



# 整数规划



《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码





# 目录

- 1 整数规划模型
- 2 应用举例
- 3 总结与体会





# 整数规划模型





# 整数规划模型

回顾：线性规划模型的一般形式

$$\min(\max)z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i & (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ：可以取非整数的连续值



# 整数规划模型

问题：

决策变量表示人数、个数、是或否呢？

解决：

用整数规划！



# 整数规划模型

整数规划主要分为三类：

- |            |            |
|------------|------------|
| 1) 纯整数规划   | 所有决策变量均取整数 |
| 2) 混合整数规划  | 部分决策变量取整数  |
| 3) 0-1整数规划 | 决策变量只能取0或1 |



# 应用举例





# 应用举例

## 合理下料问题

现有一批长19米的钢管（数量充分多），为制造零件，需将它们截成长为4m, 6m, 8m的管料，并要求三种管料的数量分别为50, 20, 15根，问如何下料最节省？





## 应用举例

合理切割模式：余料小于要求钢管的最小尺寸

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3



# 应用举例

## 决策变量

$x_i$  按第 $i$ 种模式切割的原料钢管的根数

**目标函数：**所用原料钢管总根数最少

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$



## 应用举例

约束条件:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

整数约束:  $x_i$  为正整数

模式	4米根数	6米根数	8米根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	



## 应用举例

数学规划模型如下

---

$$\text{Min } f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\text{s.t. } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

$x_i$  为整数



## 应用举例

model:

Title 钢管下料;

$\min = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7;$

$4*x1 + 3*x2 + 2*x3 + x4 + x5 > 50;$

$x2 + 2*x4 + x5 + 3*x6 > 20;$

$x3 + x5 + 2*x7 > 15;$

@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);@gin(x5);

@gin(x6);@gin(x7);

end



## 应用举例

$x_i$ : 按第 $i$ 种模式切割原料钢管的根数,

$c_{ij}$ : 一根钢管按第 $i$ 种模式切割出第 $j$ 种类型的根数

$b_j$ : 第 $j$ 种类型的需要根数,

$$i=1,\dots,7, \quad j=1,2,3$$

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

改成

$$\min f = \sum_{i=1}^7 x_i$$

$x_i$  为整数



$$s.t. 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

改成

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^7 c_{ij} x_i \geq b_j, j=1,2,3 \\ x_i \text{取整}, i=1,\dots,7 \end{cases}$$

$$b = (50, 20, 15), c = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



model:

sets:

ms/1..7/:x;

sl/1..3/:b;

link(ms,sl):c;

endsets

data:

b=50 20 15;

c= 4 0 0 3 1 0

2 0 1 1 2 0 1 1

1 0 3 0 0 0 2;

enddata

min=@sum(ms:x);

@for(sl(j):@sum(ms(i):c(i,j)\*x(i))>  
b(j));

@for(ms:@gin(x));

end

最优解:  $x_2=15$ ,  $x_5=5$ ,  $x_7=5$

最优值: 25





# 总结与体会





# 总结与体会

- 这道题目可以推广到更一般的情况
- 整数规划在建模上与一般线性规划一样
- 数学规划尽量用能够用段编程的模型，即模型尽量不要出现数字、下标尽可能的多等