第一讲 模糊综合评判法

第一讲 模糊数学简介

在我们的日常生活中有许多的事物，或多或少都具有模糊性和混淆不清的特点。“模模糊糊”的概念，是最微妙且难以捉摸，但却又是常见最重要的，但在近代数学中却有了很清晰的定义。

如果到火车站去接人，如下描述

“大胡子，高个子，长头发戴宽边黑色眼镜的中年男人”

除了男人的信息是精确的之外，其它信息全是模糊的，但是我们却能够找到那个人。

模糊数学简介

- 什么是模糊概念？

人类在认识过程中，把感觉到的事物的共同特点抽象出来加以概括，这就形成了概念。比如从白雪、白马、白纸等事物中抽象出“白”的概念。一个概念有它的内涵和外延，内涵是指该概念所反映的事物本质属性的总和，也就是概念的内容。符合概念的那些对象的全体叫做这个概念的外延，外延实际上就是集合。

模糊数学简介

所谓模糊概念是指这个概念的外延具有不确定性，或者说它的外延是不清晰的，是模糊的。例如“青年”这个概念，它的内涵我们是清楚的，但是它的外延，即什么样的年龄阶段内的人是青年，恐怕就很难说情楚，因为在“年轻”和“不年轻”之间没有一个确定的边界，这就是一个模糊概念。

模糊数学简介

- 需要注意的几点：

首先，人们在认识模糊性时，是允许有主观性的，也就是说每个人对模糊事物的界限不完全一样，承认一定的主观性是认识模糊性的一个特点。例如，我们让100个人说出“年轻人”的年龄范围，那么我们将得到100个不同的答案。尽管如此，当我们用模糊统计的方法进行分析时，年轻人的年龄界限分布又具有一定的规律性；

模糊数学简介

- 其次，模糊性是精确性的对立面，但不能消极地理解模糊性代表的是落后的生产力，恰恰相反，我们在处理客观事物时，经常借助于模糊性。例如，在一个有许多人的房间里，找一位“年老的高个子男人”，这是不难办到的。这里所说的“年老”、“高个子”都是模糊概念，然而我们只要将这些模糊概念经过头脑的分析判断，很快就可以在人群中找到此人。如果我们要求用计算机查询，那么就要把所有人的年龄，身高的具体数据输入计算机，然后我们才可以从人群中找这样的人。

模糊数学简介

- 最后，人们对模糊性的认识往往同随机性混淆起来，其实它们之间有着根本的区别。随机性是其本身具有明确的含义，只是由于发生的条件不充分，而使得在条件与事件之间不能出现确定的因果关系，从而事件的出现与否表现出一种不确定性。而事物的模糊性是指我们要处理的事物的概念本身就是模糊的，即一个对象是否符合这个概念难以确定，也就是由于概念外延模糊而带来的不确定性。

模糊数学简介

- 为什么要有“模糊”？

  ✓在人们的实际生活与工作中，无法避免模糊性。

  例如：某一生态条件对某种害虫、某种作物的存活或适应性可以评价为“有利、比较有利、不那么有利、不利”；灾害性霜冻气候对农业产量的影响程度为“较重、严重、很严重”，等等。

模糊数学简介

- ✓事事要求精确，人们简直无法顺利地交流思想。

例1：两人见面，问“你好吗？”

问：什么叫做好，又有谁能给个精确地定义？

模糊数学简介

- ✓有些现象是精确地，但是适当地模糊可能使问题得到简化，灵活性大为提高。

例1：在田地里找最大的玉米与找比较大的玉米。

例2：分大瓜、小瓜。

第二讲 模糊集合及其运算

一、经典集合与特征函数

集合：具有某种特定属性的对象集体。

通常用大写字母A、B、C等表示。

论域：对局限于一定范围内进行讨论的对象的全体。

通常用大写字母U、V、X、Y等表示。

论域U中的每个对象u称为U的元素。

在论域U中任意给定一个元素u及任意给定一个经典集合A，则必有$u \in A$或者$u \notin A$，用函数表示为：

$$\chi_A : U \to \{0,1\}$$
$$u \mapsto \chi_A(u),$$

其中

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A \\ 0, & u \notin A \end{cases}$$

函数χ_A称为集合A的特征函数。

二、模糊集合及其运算

美国控制论专家**Zadeh**教授正视了经典集合描述的"非此即彼"的清晰现象，提示了现实生活中的绝大多数概念并非都是"非此即彼"那么简单，而概念的差异常以中介过渡的形式出现，表现为"亦此亦彼"的模糊现象。基于此，**1965**年，**Zadeh**教授在《**Information and Control**》杂志上发表了一篇开创性论文"**Fuzzy Sets**"，标志着模糊数学的诞生。

1、模糊子集

定义：设U是论域，称映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1],$$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$$

确定了一个U上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$。映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$称为 $\underset{\sim}{A}$隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$称为 x 对 $\underset{\sim}{A}$的隶属程度，简称隶属度。

模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$唯一确定，故认为二者是等同的。为简单见，通常用A来表示 $\underset{\sim}{A}$ 和$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 。

模糊数学简介

例如：“老人”是个模糊概念，

70岁的肯定属于老人，它的从属程度是 **1**，

40岁的人肯定不算老人，它的从属程度为 **0**，

按照查德给出的公式，**55**岁属于“老”的程度为**0.5**，即“半老”，**60**岁属于“老”的程度**0.8**。

查德认为，指明各个元素的隶属集合，就等于指定了一个集合。当隶属于**0**和**1**之间值时，就是模糊集合。

论域 $U=\{140,150,160,170,180,190\}$ （还是经典集合）

模糊集 A：高个子

定义隶属函数（具有主观性）：$A(x)=\dfrac{x-140}{190-140}$

$$A=\frac{0}{140}+\frac{0.2}{150}+\frac{0.4}{160}+\frac{0.6}{170}+\frac{0.8}{180}+\frac{1}{190}$$ （Zadeh表示法）

模糊集并不再回答“是或不是”的问题，而是对每个对象给一个隶属度，所以与经典集有本质区别。而且与隶属函数是捆绑一起的，所以可以不做区分。

模糊子集通常简称模糊集，其表示方法有：

（1）Zadeh表示法

$$A=\frac{A(x_1)}{x_1}+\frac{A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{A(x_n)}{x_n}$$

这里 $\frac{A(x_i)}{x_i}$ 表示 x_i 对模糊集A的隶属度是$A(x_i)$ 。

（2）序偶表示法

$$A=\{(x_1,A(x_1)),(x_2,A(x_2)),\cdots,(x_n,A(x_n))\}$$

（3）向量表示法

$$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$$

若论域U为无限集，其上的模糊集表示为：

$$A=\int_{x\in U}\frac{A(x)}{x}$$

2、模糊集的运算

定义：设A，B是论域U的两个模糊子集，定义

相等：$A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in U$

包含：$A \subset B \Leftrightarrow A(x) \le B(x), \forall x \in U$

并：$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x), \forall x \in U$

$\vee$表示取大；

交：$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x), \forall x \in U$

$\wedge$表示取小。

余：$A^c(x) = 1 - A(x), \forall x \in U$

几个常用的算子：

（1）Zadeh算子 $(\vee,\wedge)$

$$a \vee b = \max\{a,b\}, a \wedge b = \min\{a,b\}$$

（2）取大、乘积算子 $(\vee,\cdot)$

$$a \vee b = \max\{a,b\}, a \cdot b = ab$$

（3）环和、乘积算子 $(\hat{+},\cdot)$

$$a \hat{+} b = a + b - ab, a \cdot b = ab$$

（4）有界和、取小算子 $(\oplus,\wedge)$

$$a \oplus b = 1 \wedge (a+b), a \wedge b = \min\{a,b\}$$

（5）有界和、乘积算子 $(\oplus,\cdot)$

$$a \oplus b = 1 \wedge (a+b), a \cdot b = ab$$

（6）Einstain算子 $(\overset{+}{\varepsilon},\overset{-}{\varepsilon})$

$$a \overset{+}{\varepsilon} b = \frac{a+b}{1+ab}, a \overset{-}{\varepsilon} b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

3、模糊矩阵

定义：设 $R=(r_{ij})_{m\times n}, 0\le r_{ij}\le 1$, 称$R$为模糊矩阵。

当 r_{ij}只取0或1时，称R 为布尔（Boole）矩阵。

当模糊方阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的对角线上的元素 r_{ij} 都为1时，称R为模糊自反矩阵。

（1）模糊矩阵间的关系及运算

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是模糊矩阵，定义

相等：$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$

包含：$A\le B\Leftrightarrow a_{ij}\le b_{ij}$

并：$A \cup B = (a_{ij} \vee b_{ij})_{m \times n}$

交：$A \cap B = (a_{ij} \wedge b_{ij})_{m \times n}$

余：$A^c = (1 - a_{ij})_{m \times n}$

例：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$,则

$$A \cup B = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad A \cap B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad B^c = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

（2）模糊矩阵的合成

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，称模糊矩阵

$$A\circ B=(c_{ij})_{m\times n}$$

为A与B的合成，其中$c_{ij}=\max\{(a_{ik}\wedge b_{kj})|1\le k\le s\}$。

例：设$A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.6\\ 0.1 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4\\ 0.5 & 0.6\end{pmatrix}$，则

$$A\circ B=\begin{pmatrix}0.5 & 0.6\\ 0.3 & 0.3\end{pmatrix} \quad B\circ A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

（3）模糊矩阵的转置

定义：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，称 $A^T=(a_{ij}{}^T)_{m\times n}$为$A$的转置矩阵，其中 $a_{ij}{}^T=a_{ji}$。

（4）模糊矩阵的$\lambda-$截矩阵

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,对任意的$\lambda\in[0,1]$, 称 $A_\lambda=(a_{ij}{}^{(\lambda)})_{m\times n}$ 为模糊矩阵A的$\lambda-$截矩阵，其中

$$a_{ij}{}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & a_{ij}\geq\lambda\\ 0, & a_{ij}<\lambda\end{cases}$$

例：设$A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.3 & 0.8 & 1\end{pmatrix}$,则

$$A_{0.5}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad A_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

第三讲 模糊综合评判

一、一级模糊综合评判

设与被评价事物相关的因素有n个，记作

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

称之为因素集。又设所有可能出现的评语有m个，记作

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$$

称之为评语集。由于各种因素所处地们不同，作用也不一样，考虑用权重$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$来衡量。

步骤：

（1）确定因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$；

（2）确定评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$；

（3）进行单因素评判得到$r_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$；

（4）构造综合评价矩阵：

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

（5）综合评判：对于权重$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,计算

$B=A\circ R$，并根据隶属度最大原则作出评判。

根据运算$\circ$的不同定义，可得到以下不同模型：

模型 I　$M(\wedge,\vee)$—主因素决定型

$$b_j = \max\{(a_i \wedge r_{ij}), 1 \le i \le n\} \ (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型 II　$M(\cdot,\vee)$—主因素突出型

$$b_j = \max\{(a_i \cdot r_{ij}), 1 \le i \le n\} \ (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型III　$M(\cdot,+)$—加权平均型

$$b_j = \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot r_{ij}) \ (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型Ⅳ　$M(\wedge,\oplus)$一取小上界和型

$$b_j = \min\{1, \sum_{i=1}^{n}(a_i \wedge r_{ij})\} \ (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型Ⅴ　$M(\wedge,+)$一均衡平均型

$$b_j = \sum_{i=1}^{n}(a_i \wedge \frac{r_{ij}}{r_j}) \ (j = 1,2,\cdots,m);$$

$$r_j = \sum_{k=1}^{n} r_{kj}.$$

例：考虑一个服装的评判问题。

（1）建立因素集$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,其中

u_1:花色；u_2:式样；u_3:耐穿程度；u_4:价格。

（2）建立评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其中v_1:很欢迎；

v_2:较欢迎；v_3:不太欢迎；v_4:不欢迎。

（3）进行单因素评判得到：

$$u_1 \mapsto r_1=(0.2,0.5,0.2,0.1)$$

$$u_2 \mapsto r_2=(0.7,0.2,0.1,0)$$

$$u_3 \mapsto r_3=(0,0.4,0.5,0.1)$$

$$u_4 \mapsto r_4=(0.2,0.3,0.5,0).$$

（4）由单因素评判构造综合评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

（5）综合评判

设有两类顾客，他们根据自己的喜好对各因素所分配的权重分别为

$$A_1=(0.1,0.2,0.3,0.4)$$

$$A_2=(0.4,0.35,0.15,0.1)$$

用模型$M(\wedge,\vee)$计算综合评判为

$$B_1 = A_1 \circ R = (0.2,0.3,0.4,0.1)$$

$$B_2 = A_2 \circ R = (0.35,0.4,0.2,0.1)$$

按最大隶属原则，第一类顾客对此服装不太欢迎，而第二类顾客对此服装比较欢迎。

对于类似于B_2的情形，在下结论前通常将其归一化为

$$B_2' = (\frac{0.35}{1.05},\frac{0.4}{1.05},\frac{0.2}{1.05},\frac{0.1}{1.05}) = (0.33,0.38,0.19,0.1)$$

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004，汞 0（mg/L）

例 11 水污染模糊综合评价

环境水文地质评价内容之一是对城市地下水污染程度的评价.某市水质评价分级表如下：

评价 指标 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

单位：mg/L（毫克/升）

在58号检测点实测数据是酚0.0019，氰0.0004，砷0.004，铬0.004，汞0(mg/L)，试用模糊综合评判来评价该市的工业污染对地下水质的影响程度.

1. 因素集（评价指标集）是$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$={ 酚，氰，砷，铬，汞 }.

2. 评判集（污染级别集）是$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$={ 微污染，轻污染，中污染，重污染，严重污染 }.

3. 确定模糊评判矩阵$\underset{\sim}{R}=\{r_{ij}\}_{n\times m}$.

首先，用隶属函数表示污染程度，仅举出58号检测点关于酚的隶属函数如下：

$$v_1\text{级}:\mu_{v_1}(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ -2000(x-0.0005), & 0<x<0.0005;\\ 0, & x\geq 0.0005.\end{cases}$$

$$v_2级:\mu_{v_2}(x)=\begin{cases}2000x, & 0<x<0.0005;\\ 1, & x=0.0005\ ;\\ -666.67(x-0.002), & 0.0005<x<0.002.\end{cases}$$

$$v_3级:\mu_{v_3}(x)=\begin{cases}666.67(x-0.0005), & 0.0005<x<0.002;\\ 1, & x=0.002\ ;\\ -1000(x-0.003), & 0.002<x<0.003.\end{cases}$$

$$v_4级:\mu_{v_4}(x)=\begin{cases}1000(x-0.002), & 0.002<x<0.003;\\ 1, & x=0.003\ ;\\ -1000(x-0.004), & 0.003<x<0.004.\end{cases}$$

$$v_5级:\mu_{v_5}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0.003;\\ 1000(x-0.0030, & 0.003<x<0.004\ ;\\ 1, & x\ge 0.004.\end{cases}$$

评价指标 / 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004， 汞 0 (mg/L)

将 58 号检测点所测酚（u_1）的检测值 $x_1 = 0.0019$ 代入上述 5 个隶属函数得检测值 $x_1 = 0.0019$ 归属 5 个污染级别的隶属度，即对指标酚（u_1）的模糊评判为：

$$f(u_1) = (r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{15}) = (\mu_1(0.0019), \mu_2(0.0019), \cdots, \mu_5(0.0019)) = (0, 0.067, 0.938, 0, 0).$$

类似地，可以分别求得氰，砷，铬，汞的隶属函数并计算出 58 号检测点所测氰，砷，铬，汞的检测值的隶属度（略）. 从而构成模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}$：

评价 指标 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.067 & 0.093 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0.933

4 模糊综合评判.

1) 计算指标权重.

记 x_i 为第 i 指标实测值，$(x_1, x_2, \cdots, x_5) = (0.0019, 0.0004, 0.004, 0.004, 0)$，$p_i$ 为该指标在水质评价分类表中五个数据的平均值，$(p_1, p_2, \cdots, p_5) = (0.0019, 0.0095, 0.042, 0.0526, 0.00105)$，第 i 指标权重为 $w_i = \dfrac{x_i/p_i}{\sum_{k=1}^{5}(x_k/p_k)}$，从而得 U 上模糊子集 $\underset{\sim}{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_5) = (0.824, 0.035, 0.078, 0.063, 0)$

2）模糊矩阵乘法运算.

表示权重的模糊子集 $\underset{\sim}{W}$ 与表示隶属度的模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 作乘法，而获得模糊综合评价

$$\underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{R} = (0.824, 0.035, 0.078, 0.063, 0) \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.067 & 0.093 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0.933

$$= (0.078, 0.067, 0.824, 0, 0)$$

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004，汞 0（mg/L）

5 最大可能评判.

$\max(0.078,0.067,0.824,0,0)=0.824$，可见 v_3 级的隶属度 0.824 最大. 所以，58 号点最大可能评价为中污染水质. 如果对各个检测点按上述方法评价，可的水质评价的平面图.

评价指标 / 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

例 14.2 某单位对员工的年终综合评定。

解 （1）取因素集 $\boldsymbol{U}=\{$政治表现 u_1，工作能力 u_2，工作态度 u_3，工作成绩 $u_4\}$。

（2）取评语集 $\boldsymbol{V}=\{$优秀 v_1，良好 v_2，一般 v_3，较差 v_4，差 $v_5\}$。

（3）确定各因素的权重 $\boldsymbol{A}=[0.25,0.2,0.25,0.3]$。

（4）确定模糊综合评判矩阵，对每个因素 u_i 做出评价。

① u_1 比如由群众评议打分来确定：

$$\boldsymbol{R}_1=[0.1,0.5,0.4,0,0]。$$

上式表示，参与打分的群众中，有 10% 的人认为政治表现优秀，50% 的人认为政治表现良好，40% 的人认为政治表现一般，认为政治表现较差或差的人为 0。用同样方法对其他因素进行评价。

② u_2,u_3 由部门领导打分来确定：

$$\boldsymbol{R}_2=[0.2,0.5,0.2,0.1,0],\boldsymbol{R}_3=[0.2,0.5,0.3,0,0]。$$

③ u_4 由单位考核组成员打分来确定：

$$\boldsymbol{R}_4=[0.2,0.6,0.2,0,0]。$$

以 $\boldsymbol{R}_i$ 为第 i 行构成评价矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

它是从因素集 $\boldsymbol{U}$ 到评语集 $\boldsymbol{V}$ 的一个模糊关系矩阵。

（5）模糊综合评判。进行矩阵合成运算：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=[0.25,0.2,0.25,0.3]\cdot\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0.175,0.53,0.275,0.02,0]。$$

取数值最大的评语作为综合评判结果，则评判结果为“良好”。

例 利用模糊综合评判对 20 家制药厂经济效益的好坏进行排序.

设因素集 $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$为反映企业经济效益的主要指标.其中 u_1：总产值/消耗；u_2：净产值；u_3：盈利/资金占有；u_4：销售收入/成本. 评判集 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{20}\}$为 20 家制药厂. 20 家制药厂的 4 项经济指标如表 5-6 所示.

因素集

评判集

表 5-6

编号	企业名称	u_1	u_2	u_3	u_4
1	东北制药厂	1.611	10.59	0.69	1.67
2	北京第二制药厂	1.429	9.44	0.61	1.50
3	哈尔滨制药厂	1.447	5.97	0.24	1.25
4	江西东风制药厂	1.572	10.78	0.75	1.71
5	武汉制药厂	1.483	10.99	0.75	1.44
6	湖南制药厂	1.371	6.46	0.41	1.31
7	开封制药厂	1.665	10.51	0.53	1.52
8	西南制药厂	1.403	6.11	0.17	1.32
9	华北制药厂	2.620	21.51	1.40	2.59
10	上海第三制药厂	2.033	24.15	1.80	1.89
11	上海第四制药厂	2.015	26.86	1.93	2.02
12	山东新华制药厂	1.501	9.74	0.87	1.48
13	北京第一制药厂	1.578	14.52	1.12	1.47

14	天津制药厂	1.735	14.64	1.21	1.91
15	上海第五制药厂	1.453	12.88	0.87	1.52
16	上海第二制药厂	1.765	17.94	0.89	1.40
17	上海第六制药厂	1.532	29.42	2.52	1.80
18	杭州第一制药厂	1.488	9.23	0.81	1.45
19	福州抗生素厂	2.586	16.07	0.82	1.83
20	四川制药厂	1.992	21.63	1.01	1.89

(1)建立模糊综合评判矩阵.

设 c_{ij}($i=1, 2, 3, 4$； $j=1, 2, \cdots, 20$) 表示第 j 个制药厂的第 i 个因素的值，令

$$r_{ij}=\frac{c_{ij}}{\sum_{k=1}^{20} c_{ik}} \quad (i=1, 2, 3, 4;\ j=1, 2, \cdots, 20),$$

即 r_{ij} 表示第 j 个制药厂的第 i 个因素的值在 20 家制药厂的同一因素值的总和中所占的比例，得到模糊综合评判矩阵 $R=(r_{ij})_{4\times 20}$.

(2)综合评判.

设各因素的权重分配为 $A=(0.15, 0.15, 0.20, 0.50)$.

用模型 $M(\cdot,\vee)$：$b_j=\max\{(a_i\cdot r_{ij})\mid 1\leqslant i\leqslant 4\}\ (j=1, 2, \cdots, 20)$ 计算，得

$B=(0.0253, 0.0227, 0.0190, 0.0259, 0.0218, 0.0199, 0.0231, 0.0200, 0.0393, 0.0287, 0.0306, 0.0224, 0.0223, 0.0290, 0.0231, 0.0212, 0.0273, 0.0220, 0.0278, 0.287)$.

按从大到小的次序排序，这 20 家制药厂经济效益好坏的顺序为(按药厂编号)：

9, 11, 14, 10, 20, 19, 17, 4, 1, 15, 7, 2, 12, 13, 18, 5, 16, 8, 6, 3.

而用模型 $M(\cdot,+)$：$b_j=\sum(a_i\cdot r_{ij})\ (j=1, 2, \cdots, 20)$ 计算，得

$B=(0.0450, 0.0402, 0.0309, 0.0461, 0.0418, 0.0334, 0.0412, 0.0311, 0.0763, 0.0686, 0.0733, 0.0430, 0.0483, 0.0566, 0.0451, 0.0474, 0.0752, 0.0416, 0.0559, 0.590)$.

得到的排序为：9, 17, 11, 10, 20, 14, 19, 13, 16, 4, 15, 1, 12, 5, 18, 7, 2, 6, 8, 3. 其排序稍有出入，这是因为对于同一事物从不同的角度去观察分析，其结果可能不同，这也是符合实际的.

如果用模型 $M(\wedge,\vee)$：$b_j=\max\{(a_i\wedge r_{ij})\mid 1\leqslant i\leqslant 4\}$计算，由于所有的 $a_i>r_{ij}$，因此因素的权重 a_i 根本不起作用，只考虑了对因素的评判 r_{ij}，则这样作出的排序就不一定合理了.

二、多级模糊综合评判（以二级为例）

问题：对部门员工的年终评定？

工作绩效	工作量
	工作效率
	工作质量
	计划性
工作态度	责任感
	团队精神
	学习态度
	工作主动性
	满意度
工作能力	创新能力
	自我管理能力
	沟通能力
	协调能力
	执行能力
学习特长	勤情评价
	技能提高
	培训参与
	工作提案

二级模糊综合评判的步骤：

（1）将因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$划分成若干组得到

$$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\},$$

其中$U=\bigcup_{i=1}^{k}U_i, U_i\cap U_j=\Phi(i\neq j)$

称$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$为第一级因素集。

（2）设评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,先对第二级因素集

$$U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{n_i}^{(i)}\}$$

的n_i个因素进行单因素评判，得单因素评判矩阵

$$R_i = \begin{pmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_im}^{(i)} \end{pmatrix}$$

设$U_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \cdots, u_{n_i}^{(i)}\}$的权重为

$$A_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)})$$

求得综合评判为

$$B_i = A_i \circ R_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

（3）再对第一级因素集$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$作综合评判，设其权重为$A=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$，则总评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix}$$

从而得综合评判为

$$B=A\circ R$$

按最大隶属度原则即得相应评语。

例 14.3 某部门员工的年终评定。

关于考核的具体操作过程，以对一名员工的考核为例。如表 14.7 所列，根据该部门工作人员的工作性质，将 18 个指标分成工作绩效($\boldsymbol{U}_1$)、工作态度($\boldsymbol{U}_2$)、工作能力($\boldsymbol{U}_3$)和学习成长($\boldsymbol{U}_4$)这 4 个子因素集。

表 14.7 员工考核指标体系及考核表

一级指标	二级指标	评价				
		优秀	良好	一般	较差	差
工作绩效	工作量	0.8	0.15	0.05	0	0
	工作效率	0.2	0.6	0.1	0.1	0
	工作质量	0.5	0.4	0.1	0	0
	计划性	0.1	0.3	0.5	0.05	0.05
工作态度	责任感	0.3	0.5	0.15	0.05	0
	团队精神	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1
	学习态度	0.4	0.4	0.1	0.1	0
	工作主动性	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1
	满意度	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1
工作能力	创新能力	0.1	0.3	0.5	0.1	0
	自我管理能力	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1
	沟通能力	0.2	0.3	0.35	0.15	0
	协调能力	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1
	执行能力	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
学习特长	勤情评价	0.3	0.4	0.2	0.1	0
	技能提高	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
	培训参与	0.2	0.3	0.4	0.1	0
	工作提案	0.4	0.3	0.2	0.1	0

设专家设定指标权重，一级指标权重为

$$A=[0.4,0.3,0.2,0.1]。$$

二级指标权重为

$$A_1=[0.2,0.3,0.3,0.2],$$

$$A_2=[0.3,0.2,0.1,0.2,0.2],$$

$$A_3=[0.1,0.2,0.3,0.2,0.2],$$

$$A_4=[0.3,0.2,0.2,0.3]。$$

对各个子因素集进行一级模糊综合评判得到

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{R}_1=[0.39,0.39,0.26,0.04,0.01],$$

$$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{R}_2=[0.25,0.33,0.235,0.125,0.06],$$

$$\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{A}_3\cdot\boldsymbol{R}_3=[0.15,0.32,0.355,0.115,0.06],$$

$$\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}_4\cdot\boldsymbol{R}_4=[0.27,0.35,0.26,0.1,0.02]。$$

这样，二级综合评判为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=[0.4,0.3,0.2,0.1]\cdot\begin{bmatrix}0.39 & 0.39 & 0.26 & 0.04 & 0.01\\ 0.25 & 0.33 & 0.235 & 0.125 & 0.06\\ 0.15 & 0.32 & 0.355 & 0.115 & 0.06\\ 0.27 & 0.35 & 0.26 & 0.1 & 0.02\end{bmatrix}$$

$$=[0.288,0.354,0.2355,0.0865,0.036]。$$

一级指标	二级指标
工作绩效	工作量
	工作效率
	工作质量
	计划性
工作态度	责任感
	团队精神
	学习态度
	工作主动性
	满意度
工作能力	创新能力
	自我管理能力
	沟通能力
	协调能力
	执行能力
学习特长	勤情评价
	技能提高
	培训参与
	工作提案

根据最大隶属度原则，认为对该员工的评价为良好。同理可对该部门其他员工进行考核。

以上说明了如何用一级综合模糊评判和多层次综合模糊评判来解决企业中的人事考评问题，该方法在实践中取得了良好的效果。经典数学在人事考核的应用中显现出了很大的局限性，而模糊分析很好地将定性分析和定量分析结合起来，为人事考核工作的量化提供了一个新的思路。

例：某企业生产一种产品，它的质量由 9 个指标 $u_1,u_2,\cdots,u_9$确定，产品的级别分为一级、二级、等外、废品。由于因素较多，宜采用二级模型。

（1）将因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$分为 3 组：

$$U_1=\{u_1,u_2,u_3\},U_2=\{u_4,u_5,u_6\},U_3=\{u_7,u_8,u_9\}.$$

（2）设评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，

v_1 :一级；v_2 :二级；v_3 :等外；v_4 :废品。

（3）对每个$U_i(i=1,2,3)$中的因素进行单因素评判，有

$U_1=\{u_1,u_2,u_3\}$,取权重为$A_1=(0.3,0.42,0.28)$，

单因素评判矩阵为

$$R_1=\begin{pmatrix} 0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27 \\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23 \\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12 \end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判，得

$$B_1=A_1\circ R_1=(0.3,0.32,0.26,0.27)$$

其中$\circ$取模型$M(\wedge,\vee)$计算，下同。

$U_2=\{u_4,u_5,u_6\}$,取权重为$A_2=(0.2,0.5,0.3)$，

单因素评判矩阵为

$$R_2=\begin{pmatrix} 0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18 \\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20 \\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10 \end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判，得

$$B_2=A_2\circ R_2=(0.26,0.36,0.2,0.2)$$

$U_3 = \{u_7, u_8, u_9\}$,取权重为$A_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$，

单因素评判矩阵为

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20 \\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11 \\ 0.40 & 0.28 & 0.30 & 0.18 \end{pmatrix}$$

作一级模糊综合评判，得

$$B_3 = A_3 \circ R_3 = (0.3, 0.28, 0.3, 0.2)$$

（4）对第一级因素$U=\{U_1,U_2,U_3\}$,设权重为

$$A=(0.2,0.35,0.45).$$

令总单因素评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.30 & 0.32 & 0.26 & 0.27 \\ 0.26 & 0.36 & 0.20 & 0.20 \\ 0.30 & 0.28 & 0.30 & 0.20 \end{pmatrix}$$

作二级模糊综合评判，得

$$B=A\circ R=(0.30,0.35,0.30,0.20)$$

按最大隶属原则，此产品属二级品。

模糊综合评价法根据模糊数学的隶属度理论把定性评价转化为定量评价，即用模糊数学对受到多种因素制约的事物或对象做出一个总体的评价。

它具有结果清晰，系统性强的特点，能较好地解决模糊的、难以量化的问题，适合各种非确定性问题的解决。

1，如何建立模糊综合评价矩阵？

调查问卷法，专家经验法，参考文献法等。

2，如何给出因素的权重？

众人评估法、加权平均法、层次分析法等。