利用 Matlab 近似计算圆周率的若干方法

叶提芳

（武汉工业学院工商学院　湖北·武汉　430065）

摘　要　本文分别采取幂级数展开式的方法、随机数的方法、数值积分的方法和公式法结合 Matlab 程序实现对圆周率的近似计算，分析实验结果，比较每种方法的近似程度的高低，实现了 Matlab 实验和数学理论的很好结合。

关键词　Matlab 实验　圆周率　幂级数　随机数　数值积分

中图分类号：TP312　　　　**文献标识码**：A

Some Methods of Approximatively Calculating Using Matlab Experiments

YE Tifang

(Industrial and Commercial College, Wuhan Polytechnic University, Wuhan, Hubei 430065)

Abstract　In this paper, we used expanding power series, random number, numerical integration and formula methods combining matlab experiments to achieve the approximate value of . Then, we analyzed the experiments results, and compared the degree approximation of every method. It achieved the satisfying results of combination withMatlab experiment and mathematics theory.

Key words　Matlab experiments; ; power series; random number; numerical integration

古今中外，历史上有许多人积极致力于圆周率的研究与计算。我国的刘徽用正 3072 边形得到小数点后的 5 位精度值,Ludolph Van Ceulen 用 2^{62} 正边形得到了小数点后的 35 位精度值。这种方法虽然经典，但相当耗时。20 世纪，很多数学家采取级数来近似计算圆周率的方法，已经能把圆周率近似计算精确到了上亿位，可以说，我们对圆周率的近似计算研究已经相当成熟。本文试在利用 Matlab 实验和高等数学中的知识有机结合起来，分别采取幂级数展开式的方法、随机数的方法、数值积分的方法和公式法结合 Matlab 程序实现对圆周率的近似计算。

1 利用幂级数展开式的计算方法

设$f(x)$是以 2π为周期的周期函数，在[-π,π)上的表达式如下：$f(x)=\begin{cases}\pi, 0\le x<\pi\\ -\pi, -\pi\le x<0\end{cases}$

显然，$f(x)$为奇函数，利用我们在高等数学幂级数一章知识①，可以将其展开为正弦级数为：$f(x)=4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}sin(2n-1)x$

当我们取$x=\frac{\pi}{2}$时，得到一数项级数 $4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$，则有 $4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\pi$，求其部分和为$S_n=4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$，下面我们分别给出$n=1000,10000,50000$ 时，利用 Matlab 程序求得的π的近似值。程序如下：

```
>> s=0;
>> n=50000;
>> digits(22)
>> for k=1:n
s=s+(-1)^(k-1)/(2*k-1);
end
>> s=vpa(4*s,20)
s =
3.1415726535897814387
```

$n=1000,10000,50000$ 时，π的近似值如下：

	$n=1000$	$n=10000$	$n=50000$
s	3.1405926538397941350	3.1414926535900344895	3.1415726535897814387

2 采取随机数的近似计算方法

设一制作均匀的冰激凌可以看做是由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$x^2+y^2+(z-i)^2=1$ 围成②。我们利用积分知识求得它的体积为：$V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\iiint\limits_{\Omega'}r^2\sin\varphi d\theta d\varphi dr=\pi$

其中$\Omega'=\left\{(\theta,\varphi,r)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 2\cos\varphi\right\}$。

我们还可以采取随机数的方法，由于所求锥形体可表示为：$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant z(2-z), x^2+y^2\leqslant z^2\}$，

它位于长方体$G=\{(x,y,z)|-1\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$内部，该长方体体积为 8，往长方体内部随机投点$N$个，然后统计锥形体内的随机点数$m$，则$\frac{\pi}{8}\approx\frac{m}{N}\Rightarrow\pi\approx 8\times\frac{m}{N}$，因为计算结果带有随机性，我们用十次重复的计算作比较，下面为 N 取 100000 时，用 Matlab 近似π的程序：

```
>> for k=1:10
r=rand(100000,3);
x=2*r(:,1)-1;
y=2*r(:,2)-1;
z=2*r(:,3);
fl=x.^2+y.^2;
p(k)=8*sum(fl-z.*z<=0&fl-z.*(2-z)<=0)/100000;
end
>> p
```

运行程序，得到π的近似值如下：

3.1136 3.1200 3.1000 3.1696 3.1560 3.1248 3.1464 3.0920 3.2000 3.1752

当N取 5000000 时，运行程序，得到的π的近似值如下，可见近似程度是较好的：

3.1429 3.1429 3.1437 3.1405 3.1418 3.1397 3.1398 3.1409 3.1432 3.1430

从计算结果看：这种方法虽然简单可行，但收敛的速度慢，距离真实值误差较大。

3 利用定积分$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$近似计算

根据定积分的定义，（积分的结果和区间的分法及ξ_i的取法无关，现在采取特殊分割和特殊取法不影响结果）将区间[0,1]分成n等份，在每个小区间上，选取中点为ξ_i，有

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2}\frac{1}{n}$$

程度如下：

```
>> n=1000;
>> i=0:1/n:1;
>> s=0;
>> for k=1:length(i)-1
s=s+(1/(1+((i(k)+i(k+1))/2)^2))*1/n;
end
>> vpa(4*s,20)
```

运行程序，得到的π的近似值为 3.1415927369231306798，可见，近似程度已经很可观了。

4 其它方法

我们知道$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，… $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}$（$n$重根号），即$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$，由此我们得到韦达公式$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$，据此$\pi=2/(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}\cdots)$，

我们编写 Matlab 程序如下（下面为计算式分母中取前 10 项乘积的程序）：

```
a=sqrt(2);
>> s=1;
>> for i=1:10
s=(s*a)/2;
a1=sqrt(2+a);
a=a1;
end
>> vpa(2/s,20)
```

运行程序，得到结果：3.1415914215111997443。当计算式分母中取前 100 项乘积时，运行程序，得到结果：3.1415926535897932385，可见，这种方法收敛速度快，近似精度高。

注释

① 高纯一，周勇.高等数学[M].上海：复旦大学出版社，2006:249-259.
② 李继成.数学实验[M].北京：高等教育出版社，2006:92.

（上接第 123 页）

声音的世界充满了情感，充满了故事。对孩子们来说，声音是他们生活中不可缺少的重要部分。通过学习和运用各种艺术方法探索声音中的“秘密”，通过感受自然界的声音，运用艺术手段创造声音的教学过程，引发学生对生活中声音的关注和兴趣。让学生自己去生活中发现有哪些声音是高的、低的、长的和短的，养成一种对声音的敏感，喜欢分析声音的习惯。例如，模拟沙子晃动像什么声音？小雨沙沙的声音；双手拍腿像什么声音？马蹄跑的声音。以声音为物质材料，充分利用学生们手中的学具、沙子、报纸等可以发出声音的物品，给学生提供与创设更多的自由参与和艺术活动的机会，让学生创造自己的音乐。例如在七年级上册的《走进大自然》这一单元的“声音的创造与表现”这一课，先让学生朗诵《西江月》这首诗，展开联想，感受诗中有多少种不同的声音，然后再让学生讨论在我们生活中有哪些声音与之相近或自己可以创造出哪些声音与之相近（例如揉报纸的声音、装上沙子的矿泉水瓶的声音等等），让学生从听觉入手去创造音乐。

2.4 发挥即兴创作能力，提供表演舞台，培养创造性思维

即兴创作是指没有任何准备的临时创作。在课堂里让学生自己即兴创作一些简单的旋律并配上律动，这种即兴的自己发挥的旋律，给学生提供发挥想象的空间。当然，即兴创作需要有一定的乐理基础，接触多了自己就能总结出一些经验。即兴创作开始阶段不一定完善，也不一定满意，但总比过去完全是模仿别人现成的东西好。例如在课堂上，教师给学生一首童谣或儿歌，让学生创作旋律，也可以根据歌曲重新填词，选出好听的几首来全班演唱，学生会争相发表自己的作品，并享受创作的乐趣，很有成就感。或者给出几件打击乐器，让学生创编节奏，并且让这几件乐器进行合奏等等。

另外在音乐课中固定一个时间让学生进行才艺表演，例如“精彩十分钟”、“我要上舞台”等等，让每一个学生都有自我表现的机会，只要有自己的理解，有自己的表演内容，都会得到充分肯定和鼓励。有时也可以给出一个表现主题（例如“春天来了”），分组合作，让学生用各种形式来表现这一主题。另外每期末的班级音乐会也是学生们很好的表现机会。学生们经常会有很多的“金点子”大脑当中，鼓励和引导他们把想法行动化，具体化，就必须给他们一个表演的平台，让他们有更多的艺术实践的机会。在班级音乐会上，常常会看到学生自编自导的音乐剧，自创的歌曲等等，这些都充分体现了学生的创造性思维在音乐教学中得到了很好的培养。

3 结束语

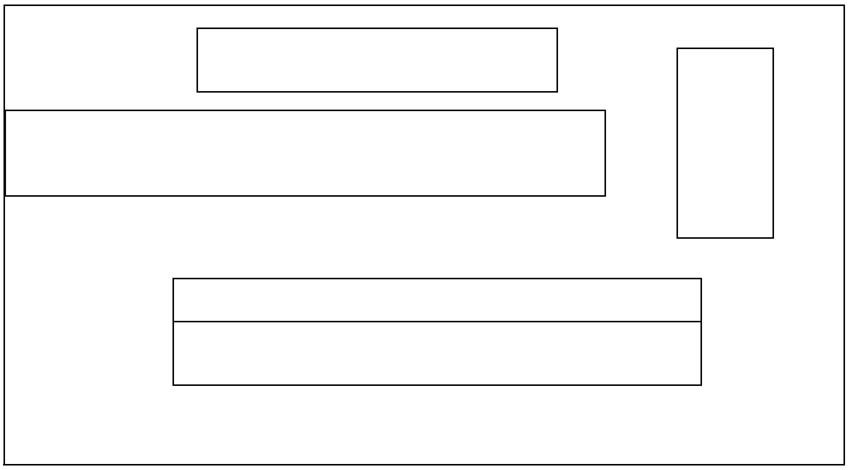
总之，创造性思维并不是虚无的抽象的，创造性与生活结合，与实用性结合才能发挥创造性思维的实际价值，才能使想法变成现实，才能使创意有所产出。让孩子们在音乐的课堂里展开创造的翅膀，飞得更高，飞得更远。

参考文献

[1] 莫晓蓓.教育导刊.2008(Z1)电子杂志.
[2] 邓光华.音乐教育启蒙.贵州人民出版社，2006.9.23.
[3] [美]陈晚.用创造力成就孩子的一生.漓江出版社，2011.6.
[4] 张丽萍.音乐教育中创造力的培养.中国音乐学，2007(5):64-75.

ded

滴



Drdrdr