穿越沙漠的最优策略

刘海霞
数学与统计学院

大纲

- 回顾穿越沙漠的问题
- 问题一的分析、建模和求解
- 问题二的分析、建模和求解
- 问题三第一部分的分析、建模和求解
- 问题三第二部分的分析、建模和求解

01
问题背景与要求

- 问题重述
- 问题假设
- 变量说明

穿越沙漠的问题

游戏的目标：玩家在获得沙漠地图，并在起点用初始资金以基准价格买好水和食物后，从第一天开始在沙漠中行走，目标在游戏结束前到达终点，并剩余尽量多的资金。

游戏的规则：

- 参与者携带的生活必需品重量不能超过负重上限,到达终点前不能耗尽生活必需品(耗尽认为游戏失败),
- 可以相邻两个区域之间行走(2倍基耗)，或原地停留(1倍基耗),
- 附件地图中，有公共边界的两个区域称为相邻，仅有公共顶点而没有公共边界的两个区域不视作相邻,
- 沙漠中共晴朗、高温、沙暴三种天气，沙暴必须停留,
- 经过村庄，可以补给装备，价格是基准价格的两倍,
- 经过矿山可以挖矿赚取资金(3倍基耗),沙暴日也可挖矿
- 参与者可以起点停留或返回起点，但不能多次在起点补给,
- 到终点若要退回剩余生活必需品，价格为基准价格的一半。

资金获取

- 初始资金
- 挖矿赚取资金
- 终点退回资金

补给资金消耗（基础价格）

- 起点购买（1倍）
- 村庄补给（2倍）

生活必需品消耗（基础消耗）

- 行走（2倍）
- 原地停留（1倍）
- 挖矿（3倍）

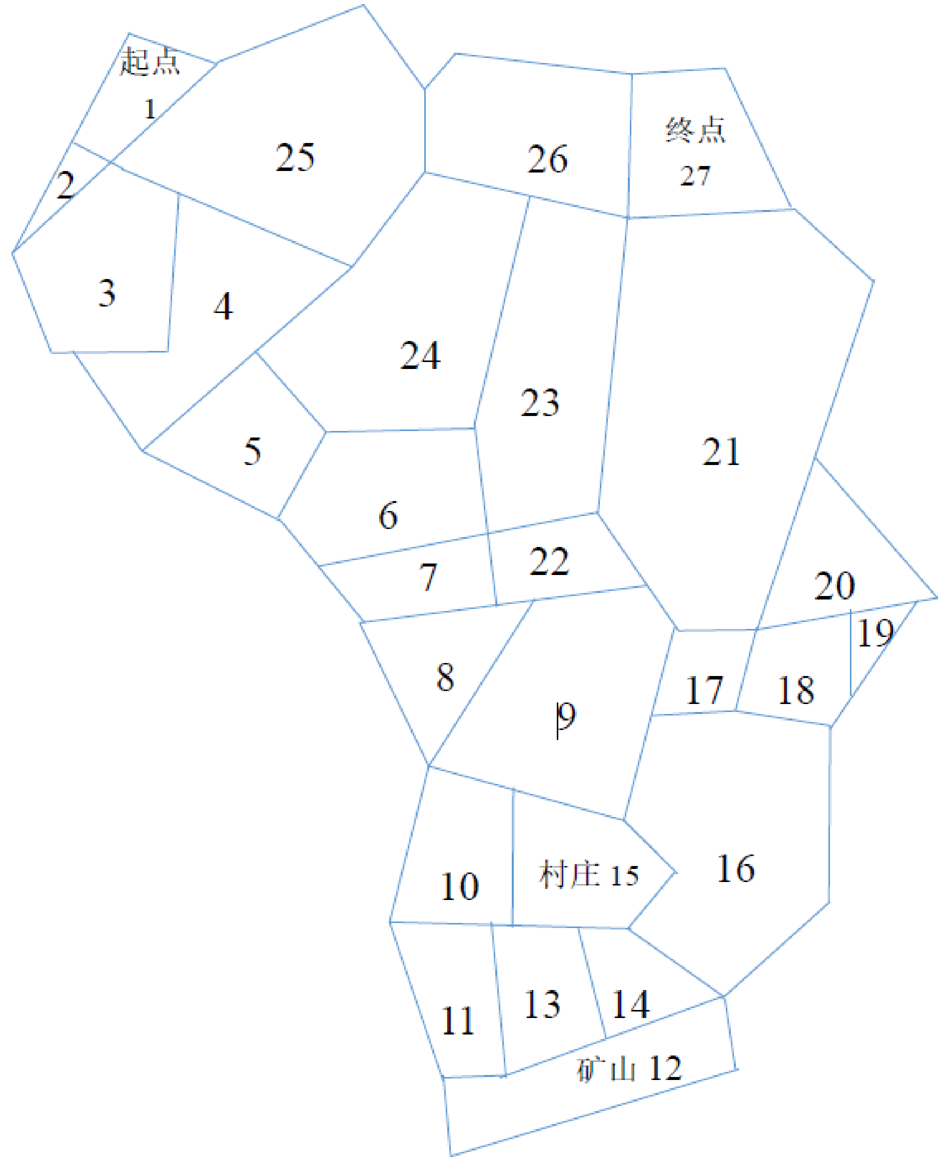
问题一

- 假设只有一名玩家，在整个游戏时段内每天天气状况事先全部已知，试给出一般情况下玩家的最优策略。

第一关天气和地图

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

日期	1	2	3	4	5
天气	高温	高温	晴朗	沙暴	晴朗
日期	6	7	8	9	10
时间	高温	沙暴	晴朗	高温	高温
日期	11	12	13	14	15
天气	沙暴	高温	晴朗	高温	高温
日期	16	17	18	19	20
时间	高温	沙暴	沙暴	高温	高温
日期	21	22	23	24	25
天气	晴朗	晴朗	高温	晴朗	沙暴
日期	26	27	28	29	30
时间	高温	晴朗	晴朗	高温	高温



问题一的分析

挖矿基础收益	资源	基准价格(元/箱)	基础消耗量		
			晴朗	高温	沙暴
1000	水	5	5	8	10
	食物	10	7	6	10

- 若参与者在矿山挖矿一天，则这天将多消耗一部分水和食物，又晚一天到终点;

矿山挖矿必获得收益

$$P_1 \geq P_B - 沙暴 - 2 \times 沙暴 - 2 \times 高温$$
$$= 1000 - 3 \times (5 \times 10 + 10 \times 10) - 2 \times (5 \times 8 + 10 \times 6)$$
$$= 350 > 0.$$

- 若参与者在其他地点停留,则消耗增加。

除矿山外，其他地点停留必定亏损

$$C_1 \geq 1 \times 高温 + 2 \times 晴朗 - 2 \times 高温$$
$$= 2 \times (5 \times 5 + 10 \times 7) - (5 \times 8 + 10 \times 6) = 90.$$

- 沿最短路径行走到终点所需购买的**生活必需品数量较少**
- 在矿山停留挖矿能够**赚取更多资金**

获取最佳策略的最优化模型

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

- $T_{\max}$ – 截至时间, end是终点编号，
- $T_0 = 1,2,\cdots,T_{\max}$ – 到达终点所需要的天数,
- $R(i,t)$ – 参与者第t天在第i个节点资金的剩余量

目标函数：到终点剩余资金最多

$$\max R(\text{end}, T_0)$$

约束条件1：参与者在截至日前到达终点

$$T_0 \le T_{\max}.$$

- $W(i,t)$ – 参与者第t天在第i个节点水的剩余量
- $F(i,t)$ – 参与者第t天在第i个节点食物的剩余量

- M_0 – 初始资金，起点处购买完物资后的剩余资金

$$M_1 = M_0 - [P_W \times W(1,0) + P_F \times F(1,0)].$$

获取最佳策略的最优化模型

约束条件2：生活必需品的数量不能超过负重上限

$$M_W W(i,t) + M_F F(i,t) \le M, i = 1,2,\cdots,\mathrm{end}, t = 0,1,\cdots,T_0.$$

- 终点处退回多余生活必需品会带来损失，终点的最佳策略水和食物刚好消耗完

约束条件3：终点处水和食物刚好消耗完

$$\begin{cases} W(\mathrm{end},T_0) = 0, \\ F(\mathrm{end},T_0) = 0. \end{cases}$$

要不要挖矿?

递推关系式

- 设参与者第t天在第i个节点，第$t+1$天在第j个节点，$j \in S_i$（S_i为的i后续节点的集合），$B_W(t)$ –第t天水的基础消耗，$B_F(t)$ –第t天食物的基础消耗, 则

- **向前行走时水和食物剩余量**

$$\begin{cases} W(j,t+1) = W(i,t) - 2B_W(t) \\ F(j,t+1) = F(i,t) - 2B_F(t) \end{cases}.$$

- **向前行走时剩余资金保持不变**

$$R(j,t+1) = R(i,t).$$

- **沙暴原地停留时水和食物剩余量**

$$\begin{cases} W(j,t+1) = W(i,t) - B_W(t) \\ F(j,t+1) = F(i,t) - B_F(t) \end{cases}.$$

- **沙暴原地停留时剩余资金保持不变**

$$R(j,t+1) = R(i,t).$$

递推关系式

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

- 矿山挖矿时水和食物剩余量

$$\begin{cases} W(j,t+1) = W(i,t) - 3B_W(t) \\ F(j,t+1) = F(i,t) - 3B_F(t) \end{cases}.$$

- 矿山挖矿时赚取一定量的基础收益

$$R(j,t+1) = R(i,t) + P_B.$$

- 村庄补给时水和食物剩余量

$$\begin{cases} W(j,t+1) = W(i,t) - 2B_W(t) + m_1 \\ F(j,t+1) = F(i,t) - 2B_F(t) + m_2 \end{cases}.$$

m_1,m_2为水和食物在村庄的补给量

- 村庄补给时需要消耗资金

$$R(j,t+1) = R(i,t) - 2(P_W m_1 + P_F m_2).$$

模型求解（不挖矿）

选择最短路径到达终点。设从起点到终点的最短路径$d(1,\text{end})$，

$$w(t)=\begin{cases}0, 第t天晴朗\\1, 第t天高温\\2, 第t天沙暴\end{cases}$$

则起点到终点所需天数 $T_0=d(1,\text{end})+\sum_{t=1}^{T_0}\mathbb{I}[w(t)=2]$

第t天水和食物的基础消耗

$$B_W(t)=\begin{cases}5, w(t)=0\\8, w(t)=1\\10, w(t)=2\end{cases},\quad B_F(t)=\begin{cases}7, w(t)=0\\6, w(t)=1\\10, w(t)=2\end{cases}$$

起点所需购买的水和食物的箱数

$$W(1,0)=\sum_{i=1}^{T_0}B_W(t)(2-\mathbb{I}[w(t)=2]),F(1,0)=\sum_{i=1}^{T_0}B_F(t)(2-\mathbb{I}[w(t)=2])$$

资金剩余量 $R(\text{end},T_0)=M_0-[P_W\times W(1,0)+P_F\times F(1,0)].$

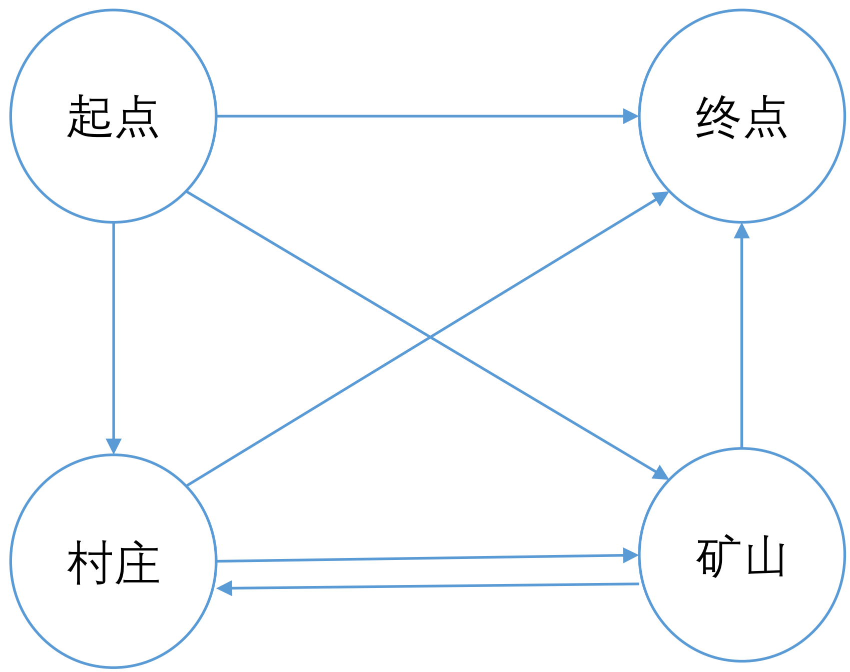
模型求解（挖矿）

需要考虑的问题：

- 挖矿需要考虑在矿山停留几天，
- 需不需要到村庄采买，是先到村庄还是挖矿之后再去村庄
- 最笨的办法：遍历所有路径，取最优。

（可行吗？？？）

- 关键节点：起点、村庄、矿山、终点。
- 遍历关键节点，取最优。



问题二

- 假设只有一名玩家，玩家仅知道当天的天气状况，可据此决定当天的行动方案，试给出一般情况下玩家的最佳策略，并对附件中的“第三关”和“第四关”进行具体讨论。

问题二的分析

- 从全局来看，全局的天气因素影响玩家的全局策略，
- 玩家仅知道当天的天气，可以先规划一个大致的行走目标，
- 然后根据每天的天气以及预测未来天气及时调整自己的策略。
- **任务1**：根据当天天气来预测未来天气
  - 数据：关卡一、关卡二的天气情况，
  - 分析每种天气出现的概率，
  - 分析每种天气状态相互跳转以及维持原天气的概率（转移概率矩阵）。

马尔可夫链

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

关卡一、关卡二30天天气状况表格										
日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气	高温	高温	晴朗	沙暴	晴朗	高温	沙暴	晴朗	高温	高温
日期	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
天气	沙暴	高温	晴朗	高温	高温	高温	沙暴	沙暴	高温	高温
日期	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
天气	晴朗	晴朗	高温	晴朗	沙暴	高温	晴朗	晴朗	高温	高温

我们发现：

- 天气状态数是有限的，包括晴朗、高温和沙暴三种，
- 天气状态之间可以任意转变，
- 天气状态之间的跳转不是一个简单的循环，
- 利用上述表格可以给定天气之间的转移概率。

因此，该问题满足马尔可夫链收敛的四大条件，我们能可以选择马尔可夫链模型预测未来天气。

马尔可夫链收敛性定理

引理6.3 设P是一个n阶本原随机矩阵，则当$k \to \infty$时，P^k收敛到一个正的稳定随机矩阵

$$P^{\infty} = \lim_{k \to \infty} P^k = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$$

其中$(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$是满足下列方程的唯一解：

$$(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)P = (\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$$

其中$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1, \pi_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$

马尔可夫链天气预测模型

设随机变量$w_n \in \{1,2,3\}$为第n天的天气状态，其中1代表晴朗天气，2代表高温天气，3代表沙暴天气。

任务：通过关卡一、关卡二中的天气状况来预测转移概率

$$P_{ij} = P(w_{n+1} = j | w_n = i).$$

关卡一、关卡二30天天气状况表格

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气	高温	高温	晴朗	沙暴	晴朗	高温	沙暴	晴朗	高温	高温
日期	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
天气	沙暴	高温	晴朗	高温	高温	高温	沙暴	沙暴	高温	高温
日期	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
天气	晴朗	晴朗	高温	晴朗	沙暴	高温	晴朗	晴朗	高温	高温

晴朗到晴朗2次，晴朗到高温5次，晴朗到沙暴2次，
高温到晴朗5次，高温到高温6次，高温到沙暴3次，
沙暴到晴朗2次，沙暴到高温3次，沙暴到沙暴1次。

天气状态转移概率

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

令$\pi_n(i)=P(w_n=i)$, 则

$$\pi_{n+1}(j)=\sum_i P_{ij}\pi_n(i).$$

写成矩阵形式

$$\pi_{n+1}=\pi_n P.$$

根据马尔可夫链收敛规则，我们可以设置任意合理的初始情况，迭代上述转移矩阵，可以得到收敛值。 即，各个天气状况的概率。

决策收益模型

设W_m为第m个有序天气序列，其存在的概率P_{W_m}，在此天气序列下的决策收益为C_{W_m}，则最佳决策的数学期望为

$$E_{\max} = \sum_{m} P_{W_m} C_{W_m} .$$

设$W_m = \left(w_1^{(m)}, w_2^{(m)}, \cdots, w_n^{(m)}\right)$,则

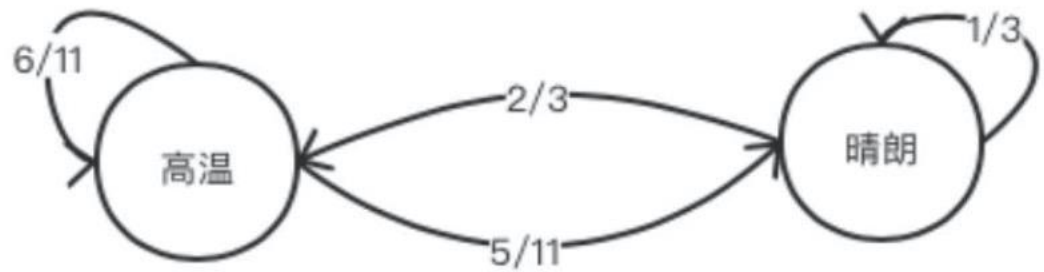
$$P_{W_m} = P\left(w_1^{(m)}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} P\left(w_j^{(m)}, w_{j+1}^{(m)}\right).$$

C_{W_m}可以通过第一问的方法求解得到。

第三、四关卡

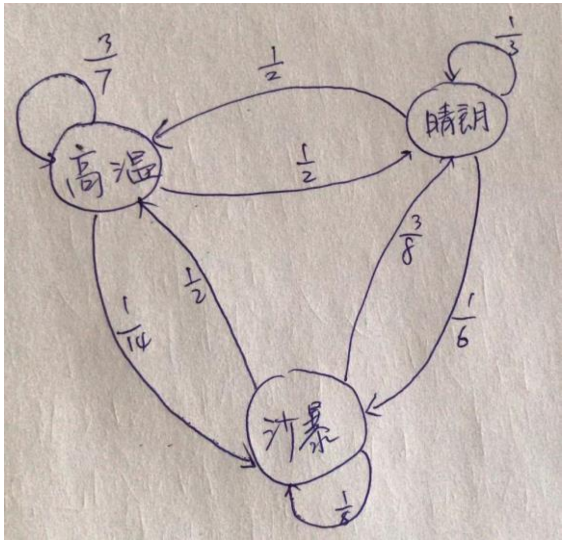
第三关卡天气要求：

玩家仅知道当天的天气状况，但已知10天内不会出现沙暴天气。



第四关卡天气要求：

玩家仅知道当天的天气状况，但已知30天内较少出现沙暴天气。



问题三

- 现有n名玩家，他们有相同的初始资金，且同时出发。

  若某天其中的任意$k(2 \le k \le n)$名玩家均从区域A行走到区域B（A，B不同），则他们中的任一位消耗的资源数量均为基础消耗的$2k$倍；

  若某天其中的任意$k(2 \le k \le n)$名玩家在同一矿山挖矿，则他们中的任一位消耗的资源数量均为基础消耗的3倍，且每名玩家一天可通过挖矿获得的资金是基础收益的$^1/_k$；

  若某天其中的任意$k(2 \le k \le n)$名玩家在同一村庄购买资源，每箱价格均为基准价格的4倍。其他情况下消耗资源数量与资源价格与单人游戏相同。

问题三第一部分

假设在整个游戏时段内每天天气状况事先全部已知，每名玩家的行动方案需在第0天确定且此后不能更改。试给出一般情况下玩家应采取的策略，并对附件中的“第五关”进行具体讨论。

玩家个数：$n = 2$

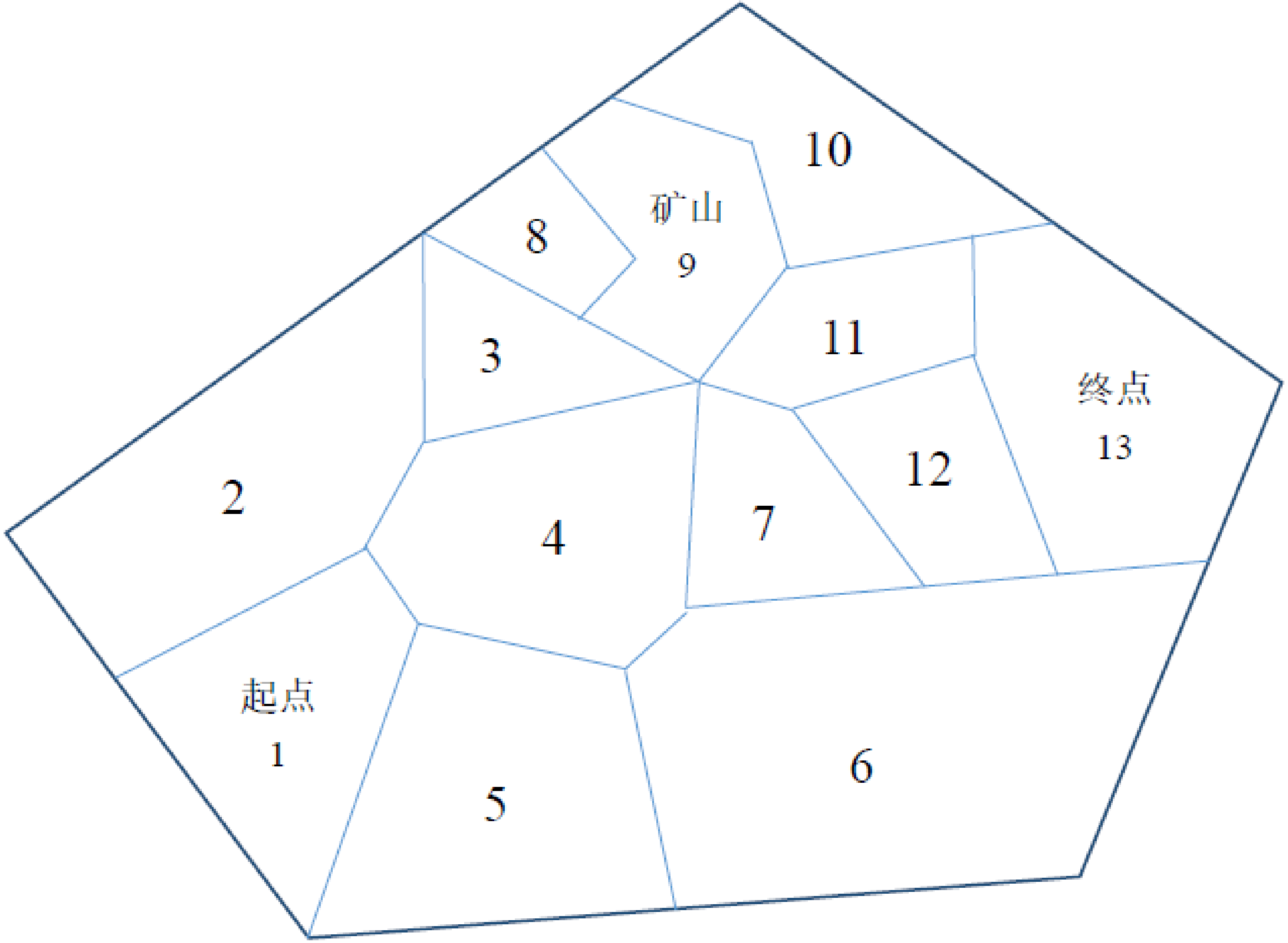
参数设定：

负重上限		1200千克	初始资金	10000元	
截止日期		第10天	基础收益	200元	
资源	每箱质量（千克）	基准价格（元/箱）	基础消耗量（箱）		
			晴朗	高温	沙暴
水	3	5	3	9	10
食物	2	10	4	9	10

天气状况：

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气	晴朗	高温	晴朗	晴朗	晴朗	晴朗	高温	高温	高温	高温

地图



问题三第一部分分析

华中科技大学 HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

- 游戏属于多人游戏，且玩家之间会产生影响，
- 10天的天气情况已知。

如何求解?

- **回顾**：问题一中为单人游戏在已知天气的情况下给出玩家从起点到终点的最大收益。
- **可不可以仿照**问题一，为多人游戏在已知天气的情况下给出玩家从起点到终点的最大平均收益?

设第t天玩家从点i到其邻接点j的水和食物的平均消耗为$\bar{L}(i,j,t)$，挖矿所得的平均资金为$\bar{M}(i,j,t)$、村庄购买的平均金额为$\bar{V}(i,j,t)$. 则第t天玩家从点i到其邻接点j的平均净收益为

$$\bar{E}(i,j,t)=\bar{M}(i,j,t)-\bar{L}(i,j,t)-\bar{V}(i,j,t).$$

问题三第一部分分析

设第t天玩家从点i到其邻接点j的转移概率为$P_{i,j}^{(t)}$，
设第t天单人从点i到其邻接点j的消耗为$L(i,j,t)$,则水和食物的平均消耗为$\bar{L}(i,j,t)$，

$$\bar{L}(i,j,t)=\begin{cases}2\times L(i,j,t)\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(P_{ij}^{(t)}\right)^l\left(1-P_{ij}^{(t)}\right)^{n-l}l, & i\neq j,\\ L(i,j,t), & i=j，\text{不挖矿}.\\ 3\times L(i,j,t), & i=j，\text{挖矿}.\end{cases}$$

设挖矿的基础收益为M, 则挖矿所得的平均资金为$\bar{M}(i,j,t)$为

$$\bar{M}(i,j,t)=\begin{cases}M\sum_{l=1}^{n}C_n^l\left(P_{ij}^{(t)}\right)^l\left(1-P_{ij}^{(t)}\right)^{n-l}\cdot\frac{1}{l}, & i=j=\text{矿山}\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

设村庄购买的基准价格为V, 则资金村庄购买的平均金额为$\bar{V}(i,j,t)$

- j为村庄

$$\bar{V}(i,j,t) = V \cdot \left[4 \cdot \left(1 - C_n^1 \left(P_{ij}^{(t)}\right)^1 \left(1 - P_{ij}^{(t)}\right)^{n-1} - \left(1 - P_{ij}^{(t)}\right)^n\right) + 2 \cdot C_n^1 \left(P_{ij}^{(t)}\right)^1 \left(1 - P_{ij}^{(t)}\right)^{n-1}\right]$$

- j不是村庄

$$\bar{V}(i,j,t) = 0.$$

如何定义转移概率$P_{ij}^{(t)}$？

我们可以用第t天节点i到达终点的最大收益作为势函数，根据相邻节点的势函数来确定处于i点的玩家到达相邻节点j的转移概率.

- 设第t天从i点出发携带w箱水和f箱食物时的势函数为$H_{\max}^{w,f,t,i}$
- 设点i的邻点组成的集合为S_i. 令$j \in S_i$, 则点i到j的转移概率

$$P_{ij}^{(t)} = \frac{H_{\max}^{w,f,t,j}}{\sum_{q \in S_i} H_{\max}^{w,f,t,q}}$$

谢谢！