一种快速的有约束矩形件优化排样模型

彭 文
PENG Wen

华北电力大学,计算机科学与技术学院,北京 102206
College of Computer Science,North China Electric Power University,Beijing 102206,China
E-mail:pengwen@ncepu.edu.cn

PENG Wen.A quick model for guillotine rectangle cutting problem.Computer Engineering and Applications,2010,46(27):214-216.

Abstract: In order to solve the constrained rectangle cutting problem effectively,a quick model is proposed,which obtains the most optimal scheme by comparing the different layouts of the rectangles.Compared with those of the heuristic algorithms,the speed of the presented algorithm,which is based on the analytic computation completely,is improved remarkably,although the optimal solution can not be found by this algorithm.The experimental results show that the algorithm can get the satisfied layout within a short time and is a promising and efficient guillotine rectangle cutting method.
Key words: rectangle cutting;guillotine;optimal algorithm;layout

摘 要:为了有效地解决有约束的矩形件优化排样问题,提出一种快速的求解算法;通过比较待排样矩形件的不同排样模式,选择最优排样方案。算法完全基于解析计算,虽不能寻找理论最优解,但相比于各种启发式算法大大提高了排样速度。实验结果表明,算法能够在较短的计算时间内获得满意的排样效果,是一种效率较高的有约束矩形件排样算法。
关键词:矩形件排样;一刀切;优化算法;排样模式
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2010.27.060 **文章编号:**1002-8331(2010)27-0214-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TP391.7

矩形件排样问题是一种资源优化问题,广泛存在于许多传统工业中,如金属板、玻璃板、木板和纸张等的分割。根据切割设备的工艺要求,矩形排样可以分为两种方式[1]:无约束矩形排样,即矩形件紧密排放且互不重叠,适用于火焰切割机加工;有约束矩形排样,即只能对板材直线切割(也称一刀切),适用于剪床加工、玻璃切割。

对于无约数矩形件的排样算法,由于复杂度相对较低,已有很多不同的算法设计,如改进的BL算法[2]、遗传算法[3]、模拟退火算法[4]、蚁群算法[5]等。而对于有约束的矩形排样研究虽然较早就进行了研究[6],但由于复杂度较高,研究成果不是很理想。Parada将每个排样解表示为一个二叉树,应用模拟退火算法解决有约束的一刀切矩形排样问题[7]。Hifi提出一种基于分支限界策略的一刀切排样模型,能够很好地解决中小规模的排样问题[8]。Sergey采用GBL(Guillotine Bottom Left)启发策略,通过基于自治体的算法实现方式求解一刀切排样问题,并取得了满意的效果[9]。马广焜等利用回溯寻求和判断更优的组合解来对混合启式算法加以改进的混合算法,以及保证切割约束条件的剩余区域合并原则和实现方法,得到较优的排样结果[10]。

以上几种有约束的矩形件排样算法由于复杂度较高而使运行效率较低,实用性较差,为此本文提出一种快速的有约束的排样算法。该算法对一块板材开始排样前,首先从板材的左下角试探地排放各种待排矩形件,然后对待排样矩形件的4种排样模式用评价标准进行评估,选出最佳模式,迭代此过程直到排放完所有的待排样矩形件。由于算法完全是解析计算,不存在寻优过程,虽不能获得理论最优解,但运行效率大大提高,是有约束排样算法应用在工业上的一种有益探索。

1 问题描述

假设有m种矩形件$S_i=(l_i,w_i,b_i)$ $i=1,2,\cdots,m$,l_i、w_i和b_i分别为每种待排矩形件S_i的长、宽和数量,将它们合理地排放在板材$R=(L,W,N)$上,N通常很大,能够排放所有的矩形件,满足下列要求:

(1)任意两块矩形件互不重叠;

(2)矩形件必须排放在板材内,且矩形件的边要平行于板材矩形的边;

(3)满足约束条件(即一刀切约束),使得所用的板材数量最少。

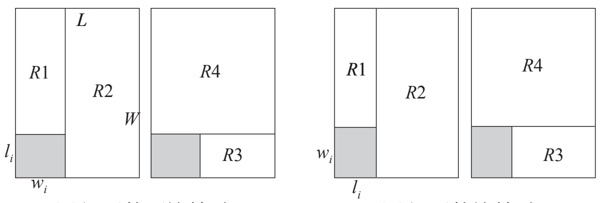
2 算法模型

2.1 排样模式

在描述排样算法前,首先介绍排样模式的概念。排样模

作者简介:彭文(1980-),男,博士,讲师,主要研究方向:矩形排样,图像配准等。
收稿日期:2009-02-25 **修回日期:**2009-08-21

式指矩形件每次在板材空间的排放位置、矩形件的旋转方式、与矩形件相关的切刀方式。首先假设已经按某定序规则选定了某一矩形件，现在选择的定位规则是从左下角开始排样，将矩形件排放左下角，有旋转和不旋转两种旋转方式。另外，在放好左下角的矩形件后切割的方式又可以分为横切和竖切两种，所以总共有4种排样模式，如图1所示。矩形件未旋转时竖切和横切后各子板材的尺寸为：$R1=(l_i, W-w_i)$，$R2=(L-l_i, W)$，$R3=(L-l_i, w_i)$，$R4=(L, W-w_i)$。矩形件旋转时竖切和横切后各子板材的尺寸为：$R1=(w_i, W-l_i)$，$R2=(L-w_i, W)$，$R3=(L-w_i, l_i)$，$R4=(L, W-l_i)$。其中子板材$R=(L, W)$是排样过程中的中间产物，它的数量默认为1。



（a）矩形件不旋转时的两种排样模式　（b）矩形件旋转时的两种排样模式

图1 4种排样模式图

2.2 算法思路

对一块板材进行排样，首先从这块板材的左下角开始试探地排放待排矩形件，对它的4种排样模式用某种评价标准进行评估，选出评价最好的那种模式，再将这个评估值与其他所有待排矩形件的较好评估值进行比较，选出最好的排样模式，并按该排样模式进行板材切割。然后按深度优先的原则不断地对两块新产生的子板材重复上述过程，最终完成一块板材的全部排样。

在上述算法思路中一个重要的问题就是如何确定评估函数$BK(R)$，以决定待排样矩形R的最佳排样模式。待排矩形件的每一种排样模式对应一个评估函数值：$BK(R)=v+BK(R1)+BK(R2)$或$BK(R)=v+BK(R3)+BK(R4)$，其中v为矩形件R的面积，$R1$，$R2$，$R3$，$R4$如图1，比较4个评估函数值就可以确定采用哪种排样模式最好。又因为所有4个评估函数值中都包含了v，只需比较各$BK(R1)+BK(R2)$或$BK(R3)+BK(R4)$的大小即可。确定了一种待排矩形件的最佳排样模式后，再与所有待排样矩形的最佳排样比较，最终确定该次选择的矩形件与排样模式。

2.3 评价函数$BK(R)$

评价函数$BK(R)$主要用于对尚未排样的子板材矩形空间的期望利用价值进行评价，而那些已经被矩形零件占领的已分配空间因为有些情况下也要参与总评价函数值的计算，其评价函数值就按其有效面积计算。

每一个待分配的矩形空间R的评价函数可以转化为下面的背包问题：

$$BK(R)=\max\sum_{i\in S^*} v_i x_i\text{，}S^*=\{i/l_i\le L, w_i\le W\}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in S^*} v_i x_i\le LW$$

$$0\le x_i\le\min\{b_i-n_i, \lfloor L/l_i\rfloor\lfloor W/w_i\rfloor\}\text{，}i=1, 2, \ldots, m$$

其中，v_i为矩形件i的面积，n_i是矩形件i已排样的数量，包括前面提到的当前左下角排放的那一块。$BK(R)$可以用快速贪婪法近似解决。

步骤1 初始化：

设z=0，z为排样的总有效面积，它的最后结果即为评价函数值$BK(R)$。

$c=LW$，c为未排样空间的面积大小。

矩形零件集合中的元素按面积从大到小排列。

设j=1，j为当前时刻考虑的矩形零件的编号。

z^*=0，只排一种矩形零件（编号为j^*）能排放的最大有效面积。

步骤2 $u_j=\min\{b_j-n_j, \lfloor L/l_j\rfloor\lfloor W/w_j\rfloor\}$

$x_j=\min\{u_j, \lfloor c/v_j\rfloor\}\}$

$z=z+v_j x_j$

$c=c-v_j x_j$

如果$v_j u_j>z^*$，$z^*=v_j u_j$，$j^*=j$。

步骤3 如果$j<m$，$j=j+1$，跳转到步骤2。

步骤4 如果$z^*>z$，$z=z^*$，返回最终的z值为评价函数值$BK(R)$。

2.4 算法模型

此快速排样算法按深度优先的原则将板材空间逐步分解，不断对各空间用评价函数$BK(R)$来帮助确定放入其左下角的矩形件和它的排样模式，并产生新的子板材空间$R1$、$R2$或$R3$、$R4$，直到所有子板材空间都无法继续排放矩形件为止。

算法的详细步骤如下：

初始化：设$L=\{R\}$，为待排样的板材集合。

设$P=\Phi$，为已排样的矩形件链表集合。

设$v_T=0$，为已排样的总有效面积。

待排样的矩形件集合S按照其面积从大到小排序，面积相同的则将长和宽之差的绝对值大的排在前面。

每种待排矩形件i已排数量$n_i=0$。

步骤1 如果$L\neq\Phi$，取出一种板材(L_k, W_k, N_k)，并将其加入堆栈C。

步骤2 如果$C=\Phi$，则回步骤1。否则：

从C中取出一个元素(L, W)作为将被切割的板材。

对于每种待排矩形件i，i=1，2，…，m，进行如下循环：

如果，待排矩形件i有纹理方向要求（即不能旋转），则

如果$l_i\le L$，$w_i\le W$，$n_i<b_i$，用前一节中的评价函数$BK(R)$计算以下评价函数值：

$$e_1=BK(R1)\text{，}e_2=BK(R2)\text{，}h_1=BK(R3)\text{，}h_2=BK(R4)$$

比较竖切与横切的总评价函数值B_i，并取数值大的，$B_i=v_i+\max\{e_1+e_2, h_1+h_2\}$。

否则，$B_i=0$。

如果，待排矩形件i无纹理方向要求（可旋转），则还要计算其旋转后的竖切与横切的总评价函数值B_i，最后选取最大值。

i++。

步骤3 在所有矩形件排放再左下角后可得到的总评价函数值B_i，找到其中最大的那个评价函数值$B_j=\max\{B_i, i=1, 2, \cdots, m\}$。

如果，$B_j>0$，则按照B_j所确定的排样模式进行排样切割。将切割后产生的两块子板材$R1$、$R2$或$R3$、$R4$加入C。

否则，$B_j=0$，说明当前的子板材(L, W)放不下任何待排矩形件，所以将它当作余料或废料处理，加入余料列表。

返回步骤2。

3 算法实现

针对上述排样算法，在实现细节上，提出了一些改进措施，能够大大提高算法效率。

3.1 组合规则

在选择待排矩形件时，不再只考虑排放一个矩形件的情况，而是将尽可能多的同种矩形件一起排放，以提高加工效率。从实验结果来看，这样做板材的利用率非但不比原方法

差，而且平均值还略有提高，计算速度也显著提升。

此时，在左下角可以排放矩形件 (l_i, w_i) 的数量为：

$$\min\{b_i - n_i, \max\{\lfloor L/l_i \rfloor \lfloor W/w_i \rfloor\}\}$$

其中：b_i 为矩形件的总数量，n_i 为矩形件已经使用过的数量。

切割生成的子板材矩形为：

$$R1=(n_l l_i, W-n_w), R2=(L-n_l l_i, \mathrm{W})$$

$$R3=(L-n_l l_i, n_w w_i), R4=(L, W-n_w w_i)$$

其中：$n_l=\lfloor L/l_i \rfloor$，$n_w=\lfloor W/w_i \rfloor$。

3.2 优先级调整策略

通常情况下优先排放面积较大的矩形件，板材利用率越高。因此，本文采用相对放大系数法来促使较大矩形件被优先排放，主要分为两步：

（1）定序规则：在初始化中，将矩形件按面积从大到小排序，面积相同的则以长宽之差的绝对值大为先。

（2）通过对面积较大矩形件的评价函数值 $BK(R)$ 乘以一个相对放大系数来达到提高大矩形件优先级的目的，即 $BK'(R)=BK(R)w_i l_i/(WL)$。

4 实验结果与讨论

本文在Windows XP平台下实现上述算法，并通过了大量实验测试。实验结果表明，该算法在计算效率与排样结果均取得较佳效果。

实验1 待排矩形件数据如表1所示。总共有31种矩形件，所有矩形件总数量为6 957。使用4 800 mm×3 600 mm的板材排样，最终使用了5块板材，总的平均利用率为95.14%，总耗时为1.4 s，最大消耗内存1.5 MB。图2为其中一块板材的排样结果图。

表1 实验1数据（28种待排样矩形件）

长	宽	数量	长	宽	数量	长	宽	数量
30	66	2 820	20	625	940	30	230	16
30	360	180	1 500	1 500	3	246	2 305	6
244	2 330	6	1 500	1 500	3	20	248	184
31.5	61	120	560	1 330	7	20	60	32
120	204	10	50	78	618	20	130	32
81	810	42	80	230	8	20	210	32
1 674	1 674	3	370	1 450	6	20	234	336
204	116	10	400	560	5	30	355	180
20	333	252	406	560	5	300	235	4
190	245	4	413	560	5			
20	401	1 080	400	235	8			

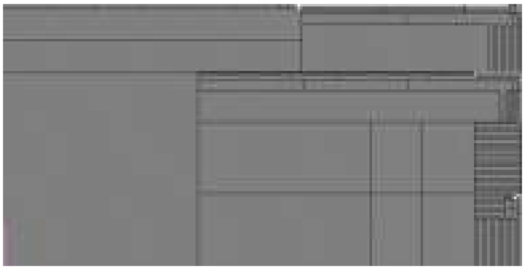


图2 实验1排样结果图

实验2 进行一次大规模的排样，总共有148种矩形件，所有矩形件总数量为10 214。使用4 800 mm×3 600 mm的板材排样，最终使用了54块板材，总的平均利用率为97.95%，总耗时为54 s，最大消耗内存为14.3 MB。由于结果图过多，随机列出其中一块板材排样结果，如图3。

图3 实验2排样结果图

实验3 为了说明本文算法的高效性，与文献[8]与文献[10]算法进行了比较。实验内容为实验2数据，表2为3个算法的结果比较。从表中可以看出，本文在利用率和计算时间方面均优于文献[10]中的算法；与文献[8]相比，虽然利用率略低一些，但是计算时间大大提高，因此整体上仍然优于文献[8]。

表2 不同算法结果对比

文献[8]算法		文献[10]算法		本文算法	
运行时间/s	利用率/（%）	运行时间/s	利用率/（%）	运行时间/s	利用率/（%）
472	98.41	356	95.45	54	97.95

5 结论

本文算法采用解析计算方法，回避了耗时的启发式寻优过程，同时组合规则与优先级调整策略进一步优化算法，大大缩短了计算时间，提高了算法效率。合理的运算时间使得算法在玻璃切割、钣金加工和机械制造等领域具有较强的应用前景，能够显著降低生产成本。

参考文献：

[1] Lodi A，Martello S，Monaci M.Two-dimensional packing problems：A survey[J].European Journal of Operational Research，2002，141（2）：241-252.

[2] Liu D，Teng H.An improved BL-algorithm for genetic algorithm of the orthogonal packing of rectangles[J].European Journal of Operational Research，1999，112（2）：413-420.

[3] Hopper E，Turton B.A genetic algorithm for a 2D industrial packing problem[J].Computers and Industrial Engineering，1999，37（1/2）：375-378.

[5] 刘瑞杰，须文波，求解矩形件优化排料蚁群算法[J].江南大学学报：自然科学版，2005，4（1）：23-27.

[4] Faina L.Application of simulated annealing to cutting stock problem[J].European Journal of Operational Research，1999，114（3）：542-556.

[6] Beasley J E.Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting[J].Journal of the Operational Research Society，1985，36：297-306.

[7] Victor P，Mauricio S，Mauricio S，et al，Solution for the constrained guillotine cutting problem by simulated annealing[J].Computers and Operations Research，1998，25（1）：37-47.

[8] Mhand H.Exact algorithms for the guillotine strip cutting/packing problem[J].Computers and Operations Research，1998，25（11）：925-940.

[9] Sergey P，Rym M.An agent-based approach to the two-dimensional guillotine bin packing problem[J].European Journal of Operational Research，2009，192（3）：767-781.

[10] 马广焜，刘嘉敏，黄有群，等.一种有约束矩形排样问题的求解算法[J].沈阳工业大学学报，2006，28（4）：449-453.