第二讲　层次分析法（AHP）

(Analytic Hierarchy Process)

层次分析法建模

- 一、层次分析法概述
- 二、层次分析法的基本原理
- 三、层次分析法的步骤和方法
- 四、层次分析法的广泛应用
- 五、应用层次分析法的注意事项
- 六、层次分析法应用实例

一、层次分析法概述

1. 层次分析法的历史

层次分析法指**The Analytic Hierarchy Process**，简称**AHP**，美国运筹学家，匹兹堡大学 **T.L.Saaty** 教授在七十年代初期最早提出。**AHP** 的第一篇论文于 **1977** 年在国际数学建模学术会议上发表。

AHP作为一种决策方法是在**1982**年**1**月召开的中美能源、资源、环境学术会议上由**Saaty**的学生**H.Gholamnezhad**首先向中国学者介绍。

1982年国内第一篇介绍**AHP**的论文发表。**1988**年在我国召开第一届国际**AHP**学术会议。

2. 层次分析法（AHP）解决的问题

层次分析法，是一种定性与定量相结合的决策分析方法。

所谓决策是指在面临多种方案时考虑多种因素、利弊得失，需要依据一定的标准选择某一种方案。

日常生活中有许多决策问题。

1. 在苹果、三星、小米三个品牌的手机中选购一种。要考虑品牌的信誉、功能、价格。

2. 在黄山、桂林和北戴河三处选择一个旅游点。要考虑景点的景色、居住的环境、饮食的特色、交通便利和旅游的费用。

层次分析法，对难于完全定量的复杂系统作出决策的模型和方法。是一种将决策者对复杂系统的决策思维过程模型化、数量化的过程。

该方法将定量分析与定性分析结合起来，用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的权数，利用权数求出各方案的优劣次序。

3. 层次分析法（AHP）特点：

✓ 分析思路清楚，可将系统分析人员的思维过程系统化、数学化和模型化；

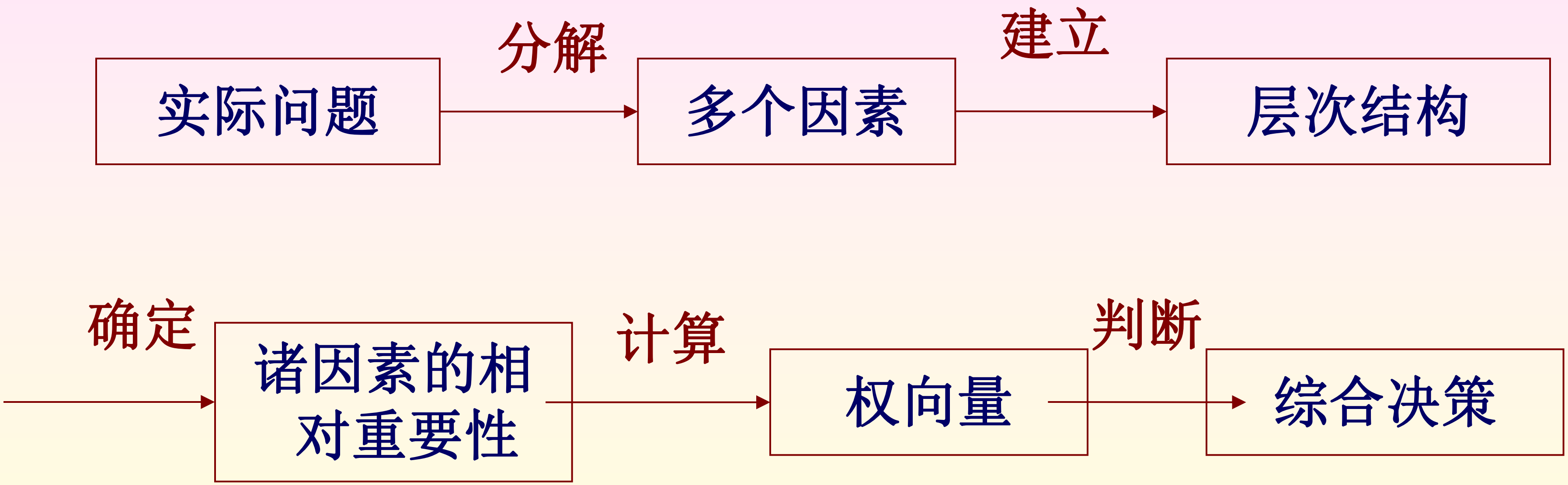
✓ 分析时需要的定量数据不多，但要求对问题所包含的因素及其关系具体而明确；

✓ 这种方法适用于多准则、多目标的复杂问题的决策分析，广泛用于地区经济发展方案比较、科学技术成果评比、资源规划和分析以及企业人员素质测评。

二、层次分析法的基本原理

层次分析法根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解为不同的组成因素，并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合，形成一个多层次的分析结构模型，从而最终使问题归结为最低层(供决策的方案、措施等)相对于最高层(总目标)的相对重要权值的确定或相对优劣次序的排定。

层次分析法基本原理



两个实例

引出层次分析法 基本操作及其原理说明

（1）录取优秀生的问题

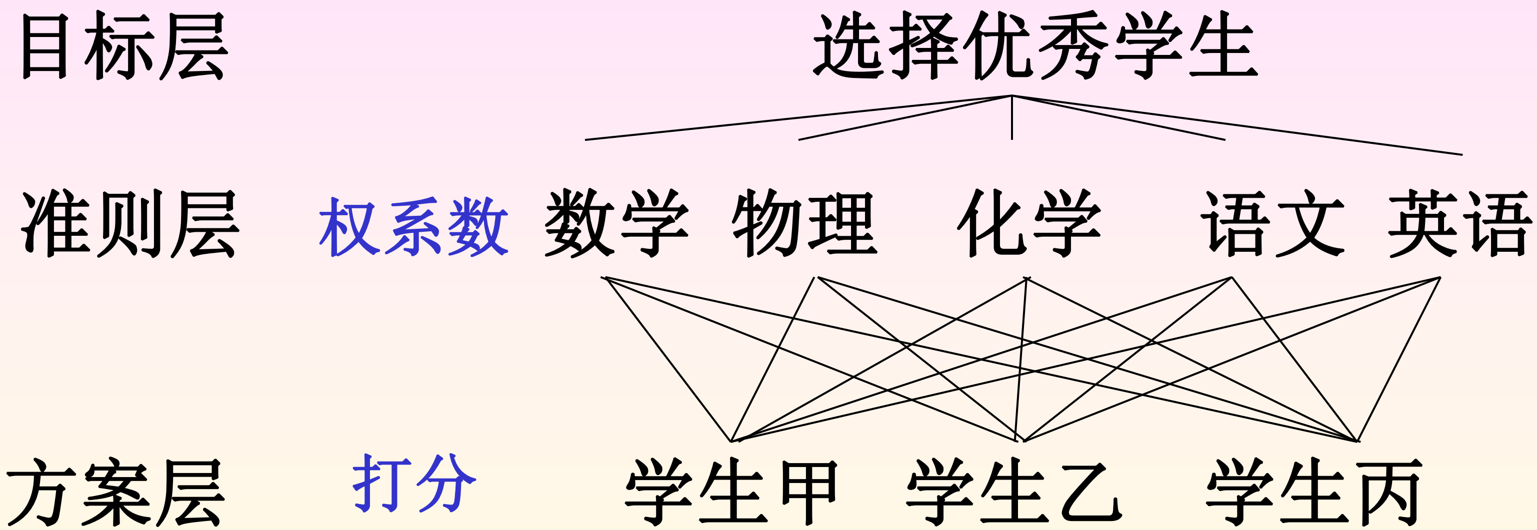
	数学	物理	化学	语文	英语
学生甲	85	80	75	70	90
学生乙	72	80	85	80	85
学生丙	90	72	60	80	95

各科目的权重不一 ： 数学 ：0.25 物理：0.2

化学：0.15 语文：0.1 英 语：0.3

如何选拔优秀生？

这个思维过程可以用 层次框图 表示之:



这是个可进行量化决策的问题，一般的做法是计算出他们各自的加权平均成绩，再进行比较挑选：

学生甲的平均成绩 = 85 × 0.25 + 80 × 0.2 + 75 × 0.15 + + 70 × 0.1 + 90 × 0.3 = ***<u>82.5</u>***

学生乙的平均成绩 = 72 × 0.25 + 80 × 0.2 + 85 × 0.15 + + 80 × 0.1 + 85 × 0.3 = 79.25

学生丙的平均成绩 = 90 × 0.25 + 70 × 0.2 + 60 × 0.15 + + 80 × 0.1 +95 × 03 = 82.4

上面的这三个计算式也可以写成以下的矩阵运算形式：

$$\begin{pmatrix} 85 & 80 & 75 & 70 & 90 \\ 72 & 80 & 85 & 80 & 85 \\ 90 & 72 & 60 & 80 & 95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.2 \\ 0.15 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathit{82.5}} \\ 79.25 \\ 82.4 \end{pmatrix}$$

由上计算可作出评价：<u>学生甲是最佳学生 .</u>

这个思维过程可以用 层次框图 表示之:

目标层　　选择优秀学生

$(0.25,\ 0.2,\ 0.15,\ 0.1,\ 0.3)^T$

准则层　　权系数　　数学　物理　化学　语文　英语

$(85,\ 72,\ 90)^T$

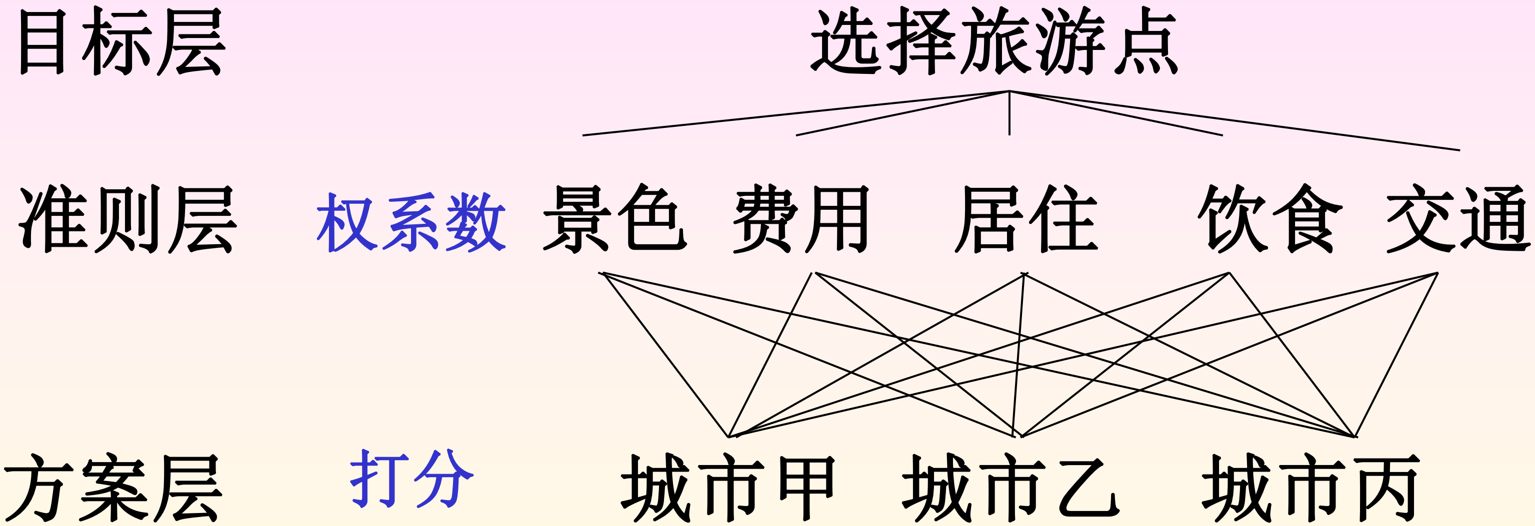
方案层　　打分　　学生甲　学生乙　学生丙

(2) 选择旅游点的问题

有三个旅游城市供你挑选，你想根据景色，费用，居住，饮食和交通这五个准则来作出最终的选择。这是个 非量化决策问题，如果参照学生选优的决策过程，你的思维判断过程大致如下：

首先，你应该确定这些准则在你心目中各占多大比重，给出权重系数； 其次，对每一个准则你应将三个地点分别进行打分；最后 ，你要将这两个层次的量化判断分数进行综合，即进行矩阵和向量的乘积，最后得到关于三个旅游点的、可以排序的决策向量。

这个思维过程可以用 层次框图 表示之:



如何计算该问题的权系数和方案层对准则层的打分?

- 学生选择问题 1是一个 定量化 问题。
- 问题 2 是一个 定性化 问题，如何类比问题 1 作定量化处理，即在准则层和方案层分别对各准则的权重和针对准则对各方案进行量化打分 ？

也就是对于景色、费用、居住、饮食和交通等5 个准则 ，如何确定出它们之间的权重向量 ：

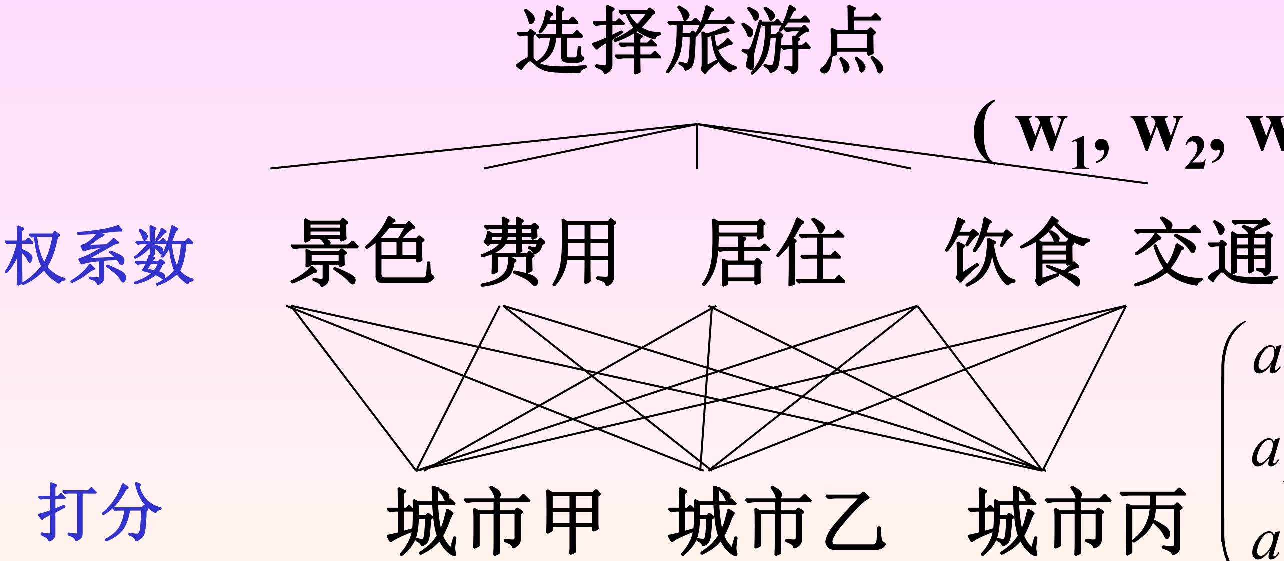
$$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^T \ ?$$

针对各项准则，如何得到关于三个城市的评分？

例如对于景色这一项 准则 ，

如何得到 ：$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ ？

对于费用这一项 准则，如何得到 ：$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ ？



$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^T$?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

准则层和方案层分别对各准则的权重和针对准则对各方案进行量化打分？

- Saaty的设想：

（1）在社会经济中大量的非定量化问题无法直接用绝对数量 a_{11}，a_{21}，a_{31} 来比较 衡量宜根据心理学原理，采用一种 9 级标准的相对表度方法，由 语言判断 过渡到 数量评价 ；

（2）相对比较宜在 两两之间 进行，这样可以根据信息学原理得到更多的信息和降低个别判断的失偏影响。

- 相对表度法

相等	稍强	较强	强一些	强	强得多	很强	非常强	绝对强
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 两两比较法

对于同一个准则，得到两两比较的表度数，排成一个矩阵，称为这个准则下各个方案的 判断矩阵 。

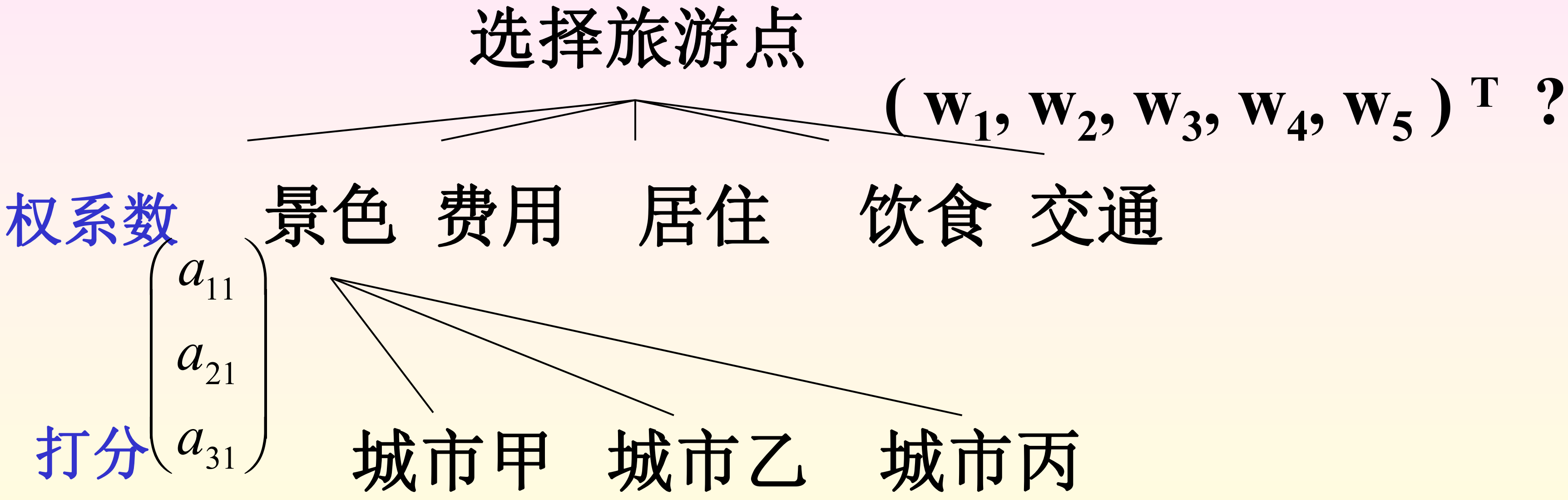
例如：城市甲 ： 城市乙 = 绝对强，城市甲 ： 城市丙 = 强一些，

城市丙 ：城市乙 = 强； 则可以得到以下判断矩阵

$$
\begin{array}{cc}
\underline{\text{景色}} & \begin{array}{ccc} \text{城市甲} & \text{城市乙} & \text{城市丙} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{城市甲} \\ \text{城市乙} \\ \text{城市丙} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1/9} & \mathbf{1} & \mathbf{1/5} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{array}\right]
\end{array}
$$

相等	稍强	较强	强一些	强	强得多	很强	非常强	绝对强
1	2	3	4	5	6	7	8	9

如何由判断矩阵求权系数?



• 定量化 问题 1 中对于“数学”这一准则已有 权向量 {85，72，90}，考虑到已有各门课程的分数，应该有以下十分准确的 比较判断矩阵：

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 85/72 & 85/90 \\ 72/85 & 1 & 75/90 \\ 90/85 & 90/75 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

容易从 线性代数方法 算出它的 最大特征值 为 3，以及从属于 3 的 特征向量 是：

{85，72，90}，　　这与已有的权向量完全符合。

可以通过判别矩阵最大特求出征值的特征向量求出权重系数。

该方法可否应用到例2中定性问题中，用判断矩阵的最大特征值的特征向量作为权重系数？

例如：

$$
\begin{array}{cc}
\underline{\text{景色}} & \begin{array}{ccc} \text{城市甲} & \text{城市乙} & \text{城市丙} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{城市甲} \\ \text{城市乙} \\ \text{城市丙} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1/9} & \mathbf{1} & \mathbf{1/5} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}
$$

定义1：$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为“正互反 ”　矩阵指：　矩阵各元 素均为正数，且与主对角线对称的元素互为倒数：　$a_{ij}\cdot a_{ji}=1$

依题意$a_{ij}=1$（i=1,2,.....）

定义2：　$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$“一致正互反 ”　矩阵指：A是正互反矩阵，并且 矩阵（a_{ij}）各元　素　a_{ij} 之间还满足成立下列关系：

$a_{ik}\cdot a_{kj}=a_{ij}$，i , j , k = 1, 2 , 3, …., n ）

举例：

例2：

$$
\begin{array}{c|c}
\underline{\text{景色}} & \begin{array}{ccc}\text{城市甲} & \text{城市乙} & \text{城市丙}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{城市甲} \\ \text{城市乙} \\ \text{城市丙}\end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1/9} & \mathbf{1} & \mathbf{1/5} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

是一个正负反矩阵，但不一致。

例1：

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙}\end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{85/72} & \mathbf{85/90} \\ \mathbf{72/85} & \mathbf{1} & \mathbf{72/90} \\ \mathbf{90/85} & \mathbf{90/72} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

是一个一致正负反矩阵。

一般地，一个n×n的矩阵，如有以下形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 & \cdots\cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & w_2/w_3 & \cdots\cdots & w_2/w_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & w_n/w_3 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix},$$

是“正互反”的“一致”矩阵。

一致正互反矩阵的的性质

（1）　$A^2 = nA$

证明：设　$A^2 = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} = na_{ij}$$

$$A^2 = \left(na_{ij}\right)_{n\times n} = nA$$

（2）A的特征值只为0或n

设ω为A相对于特征值λ的特征向量: $A\omega = \lambda\omega$

由

$$A^2\omega = A(\lambda\omega) = \lambda^2\omega$$

$$A^2\omega = nA\omega = n\lambda\omega$$

知

$$\lambda^2\omega = n\lambda\omega$$

$$\left(\lambda^2 - n\lambda\right)\omega = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 - n\lambda\right) = 0$$

$$\lambda = 0, or \lambda = n$$

又因为A的所有特征值之和为n, 从而知A的特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = n$$

性质3 A的所有列向量均值属于特征值n的特征向量.

设A的列向量为 $A_j=\left(a_{1j,}a_{1j,}\cdots,a_{nj}\right)^T$

由 $A^2=nA, A=\left(A_{1,}A_{2,}\cdots,A_n\right),$

推

$$A\left(A_{1,}A_{2,}\cdots,A_n\right)=n\left(A_{1,}A_{2,}\cdots,A_n\right)$$

$$\left(AA_{1,}AA_{2,}\cdots,AA_n\right)=\left(nA_{1,}nA_{2,}\cdots,nA_n\right)$$

$$AA_j=nA_j\left(j=1,2\cdots,n\right)$$

例1：

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 甲 & 乙 & 丙 \\
\hline
甲 & & & \\
乙 & & \begin{pmatrix} 1 & 85/72 & 85/90 \\ 72/85 & 1 & 75/90 \\ 90/85 & 90/75 & 1 \end{pmatrix} & \\
丙 & & &
\end{array}
$$

是一个一致正负反矩阵。可由最大特征值的特征向量

例2：

$$
\begin{array}{cc}
\underline{景色} & \begin{array}{ccc} 城市甲 & 城市乙 & 城市丙 \end{array} \\
\begin{array}{c} 城市甲 \\ 城市乙 \\ 城市丙 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

是一个非一致正负反矩阵，该如何处理？

由一个两两比较而产生的通常为为“正互反”而非“一致正互反”的判断矩阵，。

可否对用例1方法求最大特征值的特征向量为权值向量?

- 但须解决的又一新问题是：一般的定性问题中得到的判断矩阵是“正互反”的，但并不一定是“一致”的，于是在理论上存在一个GAP，即：

- (1) 正互反矩阵是否一定有 正 的特征值 ?

  (2) 从属于这个正特征值的特征向量是否有 正 的向量 ?

Perron 在1907 年已得到肯定的回答。Saaty　以此作为他的理论依据，圆满地建立了 *AHP* 法。

层次分析法的最基本操作步骤：

（1）根据实际问题，建立层次结构框架；

（2）由上至下作出目标对各个准则和每一个准则对各个方案的两两比较判断矩阵；

（3）计算出各个判断矩阵的特征向量；

（进行检验是不是正反一致阵）

（4）计算出最终决策用的组合权向量。

三、层次分析法的步骤和方法

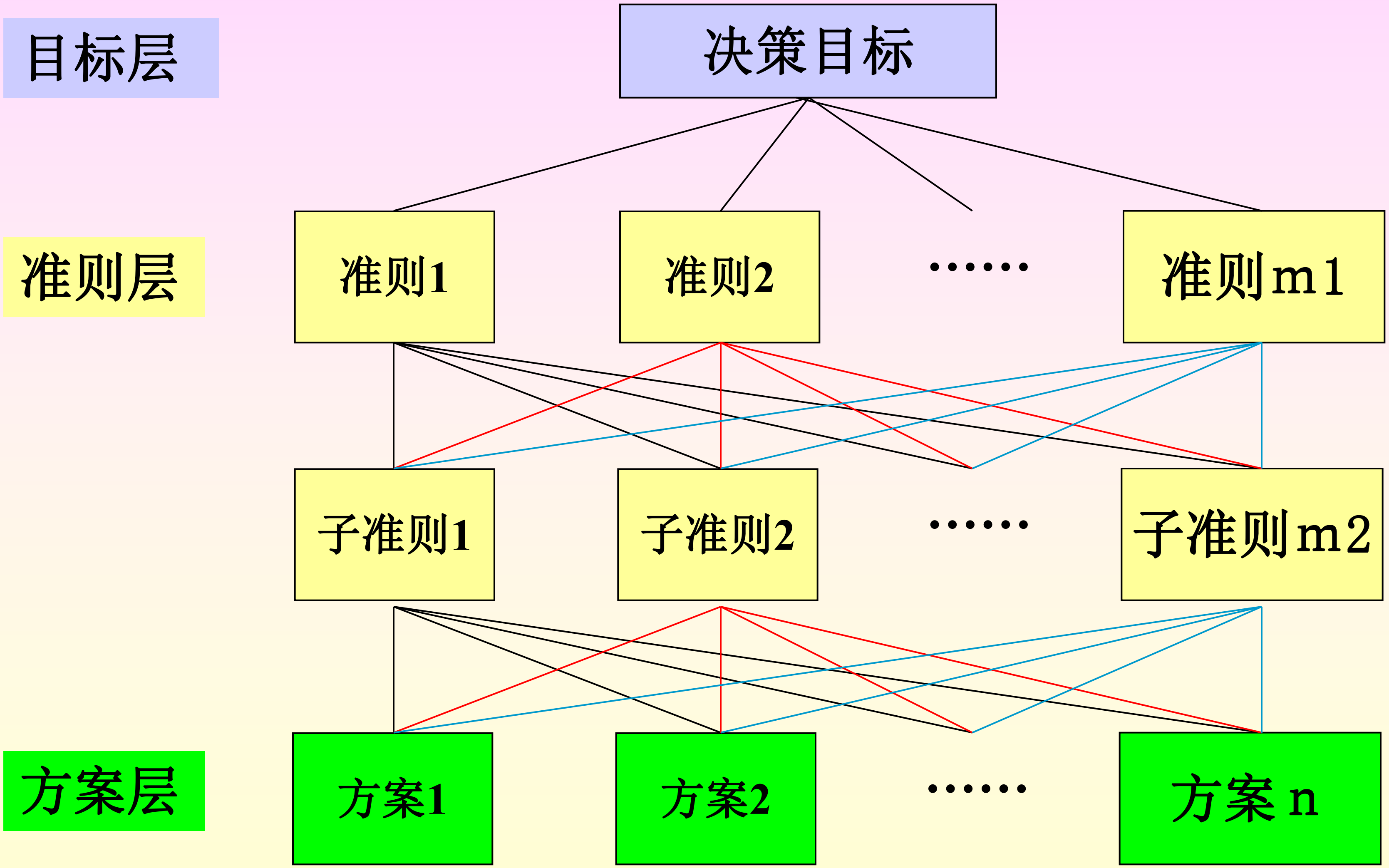
运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下四个步骤：

1. 建立递阶层次结构模型
2. 构造判断(成对比较)矩阵
3. 层次单排序及其一致性检验
4. 层次总排序及其一致性检验

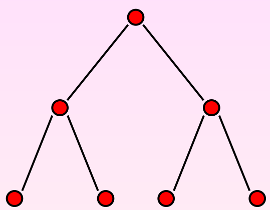
1. 建立递阶层次结构模型

- 将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。
- 最高层：决策的目的、要解决的问题。
- 最低层：决策时的备选方案。
- 中间层：考虑的因素、决策的准则。
- 对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。

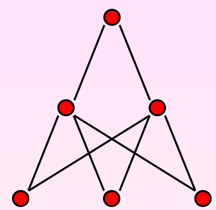
递阶层次结构示意图



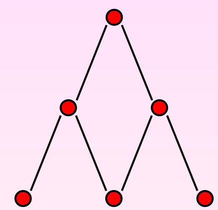
各种层次结构示意图



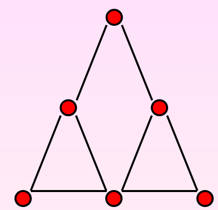
树状递阶
层次结构



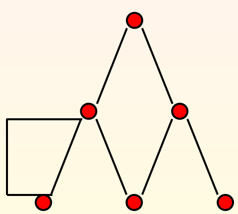
完全递阶
层次结构



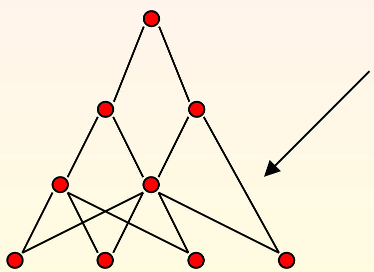
不完全递阶
层次结构



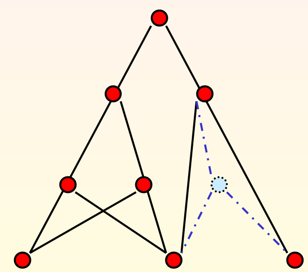
内部依存的
递阶层次结构



反馈递阶
层次结构



非递阶
层次结构



带有子层次的
递阶层次结构

例1　大学毕业生就业选择问题

获得大学毕业学位的毕业生，在“双向选择”时，用人单位与毕业生都有各自的选择标准和要求。就毕业生来说选择单位的标准和要求是多方面的，例如：

①能发挥自己才干作出较好贡献（即工作岗位适合发挥自己的专长）；

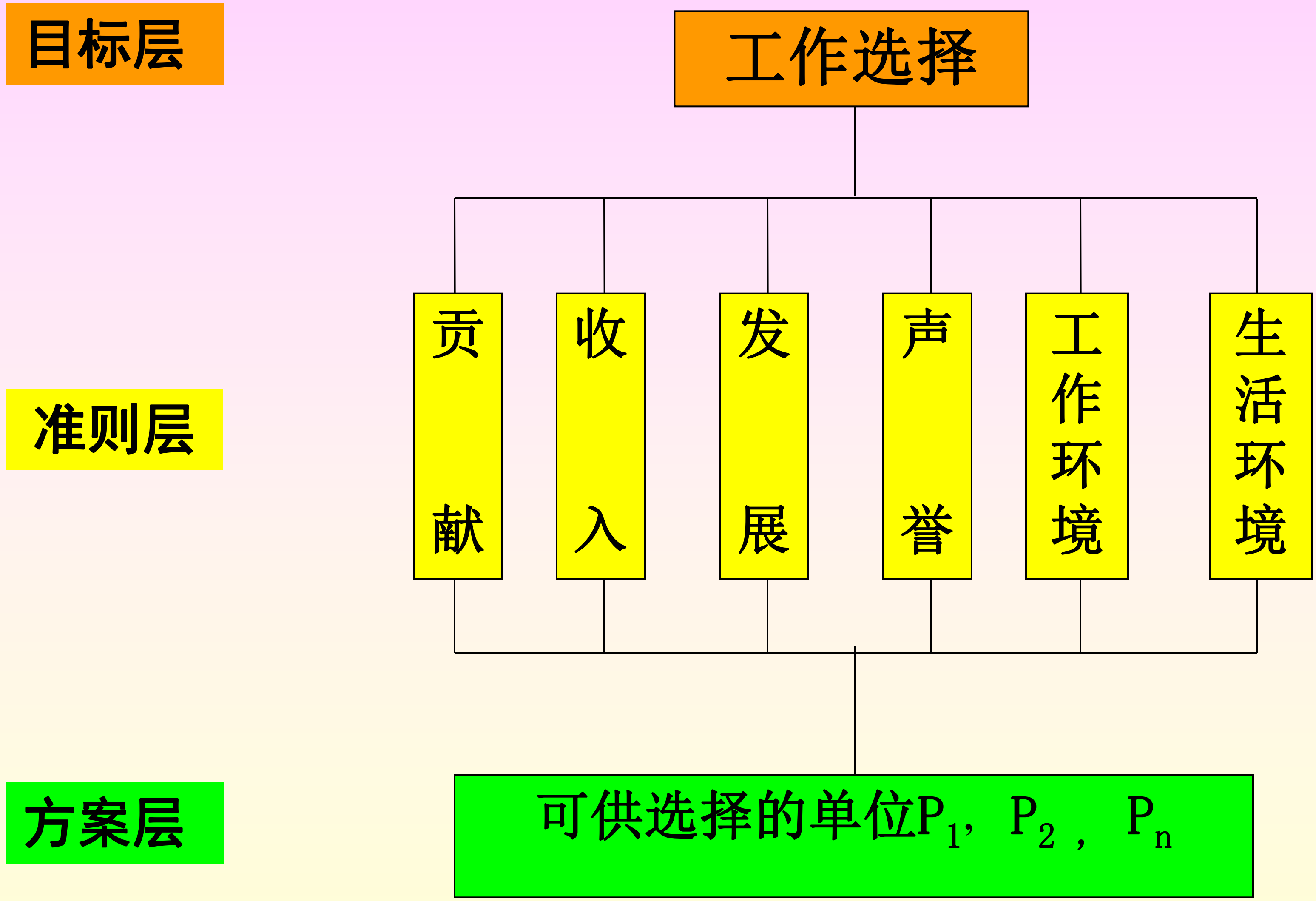
②工作收入较好（待遇好）；

③生活环境好（大城市、气候等工作条件等）；

④单位名声好（声誉等）；

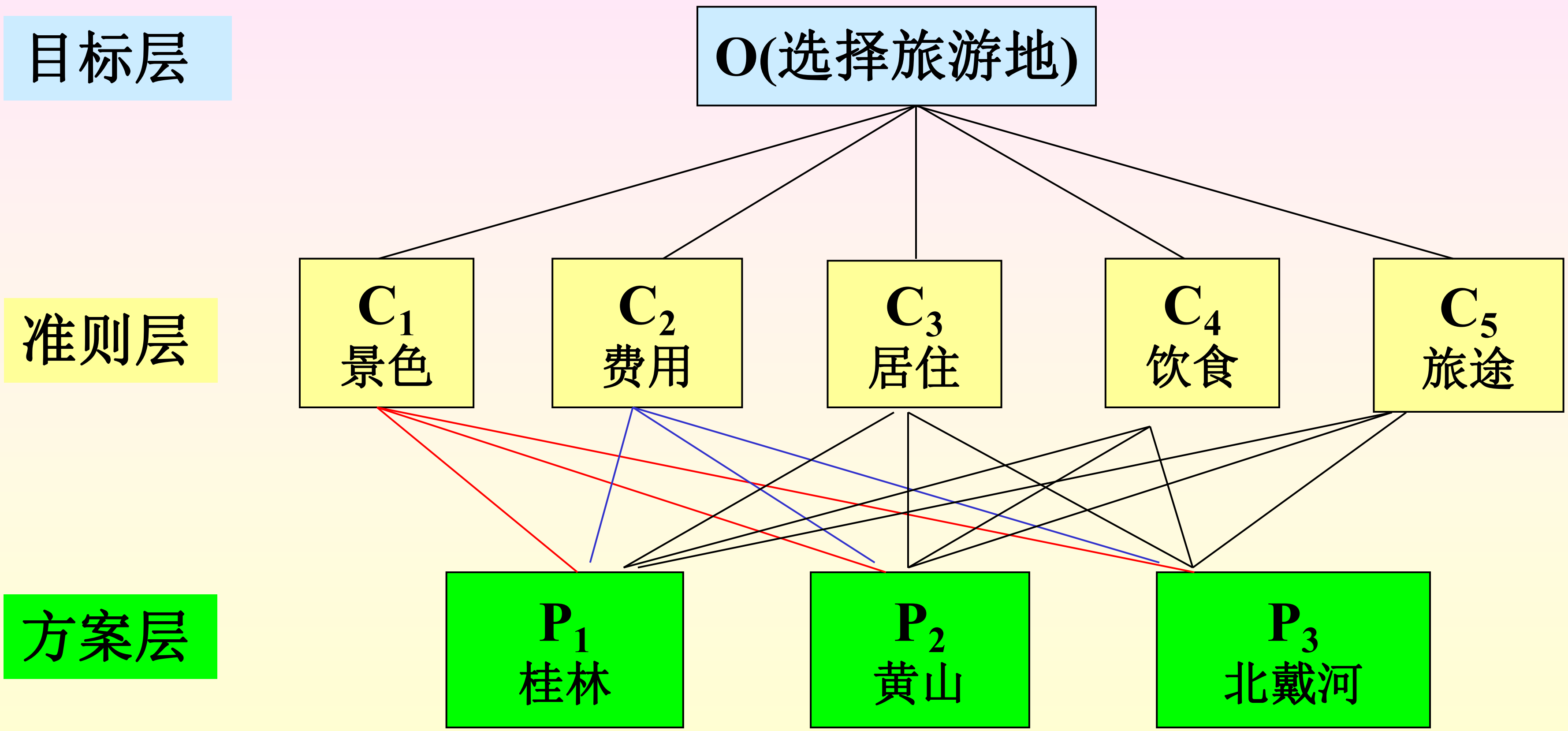
⑤工作环境好（人际关系和谐等）

⑥发展晋升机会多（如新单位或前景好）等。


目标层
工作选择
准则层
贡献
收入
发展
声誉
工作环境
生活环境
方案层
可供选择的单位P_1，P_2，P_n

例2. 选择旅游地

假期旅游，是去风光秀丽的黄山，还是去凉爽宜人的北戴河，或者是去山水甲天下的桂林？通常会依据景色、费用、食宿条件、旅途等因素选择去哪个地方。



层次分析法的思维过程的归纳

将决策问题分为3个或多个层次：

最高层：目标层。表示解决问题的目的，即层次分析要达到的总目标。通常只有一个总目标。

中间层：准则层、指标层、….。表示采取某种措施、政策、方案等实现预定总目标所涉及的中间环节；一般又分为准则层、指标层、策略层、约束层等。

最低层：方案层。表示将选用的解决问题的各种措施、政策、方案等。通常有几个方案可选。

每层有若干元素，层间元素的关系用相连直线表示。

层次分析法所要解决的问题是关于最低层对最高层的相对权重问题，按此相对权重可以对最低层中的各种方案、措施进行排序，从而在不同的方案中作出选择或形成选择方案的原则。

2. 构造判断(成对比较)矩阵

在确定各层次各因素之间的权重时，如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受，因而Santy等人提出：一致矩阵法，即：

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较。
2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

判断矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。判断矩阵的元素a_{ij} 用Santy的1—9标度方法给出。

心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个，即每层不要超过9个因素。

判断矩阵元素a_{ij}的标度方法

标　度	含　义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍微重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2，4，6，8	表示上述两相邻判断的中值
倒数	因素i与j比较的判断a_{ij}，则因素j与i比较的判断$a_{ji}=1/a_{ij}$

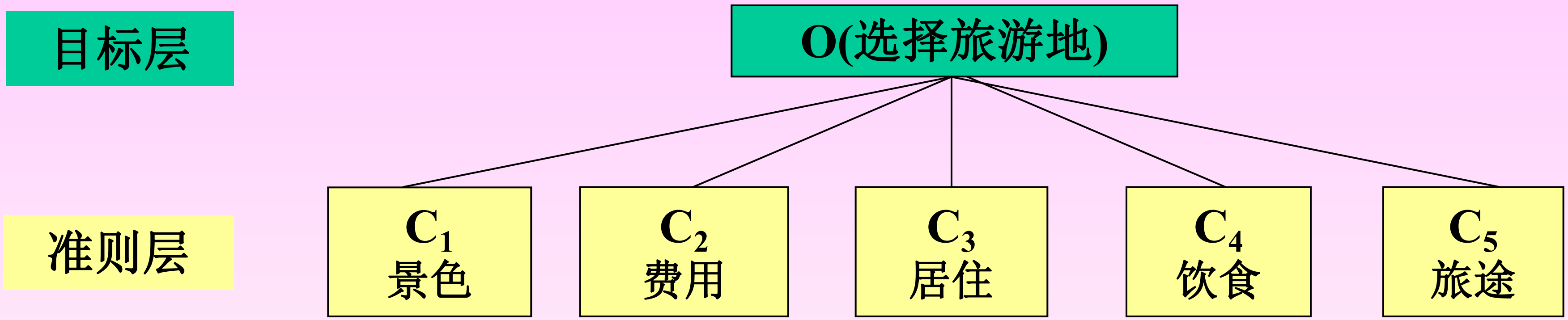
判断矩阵

Cs	p_1	p_2	…	…	p_n
p_1	a_{11}	a_{12}	…	…	a_{1n}
p_2	a_{21}	a_{22}	…	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
p_n	a_{n1}	a_{n2}	…	…	a_{nn}

显然判断矩阵A具有下述性质

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad a_{ij}>0 \\ 2.\quad a_{ji}=1/a_{ij} \\ 3.\quad a_{ii}=1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

我们称判断矩阵A为逆对称矩阵(正互反矩阵)。它具有的性质，使我们对一个n维的判断矩阵只需给出其上（或下）三角的 $n(n-1)/2$ 个判断即可。



设要比较各准则$C_1, C_2, \ldots, C_5$对目标O的重要性

$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij}$

$$A = (a_{ij})_{5\times5},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A~成对比较阵

A～正互反阵

要由A确定$C_1, \ldots, C_n$对O的权向量

若判断矩阵完全一致的

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

令 $a_{ij} = w_i / w_j$ 成对比较

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$, $i, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 的正互反阵 A 称一致阵。

$$W = (w_1, w_2, \cdots w_n)^T$$ 可作为一个排序向量

一致阵性质

- A 的秩为1，A的唯一非零特征根为n
- A 的任一列向量是对应于n 的特征向量
- A 的归一化特征向量可作为权向量

$$Aw = nw$$

考虑成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$$a_{21}=\mathbf{2}\ (C_2:C_1)$$

$$a_{13}=\mathbf{4}\ (C_1:C_3)$$

一致比较 ⇒

$$a_{23}=\mathbf{8}\ (C_2:C_3)$$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵A， Saaty等人建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量w，即

$$Aw = \lambda w$$

3. 层次单排序及其一致性检验

对应于判断矩阵最大特征根 λ_{max} 的特征向量，经归一化(使向量中各元素之和等于1)后记为**W**。

W的元素为同一层次因素对于上一层次因素某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

能否确认层次单排序，需要进行一致性检验，所谓一致性检验是指对**A**确定不一致的允许范围。

定理：n 阶正互反阵A的最大特征根$\lambda \geq n$, 当且仅当

$\lambda = n$时A为一致阵

由于λ连续的依赖于a_{ij}，则λ比n大的越多，**A** 的不一致性越严重。用最大特征值对应的特征向量作为被比较因素对上层某因素影响程度的权向量，其不一致程度越大，引起的判断误差越大。因而可以用 $\lambda - n$ 数值的大小来衡量 A 的不一致程度。

定义一致性指标：$CI = \dfrac{\lambda - n}{n - 1}$

$CI = 0$，有完全的一致性

CI 接近于0，有满意的一致性

CI 越大，不一致越严重

为衡量*CI*的大小，引入随机一致性指标 ***RI***。方法为

随机构造500个成对比较矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_{500}$

则可得一致性指标 $CI_1, CI_2, \cdots, CI_{500}$

$$RI = \frac{CI_1 + CI_2 + \cdots CI_{500}}{500} = \frac{\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{500}}{500} - n}{n-1}$$

Saaty的结果如下

随机一致性指标 *RI*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	**0**	**0**	**0.58**	**0.90**	**1.12**	**1.24**	**1.32**	**1.41**	**1.45**	**1.49**	**1.51**

定义一致性比率 ： $CR = \frac{CI}{RI}$

一般，当一致性比率 $CR = \frac{CI}{RI} < 0.1$ 时，认为 A 的不一致程度在容许范围之内，有满意的一致性，通过一致性检验。可用其归一化特征向量作为权向量，否则要重新构造成对比较矩阵A，对 a_{ij} 加以调整。

一致性检验：利用一致性指标和一致性比率<0.1及随机一致性指标的数值表对 A 进行检验的过程。

例2 “选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根 λ=5.073

权向量(特征向量) w =(0.263,0.475,0.055,0.099,0.110)^T

一致性指标 $CI=\dfrac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指标 RI=1.12 (查表)

一致性比率 CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

1 精确计算的复杂和不必要。

2 简化计算的思路 ---

一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

3 常用计算方法 ---

和法、根法、对数最小二乘法、特征根方法等。

（1）和法——步骤：

i、求（每列归一化）$b_{ij}=a_{ij}/\sum_{k=1}^{n}a_{kj}$

$i，j=1，2，\ldots，n$

ii、行求和 $M_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}$

$i=1，2，\ldots，n$

再归一化：$w_i=M_i/\sum_{j=1}^{n}M_j$

$i=1，2，\ldots，n$

iii、$\lambda_{max}=(1/n)\sum_{i=1}^{n}(AW)_i/w_i$

和法

$$\text{例}\ A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{列向量归一化}}\begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix}\xRightarrow[\text{归一化}]{\text{求行和}}\begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$$

$$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.268\end{bmatrix}\quad \xRightarrow{Aw=\lambda w}\quad \lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确结果:$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda_{max}=3.010$

(2) **根法**——步骤：

i、求$M_i=(\prod_{j=1}^{n} a_{ij})^{1/n}$　　$i=1，2，…，n$

ii、标准化（归一化）：$w_i=M_i/\sum_{j=1}^{n} M_j$

iii、$\lambda_{max}=（1/n）\sum_{i=1}^{n} (AW)_i/w_i$

根法

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_1=\sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 1}=1.4422 \\ M_2=\sqrt[3]{1/3\cdot 1\cdot 1/3}=0.4807 \\ M_3=\sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 1}=1.4422 \end{cases}$$

归一化：$\begin{cases} w_1=0.4286 \\ w_2=0.1428 \\ w_3=0.4286 \end{cases}$

$\boldsymbol{AW}$=(1.2856，0.4285，1.2856)^{T}

$\lambda_{max}=2.9999$

(3)特征根法——归一化特征向量的迭代法

对一致阵A，由其性质：A只有一个非零特征根，层次分析法要求的就是计算这个特征根的特征向量。特征向量的计算可以用下列迭代序列：

令 $e_0 = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots \frac{1}{n}\right]^T$ ，当 k= 0,1, 2, … 时，假设 e_k已经求出，那么计算 $\bar{e}_{k+1} = Ae_k$ ，

再归一化计算出特征向量：$e_{k+1} = \dfrac{\bar{e}_{k+1}}{\| \bar{e}_{k+1} \|}$.

这里$\|\bar{e}_{k+1}\|$为$\bar{e}_{k+1}$的n个分量之和。

重复上面$\bar{e}_{k+1}$，e_{k+1}的计算，直到达到满意的时候为止。

在数学上可以证明，迭代的n维向量序列$\{e_k\}$

收敛，其极限为$w=\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$，并且此特征向量

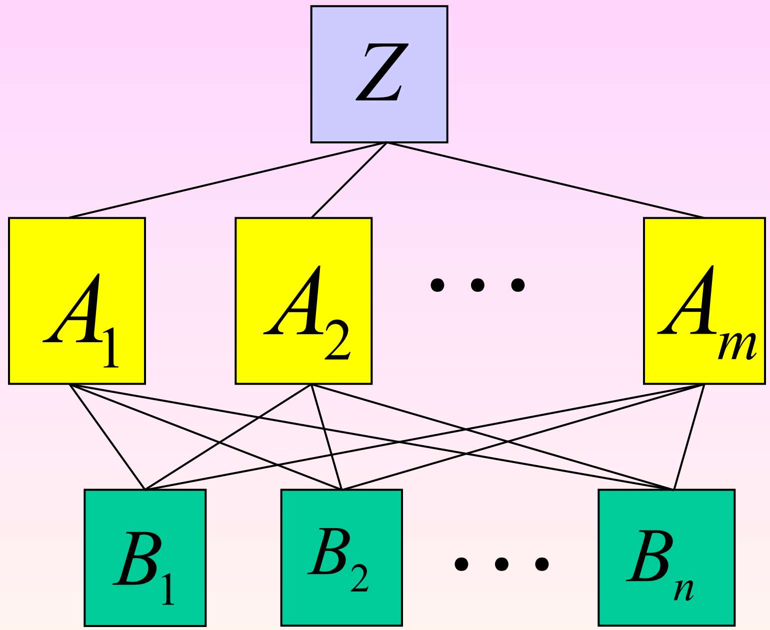
就是A的最大特征根λmax所对应的特征向量。

且 $$\lambda_{max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Aw)_i}{w_i}.$$

一般情况下，$k<8$就能收敛。

4. 层次总排序及其一致性检验

- 计算某一层次所有因素对于最高层(总目标)相对重要性的权值，称为层次总排序。
- 这一过程是从最高层次到最低层次依次进行的。



A层m个因素 $A_1, A_2, \cdots, A_m$

对总目标 Z 的排序为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$

B层n个因素对上层A中因素为A_j

的层次单排序为 $b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj}$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$

B **层的层次总排序为：**

$$B_1: a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots a_m b_{1m}$$

$$B_2: a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \cdots a_m b_{2m}$$

$$\cdots$$

$$B_n: a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \cdots a_m b_{nm}$$

即 *B* 层第 *i* 个因素对总目标的权值为：

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{b}_{ij}$$

A / B	$A_1, A_2, \cdots, A_m$ $a_1, a_2, \cdots, a_m$	B层的层次总排序
B_1 B_2 $\vdots$ B_n	$b_{11}\quad b_{12}\quad b_{1m}$ $b_{21}\quad b_{22}\quad b_{2m}$ $\vdots\quad\vdots\quad\vdots$ $b_{n1}\quad b_{n2}\quad b_{nm}$	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{1j} = b_1$ $\sum_{j=1}^{m} a_j b_{2j} = b_2$ $\sum_{j=1}^{m} a_j b_{nj} = b_n$

层次总排序的一致性检验

层次总排序也要进行一致性检验。检验是从高层到低层进行的。

设 $\boldsymbol{B}$ 层$\boldsymbol{B_1}$，$\boldsymbol{B_2}$，… $\boldsymbol{B_n}$ 对上层（ A 层）中因素 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的层次单排序一致性指标为 CI_j ，随机一致性指标为 RI_j，则层次总排序的一致性比率为：

层次总排序的一致性检验

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

当 $CR < 0.1$ 时，认为层次总排序通过一致性检验。层次总排序具有满意的一致性，否则需要重新调整那些一致性比率高的判断矩阵的元素取值。

到此，根据最下层（决策层）的层次总排序做出最后决策。

例2：‘‘选择旅游地’’中

记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为

$$w^{(2)} = (0.263, 0.475, 0.055, 0.099, 0.110)^T$$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

设：

方案层对C_1(景色)的成对比较阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

方案层对C_2(费用)的成对比较阵

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

以及方案层对C3(居住)、 C4(饮食)、 C5(旅途)的成对比较阵

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 1/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1/3 & 1 & 1\\ 1/4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_5=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/4\\ 1 & 1 & 1/4\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

可相应求出最大特征根

$\lambda_1=3.005$、 $\lambda_2=3.002$、 $\lambda_3=3.000$、

$\lambda_4=3.009$、 $\lambda_5=3.000$。

以及相应的权向量

$$w_1^{(3)}=(0.595，0.277，0.129)^{\mathrm{T}}$$

$$w_2^{(3)}=(0.082，0.236，0.682)^{\mathrm{T}}$$

$$w_3^{(3)}=(0.429，0.429，0.142)^{\mathrm{T}}$$

$$w_4^{(3)}=(0.633，0.193，0.175)^{\mathrm{T}}$$

$$w_5^{(3)}=(0.166，0.166，0.668)^{\mathrm{T}}$$

组合权向量

第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

第1层O

第2层$\mathbf{C_1,\ldots C_n}$

第3层$\mathbf{P_1, \ldots P_m}$

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,\ k=1,2,\cdots,n$$

构造矩阵 $W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$

第*s*层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)}$$

其中$W^{(p)}$是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

$w^{(2)}$	0. 263	0. 475	0. 055	0. 099	0. 110
$w_k^{(3)}$	0.595 0.277 0.129	0.082 0.236 0.682	0.429 0.429 0.142	0.633 0.193 0.175	0.166 0.166 0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验

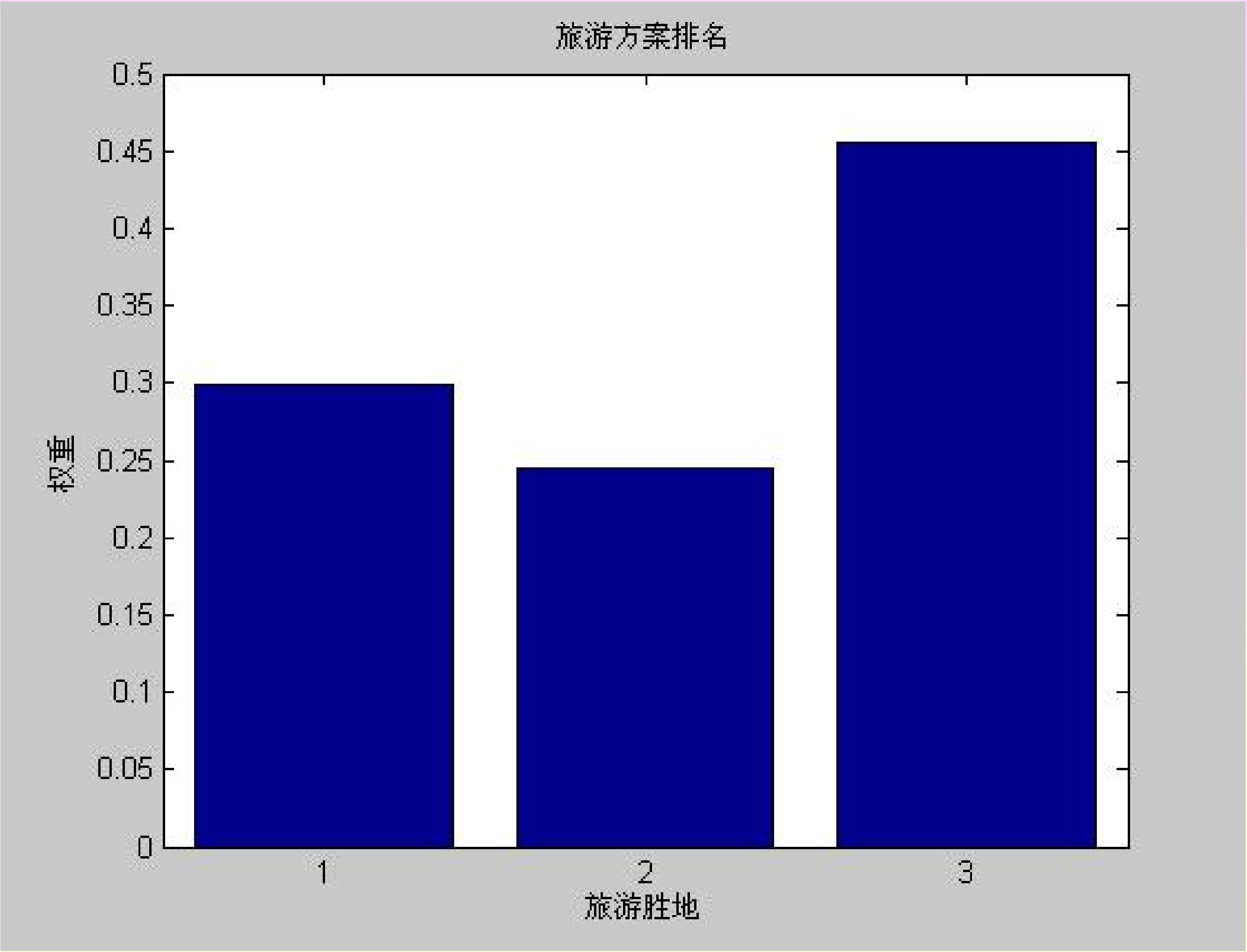
计算层次总排序权值和一致性检验

方案B_1 对总目标的权值为：

$$0.595\times0.263+0.082\times0.475+0.429\times0.055$$
$$+0.633\times0.099+0.166\times0.110=0.3$$

同理得，B_2，B_3 对总目标的权值分别为：$0.246,\ 0.456,$

决策层对总目标的权向量为：$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$



旅游方案排名
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
权重
1
2
3
旅游胜地

又 $$CR = (0.263\times0.003+0.475\times0.001 + 0.055\times0+0.099\times0.005+0.110\times0) / 0.58 = 0.015 < 0.1$$

故，层次总排序通过一致性检验。

$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$ 可作为最后的决策依据。

即各方案的权重排序为 $B_3 > B_1 > B_2$

又 B_1，B_2，B_3 分别表示桂林、黄山、北戴河，故最后的决策应为去北戴河。

层次分析法的基本步骤归纳如下

1. 建立层次结构模型

该结构图包括目标层，准则层，方案层。

2. 构造成对比较矩阵

从第二层开始用成对比较矩阵和1~9尺度。

3. 计算单排序权向量并做一致性检验

对每个成对比较矩阵计算最大特征值及其对应的特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验。若检验通过，特征向量（归一化后）即为权向量；若不通过，需要重新构造成对比较矩阵。

4. 计算总排序权向量并做一致性检验

计算最下层对最上层总排序的权向量。

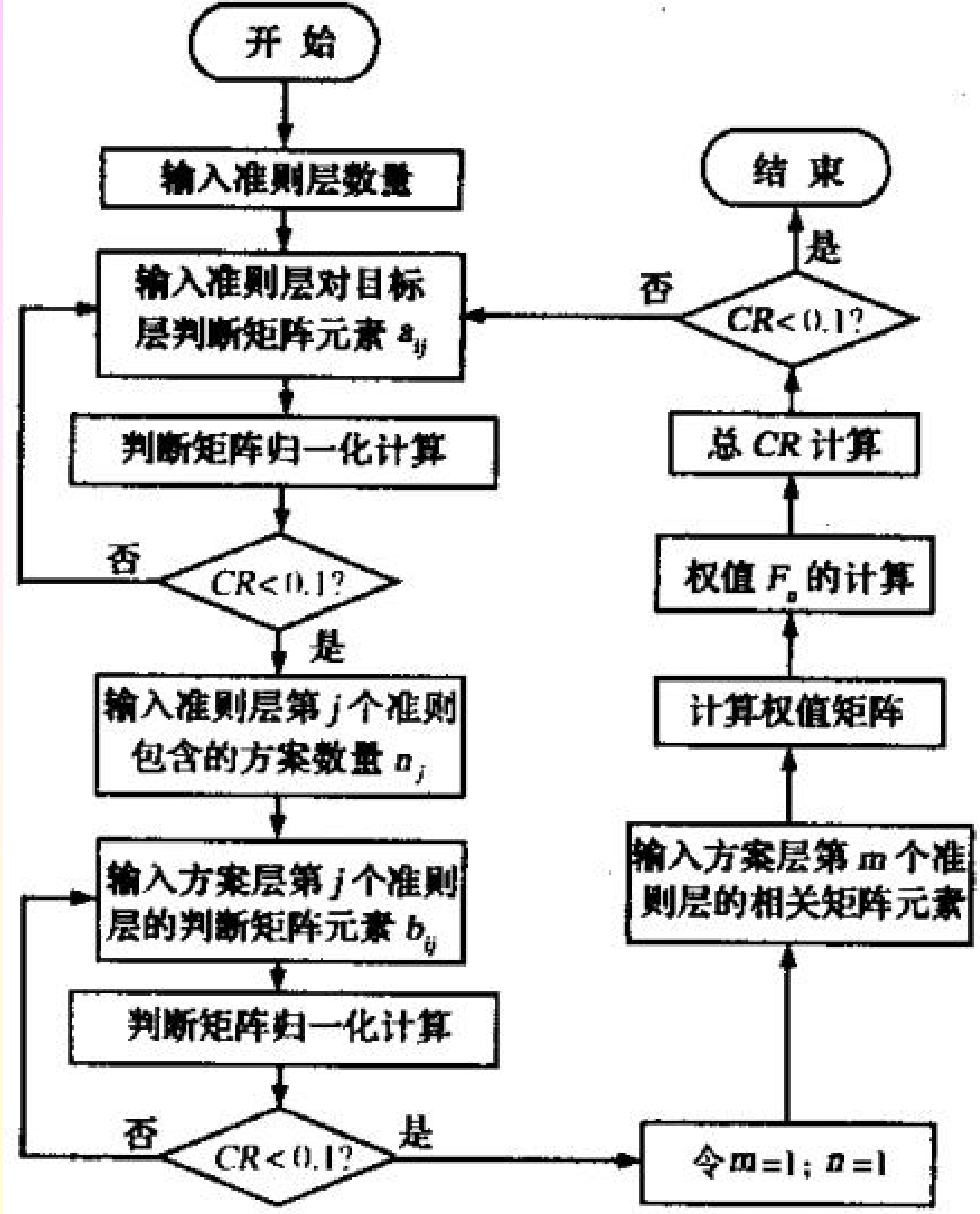
利用总排序一致性比率

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

$$CR < 0.1$$

进行检验。若通过，则可按照总排序权向量表示的结果进行决策，否则需要重新考虑模型或重新构造那些一致性比率 CR 较大的成对比较矩阵。

第三层对第二层的判断矩阵



实例 合理分配利润问题

某工厂有一笔留存利润，共计一百万。 可供选择的分配方案为：

- 以奖金形式发给工人，
- 扩建职工福利设施，
- 引进新设备。

假定需从以下三个准则来考虑问题：

（1）调动职工积极性；（2 ）提高技术水平；

（3）改善职工生活条件.

如何作出合理科学的分配决策方案？

用层次分析法解决如下：

I. 建立层次分析结构框架

合理使用利润

调动职工积极性　　提高技术水平　　改善职工生活条件

发奖金　　扩建福利　　引进设备设施

（II）　作出各层判断矩阵

准则层对目标层的判断矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

方案层对各准则的判断矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

(III)　算出相应的特征向量（用和法）：

$$\begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.633 \\ 0.261 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.833 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6767 \\ 0.333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

（IV）算出最终的分配决策用的权向量：

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.6767 \\ 0.25 & 0.167 & 0.333 \\ 0 & 0.833 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.633 \\ 0.261 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.219 \\ 0.527 \end{pmatrix};$$

结论：总奖金分配比例如下：发奖金　25.4万　扩建福利投资　21.9万　引进设备投资　52.7万

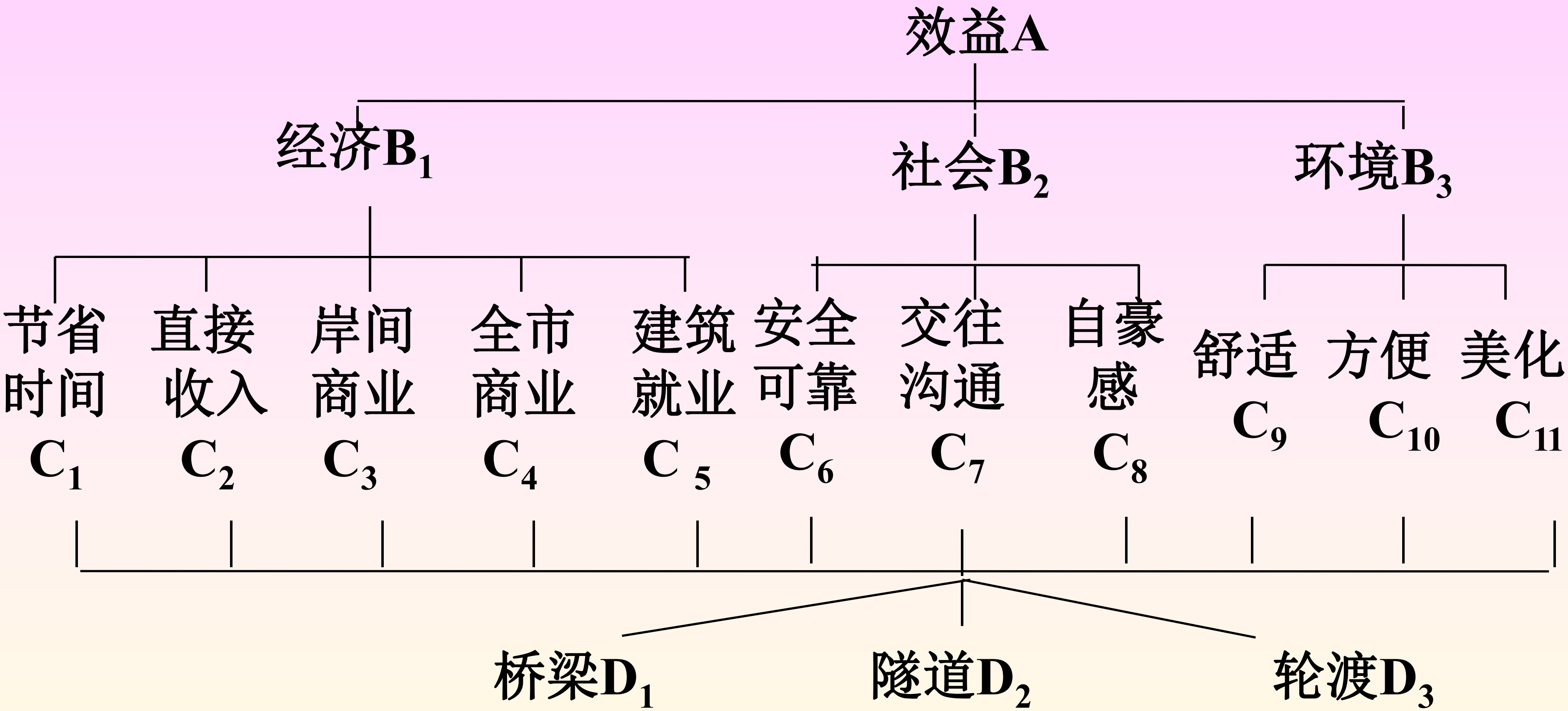
实例 过河运输条件的决策

某城市要改善过河运输条件，有三种方案可选择： 建桥，建隧道或轮渡？如何作出合理科学的决策选择 ？ 假定需从效益与代价两个大方面来综合考虑问题.

当考虑效益时，需根据三大准则来评价：经济效益，社会效益与环境效益；对于经济效益，应考虑节约时间、直接收入、岸间商业 、全市商业和建筑就业 等五个小准则；

对于社会效益，应考虑 安全可靠、沟通方便和城市自豪感 等三个小准则；对于环境效益，应考虑 舒适、方便和美化 等三个小准则.

当考虑代价时，也需根据 经济效益，社会效益与环境效益 这三大准则来评价；对于经济效益，应考虑 投入资金、 操作维护和渡船业损失 等三个小准则；对于社会效益，应考虑 生活方式变化、交通拥挤和居民搬迁 等三个小准则；对于环境效益，应考虑 汽车废气污染、水污染和生态破坏 等三个小准则.


效益A
经济B_1
社会B_2
环境B_3
节省时间 C_1
直接收入 C_2
岸间商业 C_3
全市商业 C_4
建筑就业 C_5
安全可靠 C_6
交往沟通 C_7
自豪感 C_8
舒适 C_9
方便 C_{10}
美化 C_{11}
桥梁D_1
隧道D_2
轮渡D_3

第一准则层对目标层的判断矩阵的特征向量为： $\alpha = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.22 \\ 0.11 \end{pmatrix}$

第二准则层对经济准则层的判断矩阵的特征向量为：$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.09 \\ 0.54 \\ 0.11 \\ 0.23 \end{pmatrix}$，

第二准则层对社会准则层的判断矩阵的特征向量为： $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0.76 \\ 0.18 \\ 0.06 \end{pmatrix}$，

第二准则层对环境准则层的判断矩阵的特征向量为：$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.69 \\ 0.06 \end{pmatrix}$，

方案层对各第二准则的判断矩阵的特征向量分别为：

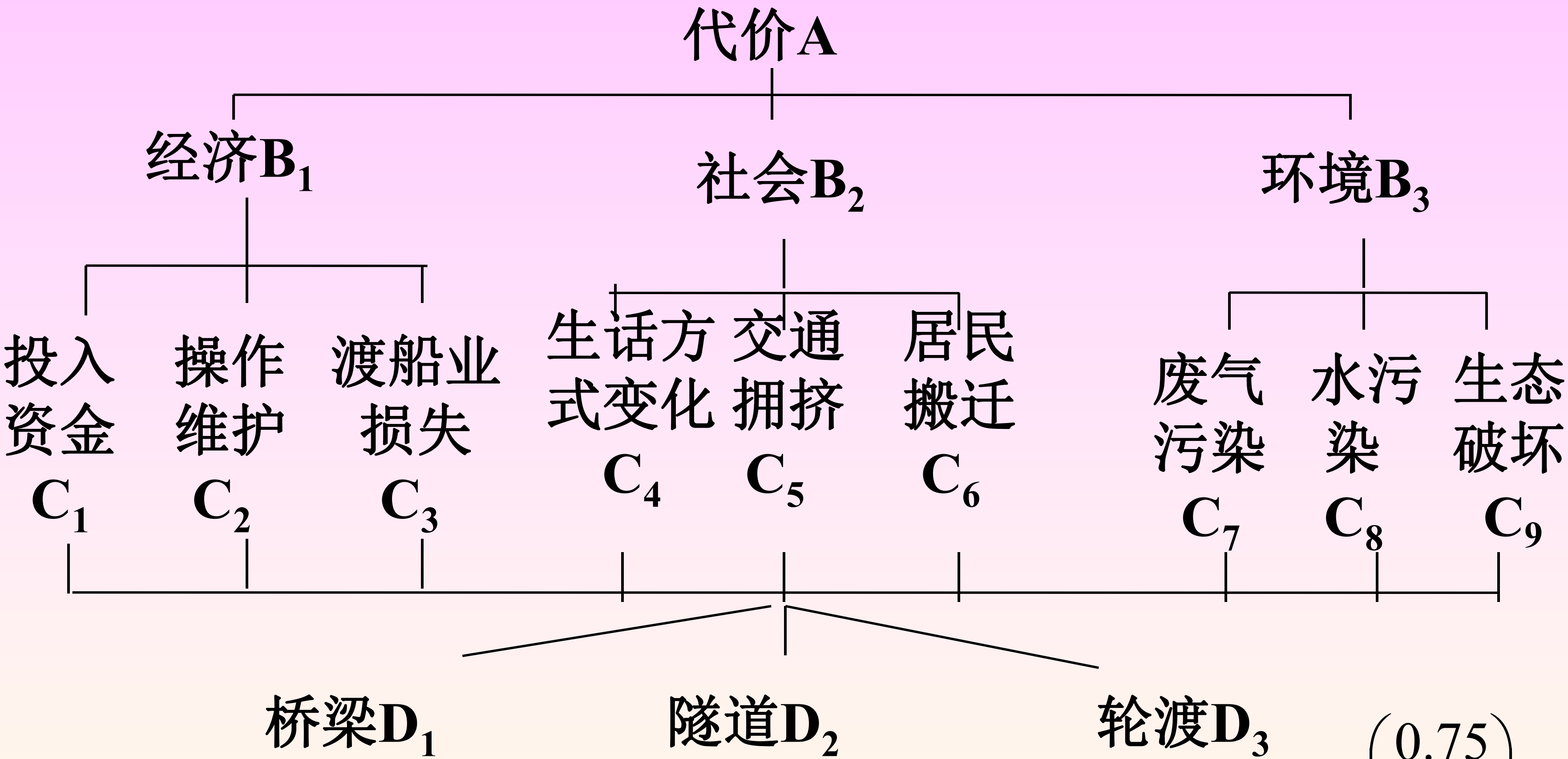
$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0.58\\0.35\\0.07\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix}0.36\\0.59\\0.05\end{pmatrix},\ \gamma_3=\begin{pmatrix}0.69\\0.25\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_4=\begin{pmatrix}0.46\\0.46\\0.08\end{pmatrix},\ \gamma_5=\begin{pmatrix}0.41\\0.54\\0.05\end{pmatrix},\ \gamma_6=\begin{pmatrix}0.59\\0.35\\0.06\end{pmatrix},$$

$$\gamma_7=\begin{pmatrix}0.46\\0.46\\0.08\end{pmatrix},\ \gamma_8=\begin{pmatrix}0.64\\0.11\\0.25\end{pmatrix},\ \gamma_9=\begin{pmatrix}0.73\\0.21\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_{10}=\begin{pmatrix}0.64\\0.29\\0.07\end{pmatrix},\ \gamma_{11}=\begin{pmatrix}0.27\\0.1\\0.63\end{pmatrix};$$

最终算出总效益的组合权向量为：

$$\varpi_{效益}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 & \gamma_9 & \gamma_{10} & \gamma_{11}\end{pmatrix}_{3\times 11}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1 & 0_{5\times 1} & 0_{5\times 1}\\0_{3\times 1} & \beta_2 & 0_{3\times 1}\\0_{3\times 1} & 0_{3\times 1} & \beta_3\end{pmatrix}_{11\times 3}\cdot\alpha$$

$$=\begin{pmatrix}0.576\\0.356\\0.068\end{pmatrix}$$



第一准则层对目标层的判断矩阵的特征向量为：$\alpha = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.16 \\ 0.09 \end{pmatrix}$

第二准则层对经济准则层、社会准则层、环境准则层判断矩阵的特征向量分别为：

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.17 \\ 0.06 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.25 \\ 0.64 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.13 \\ 0.25 \end{pmatrix};$$

方案层对各第二准则的判断矩阵的特征向量分别为：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0.77\\0.17\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_2=\begin{pmatrix}0.3\\0.65\\0.05\end{pmatrix},\ \gamma_3=\begin{pmatrix}0.47\\0.47\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_4=\begin{pmatrix}0.69\\0.26\\0.05\end{pmatrix},\ \gamma_5=\begin{pmatrix}0.47\\0.47\\0.06\end{pmatrix},$$

$$\gamma_6=\begin{pmatrix}0.47\\0.47\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_7=\begin{pmatrix}0.65\\0.29\\0.06\end{pmatrix},\ \gamma_8=\begin{pmatrix}0.65\\0.28\\0.07\end{pmatrix},\ \gamma_9=\begin{pmatrix}0.21\\0.74\\0.05\end{pmatrix};$$

最终算出总代价的组合权向量为：

$$\varpi_{代价}=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 & \gamma_9\end{pmatrix}_{3\times 9}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1 & 0_{3\times 1} & 0_{3\times 1}\\0_{3\times 1} & \beta_2 & 0_{3\times 1}\\0_{3\times 1} & 0_{3\times 1} & \beta_3\end{pmatrix}_{9\times 3}\cdot\alpha=\begin{pmatrix}0.632\\0.31\\0.058\end{pmatrix}$$

最后算出效益代价比的组合权向量：

$$\varpi_{效益}:\varpi_{代价}=\begin{pmatrix}1.58\\0.62\\0.058\end{pmatrix}$$

决策结论： <u>建桥方案为佳</u>。

7. 残缺矩阵问题

(1) 残缺矩阵问题的意义. 当层次很多，对某些判断缺少把握或不感兴趣时, 专家不想发表意见, 导致判断矩阵中有空缺元素, 如何充分利用残缺的矩阵中的剩余信息来作出排序,即为残缺矩阵问题.也称为不完全信息下的排序问题.

(2) 残缺矩阵问题的要点

i) 怎麼样的残缺矩阵是“可接受”的？

“可接受”的数学定义是“不可约”矩阵, 即矩阵A不能通过行列调换变为如下形式的矩阵: $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}$.

图论中“不可约矩阵”也称为对应的有向图是“强连通”的.

不可约矩阵 (有可连接的连通圈) 实例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 4 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

可约矩阵 (无可连接的连通圈) 实例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) 如何得到排序权向量? 认为可接受的残缺矩阵近似有一致性 ,由此得到操作方法: 将残缺元素 a_{ij} 用 w_i / w_j 来替代后得辅助矩阵, 然后解该矩阵的特征值问题来得到排序权向量. 与此等价的问题是求残缺矩阵的 “ 等价矩阵 ” 的特征值问题. 这里矩阵 $A=(a_{ij})$ 的等价矩阵是指矩阵 $A^{\#}=(a^{\#}_{ij})$, 其中 :

$$a^{\#}_{ij} = a_{ij}\ ,\quad \text{当}\ i \neq j\ ;$$

$$a^{\#}_{ij} = m_i + 1\ ,\ \text{当}\ i = j\ ,$$ 而 m_i 为 A 中第 i 行中的残缺元素个数.

具体操作实例: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & * \\ 1/2 & 1 & 2 \\ * & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 * 为残缺元素 .

将 A 改记为 C : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

解特征值问题：$C\cdot\omega=\lambda_{max}\cdot\omega$ ，可得 ：

$$\begin{cases}(2-\lambda_{max})w_1 + 2w_2 = 0\\ w_1/2 + (1-\lambda_{max})w_2 + 2w_3 = 0\\ w_2/2 + (2-\lambda_{max})w_3 = 0\end{cases}$$

其中$\omega=(w_1, w_2, w_3)^T$.

为使上面方程组有非零解 $\omega\neq 0$，可求得：

$\lambda_{max}=3$， 而 $\omega=(0.571, 0.286, 0.143)^T$.

实际上，可以证明 ： 问题 $C\cdot\omega=\lambda_{max}\cdot\omega$ 等价于求 $A=(a_{ij})$ 的等价矩阵

$$A^{\#}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1/2 & 2\end{bmatrix}$$ 的特征值问题：$A^{\#}\cdot\omega=\lambda_{max}\cdot\omega$.

又如, 求残缺矩阵 **B** 的特征值和特征向量，其中：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & * & 4 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1 & * \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1/2 & * \\ * & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1/4 & * & * & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

B 的等价矩阵为：

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 & 4 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

只要求出 **B*** 的特征值和特征向量即可.

iii) 如何进行一致性检验？只需取

$$CI = (\lambda_{max} - n) / [\ (n-1) - \sum m_i / n\ ]$$ 即可.

(3) 残缺矩阵的实例.

Saaty 对六大城市到费城的距离作排序问题, 用残缺的信息如下进行:

A 到费城的距离

开罗 东京 芝加哥 洛杉矶 伦敦 蒙特利尔

B1 B2 B3 B4 B5 B6

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	1	1/3	8	3	3	7
B_2	3	1	0	0	0	0
B_3	1/8	0	1	0	0	0
B_4	1/3	0	0	1	0	0
B_5	1/3	0	0	0	1	0
B_6	1/7	0	0	0	0	1

$$\text{矩阵 } M = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 M 的等价矩阵为：

$$矩阵\ M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_{max} = 6$,

$\omega = (0.203, 0.608, 0.0253, 0.0676, 0.0676, 0.029)^T$

事实上实际距离如下: 5729 , 7449 , 660 , 2732 , 3658 , 400 .

实际权向量为： $(0.278, 0.361, 0.032, 0.132, 0.177, 0.019)^T$.

四. 层次分析法的广泛应用

- 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。
- 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。
- 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。
- 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。

例3　国家实力分析

国家综合实力

国民收入　军事力量　科技水平　社会稳定　对外贸易

美、俄、中、日、德等大国

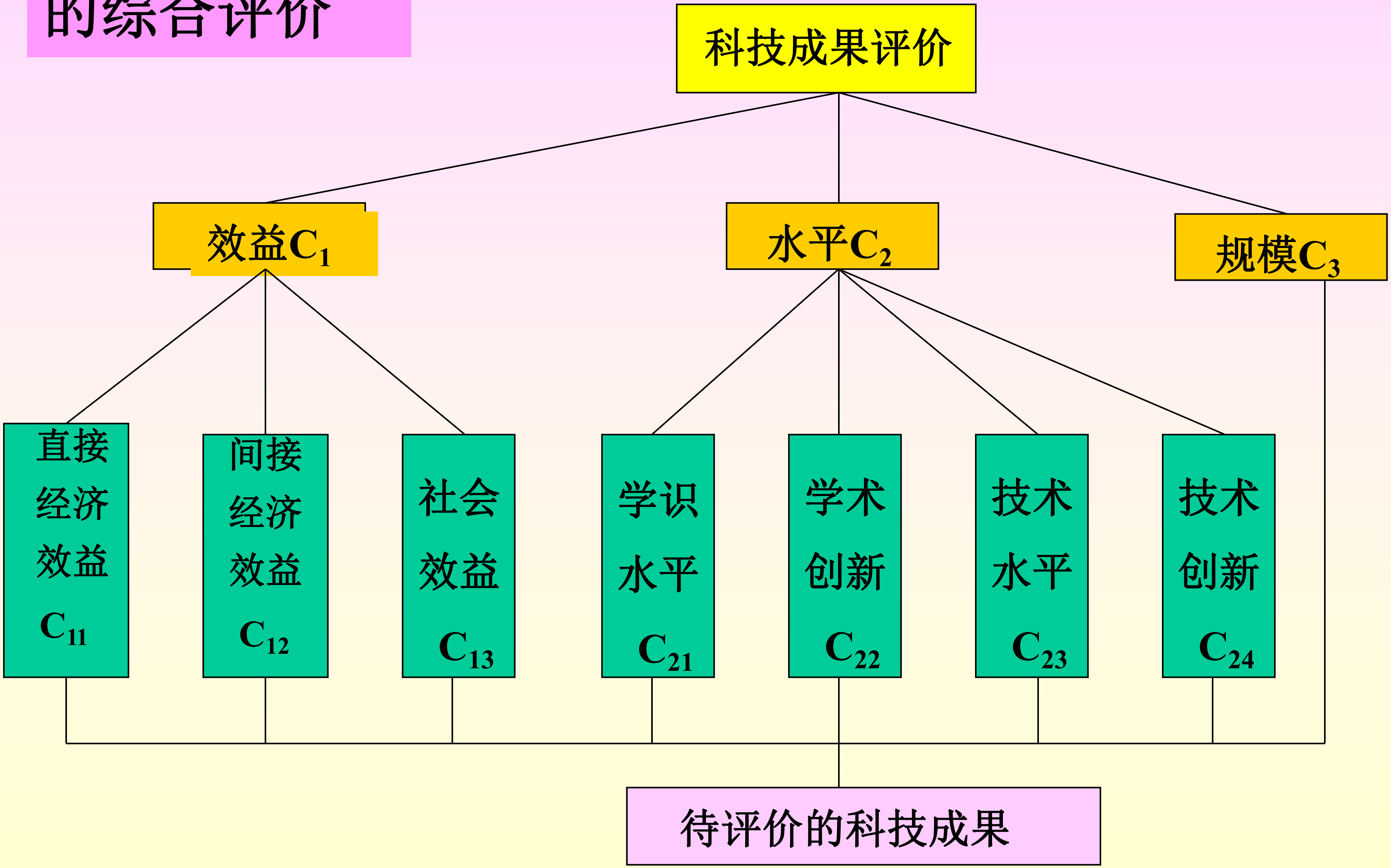
例4　工作选择

工作选择

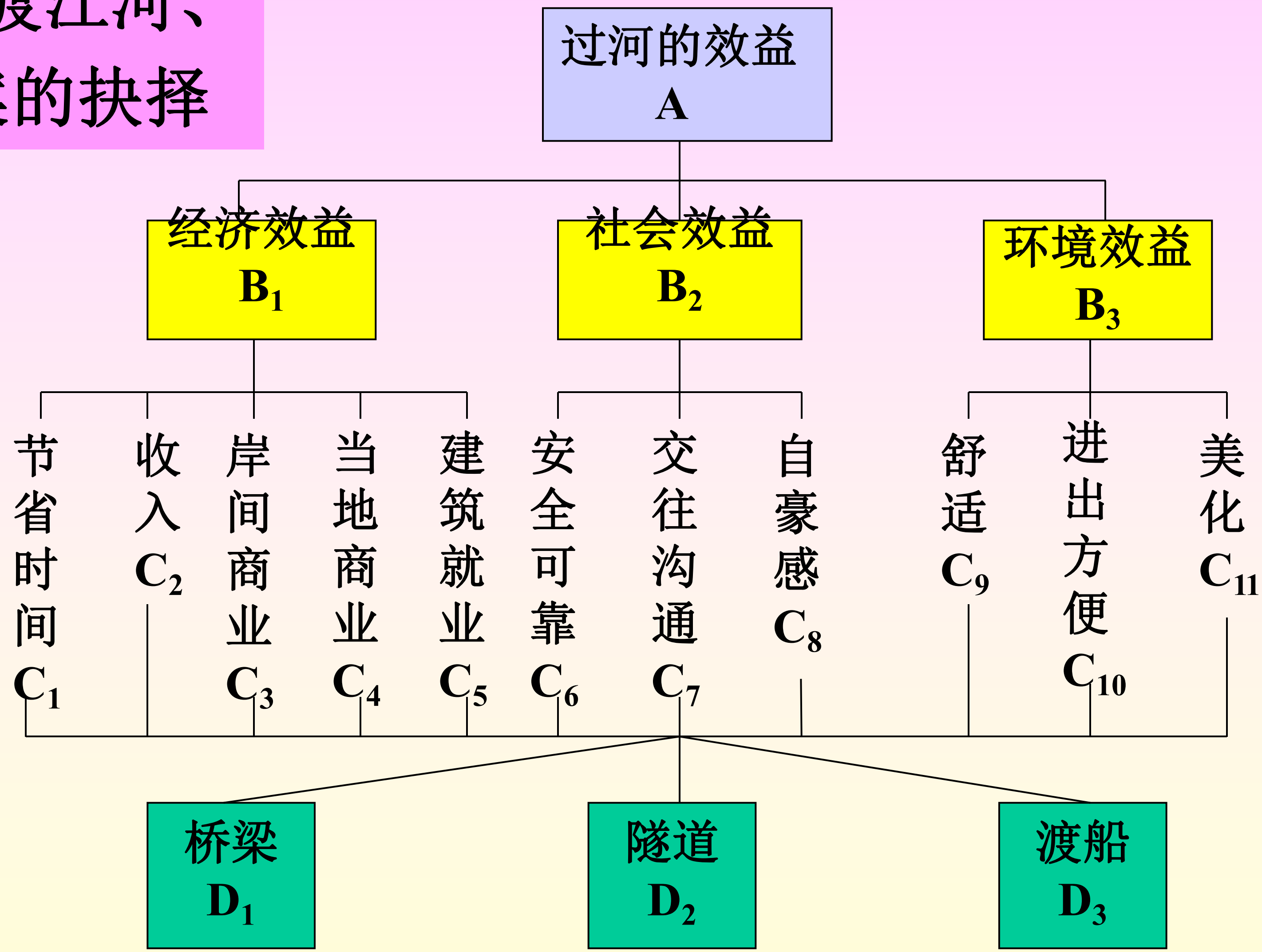
贡献　收入　发展　声誉　关系　位置

供选择的岗位

例5 科技成果的综合评价

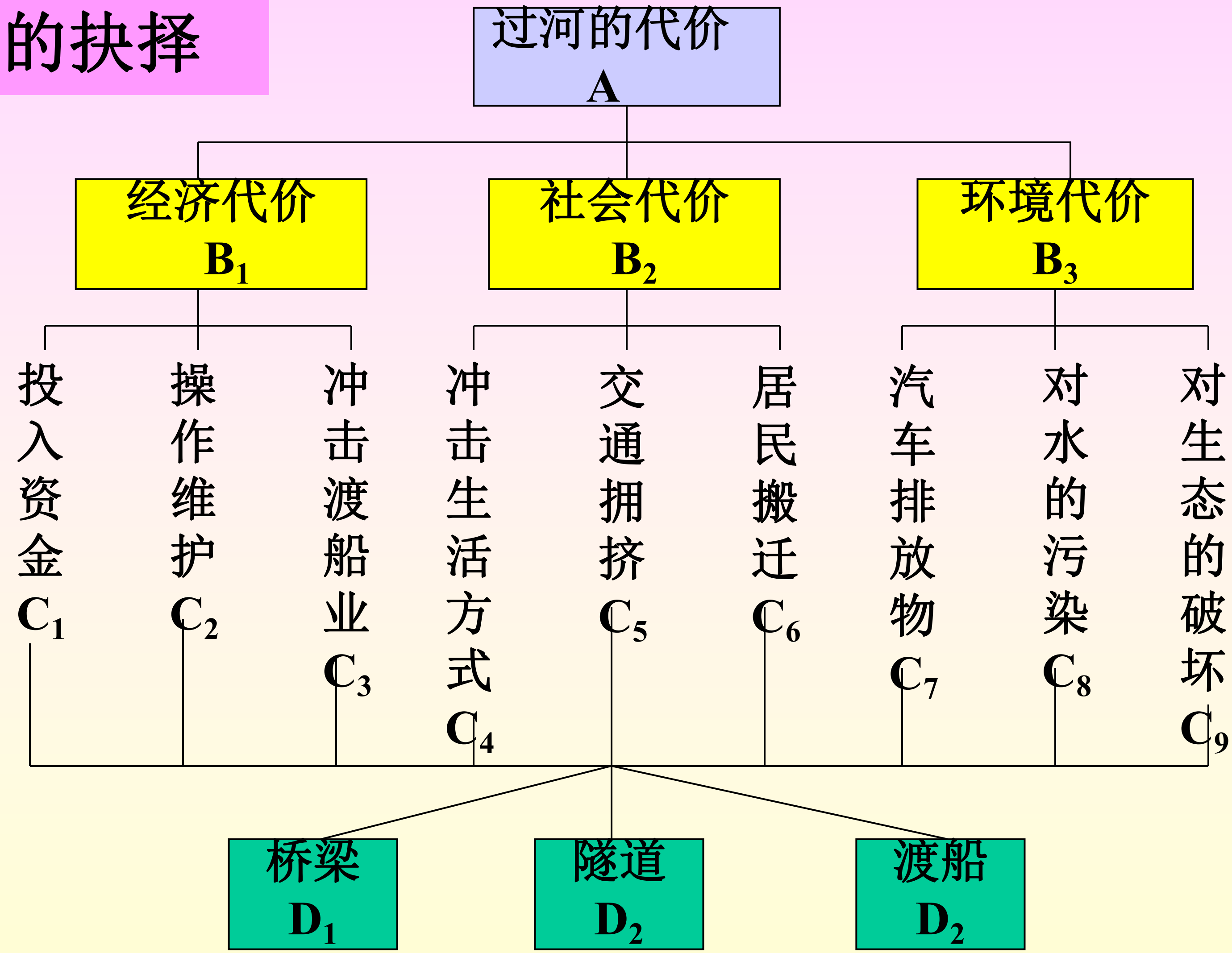


例6　横渡江河、海峡方案的抉择



（1）过河效益层次结构

例6　横渡江河、海峡方案的抉择



（2）过河代价层次结构

五、应用层次分析法的注意事项

1. 层次分析法的优点

系统性——将对象视作系统，按照分解、比较、判断综合的思维方式进行决策。成为继机理分析、统计分析之后发展起来的系统分析的重要工具；

实用性------定性与定量相结合，能处理许多用传统的最优化技术无法着手的实际问题，决策者可以直接应用它，这就增加了决策的有效性；

简洁性---- 计算简便，结果明确。便于决策者直接了解和掌握。

2．层次分析法的局限

囿旧----- 只能从原有的方案中优选一个出来，没有办法得出更好的新方案；

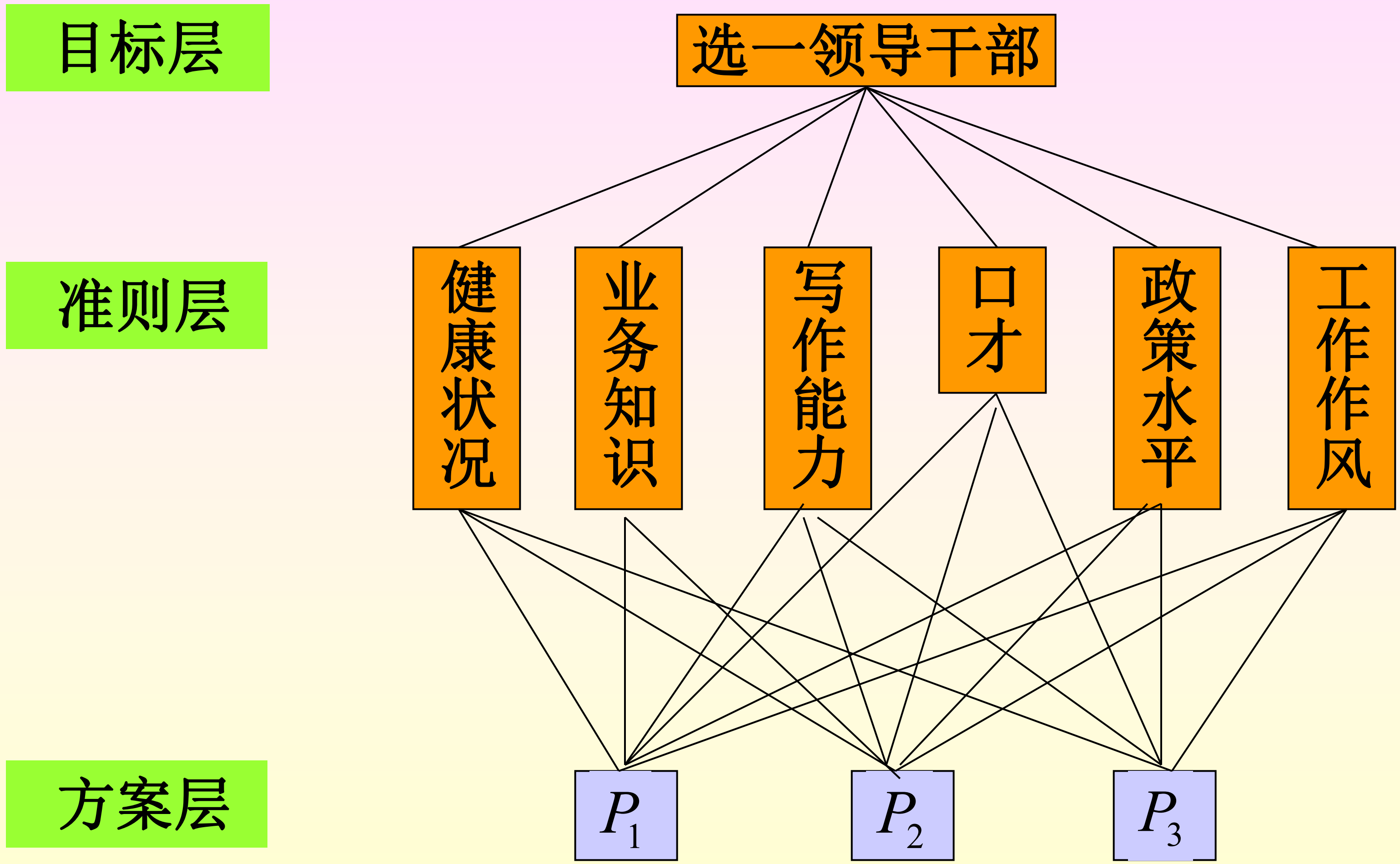
粗略----- 该法中的比较、判断以及结果的计算过程都是粗糙的，不适用于精度较高的问题；

主观----- 从建立层次结构模型到给出成对比较矩阵，人们的主观因素对整个过程的影响很大，这就使得结果难以让所有的决策者接受。当然采取专家群体判断的办法是克服这个缺点的一种途径。

六、层次分析法应用实例

某单位拟从3名干部中选拔一名领导，选拔的标准有政策水平、工作作风、业务知识、口才、写作能力和健康状况。下面用 AHP 方法对3人综合评估、量化排序。

(1)建立层次结构模型



(2)构造成对比较矩阵及层次单排序

$$
A=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \text{健康情况} & \text{业务知识} & \text{写作能力} & \text{口才} & \text{政策水平} & \text{工作作风} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{健康情况} \\ \text{业务知识} \\ \text{写作能力} \\ \text{口才} \\ \text{政策水平} \\ \text{工作作风} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1/2 \\
1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1/2 \\
1 & 1/2 & 1 & 5 & 3 & 1/2 \\
1/4 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\
1 & 1 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

A的最大特征值：$\lambda_{\max} = 6.35,$

相应的特征向量为：

$$W^{(2)} = (0.16, 0.19, 0.19, 0.05, 0.12, 0.30)^T$$

一致性指标：$CI = \dfrac{6.35 - 6}{6 - 1} = 0.07$

随机一致性指标 RI=1.24 (查表)

一致性比率 CR=0.07/1.24=0.0565<0.1

通过一致性检验

假设3人关于6个标准的判断矩阵为：

健康情况

$$B_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

业务知识

$$B_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 4 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

写作能力

$$B_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

口才

$$B_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

政策水平

$$B_5^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

工作作风

$$B_6^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1/7 & 1 & 5 \\ 1/9 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可求得各属性的最大特征值和相应的特征向量。

各属性的最大特征值

特征值	健康情况	业务知识	写作能力	口才	政策水平	工作作风
$\lambda_{\max}$	3.02	3.02	3.05	3.05	3.00	3.02

$$W^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.14 & 0.10 & 0.32 & 0.28 & 0.47 & 0.77 \\ 0.63 & 0.33 & 0.22 & 0.65 & 0.47 & 0.17 \\ 0.24 & 0.57 & 0.46 & 0.07 & 0.07 & 0.05 \end{pmatrix}$$

均通过一致性检验

决策层对总目标的权向量为：$W=(0.380,0.393,0.227)^T$