如何建立数学规划模型

《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码

目录页

目录

什么是数学规划？

数学规划俗称最优化,首先是一种理念,其次才是一种方法,它所追求的是一种“至善”之道,一种追求卓越的精神。

经典案例：小明同学，烧一壶水要8分钟，灌开水要1分钟，取牛奶和报纸要5分钟，整理书包要6分钟，为了尽快做完这些事，怎样安排才能使时间最少？最少需要几分钟？

- 数学规划问题的一般形式为：

$$
\begin{aligned}
opt \quad & z = f(x) \\
s.t. \quad & h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, l \\
& g_j(x) \leq 0, j = 1, \cdots, m \\
& t_k(x) \geq 0, k = 1, \cdots, n \\
& x \in D \subseteq R^s
\end{aligned}
$$

- 三个要素：**决策变量**decision variable，**目标函数**objective function，**约束条件** constraints。
- 约束条件所确定的x的范围称为**可行域**
- 满足约束条件的解x称为**可行解**
- 同时满足约束条件和目标函数的解x称为**最优解** Optimal solution
- 最优解所对应的目标函数值称为**最优值**optimum。

数学规划模型建立的步骤

建立数学模型一般有以下三个步骤

- 1. 通过要达到目的去找决策变量；
- 2. 由决策变量和所在达到目的之间的函数关系确定目标函数；
- 3. 由决策变量所受的限制条件确定决策变量所要满足的约束条件。

例1　运输问题

有两个粮库A_1, A_2向三个粮站B_1, B_2, B_3调运大米，两个粮库现存大米分别为4吨，8吨，三个粮站至少需要大米分别为2，4，5吨，两个粮库到三个粮站的距离（单位：公里）如下，问如何调运使运费最低。

粮站 / 距离 / 粮库	B_1	B_2	B_3
A_1	12	24	8
A_2	30	12	24

解 设A_1, A_2调运到三个粮站B_1, B_2, B_3 的大米分别为

$x_1, x_2, \cdots, x_6$吨。

$$\min f = 12x_1 + 24x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 12x_5 + 24x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_4 + x_5 + x_6 \le 8 \\ x_1 + x_4 \ge 2 \\ x_2 + x_5 \ge 4 \\ x_3 + x_6 \ge 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

程序编写

- model:
- min=12*x1+24*x2+8*x3+30*x4+12*x5+24*x6 ;
- x1+x2+x3<4 ;
- x4+x5+x6<8 ;
- x1+x4>2 ;
- x2+x5>4 ;
- x3+x6>5 ;
- end

Global optimal solution found.

Objective value: 160.0000

Total solver iterations: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	28.00000
X3	2.000000	0.000000
X4	0.000000	2.000000
X5	4.000000	0.000000
X6	3.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	160.0000	-1.000000
2	0.000000	16.00000
3	1.000000	0.000000
4	0.000000	-28.00000
5	0.000000	-12.00000
6	0.000000	-24.00000

数学规划模型建立的要领

要领一：决策变量尽量是通量，下标尽量多

- 令 x_{ij} 表示第 i 个粮库向第 j 个粮站运送粮食的数量 $i=1,2;\ j=1,2,3$

$$\min f = 12x_{11}+24x_{12}+8x_{13}+30x_{21}+12x_{22}+24x_{23}$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 4 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 8 \\ x_{11}+x_{21}\ge 2 \\ x_{12}+x_{22}\ge 4 \\ x_{13}+x_{23}\ge 5 \\ x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}\ge 0 \end{cases}$$

要领二：模型尽量不要出现数字

- 令 c_{ij} 表示第 i 个粮库与第 j 个粮站的距离。a_i 表示粮库的供给量，b_j 表示粮站的需求量。 $i=1,2;\ j=1,2,3$

$$\min\ f=12x_{11}+24x_{12}+8x_{13}+30x_{21}+12x_{22}+24x_{23}$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 4 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 8 \\ x_{11}+x_{21}\ge 2 \\ x_{12}+x_{22}\ge 4 \\ x_{13}+x_{23}\ge 5 \\ x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}\ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}x_{ij}\le a_i, & i=1,2 \\ \sum_{i=1}^{2}x_{ij}\ge b_j, & j=1,2,3 \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

要领三：决策变量尽量的多

例2　生产问题

- 某公司生产某产品，最大生产能力为10000单位，每单位存储费2元，预定的销售量与单位成本如表。

月份	单位成本(元)	销售量
1	70	6000
2	71	7000
3	80	12000
4	76	6000

求生产计划：使　1)满足需求；　2)不超过生产能；3)成本(生产成本与存储费之和)最低.

- 解：假定1月初无库存，4月底卖完，库存量无限制。

设 x_i：第i个月的产量；　c_i：第i个月的单位成本；
d_i：第i个月的销售量；e_i：第i个月的单位存储费；
a：最大生产能力

$$\min f=\sum_{j=1}^{4}c_jx_j+\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{j}(x_i-d_i)\right)e_{j+1}$$

多设置一个决策变量

$$\Rightarrow \min f=\sum_{i=1}^{4}c_ix_i+\sum_{i=1}^{4}e_is_i$$

- 要领四：. 规范的数学规划模型不允许出现分式，更不能将决策变量放在分母里。如出现这种情况就要进行变换，将分母中的决策变量移出来。
- 要领五：约束条件的右边尽量不要出现变量。如果有，就要进行移项。
- 要领六：建立模型时，尽量用线性模型。如果出现非线性的情况，最大程度地运用一些技巧将其转化为线性。