Vorgaben zur Vorbereitung auf die Versuche P1-70/71/81

Die Vorbereitung (mündlich und schriftlich) sollte mindestens die nachfolgenden Themen umfassen:

- Spannung Strom und Widerstand
- Innenwiderstand
- Spannungsrichtige Messschaltung
- Stromrichtige Messschaltung
- Wheatstonebrücke
- Kompensationsschaltung
- Spule, Kondensator, Widerstand
- Wechselstromgrößen (komplexer Widerstand von Induktivität und Kapazität)
- Unterschiede Gleich- und Wechselstrom
- LRC-Schwingkreis
- Resonanz
- Phase/Phasenverschiebung
- Die Fragen in den einzelnen Aufgaben

• Nicht nur die Definition, sondern auch den Sinn der genannten Themen verstehen.
• Im Voraus Gedanken zum Aufbau der jeweiligen Schaltungen machen.

4.3 Wechselstrom

4.3.1 Definitionen, Erzeugung, Messung

In diesem Abschnitt geht es um **niederfrequente Wechselströme** im Frequenzbereich rotierender Maschinen, insbesondere um Wechselstrom von 50 Hz, wie er im öffentlichen elektrischen Netz angeboten wird. Hochfrequente Wechselströme werden am Anfang des nächsten Kapitels behandelt.

Symbole für Strom und Spannung. Zur Kennzeichnung der verschiedenen Arten von Strom und Spannung werden von nun an die Größen symbolisch unterschieden wie hier am Beispiel der Spannung dargestellt ist:

u: Augenblickswert,
$\hat{u}$: Scheitelwert,
U_{eff}: Effektivwert,

Bergmann Schaefer,
Band 2, Auflage 9, Seite 214-232

U: Effektivwert, wenn keine Verwechslung mit Gleichspannung zu befürchten ist.
$U(t)$: zeitabhängige Spannung, allgemein.

Für sinusförmigen Wechselstrom der Kreisfrequenz ω gilt

$$i = \hat{\imath} \sin(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \text{Phasenwinkel},$$
$$I_{\text{eff}} = \hat{\imath}/\sqrt{2}. \tag{4.76}$$

Nicht-sinusförmige Wechselströme. Der Begriff „Wechselstrom" beinhaltet nur, dass der Strom im zeitlichen Mittel gleich null ist. Darüber hinaus sind Wechselströme im allgemeinen zeitlich periodisch, d. h. die Zeit-Kurve $i(t)$ wiederholt sich nach jeder Periode T (Abb. 4.29a).

Der Kehrwert der Periode T ist die **Grundfrequenz** f des nicht-sinusförmigen Wechselstroms. Mithilfe der **Fourier-Analyse** (Abschn. 15.7) lässt sich jeder nicht-sinusförmige Wechselstrom mit der Periode T als eine Summe von Sinus- und Kosinus-Strömen mit den Perioden T/n ($\mathrm{n} = 1, 2, 3 \ldots \infty$) darstellen. Deshalb können wir uns hier auf sinusförmige Wechselströme mit Phasenwinkel beschränken.

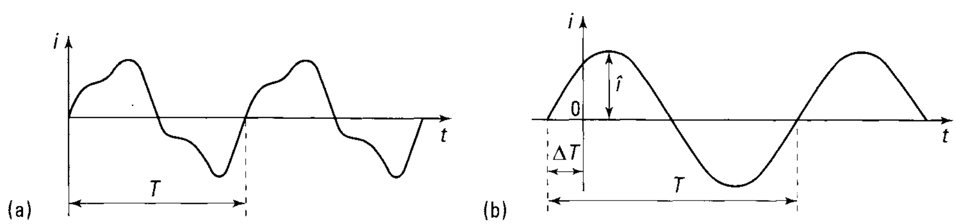

Abb. 4.29 Zeitlicher Verlauf von Wechselströmen: (a) nicht-sinusförmig, (b) sinusförmig.

Sinusförmige Wechselströme. Darunter versteht man alle Kurvenformen $i(t)$, die bei geeigneter Wahl des Zeitachsen-Nullpunktes eine Sinuskurve ergeben würden, deren Nulldurchgang von $(-)$ nach $(+)$ aber i. A. nicht bei $t = 0$ sondern bei $t = -\Delta T$ liegt (Abb. 4.29b).

Statt der Frequenz $f = 1/T$ und dem Zeitinterval ΔT, um das die Sinuskurve auf der Zeitachse versetzt ist, wird fast ausschließlich die **Kreisfrequenz** (*angular frequency*) ω und der **Phasenwinkel** (*phase angle*) φ verwendet:

$$\omega = 2\pi f, \quad \varphi = 2\pi \cdot \Delta T/T. \tag{4.77}$$

Im Zusammenhang mit der komplexen Schreibweise von Wechselstrom-Größen wird die Kosinusfunktion bevorzugt.

Erzeugung von Wechselspannung. Bei der Drehung einer Leiterschleife oder Spule im Magnetfeld B um eine in der Schleifenebene liegende und zum Magnetfeld senkrechte Achse (Abb. 4.30a) mit der Winkelgeschwindigkeit ω wird eine Wechselspannung induziert, die über Schleifring-Kontakte abgenommen werden kann.
Der Drehwinkel α gibt die Lage der Leiterschleife AB bezüglich der horizontalen Lage CD (Abb. 4.30b). Der von der Schleife umschlossene magnetische Fluss Φ ist für $\alpha = 0$ maximal und null für $\alpha = 90°$ sowie $270°$. Mit der Windungsfläche A, der

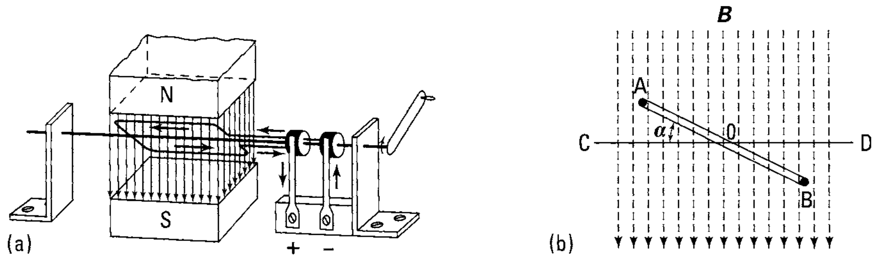

Abb. 4.30 (a) Anordnung zur Erzeugung einer Wechselspannung durch Drehen einer Drahtschleife im homogenen magnetischen Feld; (b) Schnitt durch die Schleife senkrecht zur Drehachse.

magnetischen Feldstärke B und $\alpha = \omega t$ lassen sich Fluss und Flussänderung darstellen als

$$\Phi = A\ B \cos \omega t,$$
$$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\omega\ A\ B \sin \omega t. \tag{4.78}$$

Die induzierte Spannung ist also eine Sinusfunktion von ωt.

Im Prinzip muss zur Erzeugung der Spannung keine Arbeit geleistet werden, denn die Verluste durch Reibung der Schleifkontakte und der Achsenlager sind keine prinzipiellen Verluste und könnten durch technische Verbesserungen immer weiter verringert werden. Erst wenn die Induktionsschleife über die Schleifring-Kontakte Teil eines geschlossenen Stromkreises ist und ein Wechselstrom i fließt, muss zur Drehung der Schleife im magnetischen Feld im zeitlichen Mittel (dargestellt durch Symbole in spitzen Klammern) die Leistung

$$P = \langle i\ u \rangle \tag{4.79}$$

aufgebracht werden, denn die Schleife, durch die der Strom i fließt, erfährt im magnetischen Feld ein Drehmoment, das der Drehung entgegenwirkt (Lenz'sche Regel).

Mithilfe der Induktion ist es nun möglich, im Rahmen des klassischen Elektromagnetismus Strom zu erzeugen und mechanische Arbeit in elektrische Energie („Strom“) umzuwandeln. Die bisher erwähnten Stromquellen (elektrochemische Batterien, Thermoelektrizität), deren Wirkungsweisen erst im Rahmen des atomaren Elektromagnetismus richtig zu verstehen sind, können nun durch Induktionsstromquellen ersetzt werden, die schon im Rahmen des klassischen Elektromagnetismus vermittelbar sind.

Messung von Wechselstrom. Ein mechanisches Messinstrument mit einem zum Strom proportionalen Ausschlag ist zu träge, um den schnellen Umkehrungen des Wechselstroms folgen zu können; dem zeitlichen Mittelwert „null“ entsprechend bleibt der Zeiger (mit kleinen Erzitterungen) in der Nullage stehen.

Aber ein mechanisches Messinstrument, dessen Ausschlag proportional zum Quadrat des Stromes ist, stellt sich auf den von null verschiedenen zeitlichen Mittelwert vom Quadrat des Stromes ein. Ein Messinstrument, dessen Anzeige vom Quadrat des Stromes abhängt, ist das Hitzdraht-Amperemeter (Abb. 3.9). Wurde die Skala zuvor mit Gleichstrom geeicht, dann zeigt das Instrument den so genannten

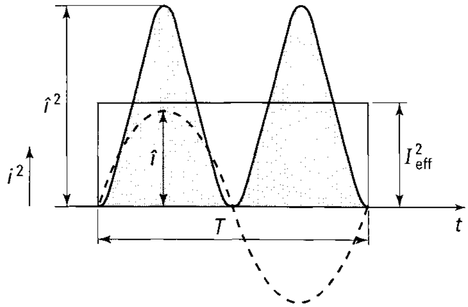

Abb. 4.31 Zum Effektivwert: Der Strom variiert zwischen $+\hat{\imath}$ und $-\hat{\imath}$, das Strom-Quadrat zwischen $\hat{\imath}^2$ und 0 mit dem Mittelwert $\hat{\imath}^2/2$.

Effektivwert (Abb. 4.31) des Stromes, definiert als die Wurzel vom zeitlichen Mittelwert des Strom-Quadrats. Es gilt

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \langle i^2 \rangle^{1/2} \quad \text{generell,} \\ &= \hat{\imath}/\sqrt{2} \quad \text{für sinusförmigen Strom.} \end{aligned} \tag{4.80}$$

Der Faktor $1/\sqrt{2}$ ergibt sich, weil der Mittelwert von $\sin^2\omega t$ über eine Periode gleich 1/2 ist.

Das Verhältnis von Scheitelwert und Effektivwert heißt **Scheitelfaktor**; für sinusförmigen Strom ist dieser also $\sqrt{2} = 1.414$. Zur Berechnung des Scheitelwertes aus dem Effektivwert muss man die Kurvenform des Wechselstromes kennen.

Schaltet man in eine Wechselstromleitung einen **Gleichrichter**, also eine Vorrichtung, die den Strom nur in eine Richtung hindurchfließen lässt, dann kann man gewöhnliche Drehspulinstrumente und auch hochempfindliche Gleichstrom-Messinstrumente (Spiegelgalvanometer) benutzen. Im Prinzip wirkt ein Gleichrichter wie ein Schalter, der solange geschlossen bleibt, wie der von (+) nach (−) fließende Strom den Gleichrichter in Durchlassrichtung (Spitze im Gleichrichtersymbol als Strompfeil, Abb. 4.32) passiert. Sobald die angelegte Spannung ihre Polarität ändert und den Strom in Sperrichtung durch den Gleichrichter treiben will, wirkt er wie ein geöffneter Schalter.

Bei Verwendung eines einzelnen Gleichrichters in der Einwegschaltung (siehe Abb. 4.32a) fließt nur in jeder zweiten Halbperiode ein Stromstoß durch das Ins-

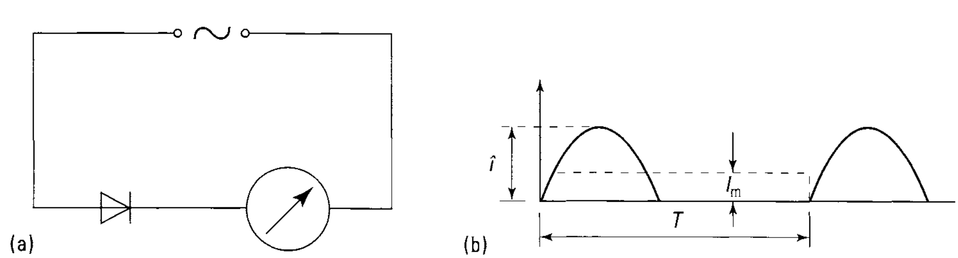

Abb. 4.32 Einweg-Gleichrichterschaltung: (a) Schaltung, (b) Kurvenform.

trument (Abb. 4.32b). Dieses zeigt dann den Mittelwert I_m, der für sinusförmige Wechselströme mit Scheitel- und Effektivwert wie folgt verknüpft ist:

$$I_{\mathrm{m,Einweg}} = \hat{\imath}/\pi = I_{\mathrm{eff}} \sqrt{2}/\pi = 0.450\ I_{\mathrm{eff}}. \tag{4.81}$$

(Die Fläche unter einer Halbwelle von $\hat{\imath} \cdot \sin\omega t$ ist gleich $2\hat{\imath}$; geteilt durch die Periode 2π ergibt sich der Mittelwert $\hat{\imath}/\pi$.)

Durch Verwendung von vier Gleichrichtern in der so genannten **Graetz'schen Vollwegschaltung** (Abb. 4.33a) kann man erreichen, dass jede Halbschwingung des Wechselstroms in der gleichen Richtung durch das Instrument fließt (Abb. 4.33b). In diesem Fall ist der gemessene Mittelwert doppelt so groß wie bei der Einwegschaltung:

$$I_{\mathrm{m,Vollweg}} = 2\ \hat{\imath}/\pi = I_{\mathrm{eff}}\ 2\sqrt{2}/\pi = 0.900\ I_{\mathrm{eff}}. \tag{4.82}$$

Das Verhältnis von Effektiv- und Vollweg-Mittelwert wird **Formfaktor** genannt. Für Sinusstrom beträgt er $\pi/2\sqrt{2} \approx 1.11$. In der Praxis sind die mit Gleichrichtern versehenen Messinstrumente so geeicht, dass sie für sinusförmige Ströme den Effektivwert anzeigen. Vielfach-Messinstrumente mit Umschalter für Gleich- und Wechselstrommessungen haben zwei verschiedene Skalen.

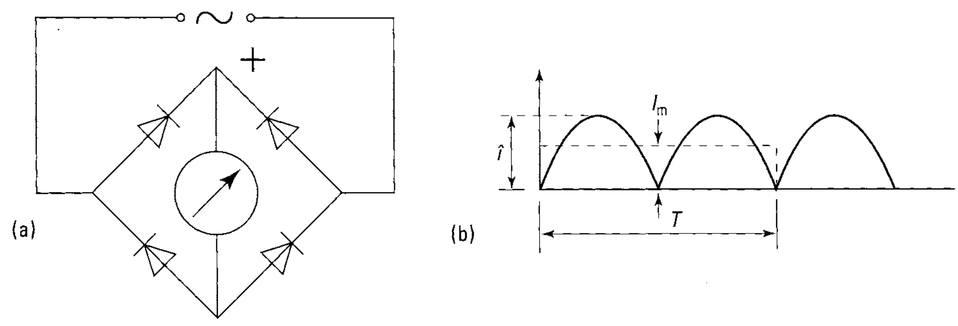

Abb. 4.33 Vollweg-Gleichrichterschaltung nach Graetz: (a) Schaltung, (b) Kurvenform.

Messung der Wechselstromfrequenz. Für niederfrequente Wechselströme verwendet man den **Zungenfrequenzmesser**, z. B. wenn man Abweichungen von der Nennfrequenz beobachten möchte. Das Messwerk eines solchen Gerätes (Abb. 4.34) besteht aus einer Anzahl abgestimmter Stahlzungen, die je nach Umfang des Messbereichs in einer oder mehreren Reihen vor dem Pol eines Elektromagneten angeordnet sind. Fließt Wechselstrom durch die Magnetspule, so wird nur diejenige Zunge in kräftige Resonanzschwingungen versetzt, deren Eigenschwingungszahl gleich der Polwechselzahl (also der doppelten Frequenz des Wechselstromes) ist. Die Zungen tragen am vorderen Ende eine quadratische weiße Platte, die beim Schwingen der Zunge verbreitert erscheint, sodass man an einer über den Zungen befindlichen Skala die Frequenz ablesen kann (Abb. 4.34b). Im Labor werden Frequenzen mithilfe des Oszilloskops bestimmt; für sehr genaue Frequenzmessungen können die positiven Halbwellen über eine hinreichend lange Messzeit elektronisch gezählt werden.

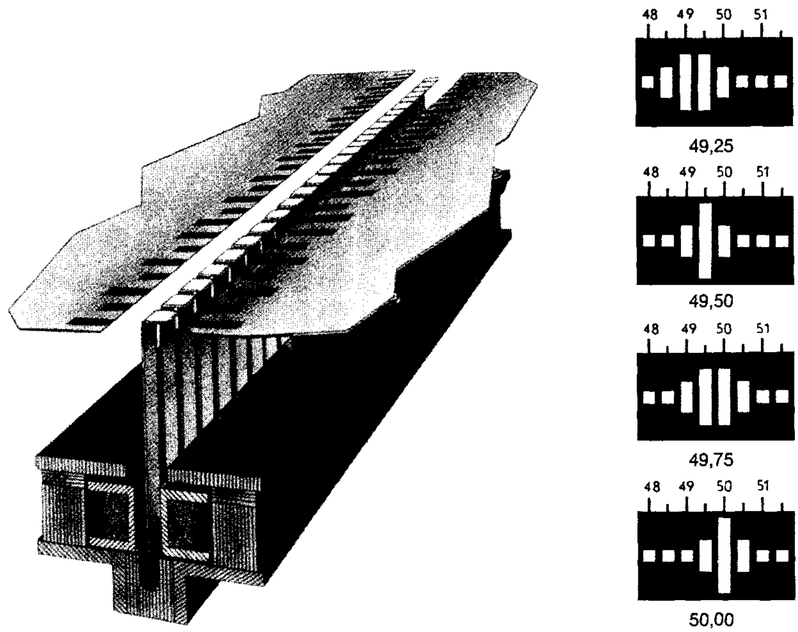

Abb. 4.34 Zungenfrequenzmesser (Vibrations-Messwerk): (a) Aufbau, (b) Bild der Zungen bei vier verschiedenen Frequenzen (Werkbild Hartmann & Braun).

4.3.2 *RLC*-Stromkreise

Im Folgenden werden nur noch Ströme der Kreisfrequenz ω betrachtet, die die Zeitabhängigkeit

$$i = \hat{\imath} \cos(\omega t + \varphi) \tag{4.83}$$

besitzen; so wird also z. B. ein Sinus-Strom durch die Phase $\varphi = -\pi/2$ beschrieben.

Als passive Zweipole betrachten wir die durch die Größen R, L und C charakterisierten Bauelemente:

- Der Widerstandswert R steht für das Bauelement „ohmscher Widerstand“.
- Die Induktivität L steht für das Bauelement „Spule“, auch „Drosselspule“ oder kurz „Drossel“ genannt, ohne oder mit Eisenkern.
- Die Kapazität C steht für das Bauelement „Kondensator“, ohne oder mit Dielektrikum.

Für die Verknüpfung von Strom und Spannung an diesen Bauelementen gelten die folgenden Beziehungen:

$$u_R = i_R\, R \quad \text{(Ohm'sches Gesetz)}, \tag{4.84}$$

$$u_L = L\, \mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t \quad \text{(Definition von } L\text{)}, \tag{4.85}$$

$$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t = i_C/C \quad (\text{aus } u = Q/C \text{ und } \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = i). \tag{4.86}$$

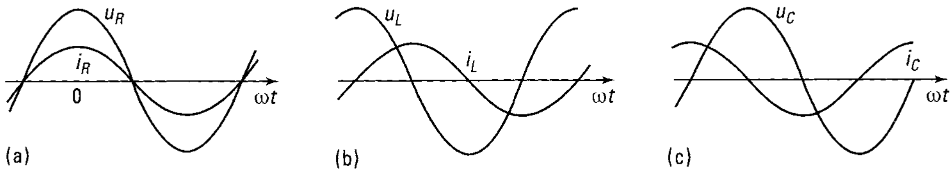

Abb. 4.35 Phasenbeziehung zwischen Wechselspannung und Wechselstrom an den verschiedenen Bauelementen: (a) Widerstand, (b) Spule, (c) Kondensator.

Man sieht sofort, dass u_R und i_R nach Gl. (4.84) gleichphasig sind (Abb. 4.35a). Mit i_L nach Gl. (4.83) eingesetzt in Gl. 4.85) ergibt sich

$$\begin{aligned} u_L &= -\omega L\,\hat{\imath}_L \sin \omega t \\ &= \omega L\,\hat{\imath}_L \cos(\omega t + \pi/2). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Das heißt, bei der Spule eilt die Spannung dem Strom um eine Viertelperiode (90°) voraus (Abb. 4.35b).

Setzt man in Gl. (4.86) die Ableitung einer kosinusförmigen Spannung ein, erhält man einen zu $-\sin\omega t \cdot (\omega C)$ proportionalen Strom. Beim Kondensator eilt also der Strom der Spannung um eine Viertelperiode voraus (Abb. 4.35c) oder, anders formuliert, die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode hinterher. Das führt dann zu der auf einen kosinusförmigen Strom bezogene Beziehung

$$u_C = (\omega C)^{-1}\,\hat{\imath}_C \cos(\omega t - \pi/2). \tag{4.88}$$

Das Ohm'sche Gesetz für Wechselstrom. Quadriert man die Strom-Spannungs-Beziehungen (Gl. (4.84), (4.87), (4.88)) und bildet deren zeitlichen Mittelwert, dann erhält man Verknüpfungen von Effektivspannung und Effektivstrom an Widerstand, Kondensator und Spule wie folgt:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff},R} &= R\,I_{\text{eff},R}, \\ U_{\text{eff},L} &= \omega L\,I_{\text{eff},L}, \\ U_{\text{eff},C} &= (\omega C)^{-1}\,I_{\text{eff},C}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Noch ähnlicher werden diese Beziehungen dem Ohm'schen Gesetz, wenn man den Index „eff" weglässt, wie es in der Wechselstrom-Technik oft geschieht, solange keine Verwechslung mit Gleichspannung und Gleichstrom zu befürchten ist, und **Wechselstrom-Widerstände** einführt:

$$U_R = R\,I_R,$$
$$U_L = R_L\,I_L \quad \text{mit} \quad R_L = \omega L,$$

und

$$U_C = R_C\,I_C \quad \text{mit} \quad R_C = (\omega C)^{-1}\,. \tag{4.90}$$

Zur Demonstration der Frequenzabhängigkeit der Wechselstromwiderstände verwenden wir drei Quellen für Gleichstrom und für Wechselstrom von 50 Hz und 500 Hz, die wir auf gleiche (Effektiv-)Spannung einstellen und nacheinander mit dem Versuchs-Stromkreis verbinden. Dieser enthält ein für Gleich- und Wechselstrom geeignetes Amperemeter, eine Glühlampe und eines der drei Bauelemente R (z. B. $R = 100\,\Omega$), L (möglichst groß, mit Eisenkern $L \approx 1$ H), und C (z. B. $C \approx 4\,\mu$F), mit einem Dreifachschalter wahlweise zuschaltbar. Man beachte bei dieser Demonstration, dass keines der Bauelemente ideal ist; dabei ist insbesondere an den ohmschen Widerstand der Spule R_L zu denken. Hier nehmen wir an, dass R_L kleiner als R ist, und dass mithilfe eines Vorwiderstandes dafür gesorgt wird, dass der Widerstand gleich R ist, wenn sich die Spule im Stromkreis befindet.

Nun können folgende Demonstrationen durchgeführt werden:

1. Wir schalten R in den Stromkreis und legen nacheinander die Gleichspannung und die Wechselspannungen der beiden Frequenzen an. Mit gleichen (effektiven) Spannungen und einem induktivitätsarmen (bifilar gewickelten) Widerstand zeigt das Amperemeter in allen drei Fällen denselben Strom an, und die Glühlampe brennt gleich hell. (Eine Abnahme des Stromes und der Lampenhelligkeit mit zunehmender Frequenz wäre auf einen erheblichen Wert von L_{R} zurückzuführen.)
2. Wir schalten die Spule, zuerst ohne Eisenkern, in den Stromkreis. Bei Gleichspannung erhalten wir denselben Strom wie für den Widerstand R, wenn R_{L} + Vorwiderstand gleich R ist. Bei Wechselspannung aber sinkt die Stromstärke und die Lampe glüht dunkler, dies umso mehr, je höher die Frequenz ist. Erhöhen wir die Induktivität der Spule durch Einschieben des Eisenkerns, so sinkt der Strom weiter; bei 500 Hz geht praktisch kein Strom mehr durch die Spule, die Lampe erlischt. Da mit dem Eisenkern nur die Induktivität erhöht wird, der Gleichstromwiderstand aber unverändert bleibt, zeigt dieser Versuch, dass die Spule in einem Wechselstromkreis wie ein Widerstand wirkt, der umso höher ist, je größer Induktivität und Frequenz sind.
3. Wir schalten schließlich den Kondensator C in den Stromkreis. Beim Anlegen der Gleichspannung schlägt das Amperemeter für einen Augenblick aus, und die Lampe blitzt kurzzeitig auf. Beides rührt von dem auf den Kondensator fließenden Ladestrom her. Nachdem der Kondensator auf die Gleichspannung aufgeladen ist, ist der Kreis stromlos. Der Kondensator wirkt wie eine Unterbrechung des Stromkreises. Legen wir aber Wechselstrom an, so zeigt das Amperemeter einen Dauerausschlag und die Lampe leuchtet. Der Übergang von 50 zu 500 Hz lassen Strom und Lampenhelligkeit ansteigen. Das zeigt, dass der Kondensator einen Wechselstromleitwert besitzt, der mit der Frequenz zunimmt.

Bestimmung von Induktivität und Kapazität. Legt man eine sinusförmige Wechselspannung an das Bauelement, dann lassen sich die Wechselstromwiderstände (Gl. (4.90)) und damit L und C aus einer Strommessung bestimmen, wenn das Bauelement (näherungsweise) als ideal betrachtet werden kann.

Wenn eine genügend hohe Frequenz gewählt wird, kann der ohmsche Widerstand einer Spule vernachlässigt werden; anderenfalls muss er in einer Gleichstromschaltung (z. B. der Wheatstone'schen Brücke) bestimmt und entsprechend in Abzug gebracht werden. Die weiter unten hergeleiteten Beziehungen ergeben für die experimentelle Bestimmung der Induktivität die Gleichung

$$(\omega L)^2 = (U^2/I^2)_{\text{Wechselst.}} - (U^2/I^2)_{\text{Gleichst.}}. \tag{4.91}$$

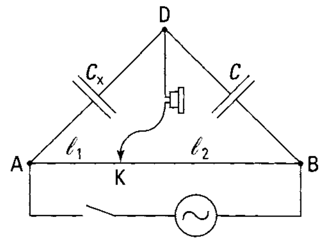

Abb. 4.36 Wheatstone'sche Brückenschaltung zum Vergleich von Kapazitäten.

Die Wheatstone'sche Brücke erlaubt auch einen Vergleich von Wechselstromwiderständen, z. B. Kondensatoren (Abb. 4.36). Man vergleicht dabei die unbekannte Kapazität C_x mit einer bekannten Kapazität C. Der Schleifkontakt K auf dem Widerstandsdraht AB muss so eingestellt werden, dass in dem in der Brücke eingeschalteten Telephon kein Ton mehr hörbar, die Brücke also stromlos ist. [Anstelle des Telephons kann auch ein empfindliches Galvanometer mit Gleichrichter verwendet werden.] Ist der Brückenzweig stromlos, dann ergibt sich C_x aus C und dem Verhältnis der Drahtlängen AK und KB:

$$C_x = C\,\ell_1/\ell_2. \tag{4.92}$$

Für Gleichstrom wirkt ein Kondensator wie eine Unterbrechung des Stromkreises und eine Spule wirkt wie ein Kurzschluss; für Wechselstrom besitzt dagegen eine Spule mit hohem ωL einen hohen Widerstand und ein Kondensator mit hohem ωC einen hohen Leitwert. Diese Tatsachen kann man ausnutzen, um Gleich- oder Wechselspannung durch Kurzschließen einer Masche von Teilen eines Netzwerkes fernzuhalten oder um Stromzweige für Gleich- oder Wechselstrom zu sperren. Die Bezeichnung „Drosselspule" bezieht sich auf die Eigenschaft der Spule, hochfrequenten Strom fernzuhalten. „Kopplungskondensatoren" werden verwendet, um hochfrequente Ströme aus einem Gleichstrom-Netzwerk „auszukoppeln".

Schein-, Wirk- und Blindleistung. Die Definition der elektrischen Leistung als Produkt von Strom und Spannung wird auch für Wechselstrom beibehalten, hier aber nicht auf das Produkt der Augenblickswerte von Strom und Spannung bezogen, sondern auf den zeitlichen Mittelwert über die Periode T. Da aber i. A. Strom und Spannung nicht gleichphasig sind, ist mit einem Phasenunterschied von φ zu rechnen:

$$\begin{aligned} P &= \langle i u \rangle \\ &= T^{-1} \int_0^T i(t) \cdot u(t)\, \mathrm{d}t \\ &= (\hat{i}\hat{u}/T) \int_0^T \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t \pm \varphi)\, \mathrm{d}t \\ &= \hat{i}\hat{u}\, \frac{1}{2} \cos\varphi \\ &= I\, U \cos\varphi, \end{aligned} \tag{4.93}$$

wobei jetzt bei I und U die Indizes „eff" weggelassen werden. Diese Leistung wird als **Wirkleistung** (*effektive (real) power*) bezeichnet, das Produkt $I \cdot U$ als **Scheinleistung** (*apparent power*). Die Größe cos φ wird **Leistungsfaktor** genannt. Abb. 4.37

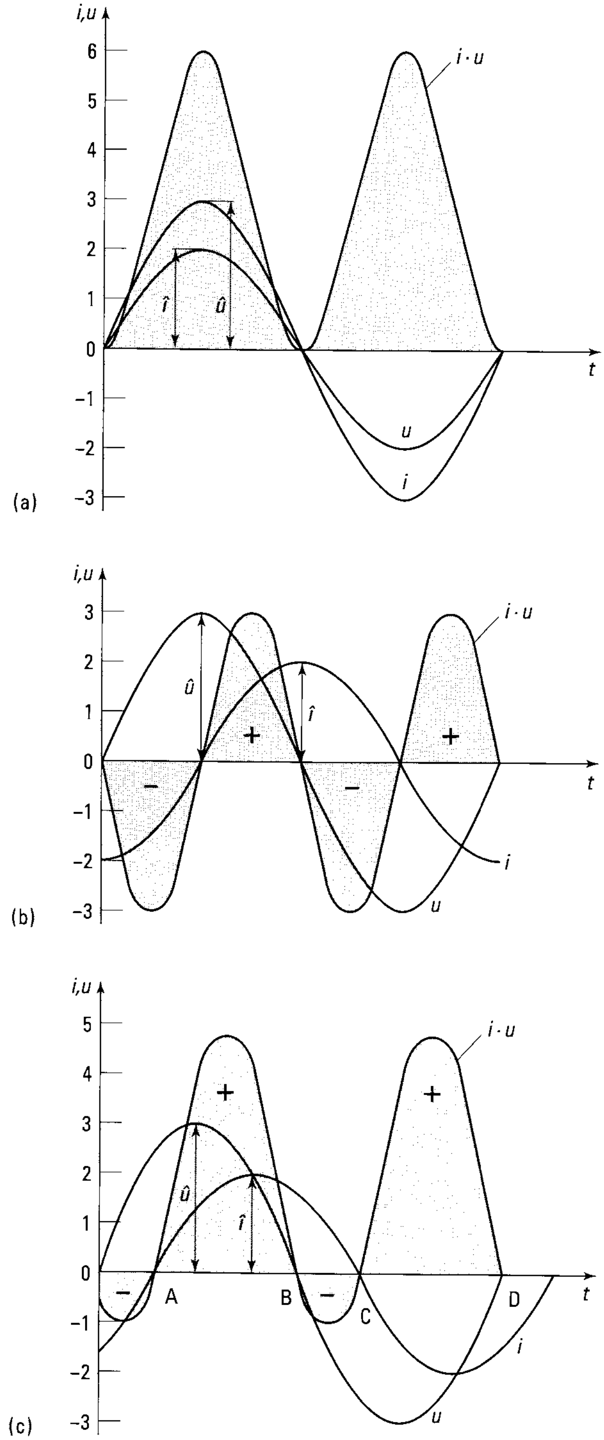

Abb. 4.37 Leistungskurve $i \cdot u$ für verschiedene Phasenwinkel: (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pi/2 = 90°$, (c) $\varphi = \pi/4 = 45°$ mit Nulldurchgängen bei A, B, C, D.

Bergmann Schaefer,
Band 2, Auflage 9, Seite 214-232

zeigt den momentanen Wert des Produktes $i(t) \cdot u(t)$ als Funktion der Zeit für verschiedene Phasenwinkel zwischen i und u. Die Größe $I \cdot U \cdot \sin\varphi$ wird **Blindleistung** (*idle or waltless power*) genannt. Wegen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ folgt

$$(P_{\text{Wirk}})^2 + (P_{\text{Blind}})^2 = (P_{\text{Schein}})^2. \tag{4.94}$$

Die Aufspaltung des um den Winkel φ phasenversetzten Stroms in zwei Komponenten proportional zu $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ wird im Zeigerdiagramm (unten) leicht verständlich.

Wichtig ist, dass die idealen Wechselstrom-Bauelemente L und C keine Wirkleistung aufnehmen. Reale Spulen haben einen bei kleinen Frequenzen nicht vernachlässigbaren ohmschen Widerstand. Reale Kondensatoren haben bei hohen Frequenzen Umpolungsverluste im Dielektrikum, die zur Erwärmung des Kondensators führen. Trotzdem ist die Wirkleistung bei Kondensatoren viel kleiner als die Blindleistung, d. h. der Leistungsfaktor ist dicht bei null und φ ist fast $\pi/2$. Zur besseren quantitativen Beschreibung der kleinen dielektrischen Verluste eines Kondensators verwendet man deshalb statt des Phasenwinkels φ zwischen Strom und Spannung den **Verlustwinkel**

$$\delta = \pi/2 - \varphi \ll 1. \tag{4.95}$$

Die im Kondensator auftretende Verlust-(Wirk-)Leistung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{\text{Wirk}} &= I\,U\cos\varphi \\ &= I\,U\sin\delta \\ &\approx I\,U\,\delta. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Der Verlustwinkel ist das Verhältnis der Wirkleistung im Kondensator zur Scheinleistung, und dieses Verhältnis ist unabhängig von der Größe des Kondensators. Für gute Kondensatoren liegt δ in der Größenordnung von 10^{-4}, für die meisten technischen Isolierstoffe zwischen 10^{-3} und 10^{-2}. Der Verlustwinkel ist, wie die Zahl der Umpolvorgänge in einem Zeitintervall, frequenzabhängig.

Darstellungen von Strömen und Spannungen im Zeigerdiagramm (*pointer diagram*). Die hier beschriebene Darstellungsweise gilt nur für (ko)sinusförmige Wechselströme und Wechselspannungen derselben Frequenz und für stationäre Zustände, d. h. für zeitlich konstante Scheitelwerte und Phasenwinkel (*steady-state alternating currents*).

In einem Stromkreis mit nur einer Wechselstromquelle haben alle auftretenden Spannungen und Ströme dieselbe Frequenz, aber i. A. unterschiedliche Phasenwinkel. Das Zeigerdiagramm erlaubt eine einfache und sehr anschauliche Betrachtung der Phasenlagen, weil die Zeitabhängigkeit aller Größen dabei ignoriert wird.

Statt der Kosinus-Funktion verwenden wir die komplexe Schreibweise mithilfe der Euler'schen Beziehung (Abschn. 15.5),

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}[\exp(\mathrm{i}\,\omega t)], \quad \mathrm{Re} = \text{Realteil}, \quad \mathrm{i} = (-1)^{1/2} \tag{4.97}$$

aber lassen die Erwähnung des „Realteils" in Zukunft weg. [Die Elektrotechniker symbolisieren die imaginäre Einheit $(-1)^{1/2}$ nicht wie in der Mathematik und der Physik üblich mit „i", sondern mit „j", um Verwechslungen mit Symbolen für Ströme zu vermeiden.]

Wir separieren die zu betrachtende Größe – z. B. die Wechselspannung $u(t)$ – in einen Zeitfaktor und einen Amplituden-und-Phasen-Faktor

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}\exp[\mathrm{i}(\omega t + \varphi)] \\ &= \exp[\mathrm{i}\,\omega t]\cdot\hat{u}\exp[\mathrm{i}\,\varphi] \end{aligned} \tag{4.98}$$

und definieren den zweiten Faktor als **Spannungszeiger**:

$$\boldsymbol{u}(\varphi) = \hat{u}\exp(\mathrm{i}\,\varphi). \tag{4.99}$$

Die so definierten Zeiger für Spannungen und Ströme „zeigen“ in der Gauß'schen Zahlenebene vom Ursprung zu einem bestimmten, eine komplexe Zahl repräsentierenden Punkt. Die Zeiger haben eine gewisse Ähnlichkeit mit zweidimensionalen Vektoren; es sind aber keine Vektoren! Die Verwendung der kursiv-fetten Symbole soll nur dazu dienen, die Zeiger von den explizit zeitabhängigen Spannungen und Strömen zu unterscheiden.

Die Spannungs- und Strom-Zeiger (*phasors*)

$$\boldsymbol{u}_\mathrm{i} = \hat{u}_\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\varphi_\mathrm{i}), \quad \boldsymbol{i}_\mathrm{k} = \hat{\imath}_\mathrm{k}\exp(\mathrm{i}\varphi_\mathrm{k}) \tag{4.100}$$

werden in Zeigerdiagrammen (*phasor diagrams*) graphisch dargestellt. Zum Beispiel gibt Abb. 4.38 die Zeiger der Wechselspannungen und Wechselströme an den drei Bauelementen R, L und C.

Bei Mitbetrachtung des in Gl. (4.98) ausgeklammerten Zeitfaktors muss man sich vorstellen, dass alle im Zeigerdiagramm enthaltenen Zeiger synchron mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt rotieren, während die reelle Achse festgehalten wird. Diese Vorstellung verdeutlicht, dass im Zeigerdiagramm wirklich nur die Phasendifferenzen der betrachteten Zeiger bedeutsam sind, aber nicht der Phasen-Nullpunkt, der irgendeinem Zeitpunkt der Rotationsperiode entspricht und beliebig festgelegt werden kann. So ist es z. B. bei der Be-

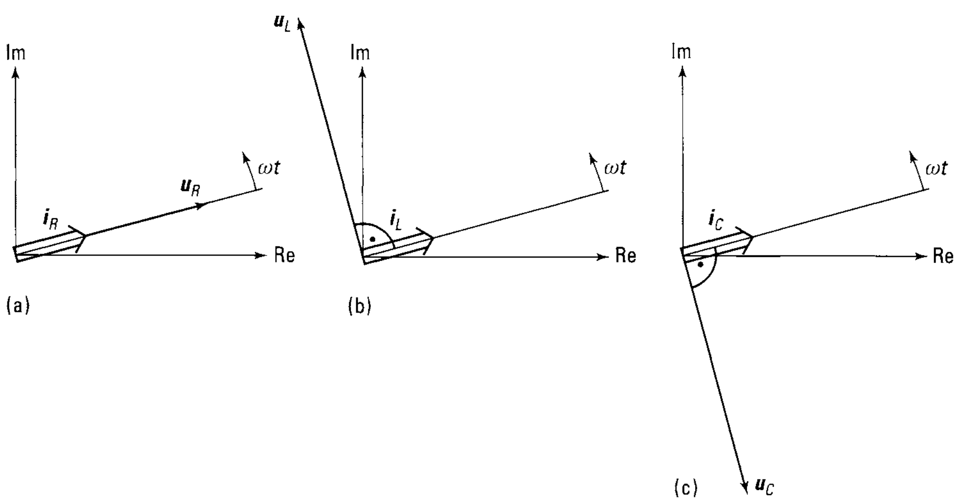

Abb. 4.38 Zeiger zu den Wechselspannungen und Wechselströmen an den verschiedenen Bauelementen: (a) Widerstand, (b) Spule, (c) Kondensator.

Bergmann Schaefer,
Band 2, Auflage 9, Seite 214-232

trachtung einer Reihenschaltung naheliegend, dem Strom, der für alle Bauelemente gleich ist, die Phase null zuzuordnen; dasselbe gilt für die Spannung bei der Betrachtung einer Parallelschaltung.

Ein Zeiger im Zeigerdiagramm zeigt mit seiner Spitze auf eine komplexe Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene. Die Addition von komplexen Zahlen, bei der die reellen Komponenten und die imaginären Komponenten getrennt addiert werden,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ &= (\hat{u}_1 \cos\varphi_1 + \hat{u}_2 \cos\varphi_2) \\ &\quad + \mathrm{i}\,(\hat{u}_1 \sin\varphi_1 + \hat{u}_2 \sin\varphi_2), \end{aligned} \tag{4.101}$$

entspricht formal der Addition zweidimensionaler Vektoren. Die Zeiger in der Gauß'schen Ebene können wie Ortsvektoren in der xy-Ebene durch Konstruktion von Parallelogrammen addiert werden (Abb. 4.39), vorausgesetzt, die Zeiger stellen physikalisch gleiche Größen dar.

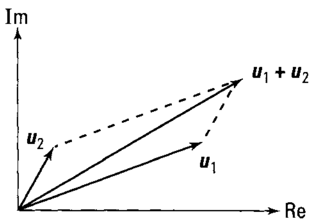

Abb. 4.39 Graphische Addition zweier Spannungszeiger.

Für die Addition der beiden Spannungen nach Gl. (4.101) sind die Phasenwinkel wichtig, während die Phase der resultierenden Spannung nicht mehr interessant ist. Auch der Realteil von $\boldsymbol{u}$ ist nicht besonders bedeutsam, weil er ja nur für einen Augenblick jeder Rotationsperiode gilt. Viel wichtiger ist der Scheitelwert $\hat{u}$ der aus der Addition von Gl. (4.101) resultierenden Spannung, bzw. deren Effektivwert U; beide Werte folgen aus dem Betrag des Zeigers $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= |\boldsymbol{u}| \\ U &= |\boldsymbol{u}|/\sqrt{2}\,. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Für sinusförmige Größen besteht der zahlenmäßige Unterschied zwischen Scheitel- und Effektivwert nur in dem trivialen Faktor $\sqrt{2}$. Wenn, wie es oft der Fall ist, die Scheitelwerte der zu addierenden Spannungen erst aus Effektivwert-Messungen berechnet werden müssen und am Schluss wieder nur der Effektivwert von Interesse ist, dann kann man auch gleich mit „Effektivwert-Zeigerlängen“ im Zeigerdiagramm arbeiten. [Wir nehmen hier davon Abstand, um den konzeptionellen Unterschied von Scheitel- und Effektivwert nicht zu verwischen.]

Der eigentliche Vorteil des Rechnens mit komplexen Zeigern – statt mit zweidimensionalen Vektoren – wird ersichtlich beim Multiplizieren und Dividieren: Durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl kann ein Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene gedreht werden. (Zur Drehung eines Vektors ist die Multiplikation mit einer Matrix erforderlich.) Durch Multiplikation mit dem Kehrwert der komplexen Zahl wird die Drehung umgekehrt. (Der Kehrwert eines Vektors ist nicht definiert; zur Rückdrehung des Vektors muss mit der inversen Matrix multipliziert werden.)

Zur phasengerechten Beschreibung der Beziehung zwischen Strom und Spannung werden das Ohm'sche Gesetz und analog auch die Kirchhoff'schen Sätze auf komplexe Zeiger erweitert:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{i} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{u}$$
$$\text{mit} \quad |\boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{Z}|^{-1} \quad \text{und} \quad \varphi_Y = -\varphi_Z; \tag{4.103}$$

$\boldsymbol{Z}$ ist der **komplexe Widerstand**; $Z = |\boldsymbol{Z}|$ heißt **Scheinwiderstand** oder **Impedanz** (*impedance*); $\boldsymbol{Y}$ ist der **komplexe Leitwert**; $Y = |\boldsymbol{Y}|$ heißt **Scheinleitwert** oder **Admittanz** (*admittance*).

Außerdem sind die folgenden Aufspaltungen und Bezeichnungen üblich:

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{i}\,X \tag{4.104}$$

und

$$\boldsymbol{Y} = G + \mathrm{i}\,B; \tag{4.105}$$

R ist der (ohmsche) **Wirkwiderstand** (die **Resistanz**, *resistance*), X ist der **Blindwiderstand** (die **Reaktanz**, *reactance*); G ist der **Wirkleitwert** (die **Konduktanz**, *conductance*), B ist der **Blindleitwert** (die **Suszeptanz**, *susceptance*).

Impedanz $\boldsymbol{Z}$ und Admittanz $\boldsymbol{Y}$ sind komplexe Zahlen wie $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{i}$ und werden wie diese durch Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt. Physikalisch repräsentieren sie Eigenschaften des betrachteten Stromkreises, mathematisch sind es Operatoren, die bei Multiplikation mit dem Zeiger $\boldsymbol{i}$ bzw. $\boldsymbol{u}$ diesen in einen anderen Zeiger ($\boldsymbol{u}$ bzw. $\boldsymbol{i}$) mit anderer Länge, anderem Phasenwinkel und anderer Maßeinheit überführen (Abb. 4.40).

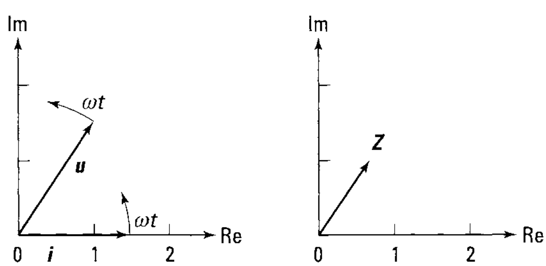

Abb. 4.40 Zeigerdiagramm: (a) Strom- und Spannungszeiger, die „eigentlich" rotieren; (b) Impedanzzeiger, der die Beziehung zwischen Strom und Spannung beschreibt und nicht rotiert.

Impedanz und Admittanz für Kombinationen der Bauelemente *R*, *L* und *C*. Beim Widerstand sind Strom und Spannung immer phasengleich:

$$\boldsymbol{Z}_R = R, \quad \boldsymbol{Y}_R = 1/R. \tag{4.106}$$

Es gilt also dieselbe Form des Ohm'schen Gesetzes wie für Gleichstrom. Bei der Spule eilt die Spannung dem Strom um $\pi/2$ ($=90°$) voraus:

$$\boldsymbol{Z}_L = \mathrm{i}\,\omega L = \omega L \exp(\mathrm{i}\,\pi/2),$$
$$\boldsymbol{Y}_L = (\mathrm{i}\,\omega L)^{-1} = -\mathrm{i}\,(\omega L)^{-1} = (\omega L)^{-1} \exp(-\mathrm{i}\,\pi/2). \tag{4.107}$$

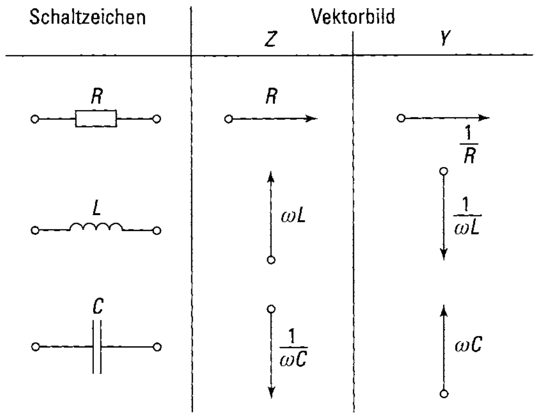

Abb. 4.41 Schaltzeichen für Widerstand R, Spule L und Kondensator C und Vektorbilder für deren Scheinwiderstand Z und Scheinleitwert Y.

Beim Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ $(=90°)$ voraus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_C &= (\mathrm{i}\,\omega C)^{-1} = -\mathrm{i}\,(\omega C)^{-1} = (\omega C)^{-1}\exp(-\mathrm{i}\,\pi/2), \\ \boldsymbol{Y}_C &= \mathrm{i}\,\omega C = \omega C\exp(\mathrm{i}\,\pi/2). \end{aligned} \tag{4.108}$$

In der praxis-orientierten elektrotechnischen Literatur wird die Benutzung komplexer Zahlen vermieden; statt dessen werden „Vektorbilder“ (Abb. 4.41) verwendet, die den komplexen Impedanz- und Admittanz-Zeigern, losgelöst vom (Re/Im)-Koordinatensystem der Gauß'schen Zahlenebene entsprechen und wie diese zweidimensional-vektoriell addiert werden. Man verwendet „reelle“ Pfeile für den Scheinwiderstand Z und den Scheinleitwert Y, trägt die Pfeile aber mit den in Abb. 4.41 angegebenen Richtungen in das Vektorbild ein.

Als Anwendungsbeispiele für diese Vektorbilder betrachten wir Reihen- und Parallelschaltungen von zwei der Bauelemente R, L und C in Abb. 4.42. Die Kombination von L mit R wird auch verwendet, wenn bei realen Spulen deren ohmscher Widerstand in einem Ersatzschaltbild berücksichtigt werden soll. Weil sich bei Reihenschaltungen die Spannungen addieren, werden die Vektorbilder für Z benutzt; weil sich bei Parallelschaltungen die Ströme addieren, verwendet man Vektorbilder für Y. Aber statt Z_R, Z_L, Z_C und Y_R, Y_L, Y_C schreibt man lieber gleich R, ωL, $1/\omega C$ und $1/R$, $1/\omega L$, ωC in die Vektorbilder.

Die Formeln für den resultierenden Scheinwiderstand oder Scheinleitwert und für den Tangens des Winkels φ_Z oder φ_Y können dann aus dem Vektorbild „abgelesen“ werden.

Bei Schaltungen mit Spule und Kondensator (Abb. 4.42 unten) tritt der **Resonanzfall** auf, wenn induktiver und kapazitiver Scheinwiderstand (bzw. Scheinleitwert) gleich groß werden:

$$\omega_r = (LC)^{-1/2}. \tag{4.109}$$

Im Resonanzfall wird der Scheinwiderstand einer LC-Reihenschaltung gleich null und der einer LC-Parallelschaltung unendlich groß. Wenn neben L und C auch

Bergmann Schaefer,
Band 2, Auflage 9, Seite 214-232

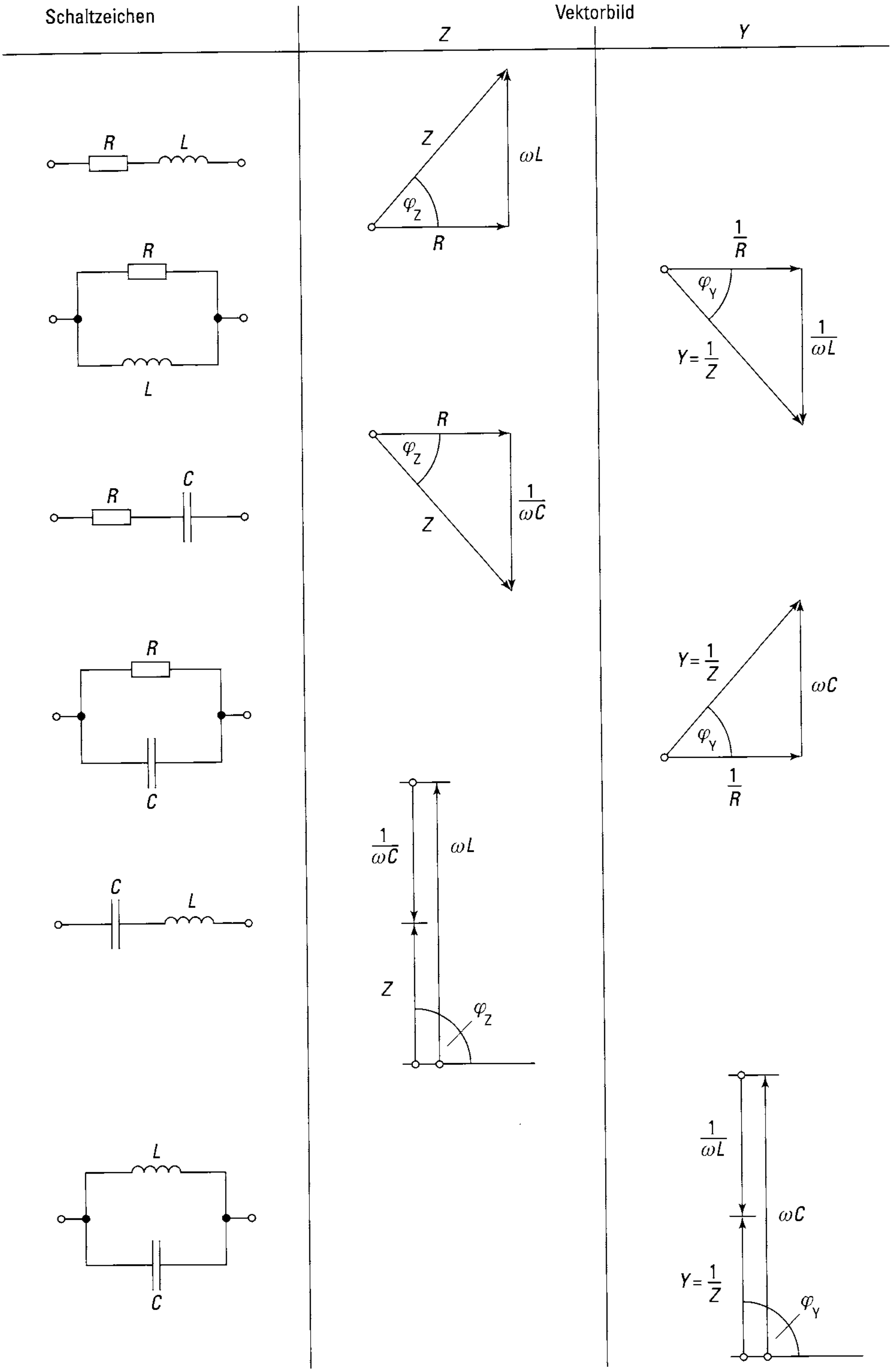

Abb. 4.42 Reihen- und Parallelschaltung von R, L und C und die dazugehörenden Vektorbilder.

Bergmann Schaefer,
Band 2, Auflage 9, Seite 214-232

ohmsche Widerstände in der Schaltung enthalten sind, wird durch die in R verbrauchte Wirkleistung das Resonanzverhalten „gedämpft"; anstelle von Scheinwiderständen von null bzw. unendlich ergeben sich dann im Resonanzfall nur „sehr kleine" bzw. „sehr große" Extremwerte für Z (und umgekehrt für Y).

Für den hier besprochenen Frequenzbereich von Wechselstrom-Netzen und rotierenden Maschinen ist ω meist deutlich kleiner als die Resonanzkreisfrequenz ω_r des Stromkreises. Deshalb wird die ausführliche Diskussion von „Resonanzkreisen" auf das nächste Kapitel (Abschn. 5.1.4) verschoben.

4.3.3 Mehrphasenströme, magnetische Drehfelder

Zweiphasen-Wechselstrom. Lässt man in einem Magnetfeld zwei gegeneinander um 90° verdrehte Drahtschleifen oder Spulen rotieren, deren Enden zu je zwei voneinander isolierten Schleifringen führen wie in Abb. 4.43 gezeigt ist, so erhält man zwei gegeneinander um $\pi/2$ ($= 90°$) phasenverschobene Wechselspannungen

$$u_1 = \hat{u}\cos\omega t$$

und

$$u_2 = \hat{u}\sin\omega t. \tag{4.110}$$

Leitet man diese beiden Spannungen zu zwei gleichen Spulen, die rechtwinklig zueinander angeordnet sind (Abb. 4.44a), so fließen durch beide gleichstarke Ströme, die ebenfalls eine Phasendifferenz von 90° haben und zwei sich rechtwinklig überlagernde Magnetfelder B_x und B_y mit der gleichen Phasendifferenz erzeugen.

Im Zentrum der mit ihren Achsen in x- und y-Richtung angeordneten Spulen überlagern sich die beiden Felder wie folgt:

$$\begin{aligned} B_x &= B_0\cos\omega t,\\ B_y &= B_0\sin\omega t,\\ B &= (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} = B_0. \end{aligned} \tag{4.111}$$

Das resultierende Feld hat den Betrag B_0 und seine Richtung rotiert in der xy-Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich auch das Spulensystem der Maschine

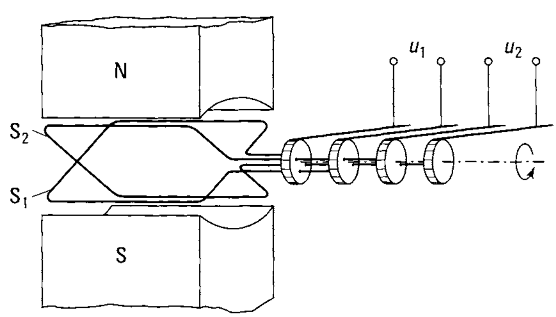

Abb. 4.43 Erzeugung von zwei gegeneinander um 90° phasenverschobenen Wechselspannungen durch Drehung von zwei gegeneinander um 90° versetzter Drahtschleifen in einem Magnetfeld. Das Abnehmen der Spannung erfolgt über Schleifringe.

dreht, die den „Zweiphasenstrom“ erzeugt (Abb. 4.43). Ein solches Feld wird ein **magnetisches Drehfeld** genannt (G. Ferraris, 1888). Kehrt man den Drehsinn der Induktionsspulen um oder polt die Zuleitungen von einer der beiden Feldspulen um, dann rotiert das Feld mit entgegengesetztem Drehsinn.

Das Drehfeld lässt sich auf verschiedene Art nachweisen: Eine Magnetnadel im Inneren der Feldspulen (Abb. 4.44a) rotiert synchron mit dem Feld. Ein spitzengelagerter Metall-Hohlzylinder im Drehfeld wird durch die in ihm induzierten Wirbelströme in eine gleichsinnige, aber asynchrone Rotation mit geringerer Winkelgeschwindigkeit versetzt (Abb. 4.43b). Die Rotation des Drehkörpers muss hinter der des Drehfeldes zurückbleiben, damit sich im Drehkörper die Feldverteilung zeitlich verändert und somit ständig Wirbelströme induziert werden. Das Prinzip ist das gleiche wie bei der Mitbewegung der drehbaren Kupferscheibe über einem rotierenden Magneten.

Mit diesen einfachen Anordnungen lassen sich schon die prinzipiellen Arbeitsweisen einiger elektrischer Maschinen erläutern: Die drehbare Induktionsspulen-Anordnung von Abb. 4.43 ist im Prinzip ein **Wechselstrom-Generator** (*a.c. generator*). Die Magnetnadel im Drehfeld von Abb. 4.44a ist im Prinzip der Läufer (das „Polrad“, *pole wheel*) eines **Synchronmotors** (*synchronous motor*), während der Metallzylinder von Abb. 4.44b, der als Ersatz der Magnetnadel von Abb. 4.44a durch Wirbelströme in Drehbewegung versetzt werden kann, dem Kurzschlussläufer („Käfig“, *cage*) eines **Asynchronmotors** (*induction motor*) entspricht.

Zur Fortleitung eines zweiphasigen Wechselstromes benötigt man an sich zwei Doppelleitungen, also vier einzelne Drahtleitungen (Abb. 4.43, Abb. 4.44a). Man kann jedoch zwei Leitungen vereinigen und dadurch eine der vier Leitungen sparen. In der gemeinsamen Leitung fließen dann zwei um 90° verschobene Wechselströme, die sich bei gleichen Effektivwerten zu einem Strom addieren, der um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist und eine um $\pm 45°$ gegen die zwei Ströme versetzte Phasenlage hat. Man spricht in diesem Fall von einem **verketteten Zweiphasenstrom**. Es ist üblich, dem gemeinsamen Leiter das Potential null und damit den Ursprung im Spannungs-Zeigerdiagramm zuzuordnen.

Drehfeld-Erzeugung mit einphasigem Wechselstrom. Steht nur einphasiger Wechselstrom zur Verfügung, so kann man die gewünschte Phasenschiebung von etwa 90°

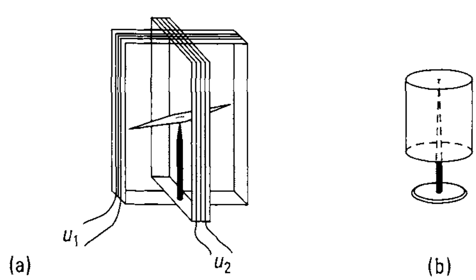

Abb. 4.44 (a) Erzeugung eines magnetischen Drehfeldes; Nachweis durch Rotation der Magnetnadel. (b) Spitzengelagerter Metallzylinder, der anstelle der Magnetnadel verwendet werden kann.

z. B. dadurch erreichen, dass man die eine Feldspule in Reihe mit einem Widerstand R, die andere in Reihe mit einer Kapazität C (oder einer Induktivität L) schaltet und beide Schaltungen dann zueinander parallel an die Wechselstromquelle legt. Wenn ohmscher und induktiver Widerstand der Feldspulen vergleichsweise klein sind und hier unberücksichtigt bleiben können, ergeben sich gleichgroße Ströme, wenn

$$R = (\omega C)^{-1} \quad (\text{bzw. } R = \omega L) \tag{4.112}$$

gewählt wird. Als technisch einfachste Lösung wird meist ein Kondensator zur „Phasenschiebung" verwendet.

7.3 Gleichströme

Selbst der schwächste Gleichstrom, wie ihn die elektro-chemischen Elemente von *Luigi Galvani* und *Alessandro Volta* lieferten (1794), transportiert in ganz kurzer Zeit viel

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

mehr Ladung, als man in den größten Elektrisiermaschinen durch Reibung erzeugen konnte.

7.3.1 Stromstärke

In der **Elektrostatik**, wo Ladungen als ruhend, also im Gleichgewicht angenommen werden, ist es richtig, dass längs eines Leiters keine Potentialdifferenz bestehen kann. Im täglichen Leben legt man dagegen ständig Spannung an Leiter mit der Folge, dass sich die Ladungen bewegen, also Ströme fließen. Freilich können diese Ströme nur auf Kosten äußerer Energiequellen aufrechterhalten werden; sich selbst überlassen, würde der Leiter sehr schnell den von der Elektrostatik geforderten Zustand konstanten Potentials annehmen.

> Wenn während der Zeit dt durch den Querschnitt eines Leiters, z. B. einen Draht, die Ladungsmenge dQ fließt, so sagt man, es fließe ein Strom mit der **Stromstärke**
>
> $$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (7.56)$$
>
> Im internationalen System ist die Einheit der Stromstärke dementsprechend $1\,\mathrm{C\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{A}$ (Ampere).

Der Strom durch einen Leiter kann nur dann zeitlich konstant, also ein **Gleichstrom** sein, wenn die Spannung zwischen den Leiterenden und überhaupt zwischen je zwei Leiterpunkten konstant ist. Umgekehrt: In einem geschlossenen Stromkreis, in dem ein Gleichstrom fließt, ist die Stromstärke für jeden Querschnitt dieselbe, denn sonst gäbe es Teile des Leiters, wo ständig Ladung abgezogen wird oder sich anhäuft. Das wäre höchstens der Fall, wenn der betrachtete Querschnitt zwischen den Platten eines Kondensators durchliefe. Sieht man den Kondensator als ein Ganzes an, dann fließt auch durch ihn der gleiche Strom wie überall sonst im Stromkreis.

Bedenkt man, dass die Ladung einem Erhaltungssatz gehorcht und dass das elektrostatische Feld ein Potential besitzt, dann ergeben sich sofort die Grundregeln zur Analyse beliebiger Schaltungen:

> **Kirchhoffs Knotenregel**
>
> An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einer Schaltung muss ebenso viel Ladung zu- wie abfließen. Die Summe aller Ströme in den einzelnen Zweigen, die in den Knoten münden, ist Null:
>
> $$\sum I_i = 0 \,. \qquad (7.57)$$

Man kann die Stromrichtungen auch beliebig festlegen, muss dann aber natürlich die Ströme, die dem Knoten zufließen, positiv zählen, die abfließenden negativ, oder umgekehrt.

Überall in einer Schaltung gilt der Satz von der Wegunabhängigkeit der Potentialdifferenz. Die Spannungen längs zweier verschiedener Zweige der Schaltung, die zwei Punkte A und B verbinden, müssen also gleich sein. Dies gilt auch, wenn Spannungsquellen dazwischenliegen.

> **Kirchhoffs Maschenregel**
>
> Die Gesamtspannung längs einer geschlossenen *Masche* einer Schaltung, d. h. die Summe aller Spannungsabfälle an den einzelnen Elementen, aus denen die Masche besteht, ist Null:
>
> $$\sum U_i = 0 \,, \qquad (7.58)$$

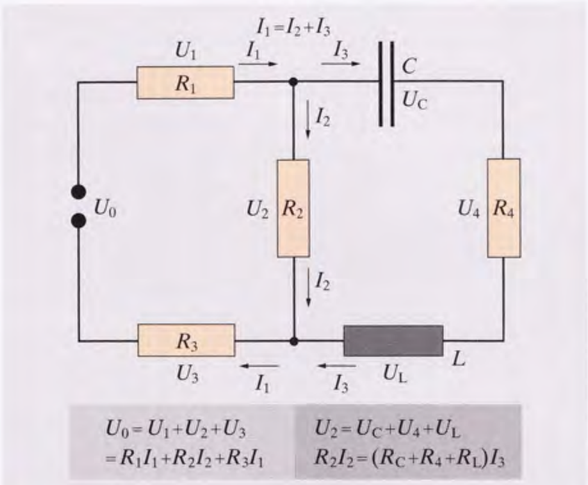

Abbildung 7.55 Die Kirchhoff-Regeln verknüpfen die Einzelspannungen und Einzelströme miteinander. Kennt man noch die Strom-Spannungs-Kennlinien der einzelnen Elemente, kann man alle Spannungen und Ströme durch U_0 ausdrücken. Allerdings sind U, I und R für C und L als komplexe Werte aufzufassen

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

sofern man in einem beliebigen, aber konstanten Sinn umläuft. Spannungsquellen, die in der Masche liegen, kann man auch ausschließen und erhält dann für den Rest der Elemente in der Masche eine Summe der Spannungsabfälle, die gleich der negativen Summe der Spannungen ist, die die Spannungsquellen liefern.

Spannungsquellen arbeiten entweder magnetisch und erzeugen elektrische Felder durch **Induktion**, also durch Änderung eines Magnetfeldes, oder sie arbeiten elektrochemisch, stellen also eine Art Kondensator mit ständiger chemischer Nachlieferung von Ladung dar.

Mit den beiden Kirchhoff-Regeln kann man jede beliebige Schaltung analysieren, wenn noch die **Strom-Spannungs-Kennlinien** $I(U)$ der einzelnen Elemente bekannt sind. Sie folgen häufig, aber durchaus nicht immer dem ohmschen Gesetz. Die Kirchhoff-Regeln gelten für die Momentanwerte von Strömen und Spannungen, sinngemäß also auch für Wechselströme.

7.3.2 Das ohmsche Gesetz

Bei vielen wichtigen Leitern, z. B. Metalldrähten oder auch Elektrolytlösungen, beobachtet man eine Proportionalität zwischen dem Strom I, der durch den Leiter fließt, und der angelegten Spannung U. Der Proportionalitätsfaktor heißt Leitwert des Leiters, sein Kehrwert heißt sein Widerstand R:

$$I = \frac{U}{R} \quad R = \frac{U}{I} \quad U = RI\,. \tag{7.59}$$

Durchaus nicht alle Leiter folgen dem **ohmschen Gesetz** (7.59). Wichtige Ausnahmen sind Gasentladungsstrecken (Bogenlampe, Leuchtstoffröhren, Vakuumröhren) und viele Halbleiterelemente.

Bei einem homogenen ohmschen Material ist der **Widerstand** R proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zum Querschnitt A des Leiters:

$$R = \frac{\varrho l}{A}\,. \tag{7.60}$$

ϱ heißt **spezifischer Widerstand** des Materials (Tabelle 7.2), sein Kehrwert $\sigma = 1/\varrho$ heißt elektrische Leitfähigkeit (Einheiten $\Omega\,\mathrm{m}$ bzw. $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$).

Liegt an einem Draht der Länge l die Spannung U, dann misst man an einem Teilstück der Länge l' die kleinere Spannung $U' = Ul'/l$. Das ist die Grundlage der

Tabelle 7.2 Spezifische Widerstände einiger Metalle und Isolatoren bei 18 °C

Stoff	$\varrho/\Omega\,\mathrm{m}$
Silber	$0{,}016 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$0{,}017 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$0{,}028 \cdot 10^{-6}$
Eisen	$0{,}098 \cdot 10^{-6}$
Quecksilber	$0{,}958 \cdot 10^{-6}$
Konstantan	$0{,}50 \cdot 10^{-6}$
Manganin	$0{,}43 \cdot 10^{-6}$
Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
Schwefel	$2 \cdot 10^{15}$
Hartgummi	$2 \cdot 10^{13}$
Porzellan	$\approx 10^{12}$
Bernstein	$> 10^{16}$

Kompensationsmethode und des **Potentiometers** (Abschn. 7.3.4e). Mit dem Begriff der Feldstärke ist dieser Zusammenhang sofort klar: Im homogenen Draht ist die Feldstärke $E = U/l = U'/l'$ überall gleich.

Die Feldstärke erleichtert auch die Behandlung von Strömen in Leitern komplizierter Gestalt oder Flüssigkeiten, ebenso in Fällen, wo die elektrischen Eigenschaften von Ort zu Ort verschieden sind. Hier muss man eine ebenfalls von Ort zu Ort wechselnde **Stromdichte** $\vec{j}$ definieren.

$\vec{j}$ ist ein Vektor, der die Richtung des Ladungstransports angibt, und verhält sich zum Strom I wie die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ zum Volumenstrom $\dot{V}$ oder wie die Feldstärke $\vec{E}$ zum elektrischen Fluss ϕ:

$$\mathrm{d}I = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \quad \text{bzw.} \quad I = \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\,. \tag{7.61}$$

Erstreckt man das Integral über den ganzen Leiterquerschnitt, kommt der ganze Strom durch den Leiter heraus. Man kann dann das ohmsche Gesetz, falls es überhaupt gilt, nur noch für sehr kleine Bereiche formulieren, z. B. für einen kleinen Würfel, dessen Kanten der Länge a parallel bzw. senkrecht zur Feldrichtung an dieser Stelle liegen. Wenn die Feldstärke E ist, liegt zwischen den Stirnflächen des Würfels die Spannung $U = aE$. Der Strom durch den Würfel ist dann $I = \sigma a^2 U/a = \sigma a^2 E$, die Stromdichte ist

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

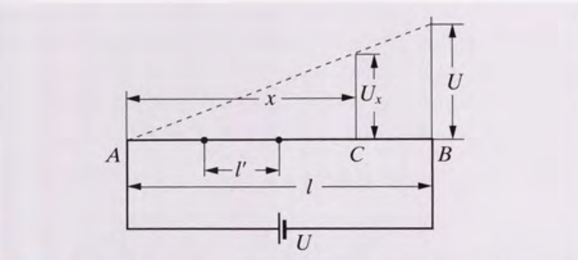

Abbildung 7.56 In einem homogenen Draht herrscht konstante Feldstärke, also lineare Spannungsverteilung

$j = I/a^2 = \sigma E$. Dies gilt ganz allgemein:

$$j = \sigma E \;. \tag{7.62}$$

Eigentlich muss dies vektoriell geschrieben werden, denn das Feld könnte schief zum Würfel stehen. Jedenfalls folgt die Stromrichtung in einem homogenen isotropen Medium der Feldrichtung, also

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \;. \tag{7.63}$$

Vielfach ist die gesamte Ladungsdichte ϱ (nicht zu verwechseln mit dem spezifischen Widerstand), die sich an einer Stelle befindet, in Bewegung. Strömt sie mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, dann ergibt sich die Stromdichte

$$\boxed{\vec{j} = \varrho \vec{v}} \;. \tag{7.64}$$

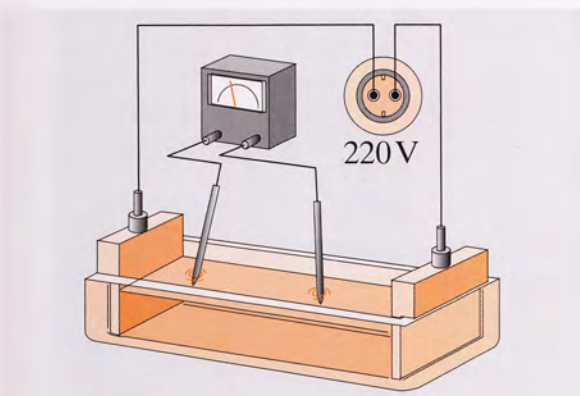

Abbildung 7.57 Auch in einer rechteckigen Elektrolytlösung ist das Feld konstant und die Spannungsverteilung linear

Kommt aus einem Volumen mehr Strom heraus als hineinfließt, dann nimmt die eingeschlossene Ladung ab. An jeder Stelle gilt daher die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\dot{\varrho}} \tag{7.65}$$

(vgl. Abschn. 3.4). Wenn die Ladungsverteilung zeitlich konstant bleibt, muss das $\vec{j}$-Feld divergenzfrei sein. Die kirchhoffsche Knotenregel ist ein Spezialfall hiervon.

Kombination von Widerständen. Wir betrachten jetzt wieder Schaltungen der klassischen Form, wo einzelne Elemente (hier Widerstände) durch Drähte verbunden sind, deren Widerstand vernachlässigbar ist. Solche Widerstände können hintereinander (in Reihe oder in Serie) liegen oder parallel zueinander. Zur Behandlung genügen die Kirchhoff-Regeln.

Durch reihengeschaltete Widerstände fließt der gleiche Strom I. Die Spannungen U_i an den Einzelwiderständen ergeben sich als Spannungsabfälle $U_i = IR_i$ und addieren sich zur Gesamtspannung

$$U = \sum U_i = \sum IR_i \;. \tag{7.66}$$

Damit folgt als Gesamtwiderstand der Schaltung

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \sum R_i} \;. \tag{7.67}$$

In der **Reihenschaltung** addieren sich die Widerstände.

An parallel geschalteten Widerständen liegt die gleiche Spannung U. Der Strom durch den i-ten Widerstand ist $I_i = U/R_i$. Im Ganzen fließt der Strom

$$I = \sum I_i = \sum \frac{U}{R_i} \;. \tag{7.68}$$

Damit folgt der Gesamtwiderstand der Schaltung

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sum R_i^{-1}}} \;. \tag{7.69}$$

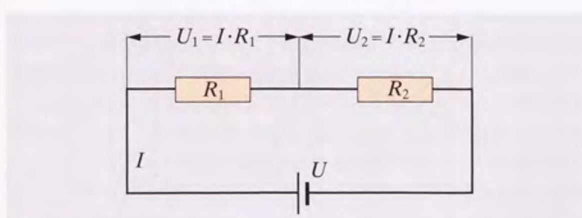

Abbildung 7.58 Hintereinander geschaltete Widerstände addieren sich, weil die Spannungsabfälle sich addieren

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

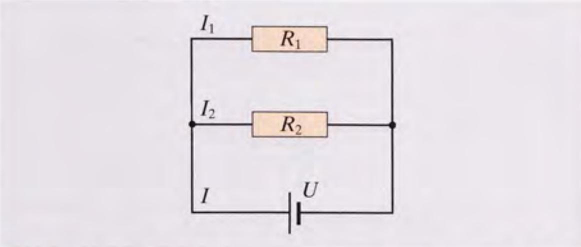

Abbildung 7.59 Bei Parallelwiderständen addieren sich die Ströme, also die Leitwerte

In der **Parallelschaltung** addieren sich die Leitwerte R_i^{-1}

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} . \qquad (7.69')$$

7.3.3 Energie und Leistung elektrischer Ströme

Wenn eine Ladung Q sich zwischen zwei Orten verschiebt, zwischen denen die Spannung U herrscht, wenn sie also im Potential um U absinkt, wird eine Energie

$$\boxed{E = QU} \qquad (7.70)$$

frei. Diese Energie kann der Ladung selbst zugutekommen und ihre kinetische Energie erhöhen. Das ist allerdings nur bei ganz ungehinderter Bewegung der Fall, d. h. vor allem im Vakuum. Dort lässt sich die Energie eines geladenen Teilchens, z. B. eines Elektrons oder Protons ($Q = e$ Elementarladung) sehr einfach durch die vom Ruhezustand aus durchlaufene Spannung in Volt ausdrücken, d. h. in der Einheit eV (Elektronvolt). Da $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, ergibt sich

$$\boxed{1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} . \qquad (7.71)$$

In einem üblichen Leiter dient die Energie W nicht oder so gut wie nicht zur Beschleunigung der Ladungsträger. Deren Geschwindigkeit ist fast immer sehr klein gegen die thermische, und die thermische Energie ist ihrerseits nur ein kleiner Bruchteil eines eV. Vielmehr geht die Energie $E = QU$, falls keine mechanische oder chemische Arbeit verrichtet wird, ganz in Wärmeenergie des Leiters oder seiner Umgebung über. Die entsprechende Heizleistung ergibt sich aus der Definition des Stromes:

Gesetz von Joule

$$\boxed{P = \dot{E} = U\dot{Q} = UI} . \qquad (7.72)$$

Dieses Gesetz gilt auch für Wechselströme, nur muss man es dort durch die Momentanwerte der ständig wechselnden Größen Strom und Spannung ausdrücken (Abschn. 8.3.3). Für einen ohmschen Leiter kann man auch schreiben

$$\boxed{P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}} . \qquad (7.73)$$

Bei ortsabhängiger Leitfähigkeit muss man das Joule-Gesetz differentiell formulieren. Die Leistungsdichte (Leistung/Volumen) ist dann

$$\boxed{p = \vec{j} \cdot \vec{E}} , \qquad (7.74)$$

für ohmsche Leiter

$$p = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} .$$

7.3.4 Gleichstromtechnik

a) Messgeräte; Messbereichsumschaltung. Da die wichtigsten Amperemeter und Voltmeter auf magnetischen Kräften beruhen, besprechen wir ihre Wirkungsweise erst in Abschn. 8.3.5. Hier behandeln wir einige Prinzipien, die für alle Typen und ebenso für **Gleich-** wie für **Wechselstrom** gelten. Der Zeigerausschlag der meisten Messgeräte (Drehspul- und Weicheiseninstrument) hängt nur von dem Strom ab, der durch die Messspule fließt. Eine Spannung muss erst in einen entsprechenden Strom übersetzt werden. Das geschieht mittels des Innenwiderstandes R_i. Wenn die Spannung U an den Klemmen des **Voltmeters** liegt, fließt der Strom $I = U/R_i$ durch die Messspule. Übergang zu einem höheren Spannungsmessbereich

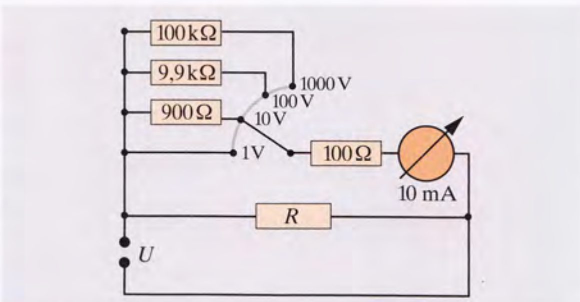

Abbildung 7.60 Ein umschaltbares Voltmeter (verschiedene Vorwiderstände) misst die Spannung am Verbraucher R

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

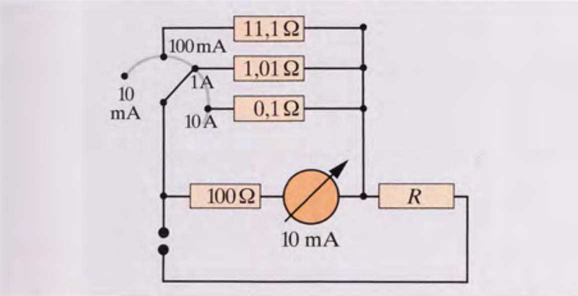

Abbildung 7.61 Ein umschaltbares Amperemeter (verschiedene Parallelwiderstände oder Shunts) misst den Strom durch den Verbraucher R

erfolgt also einfach durch Vergrößerung von R_i (Verzehnfachung von U durch Vorschalten des neunfachen Vorwiderstandes). Will man mit einem **Amperemeter** größere Ströme messen, als die Messspule verträgt, muss man einen Teil des Stroms durch einen Parallelwiderstand (Shunt) vorbeileiten. Verzehnfachung des I-Messbereichs heißt Parallelschalten eines neunmal kleineren Widerstandes.

BEISPIEL

Ein Vertreter bietet Ihnen einen elektrischen Durchlauferhitzer an, der 8 l heißes Wasser pro Minute liefern soll. Der Hauptvorteil sei, dass Sie nicht einmal Ihre 10 A-Sicherung auszuwechseln brauchen. Kaufen Sie das Gerät oder werfen Sie den Kerl hinaus (beides mit technischer Begründung)?

Wenn die 10 A-Sicherung nicht durchbrennen soll, kann man höchstens 2,2 kW entnehmen. Das entspricht 2,2 kJ/s ≈ 130 kJ/min. Die 8 l/min würden also bei Verlustfreiheit höchstens um 3,5 °C „aufgeheizt" werden. Elektrische Durchlauferhitzer sind im normalen Haushalt kaum realisierbar.

Der Einbau des Messgeräts in die auszumessende Schaltung soll die Größen, die man bestimmen will, möglichst wenig beeinflussen. Für ein Amperemeter trifft das zu, wenn sein Gesamtwiderstand R_i (einschließlich eventueller Shunts) sehr klein gegen den Gesamtwiderstand R der zu messenden Schaltung ist. Der Strom wird durch Einbau des Amperemeters um den Faktor $R/(R + R_i)$ verringert.

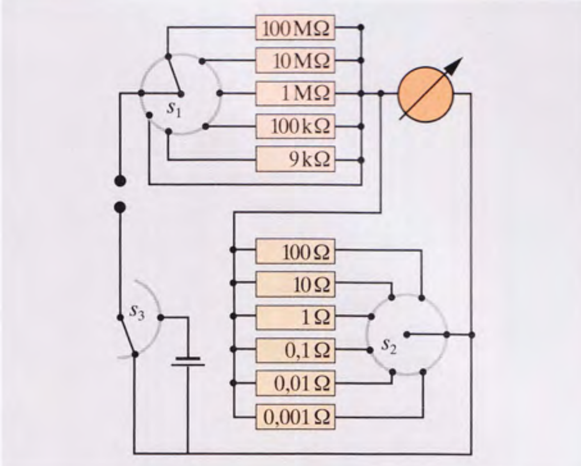

Abbildung 7.62 Vielfachmesser für Strom, Spannung, Widerstand (schematisch)

Amperemeter müssen *niederohmig* sein.

Umgekehrt darf ein Voltmeter den Gesamtstrom aus der Spannungsquelle möglichst wenig beeinflussen, denn sonst würde sich wegen des Innenwiderstandes der Spannungsquelle auch deren Klemmenspannung ändern (Abschn. 7.3.4d). Der Innenwiderstand R_i des Voltmeters muss also groß gegen den Widerstand R des Verbrauchers sein, längs dessen die Spannung gemessen wird.

Voltmeter müssen *hochohmig* sein.

b) Brückenschaltungen. Im Prinzip kann man einen Widerstand messen, indem man die Spannung U an ihm und den Strom I durch ihn bestimmt und beide durcheinander teilt. Die endlichen Innenwiderstände der Messgeräte würden ein solches Verfahren aber sehr ungenau machen. Man vermeidet diesen Einfluss, wenn man *stromlos* misst. In einer **Wheatstone-Brücke** schaltet man den zu bestimmenden Widerstand R_x mit drei anderen bekannten Widerständen zusammen (Abb. 7.63), von denen mindestens einer verstellbar ist. Man stellt R_3 so ein, dass durch das Instrument G kein Strom fließt (**Abgleich der Brücke**). Das

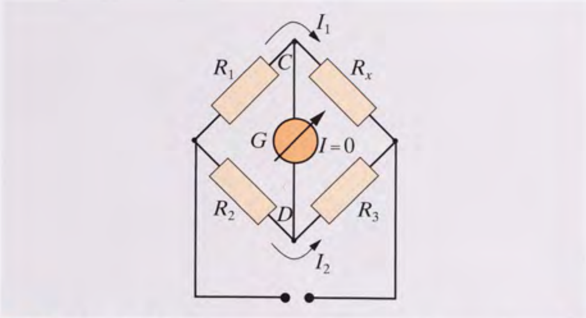

Abbildung 7.63 Wheatstone-Brücke zur Messung des unbekannten Widerstandes R_x

ist der Fall, wenn die Spannung zwischen C und D verschwindet, d. h. die Spannungsabfälle an R_x und R_3 gleich sind (womit natürlich auch die Spannungsabfälle an R_1 und R_2 ihrerseits gleich sein müssen). Eben weil durch G kein Strom fließt, geht der Strom I_1 bei C vollständig weiter durch R_x. Damit ergibt sich

$$I_2 R_3 = I_1 R_x \quad \text{und} \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2} .$$

Damit ist R_x auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Die Spannung U der Spannungsquelle ist unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken. Schon daraus ergibt sich, dass die Wheatstone-Brücke ebenso gut für Wechselstrom geeignet ist. Beachtet man auch die Phasenlage der

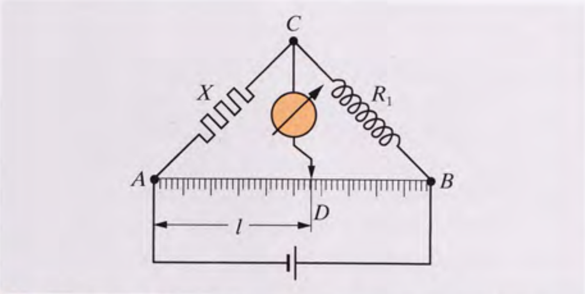

Abbildung 7.64 Wheatstone-Brücke mit Schleifdraht. Die beiden Abschnitte des Schleifdrahts ersetzen die Widerstände R_2 und R_3

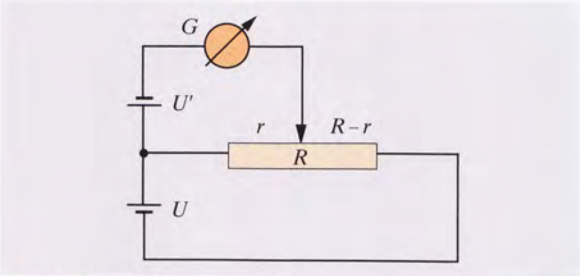

Abbildung 7.65 Kompensationsschaltung zur Messung der Spannung U'

Wechselströme, dann kann man mit ähnlichen Brücken auch Kapazitäten, Induktivitäten und Frequenzen sehr genau messen.

c) Kompensationsmethode. Auch eine unbekannte *Spannung* U' (in Abb. 7.65 symbolisiert durch eine Spannungsquelle U') lässt sich am genauesten stromlos messen, und zwar durch Vergleich mit einer gegebenen Spannung U, die im Beispiel größer als U' und hier allerdings sehr genau bekannt sein muss. Durch Änderung des Widerstandes R erreicht man Abgleich, d. h. Stromlosigkeit des Instruments G. Dies tritt ein, wenn

$$U' = \frac{r}{R} U$$

(Prinzip des unbelasteten Potentiometers). Die meisten zu messenden Größen in Physik und Technik werden zunächst in Spannungen übersetzt und dann von automatischen Registriergeräten (Messschreibern) als Funktionen der Zeit aufgezeichnet. Solche **Schreiber** arbeiten meist nach dem **Kompensationsprinzip**. Das Instrument G ist durch einen Stellmotor ersetzt, der durch den Strom I angetrieben wird und selbst den Widerstand R verstellt, gekoppelt mit dem Schreibstift. Motor und Stift bleiben erst stehen, wenn Kompensation eintritt, also der Strom sich automatisch zu Null abgeglichen hat.

d) Innenwiderstand einer Spannungsquelle; Leistungsanpassung. Belastet man eine Spannungsquelle, d. h. entnimmt man ihr einen Strom, dann sinkt ihre **Klemmenspannung** U unter den Wert U_0, die **Leerlaufspannung**, die man an der unbelasteten Spannungsquelle messen würde. Dieses Verhalten lässt sich vielfach hinreichend genau dadurch beschreiben, dass die Spannungsquelle einen **Innenwiderstand** R_i hat. Er ist für eine Steckdose realisiert

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

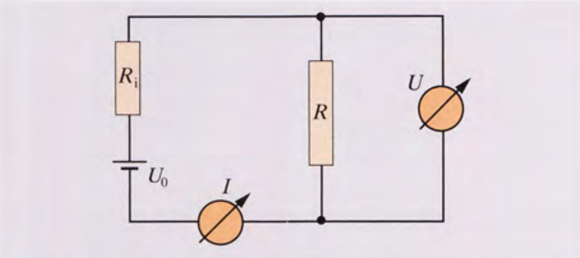

Abbildung 7.66 Das Ersatzschaltbild einer Spannungsquelle enthält deren Innenwiderstand R_i

durch die Widerstände von Zuleitungen und Generatorwicklung, bei einer Batterie durch den Widerstand des Elektrolyten (Aufgabe 7.5e.4).

Der Widerstand R_i im Ersatzschaltbild (Abb. 7.66) ist natürlich i. Allg. weder direkt zugänglich noch beeinflussbar. Die messbare Klemmenspannung U bleibt gegen die Leerlaufspannung U_0 um den Spannungsabfall IR_i zurück, wenn der Strom I entnommen wird:

$$U = U_0 - IR_i \,. \tag{7.75}$$

Die Spannungsquelle hat also eine fallende Spannungs-Strom-**Kennlinie** mit der Neigung R_i. Man kann ihr höchstens den Maximalstrom

$$I_m = \frac{U_0}{R_i} \tag{7.76}$$

entnehmen. Durch einen gegebenen Verbraucherwiderstand R fließt der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_i + R} \,. \tag{7.77}$$

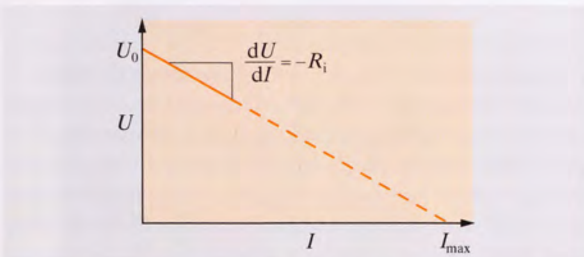

Abbildung 7.67 Infolge des Innenwiderstandes R_i sinkt die Klemmenspannung der Spannungsquelle mit dem entnommenen Strom

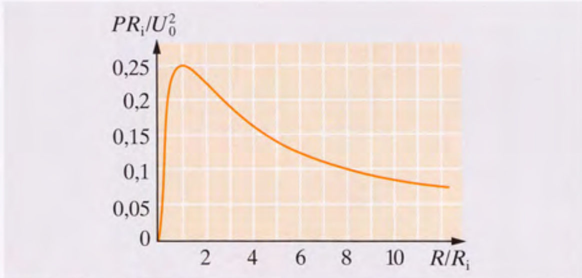

Abbildung 7.68 Leistungsanpassung: Aus einer Spannungsquelle kann man maximale Leistung entnehmen, wenn der Widerstand des Verbrauchers gleich dem Innenwiderstand ist

Im Verbraucher wird die Leistung

$$P = UI = (U_0 - R_i I)\frac{U_0}{R_i + R}$$

verzehrt. Einsetzen von I nach (7.77) ergibt

$$\boxed{P = \frac{U_0^2 R}{(R_i + R)^2}} \,. \tag{7.78}$$

Für $R \ll R_i$ ist die Leistung klein (Klemmenspannung wegen der großen Strombelastung fast ganz zusammengebrochen) und steigt wie R. Bei $R \gg R_i$ ist der Strom so klein, dass die Leistung wie R^{-1} abfällt. Dazwischen hat die Leistung ein Maximum, das sich aus $dP/dR = 0$ ergibt:

Bei $R = R_i$ ist

$$P = P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_i} \,. \tag{7.79}$$

Aus der Spannungsquelle kann man höchstens die Leistung P_{max} entnehmen. Bestimmung des entsprechenden Verbraucherwiderstandes, der gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist, heißt **Leistungsanpassung**.

e) Vorwiderstand und Potentiometer. Wenn ein Verbraucher geringere Spannung verlangt, als in der Form einer Spannungsquelle zur Verfügung steht, kann man die Spannung auf zwei Arten reduzieren (die Wechselstromtechnik bietet noch zahlreiche andere, energetisch ökonomischere Möglichkeiten):

Man schaltet einen **Vorwiderstand** R' vor den Verbraucher R. Dann teilen sich die Spannungen im Verhältnis R/R' auf beide auf, da ja durch beide der gleiche Strom

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348

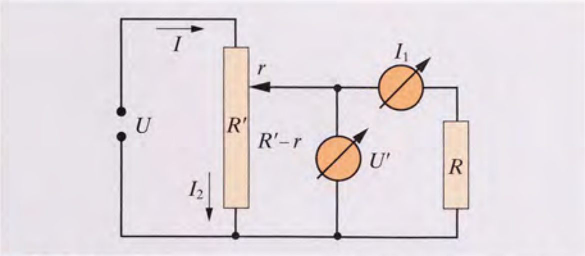

Abbildung 7.69 Potentiometer- oder Spannungsteiler-Schaltung

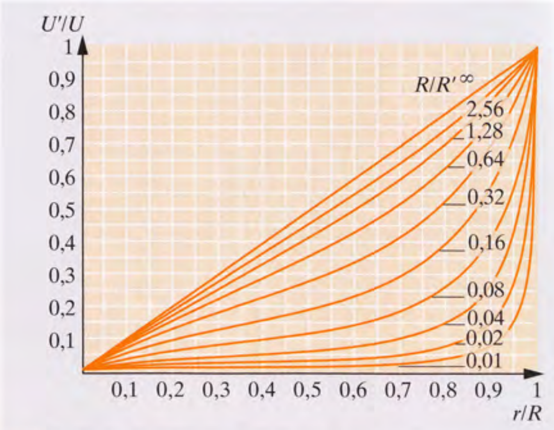

Abbildung 7.70 Bei Belastung ändert sich die Spannung des Potentiometers nicht mehr linear mit dem abgegriffenen Teilwiderstand

fließt. Ebenso teilt sich allerdings auch die Gesamtleistung auf: Nur ein Teil wird im Verbraucher genutzt. Leuchtstoffröhren, Bogenlampen und andere Gasentladungen verlangen einen Vorwiderstand oder besser eine „Drosselung" durch eine Spule, damit ihre Strom-Spannungs-Kennlinie steigend, also stabil wird (Abschn. 9.3.3).

Ein Widerstand mit verschiebbarem Mittelabgriff (Abb. 7.69) eignet sich als **Potentiometer**. Solange man nicht belastet, d. h. solange $R \gg R' - r$ ist, fällt am Teilstück $R' - r$ genau der Bruchteil

$$U' = U\frac{R' - r}{R'} \tag{7.80}$$

der Eingangsspannung U ab. Beim belasteten Potentiometer muss man beachten, dass sich der Strom I am Mittelabgriff in I_1 und I_2 aufteilt. Die Knotenregel liefert natürlich

$$I = I_1 + I_2 ,$$

die Maschenregel für die beiden Maschen der Schaltung

$$U = rI + (R' - r)I_2 \qquad U' = RI_1 = (R' - r)I_2 .$$

Kombination aller drei Gleichungen ergibt folgenden Zusammenhang zwischen der abgegriffenen Spannung U' und dem Teilstück r:

$$U' = \frac{R(R' - r)}{RR' + r(R' - r)}U . \tag{7.81}$$

Natürlich geht die Kurve $U'(r)$ durch die Punkte $(U, 0)$ und $(0, R')$, ebenso wie ohne Belastung, aber verglichen mit der Geraden (7.80) hängt sie umso weiter durch, je kleiner R/R' ist, je stärker also der Verbraucher das Potentiometer belastet.

Ein Potentiometer verschwendet noch mehr Leistung als ein Vorwiderstand. Bei gegebenen Werten U und U' folgt dies schon daraus, dass $I > I_1$ ist. Diesen Nachteil vermeidet weitgehend eine *Spule* mit Mittelabgriff. Man kann sie als Transformator auffassen, bei dem eine der Wicklungen ganz eingespart ist, und nennt sie daher **Spartransformator**.

Gerthsen Physik
4. Auflage, Seite 340-348