der Elastizitätsmodul scheint also mit zunehmendem ε kleiner zu werden – und das besagt eben, dass die elastischen Kräfte schwächer werden.

Ein wesentliches Merkmal des linearen Bereiches ist die ungestörte Überlagerung von Deformationen, die von zwei oder mehreren Kräften gleichzeitig in einem Körper erzeugt werden. Jede Deformation verhält sich so, als ob die andere nicht da wäre. Oberhalb der Proportionalitätsgrenze dagegen beeinflussen sie sich gegenseitig. Ungestörte Superposition ist stets an die Linearität der Hooke'schen Gleichung gebunden.

Belastet man den Körper noch stärker und erhöht damit die Spannung über die Elastizitätsgrenze hinaus, so geht – vorausgesetzt, der Werkstoff reißt nicht – beim Entspannen die Deformation nicht mehr vollständig zurück: Es ist eine bleibende Gestaltsänderung oder *plastische Verformung* eingetreten. Die exakte Elastizitätsgrenze, also die Spannung, bei der eine erste plastische Verformung auftritt, ist nur schwer feststellbar. Je genauer die bleibende Verformung gemessen werden kann (z. B. mit Messmikroskop an einer Probenmarkierung), desto niedriger wird der Wert der Elastizitätsgrenze gefunden werden.

Man kann sich auch gut vorstellen, dass in einem polykristallinen Körper die Elastizitätsgrenze nicht in allen Kristallen gleichzeitig überschritten wird. Wegen der beschriebenen Anisotropie setzt zunächst nur in solchen Kristallen plastische Verformung ein, die zur Verformungsrichtung günstig orientiert sind.

Infolge dieser Unsicherheit ist die Elastizitätsgrenze schlecht definiert und wird deshalb vielfach nicht angegeben. Man hilft sich, wie weiter unten erläutert, mit einem Ersatzwert, der *Fließgrenze*.

Im Folgenden sollen nun die Verhältnisse oberhalb der Elastizitätsgrenze beschrieben werden. Sie sind sehr kompliziert, da sie von der Gitterstruktur der Körper sowie den (in Bd. 6 beschriebenen) Gitterfehlern abhängen. Ihre genaue Kenntnis ist allerdings besonders für Metalle von großer Bedeutung. Zum einen ist es der Verformungsprozess selbst: Es müssen z. B. Walz- oder Ziehkräfte bei der Herstellung von Blechen oder Drähten vorausgerechnet werden können. Zum anderen entscheidet das Verformungsverhalten über die Sicherheit von Bauteilen. Es gibt *duktile*, also gut verformbare Werkstoffe wie Stahl, Kupfer, Aluminium, sowie *spröde* Werkstoffe wie Glas, Keramik, nichtmetallische Kristalle oder auch einfache Gusseisensorten (Grauguss). Spröde Werkstoffe können zwar eine hohe Elastizitätsgrenze haben, nach Überschreiten derselben brechen sie jedoch sofort mit hoher Rissfortschrittsgeschwindigkeit („Spröbruch“). Zähne Werkstoffe haben im Überlastungsfall hingegen „Reserven“; sie verformen sich plastisch, wobei ihre Belastbarkeit sogar noch zunimmt, bis schließlich der duktile Bruch eintritt. Es wird also im Schadensfall nicht zu einem katastrophalen Spröbruch kommen und ein eventueller Anriss wird sich nur langsam ausbreiten.

Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Der plastische Verformungsbereich vielkristalliner und amorpher fester Körper lässt sich mathematisch nicht beschreiben. Man hilft sich mit der experimentellen Ermittlung sogenannter *Spannungs-Dehnungs-Diagramme*. Eine Zugprobe des zu prüfenden Werkstoffes wird in einer Zerreißmaschine eingespannt und

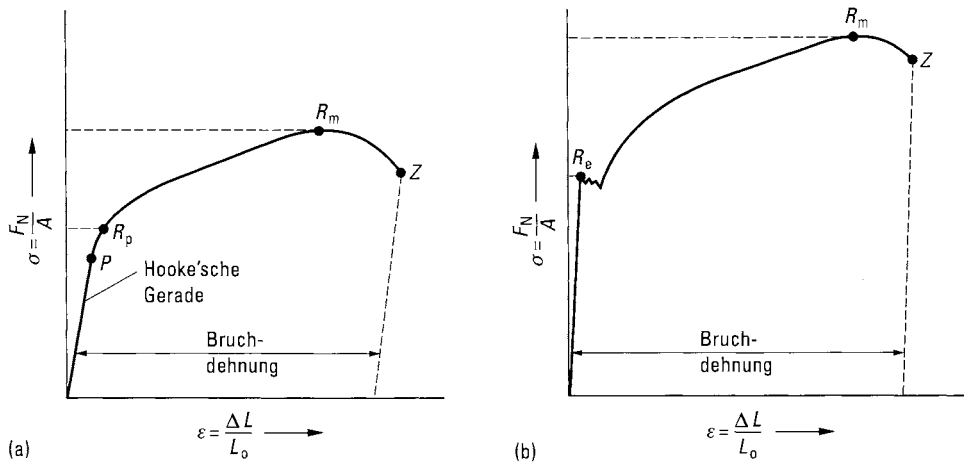


Abb. 9.30 Spannungs-Dehnungs-Diagramme (schematisch): (a) duktiler Werkstoff mit Dehngrenze (z. B. Kupfer, Aluminium), (b) duktiler Werkstoff mit Streckgrenze (z. B. unlegierter Stahl). Die Symbole R_p = Dehngrenze, R_e = Streckgrenze und R_m = Zugfestigkeit sind international genormt (R steht für Resistance). L_0 ist die Anfangslänge der Zugprobe.

auf Zug belastet (einachsiger Zugversuch). Die von der Zerreißmaschine aufgezeichnete Kraft-Verlängerungs-Kurve kann, da die Probengeometrie bekannt ist, leicht in die gewünschte Spannungs-Dehnungs-Kurve umgerechnet werden. Für einen duktilen Werkstoff (wie z. B. Kupfer) ist ein solches Diagramm in Abb. 9.30a wiedergegeben.

Der erste geradlinige Anstieg zeigt das proportionale Anwachsen der Spannung mit zunehmender Dehnung im elastischen Bereich; hier ist das Hooke'sche Gesetz gültig; die Gerade wird als *Hooke'sche Gerade* bezeichnet. Ihr Anstieg ist nach Gl. (9.17) gleich dem Elastizitätsmodul des Werkstoffes. Der Punkt, an dem man (graphisch) die erste Abweichung von der Hooke'schen Geraden feststellen kann, ist die Proportionalitätsgrenze P ; ab hier steigt die Spannung zunehmend langsamer. Deutliches und gut messbares plastisches Fließen setzt bei dem Punkt R_p ein. Er wird mit dem Oberbegriff *Fließgrenze* bezeichnet. Gut messbar sind z. B. 0.2 % bleibende Dehnung, also gibt man die Fließgrenze von Kupfer oder Aluminium als 0.2 %-*Dehngrenze* an ($R_{p0.2}$). Unlegierte Stähle weisen eine sogenannte *Streckgrenze* (R_e) auf: Am Ende der Hooke'schen Geraden ist kurzzeitig ein geringfügiger Abfall der Spannung zu beobachten (Abb. 9.30b).

Den Einfluss der Fließgrenze spüren wir sofort, wenn wir einen weichen Eisendraht, z. B. Blumendraht, und einen Federstahldraht biegen. Ersterer bleibt praktisch ohne elastische Rückfederung verbogen, Letzterer lässt sich nur elastisch biegen und federt immer wieder in seine ursprüngliche Form zurück. Die Streckgrenze des weichen Drahtes liegt bei 180 N/mm^2 , die des Federdrahtes bei 1100 N/mm^2 . Der Elastizitätsmodul ist bei beiden etwa gleich. Also lässt sich der Federdraht (bei gleichem Durchmesser) rund 6-mal so weit elastisch biegen, ehe er „verbiegt“.

Nach Überschreitung der Fließgrenze erfolgt eine rein plastische Formänderung. Um die Verformung fortzuführen, muss die Zugspannung laufend erhöht werden: Der Werkstoff verfestigt sich. Die atomistische Deutung des Verfestigungsvorgangs bei Metallen ist weiter unten gegeben. Am Punkt R_m erreicht der Werkstoff seine höchste Festigkeit, die *Zugfestigkeit* oder allgemeiner *Bruchfestigkeit* genannt wird. (Die Verfestigungskurve

lässt sich natürlich auch durch andere Verformungsarten, z. B. im Stauch-, Torsions- oder Biegeversuch ermitteln, wobei man dann nicht mehr von Zugfestigkeit, sondern Druck-, Schub- oder Biegefestigkeit spricht.) Werte der Zugfestigkeit verschiedener Werkstoffe sind in Tab. 9.6 aufgeführt. Nach Überschreiten der Zugfestigkeit beginnt sich die Probe, die bislang gleichmäßig länger und dünner geworden ist, an einer (nicht vorhersehbaren) Stelle einzuschnüren, es kommt zur Entfestigung. Kurz darauf folgt an der Einschnürstelle der Bruch (Punkt Z). Die gesamte plastische Dehnung, die die Probe erfahren hat, heißt *Bruchdehnung*. Sowohl Bruchdehnung als auch Einschnürung sind wichtige Kennwerte der Duktilität.

Zu der hier betrachteten und in der Technik gebräuchlichen Spannungs-Dehnungs-Kurve ist anzumerken, dass es sich nicht um die wahre Spannung handelt, da die an der Zerreißmaschine gemessene Zugkraft stets auf den Anfangsquerschnitt der Probe bezogen wird, d. h.

$$\sigma = \frac{F_N}{A_0} \quad (A_0 = \text{Querschnittsfläche der unverformten Probe}).$$

Tatsächlich wird die Probe während des Versuches dünner; die wahre, auf die jeweilige Querschnittsfläche bezogene Spannung ist größer als die – aus rein praktischen Gründen – üblicherweise ermittelte Spannung. „Wahre“ Spannungs-Dehnungs-Kurven werden für die Berechnung von Verformungsprozessen (Walzen, Schmieden, Strangpressen) benötigt.

Elastische Konstanten, Dehn- oder Streckgrenze, Zugfestigkeit und Bruchdehnung sind die wichtigsten Werkstoffkennwerte, die dem Konstrukteur die Werkstoffauswahl und die Bauteildimensionierung ermöglichen. Daneben müssen allerdings meist weitere Werkstoffkriterien berücksichtigt werden, wie das dynamische Festigkeitsverhalten, die Härte und Verschleißfestigkeit, die Hoch- oder Tieftemperaturfestigkeit, das Korrosionsverhalten u. a. m.

Bauteiloptimierung. Optimale Bauteildimensionierung heißt hohe Sicherheit bei geringem Werkstoffverbrauch (und damit geringem Gewicht). Überdimensionierte Konstruktionen gehören weitgehend der Vergangenheit an. Die Werkstoffe werden bis zu etwa 2/3 ihrer Fließgrenze belastet (Sicherheitsfaktor 1.5).

Die Anpassung des Bauteilquerschnitts an die Belastung (bei gegebenen Werkstoffeigenschaften) kann konstruktiv unterschiedlich erfolgen. Da es z. B. unmöglich ist, einen Stab mit hoher Zugbelastbarkeit, also großem, massivem Querschnitt, über eine Rolle zu führen, hilft man sich seit alten Zeiten mit einem Kunstgriff: Der Stab wird in viele Drähte geteilt, die zu einem Seil verflochten sind. Der Querschnitt und damit die Tragfähigkeit können groß bleiben und das Biegevermögen ist ebenfalls groß; denn es hängt nicht mehr vom Gesamtdurchmesser, sondern vom Durchmesser der einzelnen „Fasern“ ab. Die Reibung der einzelnen „Fasern“ gegeneinander verhindert eine gegenseitige Verschiebung der „Fasern“. Die Technik hat Erstaunliches geleistet. Hier ein Beispiel: Am Montblanc führt eine Seilbahn aus dem Tal von Chamonix steil nach oben zur Aiguille du Midi. Die Länge des Stahlseiles beträgt 3100 m, der Durchmesser 4.9 cm, das Gewicht des Seiles $410 \cdot 10^3$ N. Man glaubt, dass das eigene Gewicht des Seiles fast die Zerreißgrenze erreicht. Diese liegt aber weit höher. Sie beträgt $2600 \cdot 10^3$ N. Abb. 9.31 zeigt den Querschnitt eines ähnlichen, jedoch dünneren Seiles. Man erkennt, dass die inneren Drähte durch die geschlossene Form der äußeren geschützt sind, und zwar auch gegen Eindringen von Wasser.

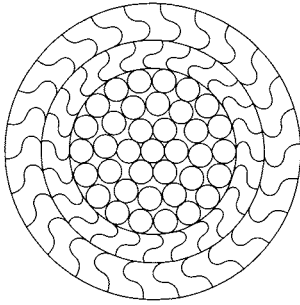


Abb. 9.31 Querschnitt eines Stahldrahtseiles. Sie werden in dieser Art bis zu 10 cm Durchmesser hergestellt.

Solche Seile werden mit viel Fett versetzt, so dass Wasser nicht in die schmalen Spalten eindringen kann. – Die stärksten Seile dieser Art haben einen Durchmesser von etwa 10 cm und eine Zerreifestigkeit von etwa 10^7 N. Das Gewicht von 1 m Länge beträgt 500 N. Sie werden vor allem für groe Brücken und zur Verankerung von Bohrinseln verwendet.

Eine wichtige Groe ist die *Reilnge*. Darunter versteht man den Quotienten

$$\text{Reilnge} = \frac{\text{Zugfestigkeit } R_m}{\text{Dichte } \rho \cdot \text{Erdbeschleunigung } g}.$$

Die Reilnge ist die maximale Länge, die ein senkrecht über der Erde aufgehängter Stab oder Draht haben darf, ohne unter dem eigenen Gewicht zu reien. Der Wert ist unabhängig vom Querschnitt! Die Reilnge einer hochfesten Aluminiumlegierung (Zugfestigkeit 520 N/mm^2 ; Dichte $2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$) ist 19.6 km. Kohlenstofffasern besitzen eine Reilnge von über 200 km, was das Interesse für kohlenstofffaserverstärkte Verbundstoffe deutlich macht (siehe auch Tab. 9.9, Abschn. 9.7).

Anelastizitt und elastische Hysterese. Im Bereich der Proportionalitätsgrenze der Spannungs-Dehnungs-Kurve (Abb. 9.30) tritt häufig die Erscheinung auf, dass beim Verschwinden der ueren Kräfte die Verzerrung nur zum Teil momentan zurückgeht, während der Rest sich langsam – in Stunden oder gar Tagen – zurückbildet. Diese Erscheinung nennt man *elastische Nachwirkung* oder *Anelastizitt*. Sie tritt besonders dann auf, wenn spannungsinduzierte Diffusionsprozesse ablaufen, z. B. bei den niedrig-schmelzenden Metallen Zink oder Zinn. Während die Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung bei rein elastischer Verformung zeitunabhängig ist, ist das anelastische Verhalten – wie auch alle Diffusionsprozesse – zeit- und temperaturabhängig. Anelastizitt führt auch zur Dämpfung von mechanischen Schwingungen, beispielsweise einer Stahlfeder.

Die Anelastizitt kann folgendermaen beobachtet werden: Bestimmt man für einen Zugstab mit hoher Genauigkeit zuerst bei allmählicher Belastung und dann bei allmählicher Entlastung die Spannungs-Dehnungs-Kurve, so erhält man für den Vorgang der Entlastung ein anderes Kurvenstück *AB*, das nicht mit dem bei Belastung aufgenommenen Stück *OA* zusammenfällt (Abb. 9.32). Nach Entfernung der Belastung zeigt der Stab noch eine Dehnung *OB*, die sich erst durch eine Belastung in entgegengesetzter Richtung (z. B. Druck nach vorher ausgeubtem Zug) wieder rückgängig machen lässt; vergroert man diese entgegengesetzte Belastung (Druck), so erreicht man den punktsymmetrisch zu *A* gelegenen Punkt *A'*. Nach allmählicher Entfernung dieser Belastung weist dann der Stab eine elastische Verkürzung *OB'* auf, die sich erst wieder nach einer positiven Be-

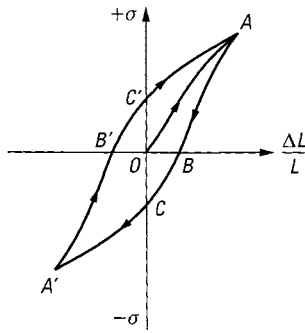


Abb. 9.32 Elastische Hystereseschleife

lastung (Zug) OC' beseitigen lässt. Man nennt diese Erscheinung *elastische Hysterese* (Nachbleiben), weil die Deformation von der Vorbehandlung abhängt; die Kurve heißt *Hysterese-Schleife*; sie umschließt eine endliche Fläche. Denkt man sich in Abb. 9.32 auf der Ordinate die verformende Kraft, auf der Abszisse die Längenänderung ΔL aufgetragen, so stellt der Flächeninhalt der Schleife eine Arbeit dar. Die auf dem Weg $ABCA'$ zur Verkürzung aufgewendete Arbeit ist eine andere als die auf dem Rückweg $A'B'C'A$ zur Verlängerung notwendige. Die Differenz derselben ist eben der Inhalt der Schleife. Dieser Arbeitsbetrag wird während des elastischen Zyklus verbraucht, nämlich in Wärme umgewandelt; wir haben es hier mit einem sogenannten *irreversiblen Prozess* zu tun. Elastische Nachwirkung und elastische Hysterese stören häufig bei Anordnungen, bei denen Drücke oder andere Kräfte durch die elastische Verformung von Stahlfedern oder Membranen angezeigt und gemessen werden sollen.

Dynamische Belastungen. Das bisher beschriebene Festigkeitsverhalten der festen Körper galt für den *statischen* Belastungsfall, d. h. einmalige gleichförmige Belastung über beliebig lange Zeit. Viel häufiger treten jedoch *dynamische* Belastungen auf, also immer wiederkehrende gleichförmige oder ungleichförmige Spannungsspitzen. So wird das oben beschriebene Seil der Seilbahn zwar statisch durch sein Eigengewicht belastet, dynamisch überlagern sich jedoch Kräfte durch die auf- und abfahrende Gondel (gleichförmige dynamische Belastung) sowie Wind oder Sturm (ungleichförmige dynamische Belastung). Risseinleitung und Rissfortschrittsverhalten sind im dynamischen Belastungsfall grundsätzlich anders als bei statischer Belastung, der Bruch des Werkstoffes ist weniger gut vorhersehbar und kann – nach genügend häufigen Lastwechseln – bereits unterhalb der Elastizitätsgrenze erfolgen: Man spricht von *Ermüdung*. Beispielhaft sei ein Draht erwähnt, den man nach mehrmaligem Hin- und Herbiegen leicht zerbrechen kann. Die durch Werkstoffermüdung eingeleiteten Risse bedeuten in der Praxis eine große Gefahr, wie bekannte Schadensfälle z. B. der Luftfahrtindustrie zeigen. Ihre Entstehung und Ausbreitung zu klären, ist Aufgabe der modernen Bruchmechanik.

Härte. Als letzte Eigenschaft der festen Körper soll die *Härte* behandelt werden. Man interessiert sich überwiegend für die Härte der Oberfläche. Sie ist häufig zerstörungsfrei prüfbar, ermöglicht gewisse Aussagen über die Zugfestigkeit und ist insbesondere ein Maß für die Verschleißfestigkeit von Maschinenteilen. Auf Verschleiß beanspruchte Oberflächen werden oft durch werkstofftechnische Maßnahmen *gehärtet* oder mit Hartstoffen beschichtet.

Tab. 9.5 Härtezahlen einiger Mineralien

Mohs-Härte	Mineral	Vickers-Härte HV
1	Talkum	2.4
2	Gips	36
3	Kalkspat	110
4	Flussspat	190
5	Apatit	540
6	Feldspat	800
7	Quarz	1120
8	Topas	1430
9	Korund	2000
10	Diamant	(10 000)

Man kann die Härte als die Größe des Widerstandes definieren, den ein fester Körper dem Eindringen eines anderen entgegensetzt. Ein Körper ist demnach härter als ein anderer, wenn man diesen mit jenem ritzen kann. Das ist die sogenannte *Ritzhärte*. Dabei wird allerdings Material aus dem geritzten Körper entfernt. Die Furche entsteht also nicht nur durch das Eindringen des härteren in den weichen Körper. Auf dieser Methode beruht die Härteskala von Mohs, in der rein empirisch zehn Stoffe mit steigender Härte aufgeführt sind (Tab. 9.5). Die Nummer des einzelnen Stoffes gibt in ganz willkürlichen Einheiten den Grad der Ritzhärte an. Diese Skala wird gern in der Mineralogie benutzt, wo die Härte als ein Erkennungsmerkmal von Mineralien dient.

Dieses Verfahren ist zwar für viele Zwecke recht praktisch, von einer physikalischen Messung kann aber dabei keine Rede sein. In der Technik benutzt man daher im Anschluss an zuerst von H. Hertz angestellte Überlegungen sogenannte *Eindringverfahren* nach Brinell, nach Vickers oder nach Rockwell, die sich lediglich durch die Art des Eindringkörpers unterscheiden und in verschiedenen Ländern unterschiedliche Bedeutung erlangt haben.

Beim *Brinell-Härteprüfverfahren* wird eine gehärtete kleine Stahlkugel mit einer (genormten) Kraft F gegen die glatte, ebene Fläche des zu prüfenden Werkstoffes gedrückt, bis ein bleibender *Härteeindruck* der Fläche A entsteht. Die *Brinell-Härte* HB ergibt sich aus F/A , d. h., ein großer Härteeindruck bedeutet eine niedrige Härte. Brinellhärtewerte sind in Tab. 9.6 aufgeführt. (Da F heute in Newton gemessen wird, die Härtewerte der Werkstofftabellen jedoch nicht geändert werden sollten, wird F/A mit 0.102 multipliziert und der Härtewert ohne Einheit angegeben).

Die Härteprüfung nach *Vickers* erfolgt mit einer Diamantpyramide als Eindringkörper. Der stumpfe Pyramidenwinkel (136°) hat den Vorteil, dass der Quotient F/A , aus dem sich auch hier der *Vickers-Härtewert* HV errechnet, in gewissen Grenzen unabhängig von der Kraft F ist. Somit lassen sich verschiedenste Werkstoffe bis hin zu gehärteten Stählen prüfen. Man verwendet Prüfkraft zwischen 50 und 1000 N: Die Fläche des Härteeindrucks wird aus den Eindruckdiagonalen ermittelt.

Zur Prüfung der Härte sehr kleiner Körper oder sehr kleiner Gefügebestandteile, also zur *Mikrohärteprüfung*, verwendet man ebenfalls eine kleine Vickers-Diamant-Pyramide, die bis zur Spitze sehr exakt geschliffen ist. Man verwendet kleine Kräfte und man misst die Länge der Diagonalen der Pyramide unter dem Mikroskop. Auch werden optische Interferenzverfahren benutzt (Abb. 9.33 und 9.34).

Tab. 9.6 Elastische Konstanten, Zugfestigkeit und Brinell-Härte einiger Stoffe

	K (kN/mm ²)	E (kN/mm ²)	G (kN/mm ²)	μ	R_m (N/mm ²)	HB
Aluminium 99,99 weich	75 ¹⁾	67 ¹⁾	25 ¹⁾	0,34 ¹⁾	35–100	12–15
kalt verfestigt					110–160	25–36
Aluminium-Knetlegierung AlCuMg2, kaltausgehärtet	77	74	28	0,32	440–480	110–130
Kupfer 99,90%	139	125	46	0,35	200–360	130
Eisen, reinst	173	215	84	0,28	180–250	45–55
Baustahl St 37, 0,2%C	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	360–510	110–150
hart gewalzt	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	590–740	170–220
Federstahldraht	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	2) ²⁾	bis 2900	
Blei	42	17	6	0,44	10–15	3
Gold	176	81	28	0,42	140	19
Platin	278	170	62	0,39	200	50
Wolfram, weich	310	400	150	0,29	1100	250
hart gezogen					4000	
Quarzglas	38	76	33	0,17	90	
Technische Gläser (Schott)	66–27	40–90	16–36	0,19–0,28	30–90	
Polyvinylchlorid (PVC)		3	0,5–1	~ 0,3	50–60	

K = Kompressionsmodul; E = Elastizitätsmodul; G = Schub- oder Torsionsmodul; μ = Poisson-Zahl;

R_m = Zugfestigkeit (max. Zugspannung vor dem Reißen); HB = Brinell-Härte

¹⁾ Der Wert unterscheidet sich nicht wesentlich von dem darüber stehenden.

²⁾ Die elastischen Konstanten unterscheiden sich nicht wesentlich von denen des Reinsteisens.

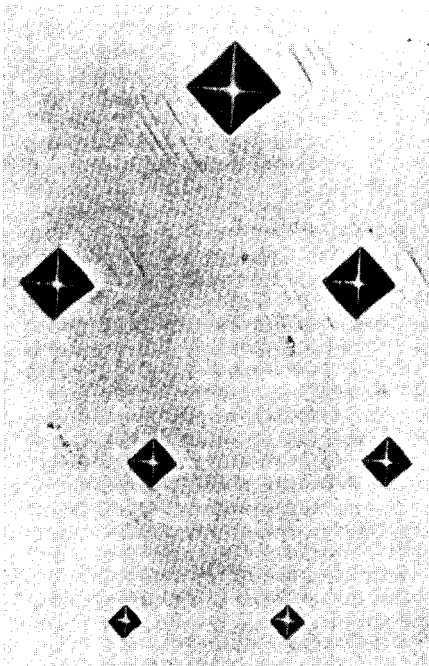


Abb. 9.33 Mikrohärteprüfung nach Vickers. Die Oberfläche von Aluminium zeigt nach verschiedenartigem Polieren verschiedene Härtegrade. Man erkennt dies an der Eindringtiefe der Diamant-Pyramide. Vergrößerung 500-fach (Herkunft des Bildes wie Abb. 9.34).

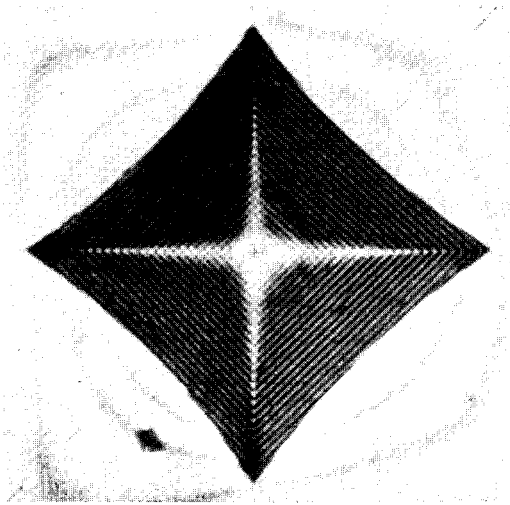


Abb. 9.34 Mikrohärteprüfung nach Vickers. Man misst unter dem Mikroskop entweder die Länge der Diagonalen des Eindrucks oder die Zahl der Lichtinterferenzen. Vergrößerung 1200-fach (nach H. Bückle, Mikrohärteprüfung, Berliner Union, Stuttgart 1965).

Weitere Härteprüfverfahren, auf die hier nur am Rande eingegangen werden kann, beruhen auf der Messung der Eindringtiefe des Prüfkörpers in den zu prüfenden Werkstoff. Zu ihnen gehört das *Rockwell-Verfahren*. Auch bei elastischen Werkstoffen wie Kunststoffen oder Gummi wird die Eindringtiefe – und zwar unter bleibender Belastung – gemessen. Sehr schnell und daher wirtschaftlich sind die Verfahren der Rücksprung-Härteprüfung (*Shore-Härte*). Hierbei wird der Verlust an Rücksprunghöhe eines mit bekannter Geschwindigkeit auf die Werkstückoberfläche aufschlagenden Prüfkörpers (z. B. Hartmetallkugel) gemessen. Bei unveränderten elastischen Konstanten ist die Differenz zwischen Fallgeschwindigkeit und Rückprallgeschwindigkeit proportional zum plastisch verformten Anteil auf der zu prüfenden Oberfläche und damit ein Maß für seine Härte. Bei genauerer Betrachtung des teils elastischen, teils unelastischen Stoßes (s. Abschn. 5.1) wird deutlich, dass das Maß der Rückprallgeschwindigkeit sehr empfindlich von der Oberflächenbeschaffenheit und den Probenabmessungen abhängt, so dass derartige Verfahren nur begrenzt anwendbar sind.

Das von Hertz erstrebte Ziel einer absoluten Härtemessung hat sich bis heute nicht erreichen lassen. Die verschiedenen Härteprüfverfahren sind rein technologischer Art, ihre Ergebnisse kaum untereinander vergleichbar. Auch Härtewerte ein- und desselben Prüfverfahrens sind nur dann vergleichbar, wenn sie unter genormten Bedingungen ermittelt wurden (siehe z. B. DIN 51200, Härteprüfung).

Related topics

Young's modulus, modulus of elasticity, stress, deformation, Poisson's ratio, Hooke's Law.

Principle and task

A flat bar is supported at two points. It is bent by the action of a force acting at its centre. The modulus of elasticity is determined from the bending and the geometric data of the bar.

Equipment

Dial gauge 10/0.01 mm	03013.00	1
Holder for dial gauge	03013.01	1
Flat bars, set	17570.00	1
Knife-edge with stirrup	03015.00	1
Bolt with knife-edge	02049.00	2
Weight holder f. slotted weights	02204.00	1
Spring Balance 1 N	03060.01	1
Tripod base -PASS-	02002.55	2
Support rod -PASS-, square, l 250 mm	02025.55	2
Support rod -PASS-, square, l 630 mm	02027.55	1
Right angle clamp -PASS-	02040.55	5
Slotted weight, 10 g, black	02205.01	10
Slotted weight, 50 g, black	02206.01	6
Measuring tape, l = 2 m	09936.00	1

Problems

1. Determination of the characteristic curve of the dial gauge
2. Determination the bending of flat bars as a function
 - of the force
 - of the thickness, at constant force
 - of the width, at constant force
 - of the distance between the support points at constant force
3. Determination the modulus of elasticity of steel, aluminium and brass.

Set-up and procedure

The set up is as shown in Fig. 1. The dial gauge is mounted on the knife edge with stirrup. The flat bars must be positioned accurately **on** the two supporting knife edges having the possibility to move in x and y direction. The geometric data of the set up and the bars must be recorded several times or at different positions.

As the dial gauge possesses a restoring force which obeys Hooke's Law $F \sim s$, its characteristic curve must first of all be determined.

Fig.1: Experimental set-up for determining the modulus of elasticity.

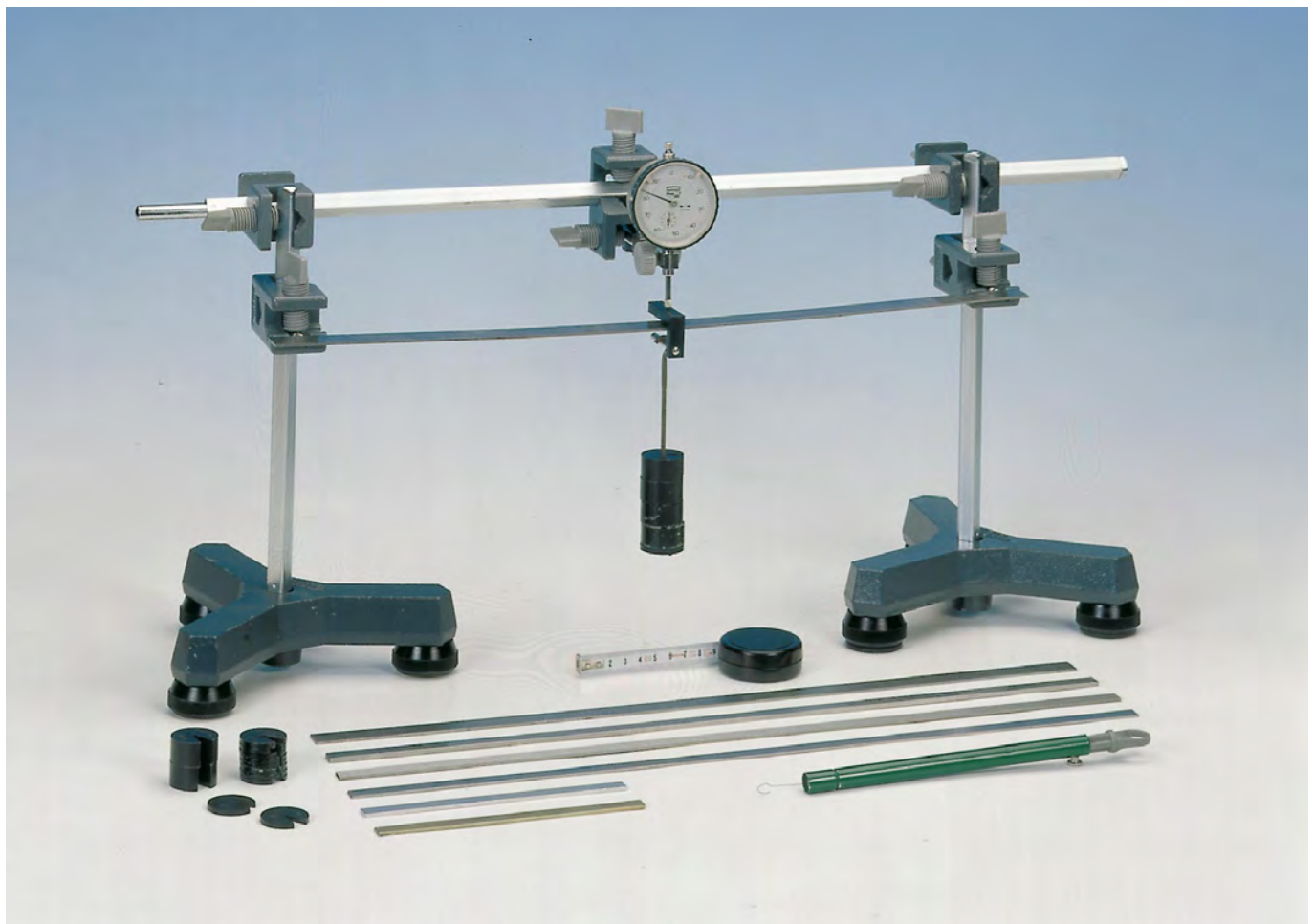
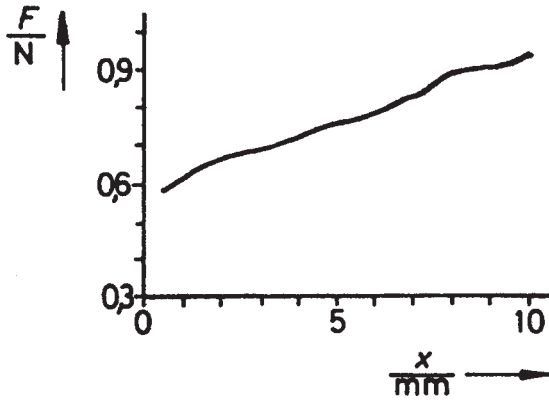


Fig. 2: Characteristic curve of a dial gauge.



The resulting force F_r of the dial gauge is the sum of

$$F_r = F_h + F_f$$

where

F_h = Static friction force (constant)

F_f = restoring force ($F_f \sim s$)

Since the static friction force always acts opposed to the direction of motion, care should be taken of constant direction of force while recording of the characteristic curve of the dial gauge as well as during performance of the experiment. Additionally, the plunger is manually raised (the probe is unloaded) and then gently lowered. Due to this procedure the resulting force F_r is:

$$F_r = F_f - F_h.$$

a) Characteristic curve of the dial gauge.

Dynamometer and plunger of the dial gauge are so mounted, that the dial gauge shows full deflection.

Through a reduction of the tension of force to the dynamometer a force results according to the above conditions.

With the help of the spring balance the characteristic curve of the dial gauge has to be recorded.

During experimentation the forces must be corrected accordingly. This means the resulting force F_r must be calculated.

Hence, the effective force is the sum of the weights of the additional masses and the resulting force of the dial gauge.

Theory and evaluation

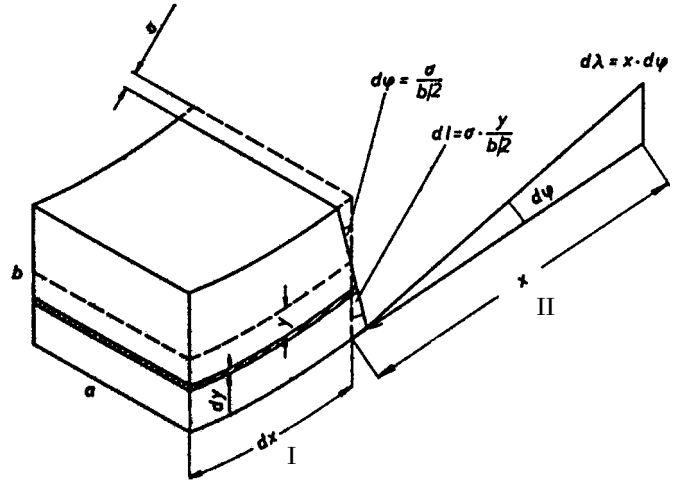
If a body is regarded as a continuum, and \vec{r}_0 or \vec{r} defines the local vector of a point P in its undeformed and deformed state respectively, then, for small displacement vectors

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

the deformation tensor \hat{d} is:

$$d_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

Fig. 3: Deformation of a bar.



The forces $d\vec{F}$ which act upon an element of volume of the body whose edges are intersected parallel to the coordinate surfaces will be described by the stress tensor $\hat{\sigma}$.

This allocates a stress \vec{p} to each area element dA defined by the unit vector \vec{e} in the direction of the normal.

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

$$\vec{p} = \vec{e} \odot \hat{\sigma}$$

From Hooke's Law we obtain the relationship between \hat{d} and $\hat{\sigma}$:

$$\tau_{ik} = \sum_{l,m} c_{ik}^{lm} d_{lm}$$

The tensor $\hat{\sigma}$ is symmetrical for an elastic body so that of the 81 components only 21 remain. This number is reduced to 2 for the isotropic elastic body, i.e. the modulus of elasticity E and either the shear modulus G or the Poisson ratio μ :

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{E}{1+\mu} \left(d_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} (d_{11} + d_{22} + d_{33}) \right) \\ \tau_{12} &= G d_{12} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\mu} d_{12} \end{aligned} \quad (1)$$

and analogously for τ_{22} , τ_{33} , τ_{13} , τ_{23} .

If a force acts in only one direction then

$$\tau_{22} = \tau_{33} = 0,$$

so we obtain

$$\tau_{11} = E \cdot d_{11}$$

If a bar of height b and width a , supported at both ends by supports (separated by a distance L), is subjected to a force F_y acting at its centre, it behaves like a bar supported in the middle, its two ends being subjected to a force $F_y/2$ in the opposing direction. In order to express the bending λ as a

function of the modulus of elasticity E , let us first consider an element of volume

$$dV = dx \cdot a \cdot b$$

the upper layer of which is shortened on bending, and the bottom layer lengthened. The length of the central layer remains unchanged (neutral fibre).

In fig. 3, I and II denote the sides before and after deformation.

Using the symbols given in fig. 3, we obtain:

$$d\lambda = x \cdot d\phi = \frac{2\sigma x}{b}$$

The elastic force dF_x which produces the extension dI , according to (1), is

$$\frac{dF_x}{ds} = E \frac{dI}{dx}$$

where $ds = a \cdot dy$ is the area of the rotated layer.

The force produces a torque

$$dT_z = y dF_x = \frac{2Ea\sigma}{b \cdot dx} y^2 dy$$

The sum of these torques produced by the elastic forces must be equal to the torque produced by the external force $Fy/2$.

$$\frac{Ea\sigma b^2}{6dx} = \frac{Fy}{2} \cdot x$$

from which we obtain

$$d\lambda = \frac{6Fyx^2}{Eab^3} dx$$

and, after integration, the total bending

$$\lambda = \frac{1}{4} \left(\frac{L}{b} \right)^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{Fy}{E}$$

Table 1: The modulus of elasticity for different materials

Material	Dimensions [mm]	$E [N \cdot m^{-2}]$
Steel	10×1.5	$2.059 \cdot 10^{11}$
Steel	10×2	$2.063 \cdot 10^{11}$
Steel	10×3	$2.171 \cdot 10^{11}$
Steel	15×1.5	$2.204 \cdot 10^{11}$
Steel	20×1.5	$2.111 \cdot 10^{11}$
Aluminium	10×2	$6.702 \cdot 10^{10}$
Brass	10×2	$9.222 \cdot 10^{10}$

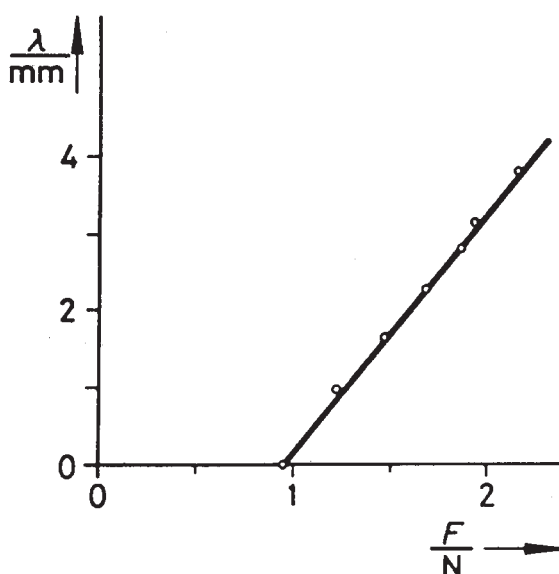


Fig. 4: Bending of a bar as a function of the force (steel, $L = 0.48$ m, $a = 10$ mm, $b = 1.5$ mm).

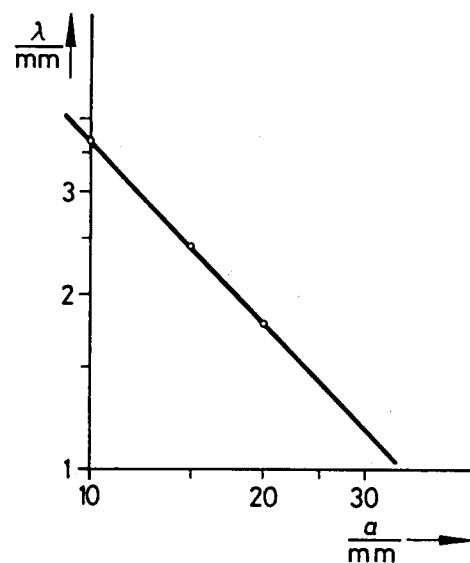


Fig. 5: Bending of a bar as a function of its width, at constant force (steel, thickness = 1.5 mm).

Fig. 6: Bending of a bar as a function of its length, at constant force.

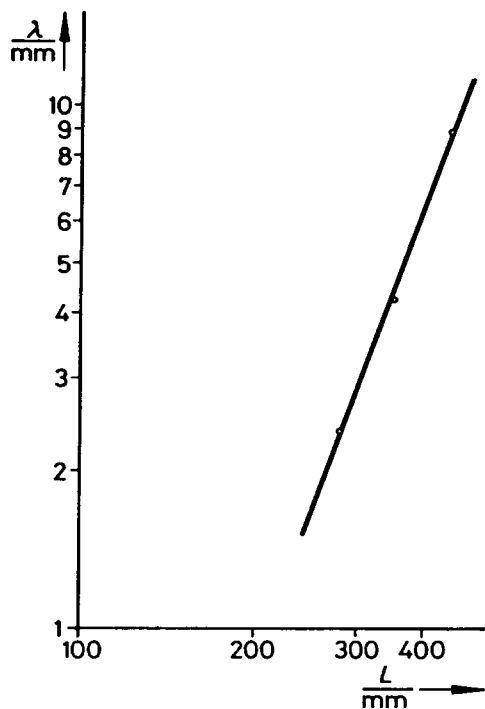


Fig. 7: Bending of a bar as a function of its thickness, at constant force (steel, width = 10 mm).

