Metody obliczeniowe w nauce i technice - laboratorium 2

Jakub Radek

Opis problemu

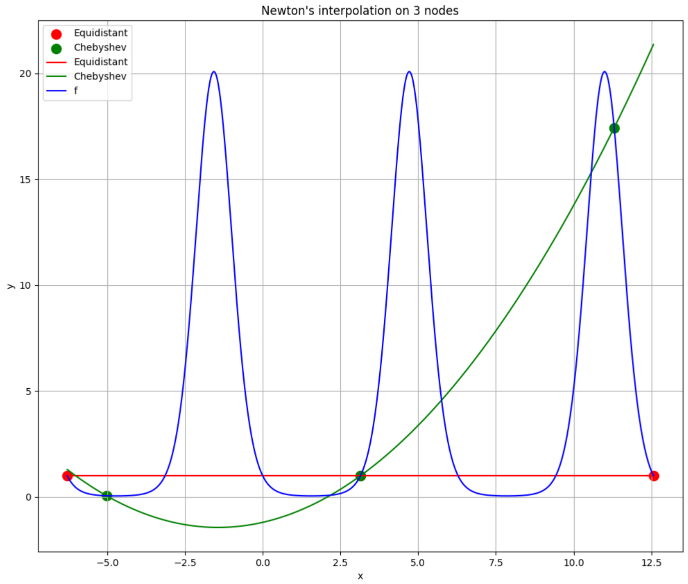
Główną ideą zadania jest zbadanie zachowania wielomianów interpolacyjnych dla niżej podanej funkcji dla zagadnienia Lagrange'a skonstruowanych metodami Newtona oraz Lagrange'a oraz korzystając z dwóch metod rozmieszczenia węzłów: równomiernie oddalonych (equidistant) oraz według pierwiastków wielomianu Czebyszewa.
Badana funkcja:

$$f(x) = e^{-k \cdot sin(mx)}$$

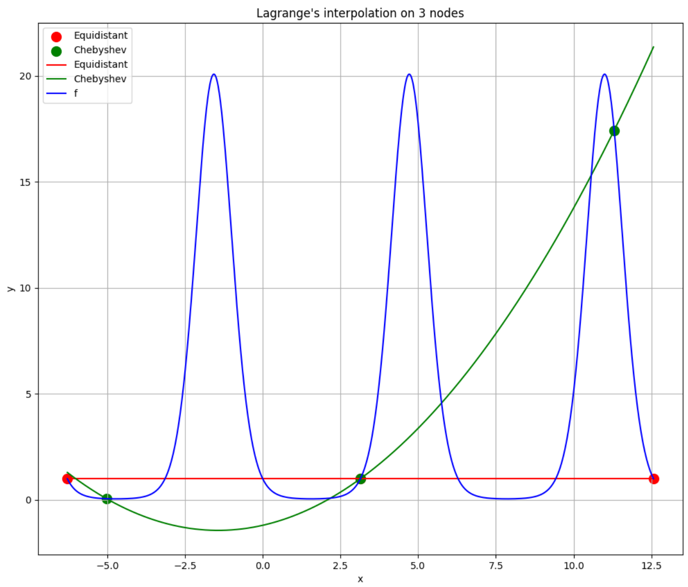
Gdzie $k = 3,\ m = 1,\ x\epsilon[-\ 2pi, 4pi]$

Opracowanie

Pierwszym krokiem będzie narysowanie wykresów dla skonstruowanych wielomianów przy użyciu różnej liczby węzłów. Do uzyskania wykresów oraz wyników wykorzystano język Python w wersji 3.10, bibliotekę numpy oraz bibliotekę matplotlib.



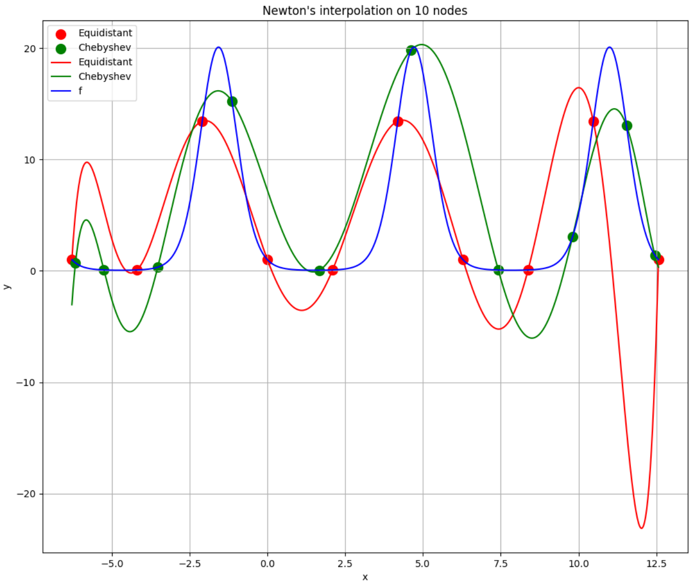
Rysunek 1: Metoda Newtona dla 3 punktów



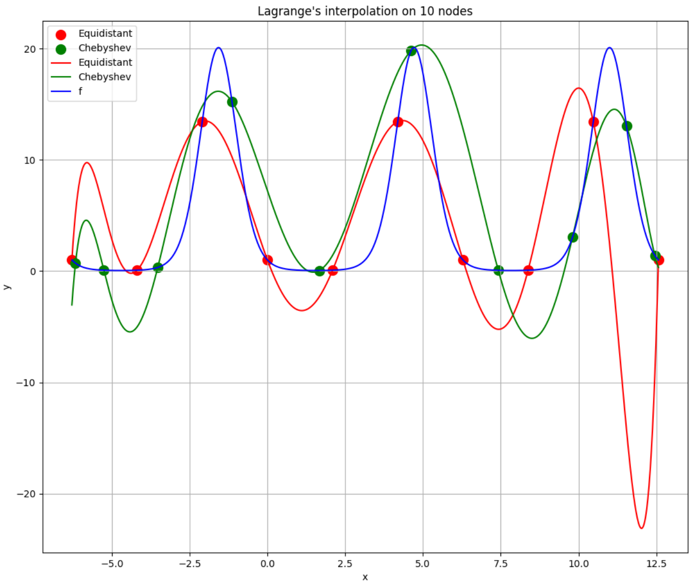
Rysunek 2: Metoda Lagrange'a dla 3 punktów

Przy zastosowaniu trzech węzłów wykresy wielomianów nie przypominają wykresu zadanej funkcji (f), zarówno dla metody Newtona jak i Lagrange'a.

Zwiększając liczbę węzłów uzyskiwane wielomiany są coraz bardziej podobne do wykresu zadanej funkcji f, co można zaobserwować np dla dziesięciu węzłów.

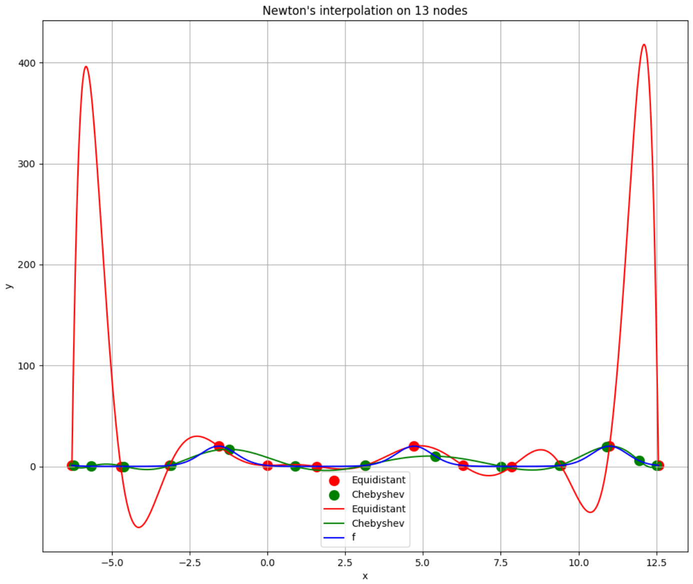


Rysunek 3: Metoda Newtona dla 10 punktów



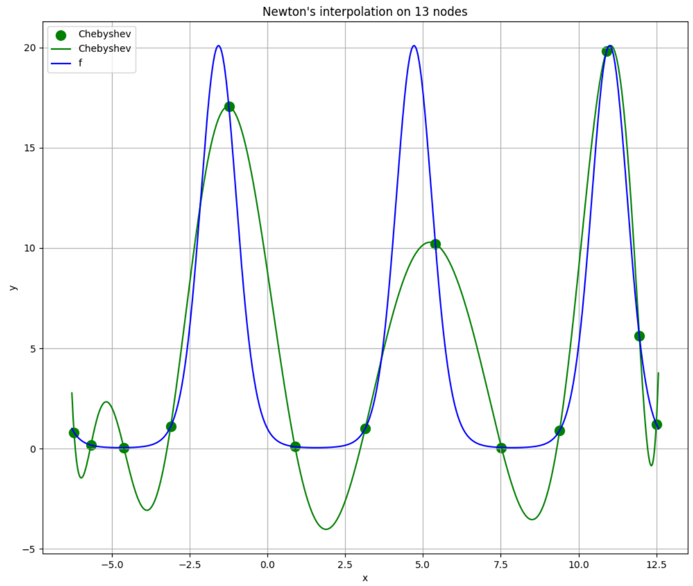
Rysunek 4: Metoda Lagrange'a dla 10 punktów

Można już natomiast zauważyć dla równomiernego rozmieszczenia węzłów początki efektu Rungego, jest to szczególnie wizualnie zauważalne dla węzłów większych od 12, poniżej przykład. Ze względu na aktualne wizualne podobieństwo wykresów dla obu metod rozmieszczenia ograniczę się do metody Newtona.



Rysunek 5: Metoda Newtona dla 13 punktów

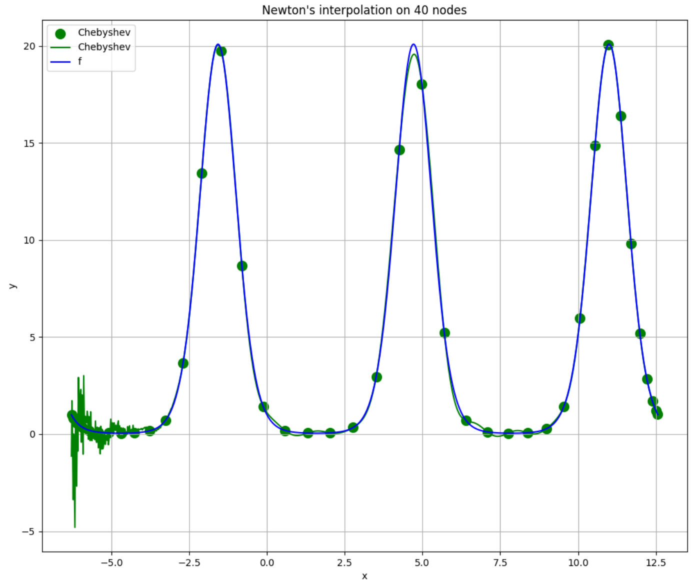
Występowanie efektu Rungego nie jest zależne od metody interpolacji, występuje natomiast tylko dla równomiernego rozłożenia węzłów, ponieważ węzły rozłożone metodą Czebyszewa są gęściej upakowane na krańcach przedziału. Ze względu na ten efekt ograniczę się w natępujących wykresach do rozłożenia węzłów metodą Czebyszewa.



Rysunek 6: Metoda Newtona dla 13 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

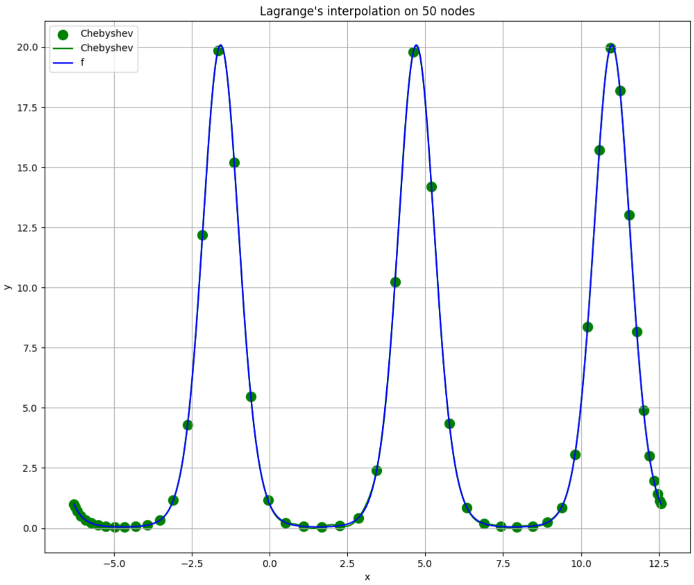
Gdy usuniemy wykres dla równomiernego rozłożenia węzłów możemy zaobserwować zwiększające się podobieństwo wielomianu do funkcji f dla węzłów Czebyszewa aż do 40 węzłów, gdzie pojawiają się wizualne różnice między metodami, następuje degradacja jakości wielomianu dla metody Newtona zauważalna z lewej strony wykresu.

Problem najprawdopodobniej wynika ze skończonej precyzji floata a co za tym idzie z błędów w obliczeniach.



Rysunek 7: Metoda Newtona dla 40 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Dla 50 węzłów metoda Lagrange'a dla rozłożenia węzłów metodą Czebyszewa bardzo dokładnie przybliża funkcję f.



Rysunek 8: Metoda Lagrange'a dla 50 punktów wyłącznie dla rozłożenia metodą Czebyszewa

Następnie obliczam dokładność przybliżenia, miary dokładności dla wykonywanych obliczeń to: średnia kwadratów odległości oraz największa różnica wartości odległości funkcji f i uzyskanego wielomianu interpolacyjnego.
Obliczenia zostały wykonane dla 1000 równomiernie rozmieszczonych punktów w przedziale $[-2pi, 4pi]$ mierząc do dwa węzły, od 2 do 50.

Liczba węzłów	Newton		Lagrange	
	równo odległe	Czebyszew	równo odległe	Czebyszew
2	58.414349	51.797564	58.414349	51.797564
4	58.414349	45.967118	58.414349	45.967118
6	171.448693	57.835668	171.448693	57.835668
8	187.075006	43.572805	187.075006	43.572805
10	75.718362	26.736757	75.718362	26.736757
12	161.816506	20.682137	161.816506	20.682137
14	785.897855	14.871283	785.897855	14.871283
16	16310.432461	13.792799	16310.432461	13.792799
18	455641.991172	7.378681	455641.991170	7.378681
20	4679630.600340	3.809747	4679630.600353	3.809747
22	17725467.898298	2.624101	17725467.897446	2.624101
24	30633062.646806	2.232982	30633062.657476	2.232982
26	16403279.402101	1.267772	16403279.408041	1.267772
28	364094199.684241	0.586615	364094195.587315	0.586616
30	10025100570.341869	0.297599	10025100707.343901	0.297600
32	120395520057.825806	0.253166	120395511644.967850	0.253165
34	789567919426.706909	0.213200	789568003930.140625	0.213200
36	3011092982876.884277	0.122380	3011095617917.590820	0.122054
38	6222999336831.172852	0.049252	6223011723703.899414	0.048947
40	4214493609423.026855	0.143301	4214481840031.651367	0.022779
42	62796008169649.96875	2.254233	62791416214340.179688	0.017218
44	1314558227533041.75	25.819169	1314795170306859.25	0.010650
46	12187548236869094	2526.236135	12194545613728410	0.004504
48	69376038342798296	10534.606356	69478295410754120	0.001692
50	253043528015540864	1191991.797963	257844466468555968	0.001076

Tabela 1: Średnia kwadratów różnic wielomianów oraz funkcji f

Zawartość tabeli zgadza się z wnioskami uzyskanymi z analizy wykresów, dla liczby węzłów poniżej 6 są one dość podobne niezależnie od metody czy rozmieszczenia węzłów, można natomiast zauważyć znacznie szybciej efekt Rungego dla równo odległego rozmieszczenia węzłów z tych wyników niż z analizy wykresów. Dokładność metody Newtona zaczyna maleć od około 40 węzłów, metoda Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa pozostaje dokładna. Poniższa tabela dostarcza podobnych wniosków, utwierdzając w nich.

Liczba węzłów	Newton		Lagrange	
	równo odległe	Czebyszew	równo odległe	Czebyszew
2	19.084867	19.357254	19.084867	19.357254
4	19.084867	19.324597	19.084867	19.324597
6	35.512270	21.090371	35.512270	21.090371
8	38.982224	13.438501	38.982224	13.438501
10	28.838810	13.298372	28.838810	13.298372
12	49.846626	12.993375	49.846626	12.993375
14	116.908057	10.374958	116.908057	10.374958
16	761.202095	11.453200	761.202095	11.453200
18	3544.597837	9.638086	3544.597837	9.638086
20	11204.152408	7.269494	11204.152408	7.269494
22	23811.830312	4.646840	23811.830311	4.646840
24	33521.823194	4.307719	33521.823202	4.307719
26	31497.935272	3.240509	31497.935273	3.240509
28	160449.798166	2.149208	160449.797309	2.149207
30	802948.045275	1.485858	802948.050734	1.485854
32	2641422.270449	1.810395	2641422.165734	1.810400
34	6666796.236938	1.580499	6666796.764707	1.580501
36	12930082.732315	1.160758	12930090.783905	1.160530
38	18633345.120231	0.850264	18633353.528191	0.850269
40	21321286.539514	5.514828	21321275.846248	0.560735
42	84458229.065910	14.911075	84455214.444363	0.426017
44	363779900.585954	58.845587	363812148.319526	0.299382
46	1060218851.821961	625.389395	1060604854.796684	0.192721
48	2448360400.508349	1213.969003	2450465746.018106	0.100884
50	4498307637.298693	15229.919652	4555830951.365527	0.110377

Tabela 2: Maksimum wartości bezwzględnej różnic wielomianów oraz funkcji f

Wnioski

Zarówno metoda Newtona jak i Lagrange’a umożliwia skuteczne przybliżanie funkcji z wykorzystaniem wielomianów interpolacyjnych, jednakże należy wziąć pod uwagę efekt Rungego który wyklucza stosowanie równo odległego rozmieszczenia węzłów dla wszystkich poza najmniejszymi wartościami oraz wzięcie pod uwagę zniekształceń wykresu dla wysokiej liczby węzłów korzystając z metody Newtona.