

Metody obliczeniowe w nauce i technice - laboratorium 2b

Jakub Radek

Opis problemu

Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla niżej podanej funkcji dla zagadnienia Lagrange'a skonstruowanych metodami Hermite'a korzystając z dwóch metod rozmieszczenia węzłów: równomiernie oddalonych (equidistant) oraz według pierwiastków wielomianu Czebyszewa.

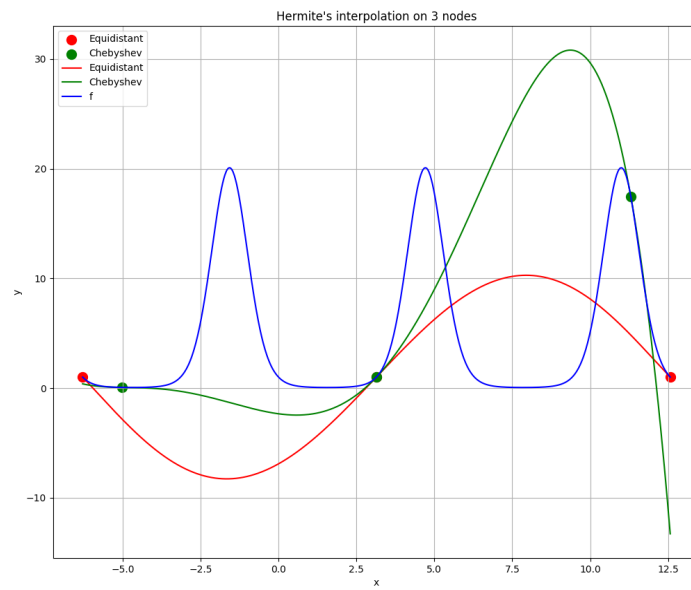
Badana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)}$$
$$f'(x) = -k * e^{-k \cdot \sin(mx)} * \cos(mx)$$

Gdzie $k = 3$, $m = 1$, $x \in [-2\pi, 4\pi]$

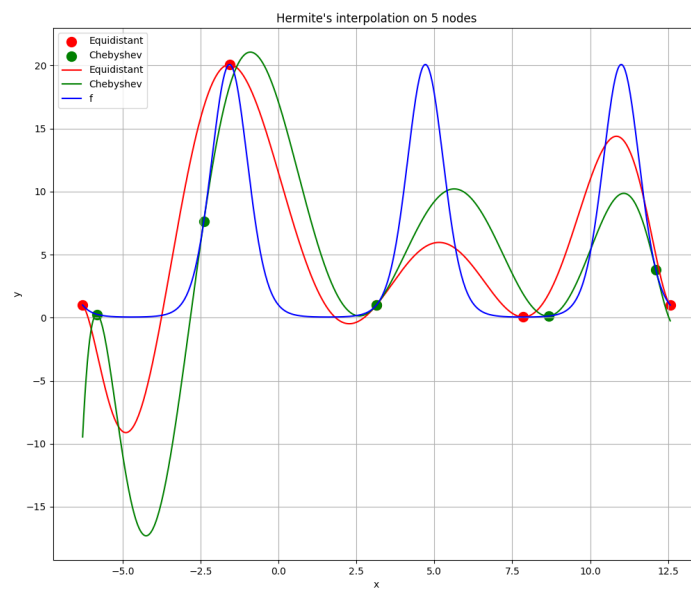
Opracowanie

Pierwszym krokiem będzie narysowanie wykresów dla skonstruowanych wielomianów przy użyciu różnej liczby węzłów. Do uzyskania wykresów oraz wyników wykorzystano język Python w wersji 3.10, bibliotekę numpy oraz bibliotekę matplotlib.

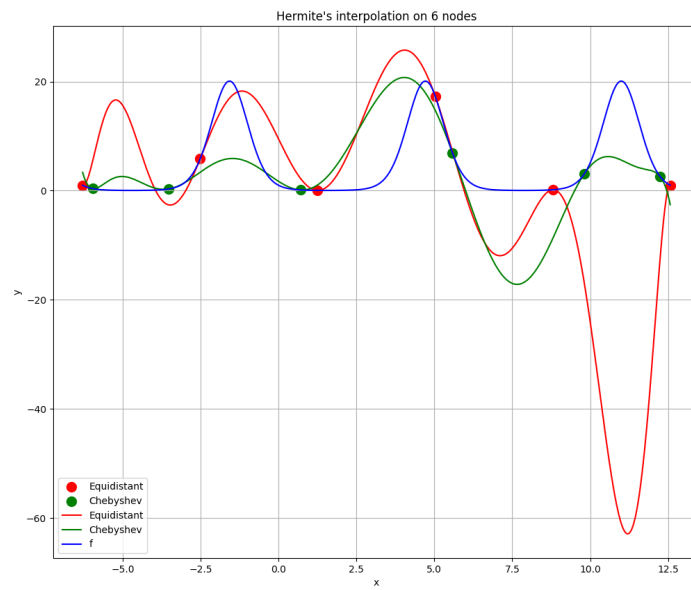


Rysunek 1: Metoda Hermite'a dla 3 punktów

Przy zastosowaniu trzech węzłów wykresy wielomianów nie przypominają wykresu zadanej funkcji (f)

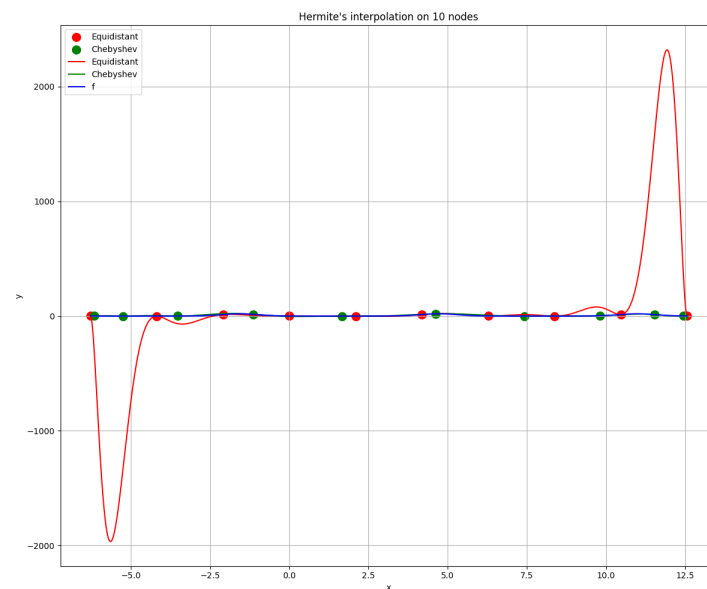


Rysunek 2: Metoda Hermite'a dla 5 punktów

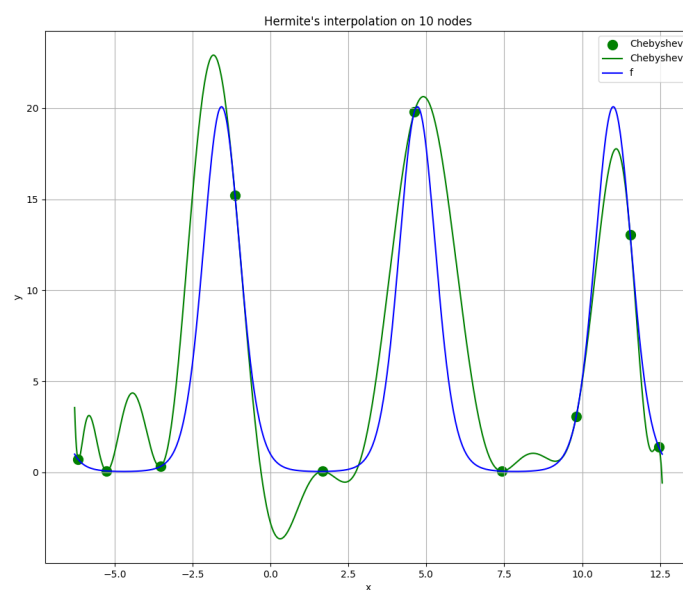


Rysunek 3: Metoda Hermite'a dla 6 punktów

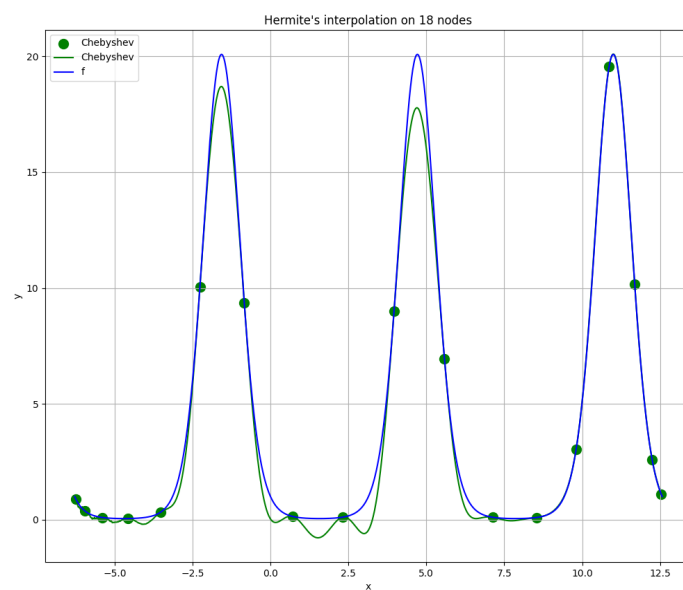
Można zauważyć dla równomiernego rozmieszczenia węzłów efekt Rungego, jest to szczególnie wizualnie zauważalne dla węzłów większych od 5. Efekt Rungego występuje tylko dla równomiernego rozłożenia węzłów, ponieważ węzły rozłożone metodą Czebyszewa są gęściej upakowane na krańcach przedziału. Dla porównania w zagadnieniu Lagrange'a pojawiał się dopiero przy około 10 węzłach (wielomian jest 9 stopnia, tutaj również 9).



Rysunek 4: Metoda Hermite'a dla 10 punktów

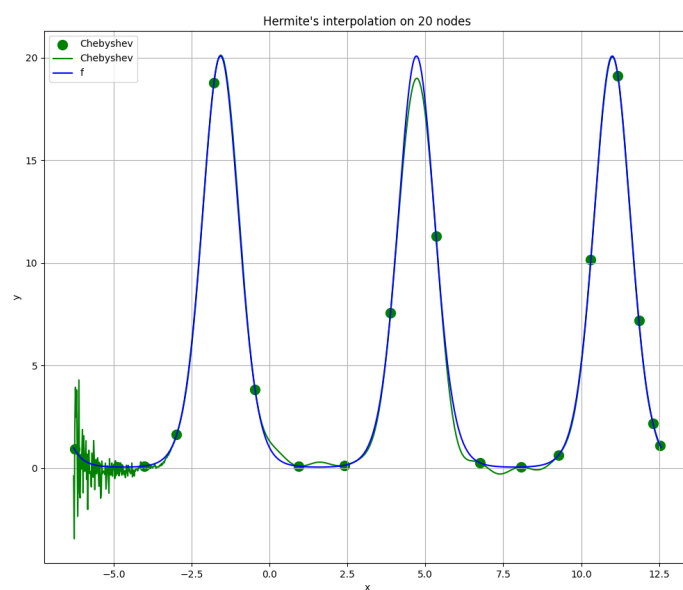


Rysunek 5: Metoda Hermite'a dla 10 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa



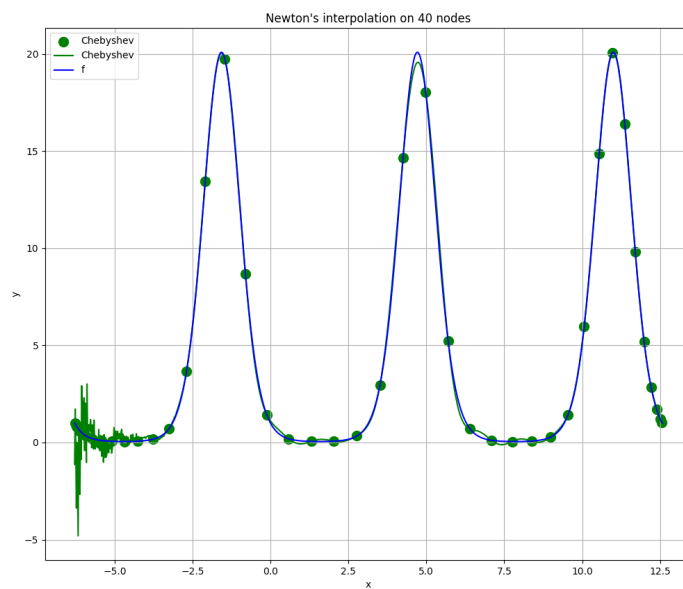
Rysunek 6: Metoda Hermite'a dla 18 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Gdy usuniemy wykres dla równomiernego rozłożenia węzłów możemy zaobserwować zwiększające się podobieństwo wielomianu do funkcji f dla węzłów Czebyszewa aż do 20 węzłów, gdzie następuje degradacja jakości wielomianu zauważalna z lewej strony wykresu.



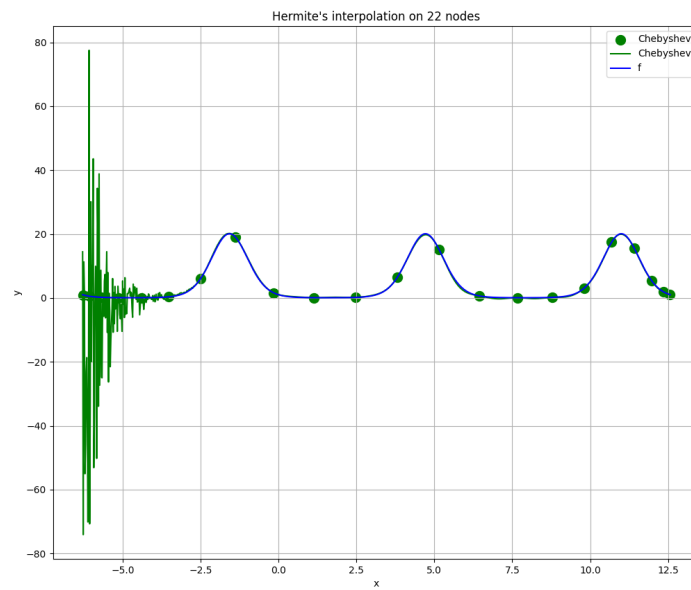
Rysunek 7: Metoda Hermite'a dla 20 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Problem najprawdopodobniej wynika ze skończonej precyzji floata a co za tym idzie z błędów w obliczeniach. Podobny efekt pojawiał się dla metody Newtona w zagadnieniu Lagrange'a dla 40 węzłów, poniżej przykład.

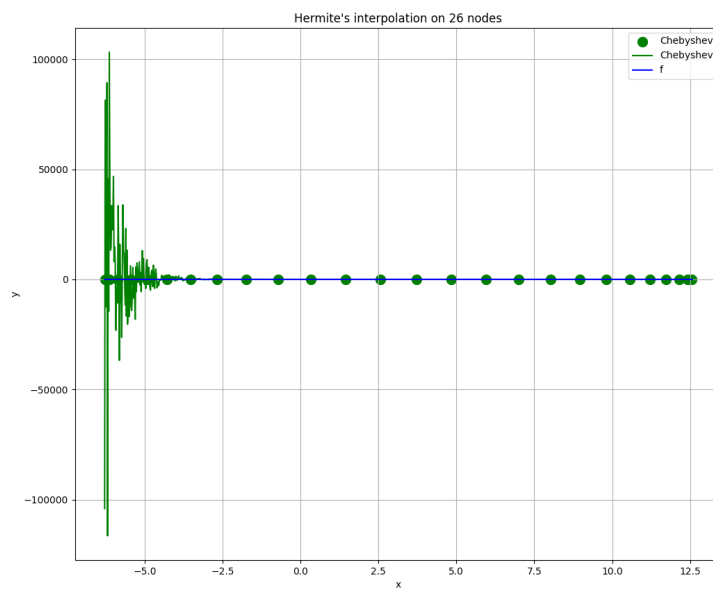


Rysunek 8: Metoda Newtona dla 40 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Wraz ze zwiększaniem liczby węzłów efekt pogłębia się, poniżej przykład dla 22 węzłów.



Rysunek 9: Metoda Hermite'a dla 22 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa



Rysunek 10: Metoda Hermite'a dla 26 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Następnie obliczam dokładność przybliżenia, miary dokładności dla wykonywanych obliczeń to: średnia kwadratów odległości oraz największa różnica wartości odległości funkcji f i uzyskanego wielomianu interpolacyjnego.

Obliczenia zostały wykonane dla 1000 równomiernie rozmieszczonych punktów w przedziale $[-2\pi i, 4\pi i]$ mierząc do dwa węzły, od 2 do 30.

| Liczba węzłów | Średnia kwadratów | | Maksimum odległości | |
|---------------|----------------------|---------------------|---------------------|-----------------|
| | równo odległe | Czebyszew | równo odległe | Czebyszew |
| 2 | 72.039975 | 179.579880 | 24.386201 | 36.472895 |
| 4 | 81.427424 | 89.209065 | 25.093101 | 22.730119 |
| 6 | 523.377339 | 66.842919 | 82.185844 | 17.216347 |
| 8 | 2112.236109 | 62.354805 | 192.754016 | 23.355273 |
| 10 | 335501.221433 | 11.562976 | 2312.976205 | 9.723662 |
| 12 | 2995166.594614 | 8.175237 | 8218.924545 | 8.549263 |
| 14 | 4854363.443329 | 1.816776 | 12617.575531 | 3.630994 |
| 16 | 3103003109.167853 | 0.723931 | 341754.047302 | 3.051301 |
| 18 | 105623444528.626617 | 0.368409 | 1923604.530013 | 2.317309 |
| 20 | 295282134555.097351 | 0.176010 | 3796184.652418 | 4.392348 |
| 22 | 16720691464237.16210 | 51.130935 | 33336928.962935 | 76.975278 |
| 24 | 1249888197719730.25 | 9560.895034 | 264330566.342788 | 1141.825663 |
| 26 | 13914914111474396 | 70530801.318472 | 799726212.103281 | 116376.323591 |
| 28 | 18031196208898368 | 41308281159.897438 | 1029607734.508429 | 3029670.394475 |
| 30 | 5690735877095073792 | 38615952129438.8125 | 22112633694.609505 | 69860188.923799 |

Tabela 1: Zmierzone dokładności dla poszczególnych metod

Na podstawie tabeli można zauważyć podobne wnioski jak te z analizowania wykresów. Dla równomiernego rozmieszczenia węzłów dokładność w zasadzie nie rośnie, natomiast dla rozmieszczenia metodą Czebyszewa dokładność rośnie do około 18/20 węzłów, następnie spada. Największą dokładność udało się uzyskać dla 20 węzłów, pomimo widocznej na wykresie degradacji. Porównując z metodą Newtona dla zagadnienia Lagrange'a można zauważyć że metoda Hermite'a zachowuje się dość podobnie gdy bierzemy pod uwagę ilość informacji. Najlepsza dokładność dla metody Newtona została uzyskana dla około 40 węzłów, tutaj dla około 20 co daje podobną ilość informacji. Metody te tracą na dokładności i generują zdegradowane wykresy dla odpowiednio dużej ilości węzłów (dwukrotnie większej ilości dla metody Newtona). Można więc wywnioskować że metoda Hermite'a cierpi na te same problemy co metoda Newtona, natomiast problemów tych nie ma metoda Lagrange'a.

Wnioski

Metoda Hermite'a pozwala na skuteczne przybliżanie funkcji z wykorzystaniem wielomianów interpolacyjnych, kiedy oprócz wartości punktów znane są także pochodne w tych punktach, jednakże należy wziąć pod uwagę efekt Rungego który wyklucza stosowanie równo odległego rozmieszczenia węzłów dla wszystkich poza najmniejszymi wartościami oraz zniekształcenia wykresu od pewnej liczby węzłów spowodowane błędami na operacjach liczbami zmiennoprzecinkowymi.