



微分方程模型：捕食与反捕食模型

《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码





捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

意大利生物学家Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，他从第一次世界大战期间，地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中，发现鲨鱼等的比例有明显增加（见下表），而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降。显然战争使捕鱼量下降，食用鱼增加，鲨鱼等也随之增加，但为何鲨鱼的比例大幅增加呢？

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	19.7

他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家V.Volterra，希望建立一个食饵—捕食系统的数学模型，定量地回答这个问题。



捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

1. 基本假设:

(1) 食饵由于捕食者的存在使增长率降低, 假设降低的成都与捕食者数量成正比;

(2) 捕食者由于食饵为它提供食物的作用使其死亡率降低或使之增长, 假定增长的程度与食饵数量呈正比。

2. 符号说明:

$x_1(t)$ —— 食饵在 t 时刻的数量; $x_2(t)$ —— 捕食者在 t 时刻的数量;

r_1 —— 食饵独立生存时的增长率; r_2 —— 捕食者独自存在时的死亡率;

λ_1 —— 捕食者掠取食饵的能力; λ_2 —— 食饵对捕食者的供养能力.

e —— 捕获能力系数





捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

3.模型建立与求解

模型（一）不考虑人工捕获

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-r_2 + \lambda_1 x_2) \end{cases}$$

针对一组具体的数据用matlab软件进行计算.

设食饵和捕食者的初始数量分别为 $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ 对于数据 $r_1 = 1, \lambda_1 = 0.1, r_2 = 0.02, \lambda_2 = 0.02, x_{10} = 25, x_{20} = 2$, t 的终值经试验后确定为15, 即模型为

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - 0.1x_2) \\ x'_2 = x_2(-0.5 + 0.02x_2) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$



捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

首先，建立m-文件shier.m如下：

```
function dx=shier(t,x)
```

```
dx=[x(1)*(1-0.1*x(2));x(2)*(-0.5+0.02*x(1))];
```

其次，建立主程序shark.m如下：

```
[t,x]=ode45('shier',[0 15],[25 2]);
```

```
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
```

```
figure,plot(x(:,1),x(:,2))
```

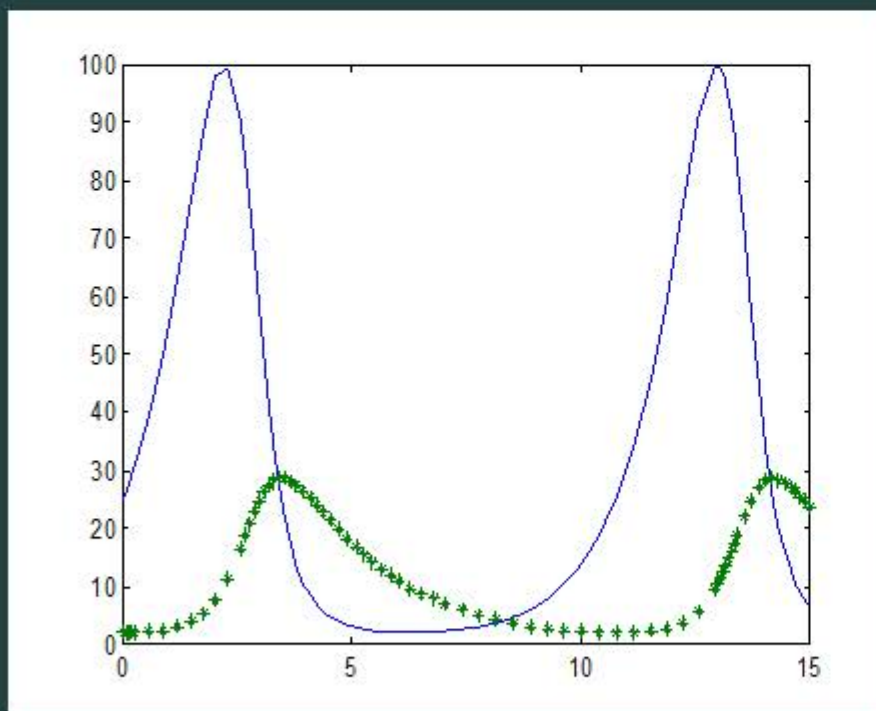



捕食与反捕食模型

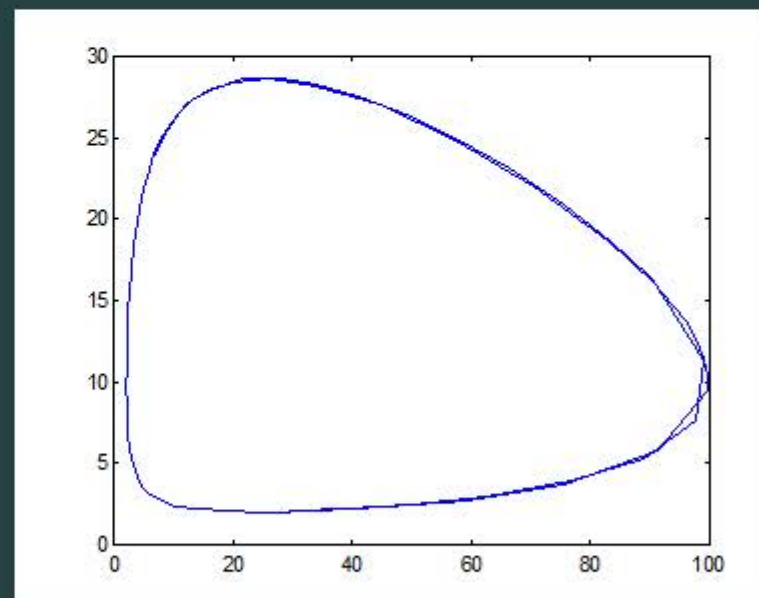
地中海鲨鱼问题

求解结果：

数值解如下图： $x_1(t)$ 为实线，
 $x_2(t)$ 为“*”线



相图(x_1, x_2)为：



左图反映了 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的关系。可以猜测： $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 都是周期函数。



捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

模型（二）考虑人工捕获

设表示捕获能力的系数为 e ，相当于食饵的自然增长率由 r_1 降为 $r_1 - e$ ，捕食者的死亡率由 r_2 增为 $r_2 + e$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

仍取 $r_1 = 1, \lambda_1 = 0.1, r_2 = 0.5, \lambda_2 = 0.02, x_1(0) = 25, x_2(0) = 2$

设战前捕获能力系数 $e=0.3$ ，战争中降为 $e=0.1$ ，则战前与战争中的模型分别为：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.7 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.8 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.9 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.6 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

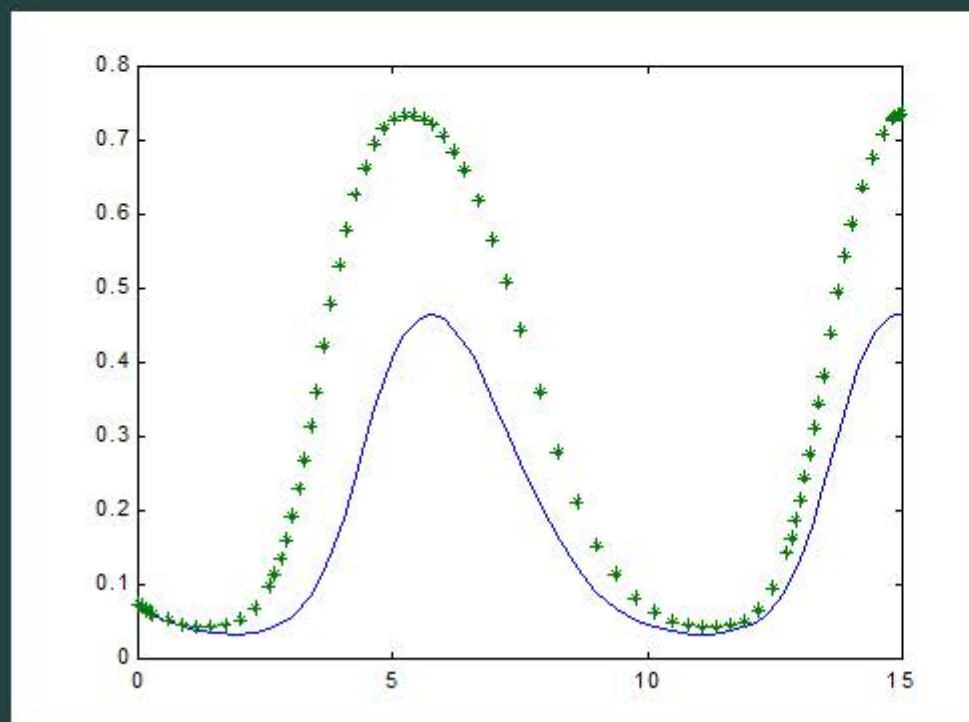


捕食与反捕食模型

地中海鲨鱼问题

模型求解:

- 1、分别用m-文件shier1.m和shier2.m定义上述两个方程
- 2、建立主程序shark1.m, 求解两个方程, 并画出两种情况下鲨鱼数在鱼类总数中所占比例 $x_2(t)/[x_1(t)+x_2(t)]$



实线为战前的鲨鱼比例,
“*”线为战争中的鲨鱼比例

结论: 战争中鲨鱼的比例比战前高!