Metody obliczeniowe w nauce i technice - laboratorium 3

Jakub Radek

Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla niżej podanej funkcji korzystając z interpolacji funkcjami sklejanymi dla naturalnego i periodycznego warunku brzegowego.
Badana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot sin(mx)}$$

Gdzie $k = 3,\ m = 1,\ x \epsilon [-2pi, 4pi]$

Opracowanie

Pierwszym krokiem będzie wyprowadzenie równań. Do uzyskania wykresów oraz wyników wykorzystano język Python w wersji 3.10, bibliotekę numpy oraz bibliotekę matplotlib.

Funkcja sklejana 3 stopnia

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i,\ i\epsilon[1,\ 2, ..., n - 1]$$

Warunki konieczne dla funkcji sklejanej 3 stopnia:

$$S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$
$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$
$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$$

Równania dwóch pierwszych funkcji sklejanych:

$$y = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$
$$y' = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1$$
$$y'' = 6a_1(x - x_1) + 2b_1$$

$$y = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2$$
$$y' = 3a_2(x - x_2)^2 + 2b_2(x - x_2) + c_2$$
$$y'' = 6a_2(x - x_2) + 2b_2$$

Jednym z warunków koniecznych jest ciągłość pochodnej 2 stopnia.
Niech $y'' = y''_1$ dla $x = x_1$ oraz $y'' = y''_2$ dla $x = x_2$ $\quad x_2 - x_1 = h_1$

$$y''_1 = 6a_1(x_1 - x_1) + 2b_1 = 0 + 2b_1 = 2b_1 \qquad b_1 = y''_1/2$$
$$y''_2 = 6a_1(x_2 - x_1) + 2b_1 = 6a_1h_1 + y''_1 \qquad a_1 = (y''_2 - y''_1)/6h_1$$

Uzyskujemy dzięki temu funkcję drugiej pochodnej.
$$y'' = (x - x_1)(y''_2 - y''_1)/h_1 + y''_1$$

Kolejnym warunkiem koniecznym jest $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, funkcja sklejana ma przechodzić przez węzły interpolacji.

$$y_1 = 0 + 0 + 0 + d_1 \qquad d_1 = y_1$$
$$y_2 = (x_2 - x_1)^3(y''_2 - y''_1)/6h_1 + y''_1(x_2 - x_1)^2/2 + c_1(x_2 - x_1) + y_1$$
$$y_2 = h_1^3(y''_2 - y''_1)/6h_1 + y''_1h_1^2/2 + c_1h_1 + y_1$$
$$y_2 = h_1^2(y''_2 - y''_1)/6 + y''_1h_1^2/2 + c_1h_1 + y_1$$
$$y_2 - y_1 = y''_2h_1^2/6 - y''_1h_1^2/6 + y''_1h_1^2/2 + c_1h_1$$
$$(y_2 - y_1)/h_1 = y''_2h_1/6 - y''_1h_1/6 + y''_1h_1/2 + c_1$$
$$(y_2 - y_1)/h_1 = y''_2h_1/6 + y''_1h_1/3 + c_1 \qquad c_1 = (y_2 - y_1)/h_1 - y''_2h_1/6 + y''_1h_1/3$$

Warunkiem koniecznym jest również ciągłość pochodnej 1 stopnia.

$$3a_1(x_2 - x_1)^2 + 2b_1(x_2 - x_1) + c_1 = 3a_2(x_2 - x_2)^2 + 2b_2(x_2 - x_2) + c_2$$
$$3a_1h_1^2 + 2b_1h_1 + c_1 = c_2$$
$$h_1(y''_2 - y''_1)/2 + y''_1h_1 + (y_2 - y_1)/h_1 - y''_2h_1/6 - y''_1h_1/3 = (y_3 - y_2)/h_2 - y''_3h_3/6 - y''_2h_2/3$$

$$h_1(y''_2 - y''_1)/2 + y''_1 h_1 - y''_2 h_1/6 - y''_1 h_1/3 + y''_3 h_2/6 + y''_2 h_2/3 = (y_3 - y_2)/h_2 - (y_2 - y_1)/h_1$$
$$3h_1(y''_2 - y''_1) + 6y''_1 h_1 - y''_2 h_1 - 2y''_1 h_1 + y''_3 h_2 + 2y''_2 h_2 = 6(y_3 - y_2)/h_2 - 6(y_2 - y_1)/h_1$$
$$3h_1 y''_2 - 3h_1 y''_1 + 6y''_1 h_1 - y''_2 h_1 - 2y''_1 h_1 + y''_3 h_2 + 2y''_2 h_2 = 6(y_3 - y_2)/h_2 - 6(y_2 - y_1)/h_1$$
$$y''_1(6h_1 - 3h_1 - 2h_1) + y''_2(2h_1 + 2h_2) + y''_3 h_2 = 6(y_3 - y_2)/h_2 - 6(y_2 - y_1)/h_1$$

$$6h_1 y''_1 + 2(h_1 + h_2)y''_2 + h_2 y''_3 = 6[(y_3 - y_2)/h_2 - (y_2 - y_1)/h_1]$$

Uzyskujemy dzięki temu równanie w postaci ogólnej bez warunków brzegowych gdzie $h_1 = h_2 = \dots = h_n$ ze względu na równo odległość węzłów interpolacji. Można przekształcić je do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y''_{n-1} \end{bmatrix} = 6/(h*h) \begin{bmatrix} y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \end{bmatrix}$$

Co daje nam n-2 równań, pozostałe dwa uzyskujemy z warunków brzegowych.

Warunki brzegowe:

Natural boundary (naturalny warunek brzegowy).

Zakłada on równość drugiej pochodnej wielomianu graniczącego z zerem, tj:

$$f''_1(x_1) = f''_{n-1}(x_n) = 0$$

Periodic boundary (periodyczny warunek brzegowy)

Zakłada on równość wielomianów granicznych oraz ich pochodnych pierwszego i drugiego stopnia.

$$f_1(x_1) = f_{n-1}(x_n)$$
$$f'_1(x_1) = f'_{n-1}(x_n)$$
$$f''_1(x_1) = f''_{n-1}(x_n)$$

Funkcja sklejana 2 stopnia

$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i,\ i\epsilon[1, 2,..., n - 1]$

Warunki konieczne dla funkcji sklejanej 2 stopnia:

$$S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$
$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$
$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$

Równania dwóch pierwszych funkcji sklejanych:

$y = a_1(x - x_1)^2 + b_1(x - x_1) + c_1$

$y' = 2a_1(x - x_1) + b_1$

$y = a_2(x - x_2)^2 + b_2(x - x_2) + c_2$

$y' = 2a_2(x - x_2) + b_2$

Jednym z warunków koniecznych jest ciągłość pochodnej 1 stopnia.
Niech $y' = y_1'$ dla $x = x_1$ oraz $y' = y_2'$ dla $x = x_2$ $\qquad x_2 - x_1 = h_1$

$y_1' = 2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0 + b_1 = b_1$ $\qquad b_1 = y_1'$

$y_2' = 2a_1(x_2 - x_1) + b_1 = 2a_1h_1 + y_1'$ $\qquad a_1 = (y_2' - y_1')/2h_1$

Uzyskujemy dzięki temu funkcję pierwszej pochodnej.

$y' = (x - x_1)(y_2' - y_1')/(x_2 - x_1) + y_1'$

Kolejnym warunkiem koniecznym jest $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, funkcja sklejana ma przechodzić przez węzły interpolacji.

$y_1 = 0 + 0 + c_1$ $\qquad c_1 = y_1$

$y_2 = (x_2 - x_1)^2(y_2' - y_1')/2h_1 + y_1'(x_2 - x_1) + y_1$

$y_2 = h_1(y_2' - y_1')/2 + y_1'h_1 + y_1$

$y_2 = h_1y_2'/2 + h_1y_1'/2 + y_1$

$h_1y_1' + h_1y_2' = 2(y_2 - y_1)$

Uzyskujemy dzięki temu równanie w postaci ogólnej bez warunków brzegowych można przekształcić je do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y''_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y''_{n-1} \\ y''_n \end{bmatrix} = 2/h \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Co daje nam n-1 równań, pozostałe uzyskujemy z warunków brzegowych.

Warunki brzegowe:

Natural boundary (naturalny warunek brzegowy).

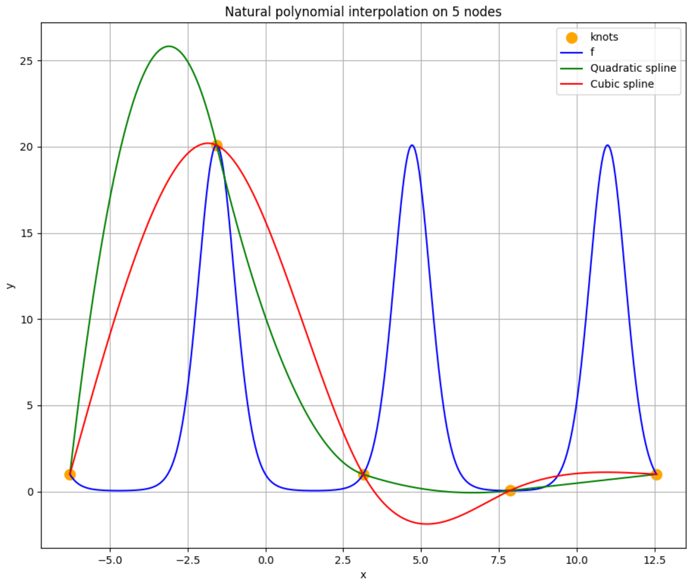
Zakłada on równość drugiej pochodnej wielomianu graniczącego z zerem, tj:

$$f''_1(x_1) = f''_{n-1}(x_n) = 0$$

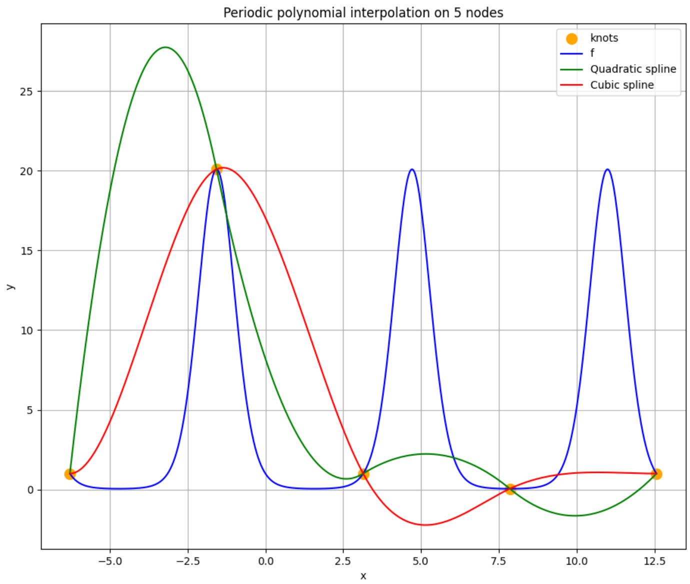
Periodic boundary (periodyczny warunek brzegowy)

Zakłada on równość wielomianów granicznych oraz ich pochodnych pierwszego i drugiego stopnia.

$$f_1(x_1) = f_{n-1}(x_n)$$
$$f'_1(x_1) = f'_{n-1}(x_n)$$
$$f''_1(x_1) = f''_{n-1}(x_n)$$



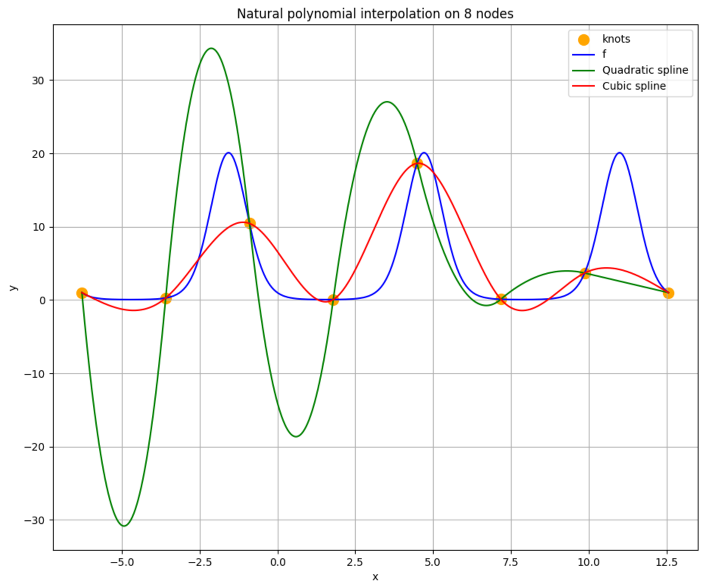
Rysunek 1: Naturalny warunek brzegowy dla 5 punktów



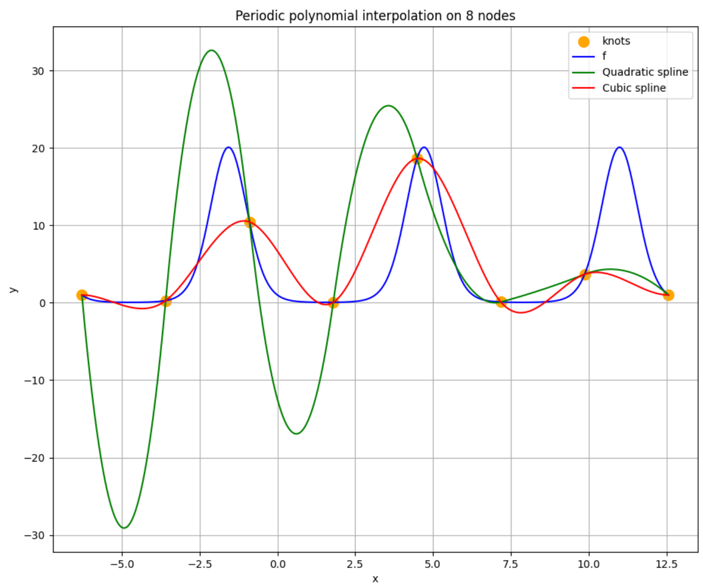
Rysunek 2: Periodyczny warunek brzegowy dla 5 punktów

Przy zastosowaniu pięciu węzłów wykresy uzyskanych wielomianów nie przypominają wykresu zadanej funkcji (f), są one jednakże bliższe tejże funkcji niż metody Lagrange'a i Newtona dla takiej samej liczby węzłów. Warunki brzegowe nie mają dużego wpływu na wizualną różnicę między uzyskanymi wykresami, poza krańcami przedziału, na nich periodyczny warunek brzegowy wytwarza bardziej “zagiętą” funkcję.

Zwiększając liczbę węzłów uzyskiwane wielomiany są coraz bardziej podobne do wykresu zadanej funkcji f, dzieje się to natomiast z różną prędkością.



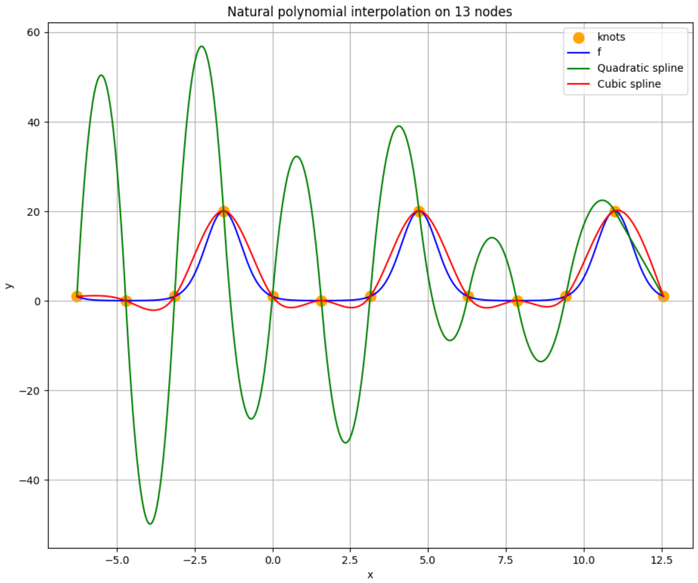
Rysunek 3: Naturalny warunek brzegowy dla 8 punktów



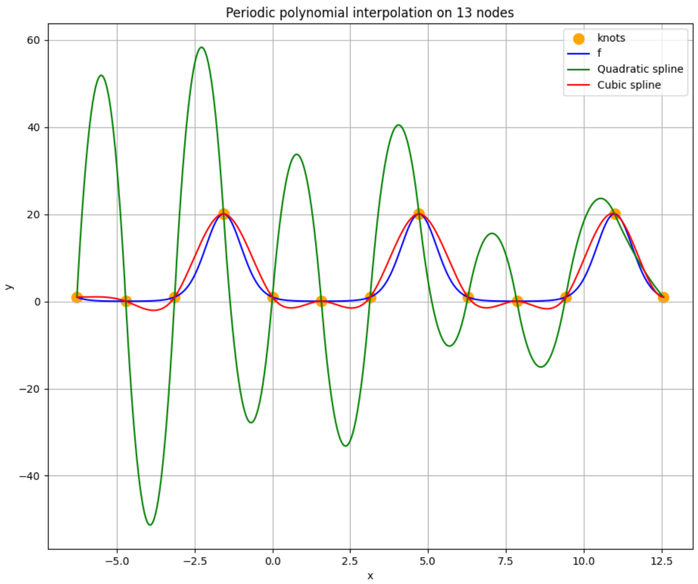
Rysunek 4: Periodyczny warunek brzegowy dla 8 punktów

Można zaobserwować dla interpolacji wielomianami sześciennym znacznie szybsze zbliżanie się do zadanej funkcji niż w przypadku interpolacji wielomianami kwadratowymi. Dzieje się tak przez większą dokładność metody cubic nad metodą quadratic.

Dla zwiększającej się liczby węzłów zwiększa się precyzja, jednakże nie dla każdej metody, występują wyjątki jak np. sytuacja gdy węzłów jest 13.

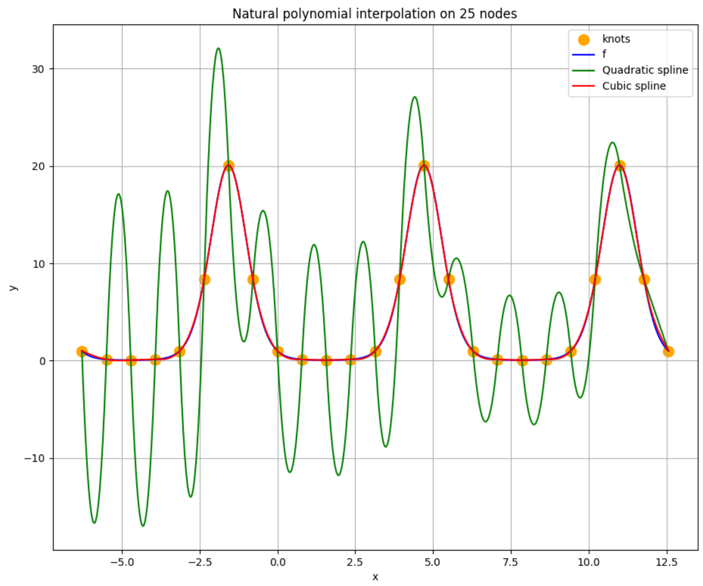


Rysunek 5: Naturalny warunek brzegowy dla 13 punktów

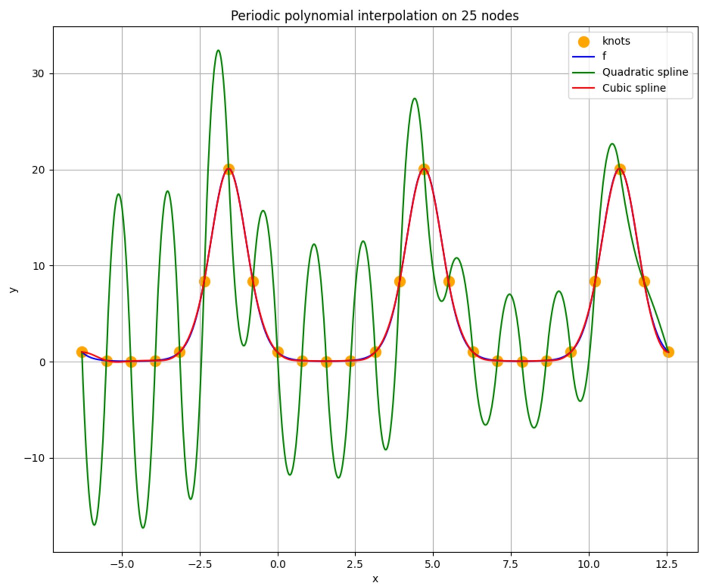


Rysunek 6: Periodyczny warunek brzegowy dla 13 punktów

Dla interpolacji wielomianami kwadratowym następuje nagła utrata dokładności, co widać na wykresach, nie cierpi na nią interpolacja wielomianami sześciennymi. Problem nie jest jednorazowy, występuje on wielokrotnie co pewną liczbę węzłów nagle zmniejszając dokładność. Można założyć że wynika on ze skończonej precyzji obliczeń, oraz ze specyfiki tej interpolacji, kwadratowy wielomian jest zawsze parabolą. Poniżej przykład kolejnej takiej sytuacji dla 25 węzłów



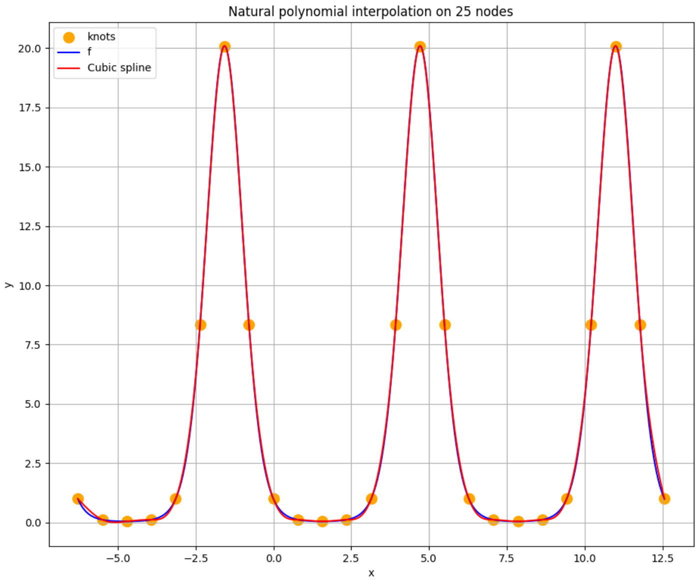
Rysunek 7: Naturalny warunek brzegowy dla 25 punktów



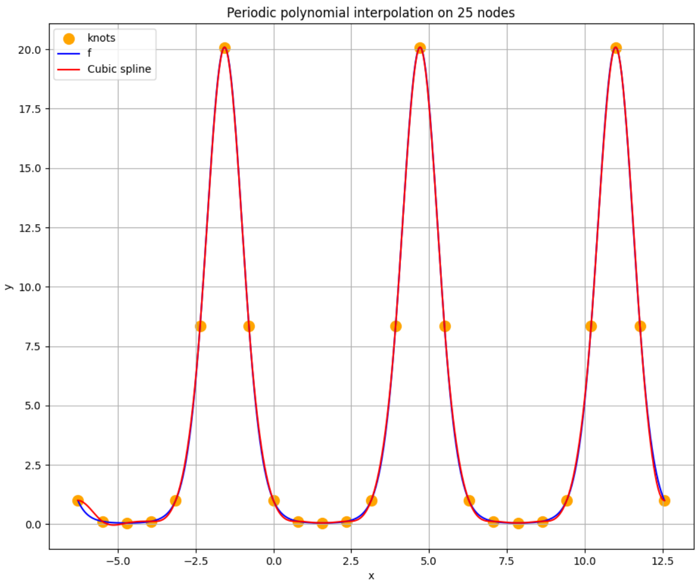
Rysunek 8: Periodyczny warunek brzegowy dla 25 punktów

Poza błędami dla interpolacji kwadratowej, wraz ze wzrostem liczby węzłów rośnie precyzja, dla interpolacji sześciennej jest to proces niezmienny, dla kwadratowej występują opisane już powyżej błędy.

Można zauważyć że dla 25 punktów prezycja uzyskana przez interpolację wielomianami sześciennymi jest już niezwykle wysoka, poniżej wykresy.



Rysunek 9: Naturalny warunek brzegowy dla 25 punktów wyłącznie dla interpolacji sześciennej



Rysunek 10: Periodyczny warunek brzegowy dla 25 punktów wyłącznie dla interpolacji sześciennej

Jak widać na wykresach zawierających tylko interpolację sześcienną, dokładność przybliżenia jest już bardzo dobra, wykres te dla większości swojej długości pokrywa się z wykresem funkcji zadanej.

Następnie obliczam dokładność przybliżenia, miary dokładności dla wykonywanych obliczeń to: średnia kwadratów odległości oraz największa różnica wartości odległości funkcji f i uzyskanego wielomianu interpolacyjnego.
Obliczenia zostały wykonane dla 1000 równomiernie rozmieszczonych punktów w przedziale $[-\ 2pi, 4pi]$ mierząc do dwa węzły, od 5 do 51.

Liczba węzłów	Wielomian kwadratowy (quadratic)		Wielomian sześcienny (cubic)	
	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa
5	130.837659	143.125322	101.661653	92.122492
7	58.414349	58.414349	58.414349	58.414349
9	47.775728	45.597539	24.696088	26.575848
11	45.993231	45.461333	17.138279	18.517495
13	540.932382	585.851529	5.192682	3.981752
15	16.360651	16.192149	5.683846	4.107588
17	22.036020	21.328788	3.193743	2.144329
19	4.042938	4.447326	2.899667	2.416723
21	30.259276	30.984515	0.796108	0.634767
23	10.863444	11.173064	0.390026	0.353534
25	70.921632	74.473823	0.009101	0.009513
27	4.147940	4.262668	0.096975	0.105073
29	3.413401	3.507651	0.049716	0.057779
31	0.668719	0.704277	0.043450	0.049873
33	0.214097	0.217460	0.013947	0.018703
35	0.156712	0.166024	0.007688	0.011135
37	0.214040	0.213295	0.003232	0.005759
39	0.104440	0.111078	0.002579	0.004495
41	0.065928	0.070757	0.001572	0.003086
43	0.071345	0.075978	0.001044	0.002289
45	0.078745	0.083082	0.000642	0.001697
47	0.055440	0.058693	0.000429	0.001343
49	0.056054	0.059209	0.000293	0.001096
51	0.035084	0.037180	0.000209	0.000920

Tabela 1: Średnia kwadratów różnic wielomianów oraz funkcji f

Liczba węzłów	Wielomian kwadratowy (quadratic)		Wielomian sześcienny (cubic)	
	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa
5	25.134007	27.177668	21.847826	22.196153
7	19.084867	19.084867	19.084867	19.084867
9	15.318357	14.859002	12.342227	13.720607

Liczba węzłów	Wielomian kwadratowy (quadratic)		Wielomian sześcienny (cubic)	
	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa	Naturalna interpolacja wielomianowa	Periodyczna interpolacja wielomianowa
11	14.980212	15.311474	13.207771	13.172804
13	50.270613	51.765932	6.763781	4.750441
15	10.140702	9.891231	7.586784	7.588058
17	10.678949	10.494074	5.410186	4.616652
19	3.537792	3.672975	4.489625	4.205781
21	11.369230	11.469751	2.774888	2.598907
23	7.841305	7.917650	2.271738	2.271973
25	17.119642	17.430941	0.432401	0.370131
27	4.639567	4.686430	1.231230	1.231168
29	3.761830	3.799606	0.807199	0.829631
31	1.804122	1.835089	0.678137	0.698089
33	1.213889	1.239214	0.459349	0.478570
35	0.928213	0.949558	0.383854	0.383850
37	1.229254	1.227350	0.159689	0.295990
39	0.944052	0.960001	0.225059	0.272766
41	0.627660	0.641427	0.164645	0.254089
43	0.457007	0.469159	0.138672	0.238315
45	0.625617	0.636279	0.104120	0.225464
47	0.499939	0.509482	0.087112	0.213860
49	0.447461	0.456469	0.061093	0.204374
51	0.369277	0.376866	0.057473	0.195294

Tabela 2: Maksimum wartości bezwzględnej różnic wielomianów oraz funkcji f

Zawartości tabel zgadzają się z wnioskami uzyskanymi z analizy wykresów, można zauważyć dużą różnicę w dokładności między interpolacją wielomianem kwadratowym a sześciennym. Można także zauważyć różnice między naturalną a periodyczną interpolacją. Dla 5 węzłów dla wielomianu kwadratowego interpolacja dla periodycznego warunku brzegowego osiąga gorszą dokładność, zaś dla wielomianu sześciennego dokładność uzyskana jest lepsza niż w przypadku interpolacji dla naturalnego warunku brzegowego, w przypadku 7 węzłów wyniki dla danych wielomianów są identyczne, natomiast w przypadku 9 węzłów uzyskujemy odwrotną sytuację jak dla 5 co do stosunków dokładności. Dla 13, 21, 25, 37 i 45 węzłów można zauważyć nagłe skoki w stracie dokładności dla interpolacji wielomianami kwadratowymi, co może wynikać ze skończonej precyzji obliczeń oraz specyfiki wielomianów kwadratowych.

Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia pozwala na skuteczne przybliżanie funkcji z wykorzystaniem wielomianów interpolacyjnych. Interpolacja wielomianami sześciennym jest dokładniejsza i nie cierpi na problemy interpolacji wielomianami kwadratowymi, jest ona także dokładniejsza dla każdej z badanej liczby węzłów. Zastosowane warunki brzegowe, naturalny i periodyczny mają znaczący wpływ na dokładność uzyskanego przybliżenia, wpływ ten natomiast nie jest jednoznaczny, zdarza się że raz jeden raz drugi warunek brzegowy pozwala uzyskać dokładniejsze przybliżenie.