

# 0-1规划模型

《美国数学建模竞赛》  
完整课程请长按下方二维码





# 目录 CONTENTS

1. 0-1规划模型
2. 案例分析
3. 小结





# 1. 0-1规划模型

整数  
规划:

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \text{整数}, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \text{整数}, j = 1, \dots, n$$

若决策变量

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{被选} \\ 0 & \text{没选} \end{cases}$$

“1” 表示被选中,  
“0” 表示没选中,

称为**0-1整数规划**。





# 1. 0-1规划模型

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{被选} \\ 0 & \text{没选} \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ 0 \leq x_j \leq 1, \text{整数}, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

决策变量 $x_j$ 称为**0-1型**变量，或二进制变量。





## 2. 案例分析--指派问题

某班准备从5名队员中选4人组成接力队，参加学校的 $4 \times 100\text{m}$ 混合泳接力比赛，5名队员4种泳姿的百米平均成绩如表，问如何选拔队员组成 $4 \times 100\text{m}$ 接力队。

| 队员<br>项目 | 甲      | 乙      | 丙      | 丁      | 戊      |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 蝶泳       | 1'06"8 | 57"2   | 1'18"  | 1'10"  | 1'07"4 |
| 仰泳       | 1'15"6 | 1'06"  | 1'14"2 | 1'14"2 | 1'11"  |
| 蛙泳       | 1'27"  | 1'06"4 | 1'09"6 | 1'09"6 | 1'23"8 |
| 自由泳      | 58"6   | 53"    | 59"4   | 57"2   | 1'02"4 |





# 决策变量及符号:

$c_{ij}$ : 队员  $i$  选择第  $j$  个泳姿的成绩,  $i=1, 2, 3, 4, 5$ ;  $j=1, 2, 3, 4$

| $c_{ij}$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=5$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $j=1$    | 66.8  | 57.2  | 78    | 70    | 67.4  |
| $j=2$    | 75.6  | 66    | 74.2  | 74.2  | 71    |
| $j=3$    | 87    | 66.4  | 69.6  | 69.6  | 83.8  |
| $j=4$    | 58.6  | 53    | 59.4  | 57.2  | 62.4  |

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{队员 } i \text{ 选择第 } j \text{ 个泳姿} \\ 0 & \text{队员 } i \text{ 不选第 } j \text{ 个泳姿} \end{cases}$$





# 模型建立:

目标函数: 总成绩  $f$  最好  $\longleftrightarrow$  游泳耗时最短

$$\min f = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \quad c_{i1}x_{i1} + c_{i2}x_{i2} + c_{i3}x_{i3} + c_{i4}x_{i4}$$

约束条件:

1. 每个队员最多选择一种泳姿: 注意: 这个地方与视频不一样, 但都是对的

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \leq 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \leq 1$$



$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$





# 模型建立:

每种泳姿有且仅有一人:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$



$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$







# 模型建立:

$$\min f = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq 1 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \text{ 整数} \\ i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$





# 模型求解 (Lingo软件) :

## 集合段:

sets:

swim/1..4/;

member/1..5/;

match(member,swim):c,x;

endsets

## 数据段:

data:

|        |      |      |      |
|--------|------|------|------|
| c=66.8 | 57.2 | 78   | 70   |
|        | 67.4 |      |      |
| 75.6   | 66   | 74.2 | 74.2 |
|        | 71   |      |      |
| 87     | 66.4 | 69.6 | 69.6 |
|        | 83.8 |      |      |
| 58.6   | 53   | 59.4 | 57.2 |
|        | 62.4 |      |      |

enddata





# 模型求解（Lingo软件）：

## 程序段：

```
min=@sum(match:c*x);
```

```
@for(swim(i):@sum(member(j):x(i,j))=1);
```

```
@for(member(j):@sum(swim(i):x(i,j))<1);
```

```
@for(match:@bin(x));
```

**最优解：**  $x_{14} = x_{21} = x_{32} = x_{43} = 1$  ， 其它变量为0。

**总成绩**  $f=253.2\text{秒}=4'13''2$ 。





# 模型求解（Lingo软件）：

甲~自由泳，乙~蝶泳，丙~仰泳，丁~蛙泳。

| 队员  | 甲       | 乙       | 丙       | 丁       | 戊       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 蝶泳  | 1'06''8 | 57''2   | 1'18''  | 1'10''  | 1'07''4 |
| 仰泳  | 1'15''6 | 1'06''  | 1'14''2 | 1'14''2 | 1'11''  |
| 蛙泳  | 1'27''  | 1'06''4 | 1'09''6 | 1'09''6 | 1'23''8 |
| 自由泳 | 58''6   | 53''    | 59''4   | 57''2   | 1'02''4 |





### 3. 小结

若干项任务，每项任务必须有且有一人承担，每人只能承担一项，不同成员承担不同的任务效益（或者成本不同），怎样分配各项任务使总效益最大（成本最低）。

人员数量和任务数量相等；

人员数量多于任务数量；（本例）

人员数量少于任务数量。

**建立0-1整数规划模型是常用的方法。**

