

经典的数学规划问题（下）



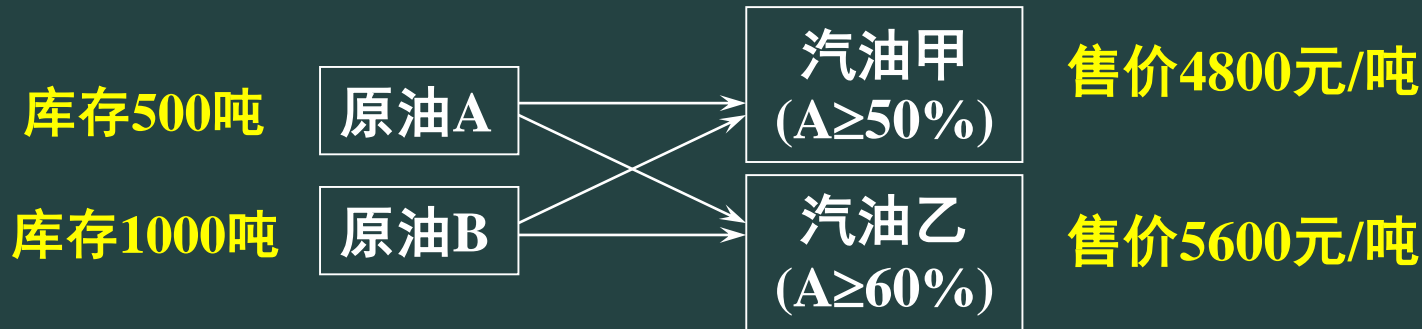
《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码





例4 原油采购与加工



市场上可买到不超过1500吨的原油A：

- 购买量不超过500吨时的单价为10000元/吨；
- 购买量超过500吨但不超过1000吨时，超过500吨的部分8000元/吨；
- 购买量超过1000吨时，超过1000吨的部分6000元/吨。

应如何安排原油的采购和加工？

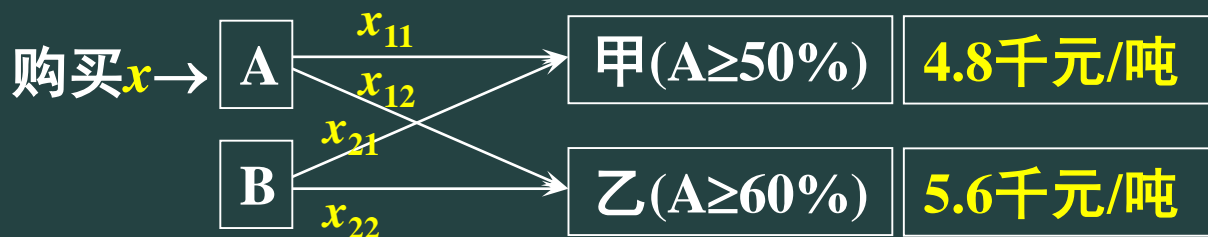


问题分析

- 利润：销售汽油的收入 - 购买原油A的支出
- 难点：原油A的购价与购买量的关系较复杂

决策变量

原油A的购买量,原油A, B生产汽油甲,乙的数量



目标函数

利润(千元) $c(x) \sim$ 购买原油A的支出

$$\text{Max } z = 4.8(x_{11} + x_{21}) + 5.6(x_{12} + x_{22}) - c(x)$$

$c(x)$ 如何表述?



目标 函数

- $x \leq 500$ 吨单价为10千元/吨；
- $500 \text{ 吨} \leq x \leq 1000 \text{ 吨}$ ，超过500吨的8千元/吨；
- $1000 \text{ 吨} \leq x \leq 1500 \text{ 吨}$ ，超过1000吨的6千元/吨。

$$c(x) = \begin{cases} 10x & (0 \leq x \leq 500) \\ 8x + 1000 & (500 \leq x \leq 1000) \\ 6x + 3000 & (1000 \leq x \leq 1500) \end{cases}$$

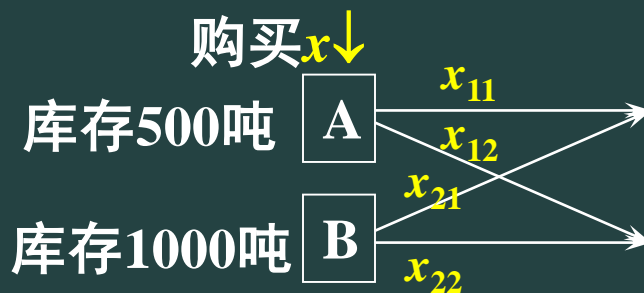
约束 条件

原油供应

$$x_{11} + x_{12} \leq 500 + x$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 1000$$

$$x \leq 1500$$

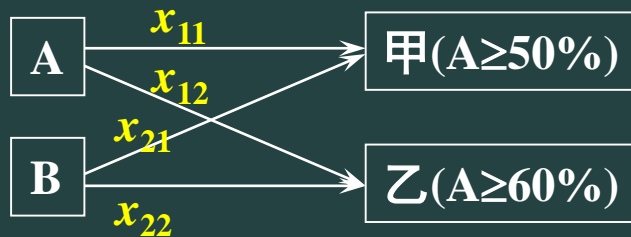




约束条件

汽油含原油A的比例限制

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21}} \geq 0.5 \Leftrightarrow x_{11} \geq x_{21}$$
$$\frac{x_{12}}{x_{12} + x_{22}} \geq 0.6 \Leftrightarrow 2x_{12} \geq 3x_{22}$$



- 目标函数中 $c(x)$ 不是线性函数，是非线性规划；
- 对于用分段函数定义的 $c(x)$ ，一般的非线性规划软件也难以输入和求解；
- 想办法将模型化简，用现成的软件求解。



模型求解

方法

x_1, x_2, x_3 ~ 以价格10, 8, 6(千元/吨)采购A的吨数

目标函数

$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad c(x) = 10x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\text{Max} \quad z = 4.8(x_{11} + x_{21}) + 5.6(x_{12} + x_{22}) - (10x_1 + 8x_2 + 6x_3)$$

• 500吨 $\leq x \leq$ 1000吨, 超过500吨的8千元/吨

增加约束

只有当以10千元/吨的价格购买 $x_1=500$ (吨)时, 才能以8

千元/吨的价格购买 $x_2 \quad \implies (x_1 - 500)x_2 = 0$

$$(x_2 - 500)x_3 = 0 \quad 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 500$$

非线性规划模型, 可以用LINGO求解



LINGO求解

Model:

```
Max= 4.8*x11 + 4.8*x21 + 5.6*x12  
+ 5.6*x22 - 10*x1 - 8*x2 - 6*x3;  
x11+x12 < x + 500;  
x21+x22 < 1000;  
x11 - x21 > 0;  
2*x12 - 3*x22 > 0;  
x=x1+x2+x3;  
(x1 - 500) * x2=0;  
(x2 - 500) * x3=0;  
x1 < 500;  
x2 < 500;  
x3 < 500;  
x > 0;  
x11 > 0;  
x12 > 0;  
x21 > 0;  
x22 > 0;  
x1 > 0;  
x2 > 0;  
x3 > 0;  
end
```

Objective value: 4800.000

Variable	Value	Reduced Cost
X11	500.0000	0.0000000E+00
X21	500.0000	0.0000000E+00
X12	0.0000000E+00	0.0000000E+00
X22	0.0000000E+00	0.0000000E+00
X1	0.1021405E-13	10.00000
X2	0.0000000E+00	8.000000
X3	0.0000000E+00	6.000000
X	0.0000000E+00	0.0000000E+00

用库存的500吨原油A、500吨原油B生产汽油甲，不购买新的原油A，利润为4,800千元。

LINGO得到的是局部最优解，还能得到更好的解吗？



例5 选课策略

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
4	数据结构	3	数学；计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
6	计算机模拟	3	计算机；运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学；计算机	微积分；线性代数

要求至少选两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课

为了选修课程门数最少，应学习哪些课程？

选修课程最少，且学分尽量多，应学习哪些课程？



0-1规划模型

课号	课名	所属类别
1	微积分	数学
2	线性代数	数学
3	最优化方法	数学；运筹学
4	数据结构	数学；计算机
5	应用统计	数学；运筹学
6	计算机模拟	计算机；运筹学
7	计算机编程	计算机
8	预测理论	运筹学
9	数学实验	运筹学；计算机

决策变量

$x_i=1$ ~选修课号 i 的课程
($x_i=0$ ~不选)

目标函数

选修课程总数最少

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 2$$

$$x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 3$$

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 2$$

约束条件
最少2门数学课,
3门运筹学课,
2门计算机课。



0-1规划模型

课号	课名	先修课要求
* 1	微积分	
* 2	线性代数	
* 3	最优化方法	微积分；线性代数
4	数据结构	计算机编程
5	应用统计	微积分；线性代数
* 6	计算机模拟	计算机编程
* 7	计算机编程	
8	预测理论	应用统计
* 9	数学实验	微积分；线性代数

模型求解 (LINDO)

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_9 = 1$ ，
其它为0； 6门课程， 总学分21

约束条件

先修课程要求

$$x_3=1 \text{ 必有 } x_1=x_2=1$$

$$\Downarrow$$
$$x_3 \leq x_1, x_3 \leq x_2$$

$$\Updownarrow$$
$$2x_3 - x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_4 \leq x_7 \Rightarrow x_4 - x_7 \leq 0$$

$$2x_5 - x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_6 - x_7 \leq 0$$

$$x_8 - x_5 \leq 0$$

$$2x_9 - x_1 - x_2 \leq 0$$



讨论：选修课程最少，学分尽量多，应学习哪些课程？

课程最少

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

学分最多

$$\text{Max } W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 \\ + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

两目标(多目标)规划

$$\text{Min } \{Z, -W\}$$

多目标优化的处理方法：化成单目标优化。

• 以课程最少为目标，
不管学分多少。



最优解如上，6门课程，
总学分21。

• 以学分最多为目标，
不管课程多少。



最优解显然是选修所有9门课程。



多目标规划

- 在课程最少的前提下
以学分最多为目标。



增加约束 $\sum_{i=1}^9 x_i = 6$
以学分最多为目标求解。

课号	课名	学分
* 1 *	微积分	5
* 2 *	线性代数	4
* 3 *	最优化方法	4
4	数据结构	3
5 *	应用统计	4
* 6	计算机模拟	3
* 7 *	计算机编程	2
8	预测理论	2
* 9 *	数学实验	3

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = x_9 = 1$ ，
其它为0；总学分由21增至22。

注意：最优解不唯一！

可将 $x_9 = 1$ 易为 $x_6 = 1$

**LINDO无法告诉优化
问题的解是否唯一。**



多目标规划

- 对学分数和课程数加权形成一个目标，如三七开。

$$\Rightarrow \text{Min } Y = \lambda_1 Z - \lambda_2 W = 0.7Z - 0.3W$$

$$Z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

课号	课名	学分
1 *	微积分	5
2 *	线性代数	4
3 *	最优化方法	4
4 *	数据结构	3
5 *	应用统计	4
6 *	计算机模拟	3
7 *	计算机编程	2
8	预测理论	2
9 *	数学实验	3

$$W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 =$
 $x_6 = x_7 = x_9 = 1,$
 其它为0；总学分28。



多目标规划

讨论与思考

$$\text{Min } Y = \lambda_1 Z - \lambda_2 W \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$$

$$Z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

$$W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 \\ + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

$$\lambda_1 < 2/3$$

最优解与 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ 的结果相同——学分最多

$$\lambda_1 > 3/4$$

最优解与 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ 的结果相同——课程最少



例6 饮料厂的生产与检修计划

某种饮料4周的需求量、生产能力和成本

周次	需求量(千箱)	生产能力(千箱)	成本(千元/千箱)
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

存贮费:每周每千箱饮料 0.2千元。

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。
- 在4周内安排一次设备检修, 占用当周15千箱生产能力, 能使检修后每周增产5千箱, 检修应排在哪一周?



问题分析

周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5
合计	100	135	

- 除第4周外每周的生产能力超过每周的需求；
- 生产成本逐周上升；
- 前几周应多生产一些。

模型假设

- 饮料厂在第1周开始时没有库存；
- 从费用最小考虑, 第4周末不能有库存；
- 周末有库存时需支出一周的存贮费；
- 每周末的库存量等于下周初的库存量。



模型建立

周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5

决策变量

$x_1 \sim x_4$: 第1~4周的生产量

$y_1 \sim y_3$: 第1~3周末库存量

存贮费:0.2 (千元/周·千箱)

目标函数

$$\text{Min } z = 5.0x_1 + 5.1x_2 + 5.4x_3 + 5.5x_4 + 0.2(y_1 + y_2 + y_3)$$

产量、库存与需求平衡

$$x_1 - y_1 = 15$$

$$x_2 + y_1 - y_2 = 25$$

$$x_3 + y_2 - y_3 = 35$$

$$x_4 + y_3 = 25$$

能力限制

$$x_1 \leq 30, x_2 \leq 40$$

$$x_3 \leq 45, x_4 \leq 20$$

非负限制

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

约束条件



模型求解

LINDO求解

最优解: $x_1 \sim x_4$: 15, 40, 25, 20;
 $y_1 \sim y_3$: 0, 15, 5.

周次	需求	产量	库存	能力	成本
1	15	15	0	30	5.0
2	25	40	15	40	5.1
3	35	25	5	45	5.4
4	25	20	0	20	5.5

4周生产计划的总费用为528 (千元)



检修计划

- 在4周内安排一次设备检修，占用当周15千箱生产能力，能使检修后每周增产5千箱，检修应排在哪一周？

周次	需求	能力	成本
1	15	30	5.0
2	25	40	5.1
3	35	45	5.4
4	25	20	5.5

检修安排在任一周均可

0-1变量 w_t : $w_t=1$ ~ 检修安排在第 t 周 ($t=1,2,3,4$)

约束条件

产量、库存
与需求平衡
条件不变

能力限制

$$x_1 \leq 30 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 15w_1 \leq 30$$

$$x_2 \leq 40 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 15w_2 \leq 40 + 5w_1$$

$$x_3 \leq 45 \quad \Rightarrow \quad x_3 + 15w_3 \leq 45 + 5w_2 + 5w_1$$

$$x_4 \leq 20 \quad \Rightarrow \quad x_4 + 15w_4 \leq 20 + 5w_1 + 5w_2 + 5w_3$$



检修计划

目标函数不变

0-1变量 w_t ： $w_t=1$ ~ 检修
安排在第 t 周($t=1,2,3,4$)

增加约束条件：检修1次

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$

LINDO求解 最优解： $w_1=1, w_2, w_3, w_4=0$;
 $x_1 \sim x_4$: 15,45,15,25;
 $y_1 \sim y_3$: 0,20,0 .

总费用由528千元降为527千元

检修所导致的生产能力提高的作用，
需要更长的时间才能得到充分体现。