

算法简化描述

陈磊

September 10, 2016

Contents

1	非线性方程求根	1
2	线性方程组求解	2
3	微分方程数值解	3
3.1	龙格库塔 (Runge Kutta)	3
3.1.1	四阶龙格库塔	3
4	最优化算法	4
4.1	梯度法 (Gradient Method)	4
4.1.1	梯度法 (Gradient Descent Method)	4
4.1.2	加速邻近梯度法 (Accelerated Proximal Gradient Method, APG)	4
4.1.3	自适应重启加速梯度法	4
5	随机搜索	6
5.1	遗传算法 (Genetic Algorithm, GA)	6
5.2	粒子群算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)	6
6	数据分析	7
6.1	聚类	7

List of Algorithms

1	四阶龙格库塔	3
2	梯度法	4
3	加速邻近梯度法 [2, 1]	4
4	自适应重启加速梯度法 [3]	5

Chapter 1

非线性方程求根

Chapter 2

线性方程组求解

Chapter 3

微分方程数值解

3.1 龙格库塔 (Runge Kutta)

3.1.1 四阶龙格库塔

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(0) = y_0 \quad (3.1)$$

Algorithm 1 四阶龙格库塔

Require: f, y_0, h, n

```
1: for  $i = 0, 1, \dots$  do  
2:    $k_1 = f(x_i, y_i)$   
3:    $k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h)$   
4:    $k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h)$   
5:    $k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$   
6:    $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$ 
```

求解微分方程组.

Chapter 4

最优化算法

4.1 梯度法 (Gradient Method)

4.1.1 梯度法 (Gradient Descent Method)

梯度法或称梯度下降法.

Algorithm 2 梯度法

Require: $x_0 \in \mathbf{R}^n$

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: $x_{k+1} = y_k - t_k \nabla f(y_k)$
-

4.1.2 加速邻近梯度法 (Accelerated Proximal Gradient Method, APG)

此方法由 Nesterov[2] 首先提出.

Algorithm 3 加速邻近梯度法 [2, 1]

Require: $x_0 \in \mathbf{R}^n, y_0 = x_0, \theta_0 = 1, q \in [0, 1]$

- 1: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 - 2: $x_{k+1} = y_k - t_k \nabla f(y_k)$
 - 3: $\theta_{k+1}^2 = (1 - \theta_{k+1})\theta_k^2 + q\theta_{k+1}, \theta_{k+1} \in (0, 1)$, 求解 θ_{k+1}
 - 4: $\beta_{k+1} = \theta_k(1 - \theta_k)/(\theta_k^2 + \theta_{k+1})$
 - 5: $y_{k+1} = x_{k+1} + \beta_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$
-

其中, $\theta_{k+1} \in (0, 1)$ 见文献 [1] 91 页. 当 $q = 1$ 时, 该算法为梯度法.

4.1.3 自适应重启加速梯度法

加速邻近梯度法 (算法3) 迭代到一定程度时, 外推系数 β_k 趋于 0, 算法退化成梯度法. 使用该算法自适应的重置参数, 能够保持加速邻近梯度法的快速

收敛.

Algorithm 4 自适应重启加速梯度法 [3]

Require: $x_0 \in \mathbf{R}^n, y_0 = x_0, \theta_0 = 1$

1: **for** $j = 0, 1, \dots$ **do**

2: 取 $q = 0$ 执行算法3, 直到 $f(x_k) > f(x_{k+1})$ 时停止 (或可以在
 $\nabla f(y_{k-1})^T(x_k - x_{k-1})$ 时停止, 两者选其中一种)

3: $x_0 = x_k, y_0 = x_k, \theta_0 = 1$

Chapter 5

随机搜索

5.1 遗传算法 (Genetic Algorithm, GA)

5.2 粒子群算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)

Chapter 6

数据分析

6.1 聚类

Bibliography

- [1] Yu Nesterov. Introductory lectures on convex programming volume i: Basic course. *Lecture notes*, 1998.
- [2] Yurii Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate $\mathcal{O}(1/k^2)$. In *Soviet Mathematics Doklady*, volume 27, pages 372–376, 1983.
- [3] Brendan O’Donoghue and Emmanuel Candès. Adaptive restart for accelerated gradient schemes. *Foundations of computational mathematics*, 15(3):715–732, 2015.