附录Ⅰ　矩阵代数基本知识

矩阵和行列式是研究多元统计分析的重要工具，这里针对本书的需要，对有关矩阵代数的基本知识作回顾性的介绍，其中有些内容是过去教学计划中没有涉及到的。

一、 向量矩阵的定义

将 $n\times p$ 个实数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1p},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2p},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{np}$ 排成如下形式的矩形数表，记为 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 $n\times p$ 阶矩阵，一般记为 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times p}$，称 a_{ij} 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素。当 $n=p$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵；若 $p=1$，$\mathbf{A}$ 只有一列，称其为 n 维列向量，记为

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

若 $n=1$，$\mathbf{A}$ 只有一行，称其为 p 维行向量，记为

$$\left(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1p}\right)$$

当$\mathbf{A}$为n阶方阵，称$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$为$\mathbf{A}$的对角线元素，其它元素称为非对角元素。若方阵$\mathbf{A}$的非对角元素全为$0$，称$\mathbf{A}$为对角阵，记为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

进一步，若$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，称$\mathbf{A}$为$n$阶单位阵，记为$\mathbf{I}_n$或$\mathbf{A}=\mathbf{I}$。

如果将$n\times p$阶矩阵$\mathbf{A}$的行与列彼此交换，得到的新矩阵是$p\times n$的矩阵，记为

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

称其为矩阵$\mathbf{A}$的转置矩阵。

若$\mathbf{A}$是方阵，且$\mathbf{A}'=\mathbf{A}$，则称$\mathbf{A}$为对称阵； 若方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，当对一切$i<j$元素$a_{ij}=0$，则称

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为下三角阵；若$\mathbf{A}'$为下三角阵，则称$\mathbf{A}$为上三角阵。

二、 矩阵的运算

1．对 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times p}$ 与 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$ 的和定义为：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times p}$$

2．若 a 为一常数，它与矩阵 $n\times p$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的积定义为：

$$a\mathbf{A}=(aa_{ij})_{n\times p}$$

3．若 $\mathbf{A}=(a_{ik})_{p\times q}$， $\mathbf{B}=(b_{kj})_{q\times n}$，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的积定义为：

$$\mathbf{AB}=(\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj})_{p\times n}$$

根据上述矩阵加法、数乘与乘的运算，容易验证下面运算规律：

1．加法满足结合律和交换律

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

2．乘法满足结合律

$$(a\beta)\mathbf{A}=a(\beta\mathbf{A})\text{，}\quad a(\mathbf{AB})=(a\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(a\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

3．乘法和加法满足分配律

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}\text{，}\quad (a+\beta)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\text{，}\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

4．对转置运算规律

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'\text{，}\quad (a\mathbf{A})'=(a\mathbf{A}')$$

$$(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'\text{，}\quad (\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$$

另外，若 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{AA}'=\mathbf{I}$，则称 $\mathbf{A}$ 为正交阵。

三、 矩阵分块

对于任意一个 $n \times p$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$，可以用纵线和横线按某种需要将它们划分成若干块低阶的矩阵，也可以看作是以所分成的子块为元素的矩阵，称为分块矩阵，即：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

写成

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}_{11} = (a_{ij})_{n_1 \times p_1}$， $\mathbf{A}_{12} = (a_{ij})_{n_1 \times p_2}$， $\mathbf{A}_{21} = (a_{ij})_{n_2 \times p_1}$， $\mathbf{A}_{22} = (a_{ij})_{n_2 \times p_2}$，且 $n_1 + n_2 = n$， $p_1 + p_2 = p$。

分块矩阵也满足平常矩阵的加法、乘法等运算规律。不难证明：

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{12} \\ \mathbf{A}'_{21} & \mathbf{A}'_{22} \end{pmatrix}。$$

四、 方阵行列式的性质

一个 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 中的元素组成的行列式，称为方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式记为 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$。它有以下我们熟知的性质：

1．若 $\mathbf{A}$ 的某行（或列）为零，则 $|\mathbf{A}| = 0$；

2． $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$；

3．将 $\mathbf{A}$ 的某行（或列）乘以数 c 所得的矩阵的行列式等于 $c|\mathbf{A}|$；

4．若 $\mathbf{A}$ 是一个 n 阶方阵， c 为一常数，则 $|c\mathbf{A}| = c^n |\mathbf{A}|$

5．若 $\mathbf{A}$ 的两行（或列）相同，则 $|\mathbf{A}| = 0$；

6．若将 $\mathbf{A}$ 的两行（两列）互换所得矩阵的行列式等于 $-|\mathbf{A}|$；

7．若将 $\mathbf{A}$ 的某一行（或列）乘上一个常数后加到另一行相应的元素上，所得的矩阵的行列式不变，仍等于 $|\mathbf{A}|$；

8．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$；

9．若 $\mathbf{A}$ 为上三角矩阵或下三角矩阵或对角矩阵，则 $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

10．$|\mathbf{AA}'| \geq 0$

11．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是方阵，则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

12．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是 $n \times p$ 和 $p \times n$ 的矩阵，则

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I}_p + \mathbf{BA}|$$

五、 逆矩阵

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，则称 $\mathbf{A}$ 是非退化阵或称非奇异阵，若 $|\mathbf{A}| = 0$，则称 $\mathbf{A}$ 是退化阵或称奇异阵。

若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶非退化阵，则存在唯一的矩阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$，$\mathbf{B}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，记为 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$。 逆矩阵的基本性质如下：

1． $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

2． $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$

3．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均为 n 阶非退化阵，则

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

4． 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非退化阵，$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$ 为 n 维列向量，则方程：

$$\mathbf{Ab} = \mathbf{a}$$

的解为

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$$

5． $\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{A}\right|^{-1}$

6．若 $\mathbf{A}$ 是正交阵，则

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$$

7．若 $\mathbf{A}$ 是对角阵， $\mathbf{A} = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ 且 $a_{ij} \neq 0$， $i = 1, \cdots, p$ ，则 $\mathbf{A}^{-1} = diag(a_{11}{}^{-1}, a_{22}{}^{-1}, \cdots, a_{nn}{}^{-1})$ 。

8．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 非退化阵，则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

9．设方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $\left|\mathbf{A}\right|$ 分块为：

$$\left|\mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$$

若 $\mathbf{A}_{11}$， $\mathbf{A}_{22}$ 是方阵且是非退化，则

$$\left|\mathbf{A}\right| = \left|\mathbf{A}_{11}\right| \left|\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}{}^{-1}\mathbf{A}_{12}\right| = \left|\mathbf{A}_{22}\right| \left|\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}{}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right|$$

六、 矩阵的秩

设 $\mathbf{A}$ 为 $n \times p$ 阶矩阵，若存在它的一个 r 阶子方阵的行列式不为零，而 $\mathbf{A}$ 的一切 $(r+1)$ 阶子方阵的行列式均为零，则称 $\mathbf{A}$ 的秩为 r ，记作 $rk(\mathbf{A}) = r$ 。它有如下基本性质：

1． $rk(\mathbf{A}) = 0$，当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$；

2．若 $\mathbf{A}$ 为 $n \times p$ 阶矩阵，则 $0 \leq rk(\mathbf{A}) \leq \min(n, p)$；

3． $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}')$；

4． $rk(\mathbf{AB}) \le \min(rk(\mathbf{A}), rk(\mathbf{B}))$；

5． $rk(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le rk(\mathbf{A}) + rk(\mathbf{B})$；

6．若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}$ 为非退化阵，则 $rk(\mathbf{ABC}) = rk(\mathbf{B})$。

七、 特征根和特征向量

设 $\mathbf{A}$ 为 p 阶方阵，则方程 $\left|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_p\right| = 0$ 是 λ 的 p 次多项式，由多项式理论知道必有 p 个根（可以有重根），记为 λ_1，$\lambda_2 \cdots$，λ_p，称为 $\mathbf{A}$ 的特征根或称特征值。

若存在一个 p 维向量 $\mathbf{u}_i$，使得 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_p)\mathbf{u}_i = 0$，则称 $\mathbf{u}_i$ 为对应于 λ_i 的 $\mathbf{A}$ 的特征向量。特征根有如下性质：

1．若 $\mathbf{A}$ 为实数阵，则 $\mathbf{A}$ 的特征根全为实数，故可按大小次序排列成 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_p$，若 $\lambda_i \ne \lambda_j$，则相应的特征向量 $\mathbf{u}_i$ 与 $\mathbf{u}_j$ 必正交。

2． $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 有相同的特征根。

3．若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别是 $p \times q$ 与 $q \times p$ 阶阵，则 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 有相同的非零特征根。

实际上，因为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & -\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_p - \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \lambda \mathbf{B} & \lambda \mathbf{I}_q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \lambda \mathbf{I}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I}_q - \mathbf{BA} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathbf{I}_p - \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \lambda \mathbf{B} & \lambda \mathbf{I}_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I}_q - \mathbf{BA} \end{vmatrix}$$

$$\lambda^q \left|\lambda \mathbf{I}_p - \mathbf{AB}\right| = \lambda^p \left|\lambda \mathbf{I}_q - \mathbf{BA}\right|$$

那么，两个关于 λ 的方程 $\left|\lambda \mathbf{I}_p - \mathbf{AB}\right| = 0$ 和 $\left|\lambda \mathbf{I}_q - \mathbf{BA}\right| = 0$ 有着完全相同的非零特征根（若有重根，则它们的重数也相同），从而 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 有相同的非零特征根。

4．若$\mathbf{A}$为三角阵（上三角或下三角），则$\mathbf{A}$的特征根为其对角元素。

5．若λ_1，$\lambda_2\cdots$，λ_p是$\mathbf{A}$的特征根，$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}^{-1}$的特征根为λ_1^{-1}，λ_2^{-1}，…，λ_p^{-1}。

6．若$\mathbf{A}$为p阶的对称阵，则存在正交矩阵$\mathbf{T}$及对角矩阵$\mathbf{\Lambda}=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$，使得

$$\mathbf{A}=\mathbf{T\Lambda T}'$$

实际上，将上式两边右乘$\mathbf{T}$，得

$$\mathbf{AT}=\mathbf{T\Lambda}$$

将$\mathbf{T}$按列向量分块，并记为$\mathbf{T}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_p)$，于是有

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_p)=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_p)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{Au}_1,\mathbf{Au}_2,\cdots,\mathbf{Au}_p)=(\lambda_1\mathbf{u}_1,\lambda_2\mathbf{u}_2,\cdots,\lambda_p\mathbf{u}_p)$$

那么

$$\mathbf{Au}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i,\quad i=1,2,\cdots,p$$

这表明$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_p$是$\mathbf{A}$的$p$个特征根，而$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_p$为相应的特征向量。这样矩阵$\mathbf{A}$可以作如下分解：

$$\mathbf{A}=\mathbf{TAT}'$$

$$=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_p)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1'\\ \vdots\\ \mathbf{u}_p'\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i'$$

称之为$\mathbf{A}$的谱分解。

八、 矩阵的迹

若$\mathbf{A}$是p阶方阵，它的对角元素之和称为$\mathbf{A}$的迹，记为$tr(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{p}a_{ii}$。方阵的迹具有下述基本性质：

1．若 A 是 p 阶方阵，它的特征根为 λ_1，$\lambda_2\cdots$，λ_p，则 $tr(A)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i$；

2． $tr(\mathbf{AB})=tr(\mathbf{BA})$；

3． $tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{A}')$

4． $tr(\mathbf{A}+\mathbf{B})=tr(\mathbf{A})+tr(\mathbf{B})$

5． $tr(\alpha\mathbf{A})=\alpha tr(\mathbf{A})$

九、 二次型与正定阵

称表达式

$$Q=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_i x_j$$

为二次型，其中 $a_{ij}=a_{ji}$ 是实常数； x_1， x_2，$\cdots$， x_p 是 p 个实变量。

若 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{p\times p}$ 为对称阵， $\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_p)'$，则

$$Q=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_i x_j=\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$$

若方阵 $\mathbf{A}$ 对一切 $\mathbf{X}\neq 0$，都有 $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}>0$，则称 A 与其相应的二次型是正定的，记为 $\mathbf{A}>0$；若对一切 $\mathbf{X}\neq 0$，都有 $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\geq 0$，则称 $\mathbf{A}$ 与二次型是非负定的，记为 $\mathbf{A}\geq 0$。

记 $\mathbf{A}\geq\mathbf{B}$，表示 $\mathbf{A}-\mathbf{B}\geq 0$；记 $\mathbf{A}>\mathbf{B}$，表示 $\mathbf{A}-\mathbf{B}>0$。

正定阵和非负定阵有如下性质：

1．一个对称阵是正（非负）定的当且仅当它的特征根为正（非负）；

2．若 $\mathbf{A}>0$，则 $\mathbf{A}^{-1}>0$；

3．若 $\mathbf{A}>0$，则 $c\mathbf{A}>0$，其中 c 为正数；

4．若 $\mathbf{A}\geq 0$，因它是对称阵，则必存在一个正交阵 $\mathbf{T}$，使

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=\mathbf{\Lambda}$$

其中 λ_1，$\cdots$，λ_p 为 $\mathbf{A}$ 的特征根，$\mathbf{T}$ 的列向量为相应的特征向量，于是

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$$

5．若 $\mathbf{A}\geq 0$（>0），则存在 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\geq 0$（$>0$），使得 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$。称 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$

为 A 的平方根。

实际上，因为 $\mathbf{A}$ 是对称阵，所以存在正交矩阵 $\mathbf{T}$ 和对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_p)$ 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{T\Lambda T'}$。有 $\mathbf{A}\geq 0$（>0）可知 $\lambda_i\geq 0$（>0），$i=1,\cdots,p$。令 $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}=diag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_p})$，$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\mathbf{T'\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}$，则有

$$\mathbf{A}=\mathbf{T\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T'}=\mathbf{T\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T'T\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T'}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$$

由于 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ 的特征根 $\sqrt{\lambda_i}\geq 0$（>0），$i=1,\cdots,p$，所以 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\geq$（$>0$）。

十、矩阵的微商

设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p)'$ 为实向量，$y=f(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 的实函数。则 $f(\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 的微商定义为：

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

若

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

则定义

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{1p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{np}} \end{pmatrix}$$

由上述定义不难推出以下公式：

1．若 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p)'$，$\mathbf{A}=(a_1,\cdots a_p)'$，则

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{A}$$

2．若 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)'$，则 $\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$

3．若 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)'$， $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times p}$ 对称阵，则

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{B}\mathbf{x}$$

4．若 $y = tr(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})$，式中 $\mathbf{X}$ 为 $n \times p$ 阶阵， $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶阵，则

$$\frac{\partial tr(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{X}$$

若 $\mathbf{A}$ 为对称阵，则

$$\frac{\partial tr(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} = 2\mathbf{A}\mathbf{X}$$