用MATLAB求解微分方程

1. 微分方程的解析解

求微分方程（组）的解析解命令:

dsolve(‘方程1’, ‘方程2’,…‘方程n’, ‘初始条件’ , ‘自变量’)

记号: 在表达微分方程时，用字母 D 表示求微分，D2、D3 等表示求高阶微分.任何 D 后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由系统规则选定为确省.(t)

例如，微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 应表达为：D2y=0.

例 1 求 $y' = a y +$ 的通解.

解 输入命令：s=dsolve('Dy=a*y+b')

运行结果：s = -(b-C*exp(a*t))/a

例 2　求微分方程的特解.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 29y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 15 \end{cases}$$

解 输入命令: y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15','x')

运行结果为 : y =3e^{-2x}sin（5x）

例 3 求微分方程组的通解.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y + 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$

解 输入命令：

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z','Dy=4*x-5*y+3*z','Dz=4*x-4*y+2*z', 't');
 x=simple(x)        % 将x化简
y=simple(y)
z=simple(z)
```

运行结果为： $x = (c_1-c_2+c_3+c_2e^{-3t}-c_3e^{-3t})e^{2t}$

$y = -c_1e^{-4t}+c_2e^{-4t}+c_2e^{-3t}-c_3e^{-3t}+c_1-c_2+c_3)e^{2t}$

$z = (-c_1e^{-4t}+c_2e^{-4t}+c_1-c_2+c_3)e^{2t}$

2. 用Matlab求常微分方程的数值解

[t，x]=solver（'f',ts,x_0,options）

自变量值

函数值

ode45
ode23
ode113
ode15s
ode23s

由待解方程写成的m-文件名

ts=[t_0，t_f]，t_0、t_f为自变量的初值和终值

函数的初值

ode23：组合的2/3阶龙格-库塔-芬尔格算法
ode45：运用组合的4/5阶龙格-库塔-芬尔格算法

用于设定误差限(缺省时设定相对误差10^{-3}, 绝对误差10^{-6}),
命令为：options=odeset（'reltol',rt,'abstol',at），
rt，at：分别为设定的相对误差和绝对误差.

注意:

1、在解n个未知函数的方程组时，x_0和x均为n维向量，m-文件中的待解方程组应以x的分量形式写成.

2、使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组.

例 4 $$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-1000(1-x^2)\dfrac{dx}{dt}-x=0\\ x(0)=2;x'(0)=0\end{cases}$$

解： 令 $y_1=x$，$y_2=y_1'$

则微分方程变为一阶微分方程组：

$$\begin{cases}y_1'=y_2\\ y_2'=1000(1-y_1^2)y_2-y_1\\ y_1(0)=2,y_2(0)=0\end{cases}$$

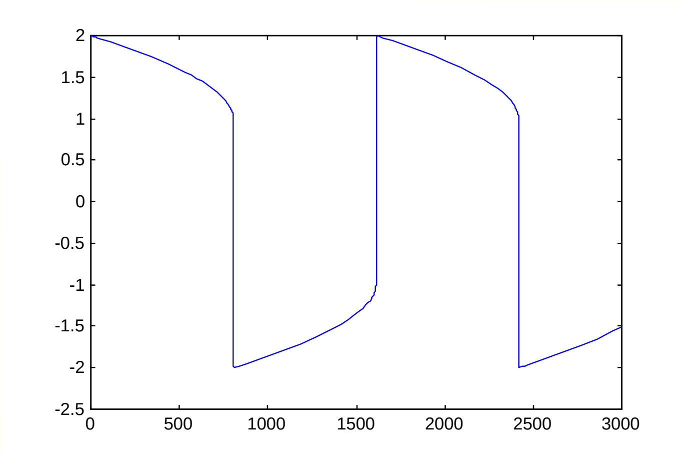
1、建立m-文件vdp1000.m如下：

```
function dy=vdp1000(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

2、取t_0=0，t_f=3000，输入命令：

```
[T,Y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]);
plot(T,Y(:,1),'-')
```

3、结果如图

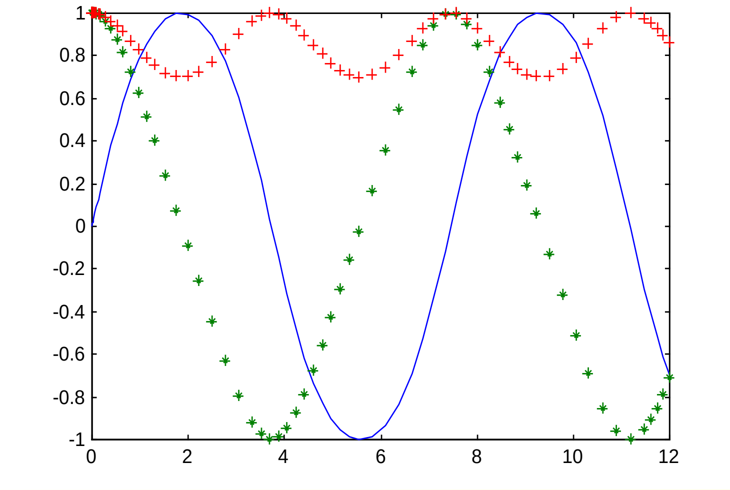


例 5　解微分方程组.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = -y_1 y_3 \\ y_3' = -0.51 y_1 y_2 \\ y_1(0)=0, y_2(0)=1, y_3(0)=1 \end{cases}$$

解　1、建立m-文件rigid.m如下：

```
function dy=rigid(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2)*y(3);
dy(2)=-y(1)*y(3);
dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
```



2、取t_0=0，t_f=12，输入命令：

```
[T,Y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3),'+')
```

3、结果如图

图中，y_1的图形为实线，y_2的图形为“*”线，y_3的图形为“+”线.

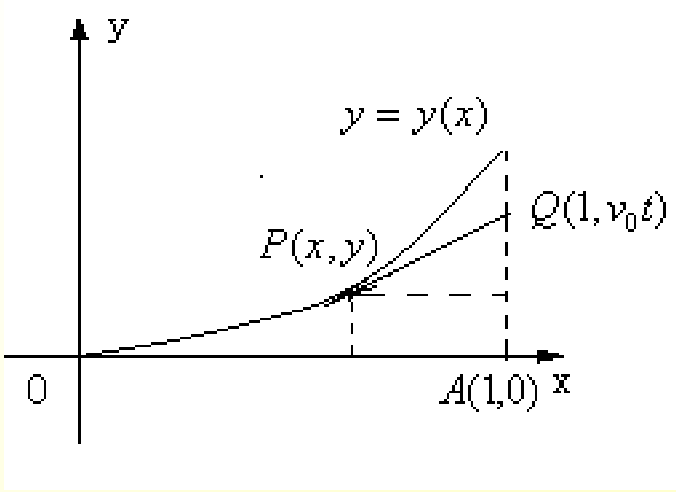
导弹追踪问题

设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点A(1, 0)处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准乙舰.如果乙舰以最大的速度v_0(是常数)沿平行于y轴的直线行驶，导弹的速度是$5v_0$，求导弹运行的曲线方程.又乙舰行驶多远时，导弹将它击中?

解法一（解析法）

假设导弹在 t 时刻的位置为 P(x(t), y(t))，乙舰位于$Q(1, v_0 t)$.

由于导弹头始终对准乙舰，故此时直线 PQ 就是导弹的轨迹曲线弧 OP 在点 P 处的切线，



即有 $$y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x}$$

即 $$v_0 t = (1 - x)y' + y \quad (1)$$

又根据题意，弧 OP 的长度为$|AQ|$的 5 倍，

即 $$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 5v_0 t \quad (2)$$

由(1),(2)消去t整理得模型:

$$(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2} \qquad (3)$$

初值条件为: $y(0)=0 \quad y'(0)=0$

解即为导弹的运行轨迹:

$$y=-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24}$$

当 $x=1$ 时 $y=\dfrac{5}{24}$, 即当乙舰航行到点 $(1, \dfrac{5}{24})$ 处时被导弹击中.

被击中时间为: $t=\dfrac{y}{v_0}=\dfrac{5}{24v_0}$. 若 $v_0=1$, 则在 t=0.21 处被击中.

解法二(数值解)

令y_1=y,y_2=y_1’，将方程（3）化为一阶微分方程组。

$$(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'_1=y_2 \\ y_2'=\frac{1}{5}\sqrt{1+y_1^2}/(1-x) \end{cases}$$

1.建立m-文件eq1.m

```
function dy=eq1(x,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1/5*sqrt(1+y(1)^2)/(1-x);
```

2. 取x_0=0，x_f=0.9999，建立主程序ff6.m如下:

```
x0=0，xf=0.9999
[x,y]=ode15s('eq1',[x0 xf],[0 0]);
plot(x,y(:,1),'b.')
hold on
y=0:0.01:2;
plot(1,y,'b*')
```

结论：导弹大致在（1，0.2）处击中乙舰

解法三(建立参数方程求数值解)

设时刻t乙舰的坐标为(X(t)，Y(t))，导弹的坐标为(x(t)，y(t)).

1．设导弹速度恒为 w，则 $(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=w^2$ （1）

2. 由于弹头始终对准乙舰，故导弹的速度平行于乙舰与导弹头位置的差向量，

即： $\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X-x\\Y-y\end{pmatrix}$， $\lambda>0$ （2）

消去λ得： $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{w}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}(X-x)\\\frac{dy}{dt}=\frac{w}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}(Y-y)\end{cases}$ （3）

3．因乙舰以速度v0沿直线x=1运动，设v0=1，则w=5，X=1，Y=t

因此导弹运动轨迹的参数方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}}(1-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{5}{\sqrt{(1-x)^2 + (t-y)^2}}(t-y) \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

4. 解导弹运动轨迹的参数方程

建立m-文件eq2.m如下：

```
function dy=eq2(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=5*(1-y(1))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);
dy(2)=5*(t-y(2))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);
```

取t_0=0，t_f=2，建立主程序chase2.m如下:

```
[t,y]=ode45('eq2',[0 2],[0 0]);
Y=0:0.01:2;
plot(1,Y,'-'),  hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
```

当 $x=1$ 时 $y=\dfrac{5}{24}$，即当乙舰航行到点 $(1,\ \dfrac{5}{24})$ 处时被导弹击中.

被击中时间为:$t=\dfrac{y}{v_0}=\dfrac{5}{24v_0}$. 若 $v_0=1$, 则在 $t=0.21$ 处被击中.

轨迹图如下