微分方程建模：传染病模型

传染病模型

随着卫生设施的改善，医疗水平的提高及人类文明的不断发展，诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到了有效的控制。但是一些新的、不断变异着的传染病毒却悄悄地向人类袭来，20世纪80年代十分险恶的艾滋病毒开始肆虐全球，至今仍在蔓延；2003年春来历不明的*SARS*病毒突袭人间，给人们的生命财产带来了极大的危害。长期以来，建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程、分析受感染人数的变化规律、探索制止传染病蔓延的手段等，一直是有关专家关注的一个热点问题。

传染病模型

模型1　　已感染人数 (病人) $i(t)$

假设　　每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda i \qquad i(t)=i_0 e^{\lambda t}$$

$$i(0)=i_0 \qquad t\to\infty \Rightarrow i\to\infty\,?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加

必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

传染病模型

模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为　$i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病

$\lambda \sim$ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda si \qquad s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

传染病模型

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

Logistic 模型

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

当$i_0 = 0.09, \lambda = 0.1$时，用Matlab程序为:

```
y=dsolve('Dy=0.1*y*(1-y)','y(0)=0.09','x')    %求解此微分方程
ezplot(y,[0,60])                               %画出微分方程的图像
ezplot('0.1*y*(1-y)',[0,1])                    %画出y的导数的图像
```

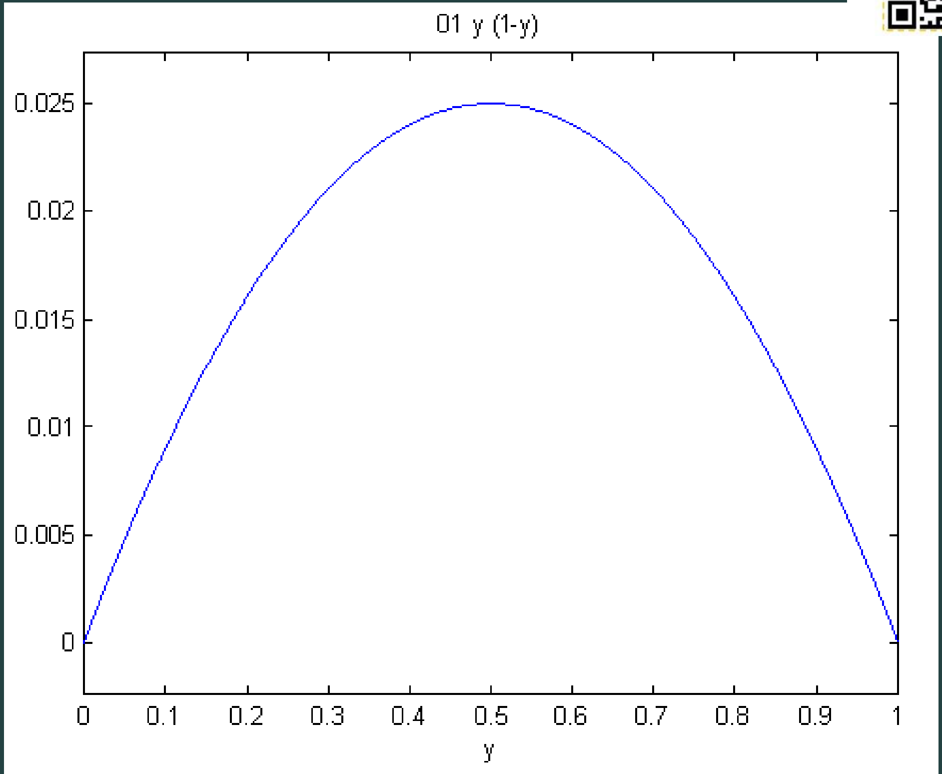
传染病模型

$t=t_m$, di/dt 最大

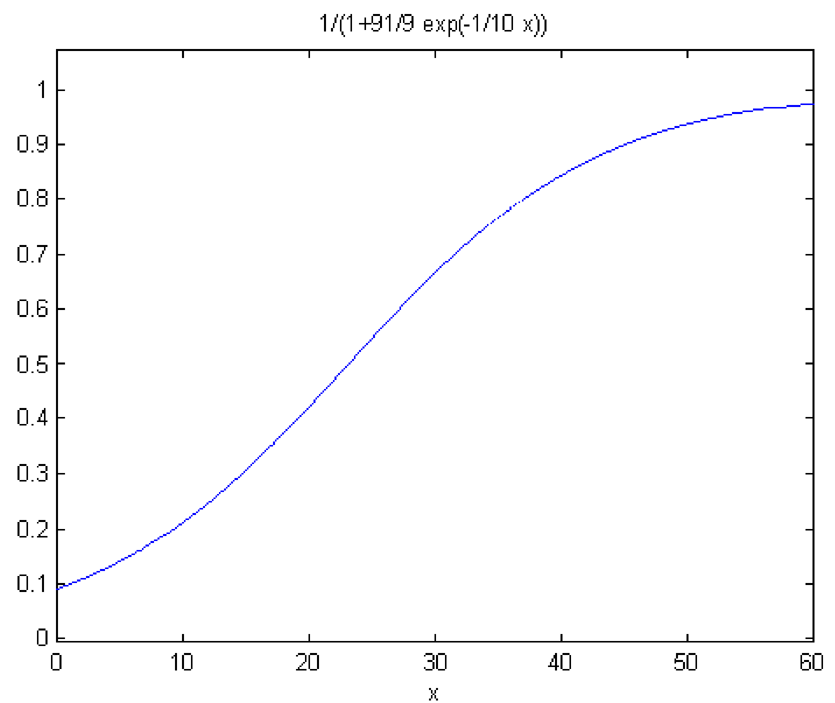
t_m~传染病高潮到来时刻

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$$

λ (日接触率)↓ → t_m↑



传染病模型



$$t \to \infty \Rightarrow i \to 1 \qquad ?$$

没有考虑病人可以治愈！

传染病模型

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染 **SIS 模型**

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ ~ 日接触率

$1/\mu$ ~感染期

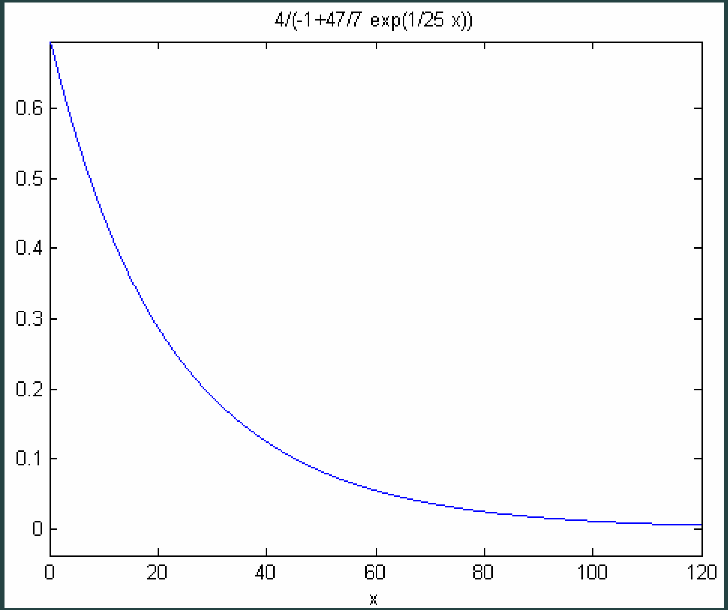
$\sigma=\lambda/\mu$ σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

传染病模型

编写MATLAB程序如下：

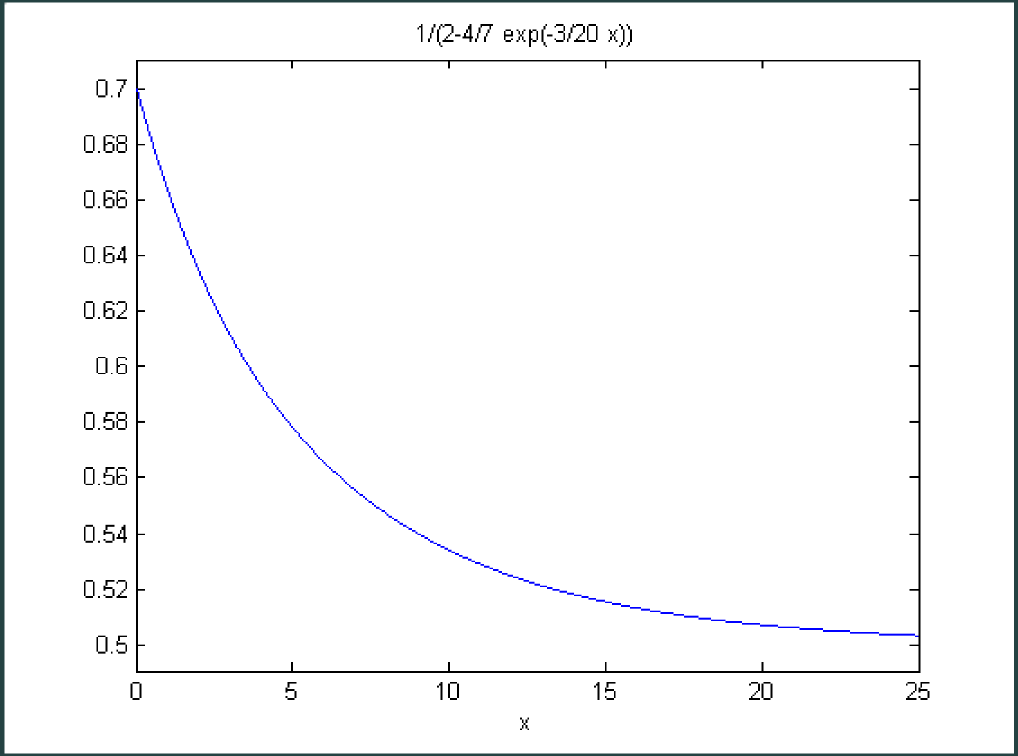
```
y=dsolve('Dy=0.01*y*(1-y)-0.05*y','y(0)=0.7','x');   %
ezplot(y,[0,120])
y2=dsolve('Dy=0.3*y*(1-y)-0.15*y','y(0)=0.7','x');
y3=dsolve('Dy=0.3*y*(1-y)-0.15*y','y(0)=0.3','x');
figure,ezplot(y2,[0,25]);
figure,ezplot(y3,[0,25])
```

传染病模型



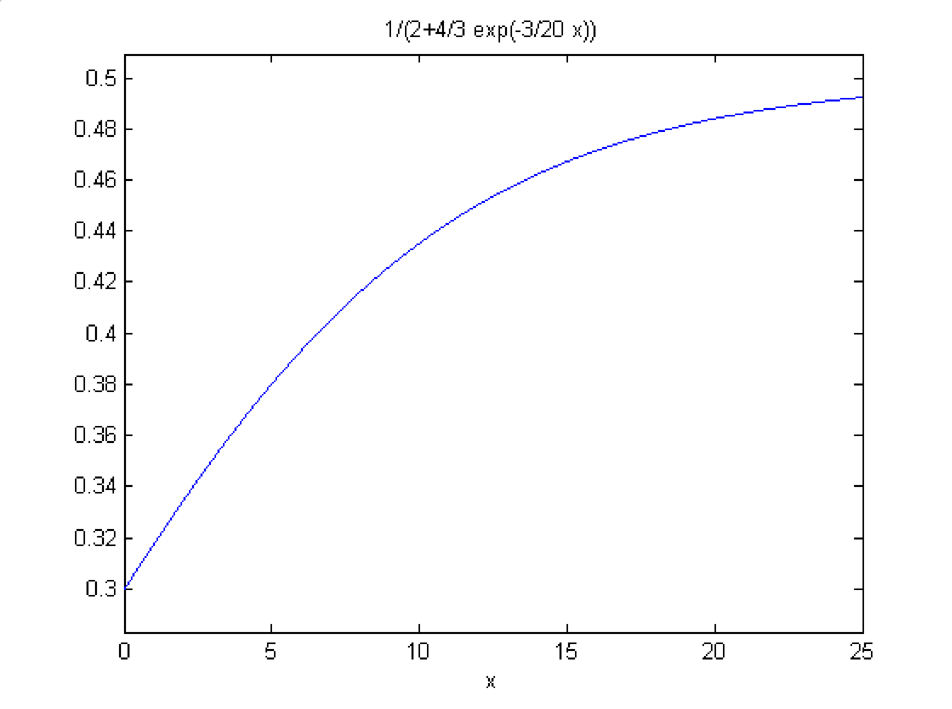
$$i_0 = 0.7, \lambda = 0.01, \sigma = 0.2$$

传染病模型



$$i_0 = 0.7, \lambda = 0.3, \sigma = 2$$

传染病模型



$$i_0 = 0.3, \lambda = 0.3, \sigma = 2$$

传染病模型

不难看出，接触数$\sigma=1$ ~ 阈值

$$\sigma \le 1 \ \Rightarrow i(t) \downarrow$$

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

传染病模型

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者 **SIR模型**

假设 1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda N s(t) i(t) \Delta t-\mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$

$$\rightarrow \begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda s i-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda s i \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

→ 无法求出 $i(t), s(t$ 的解析解

↓

求数值解

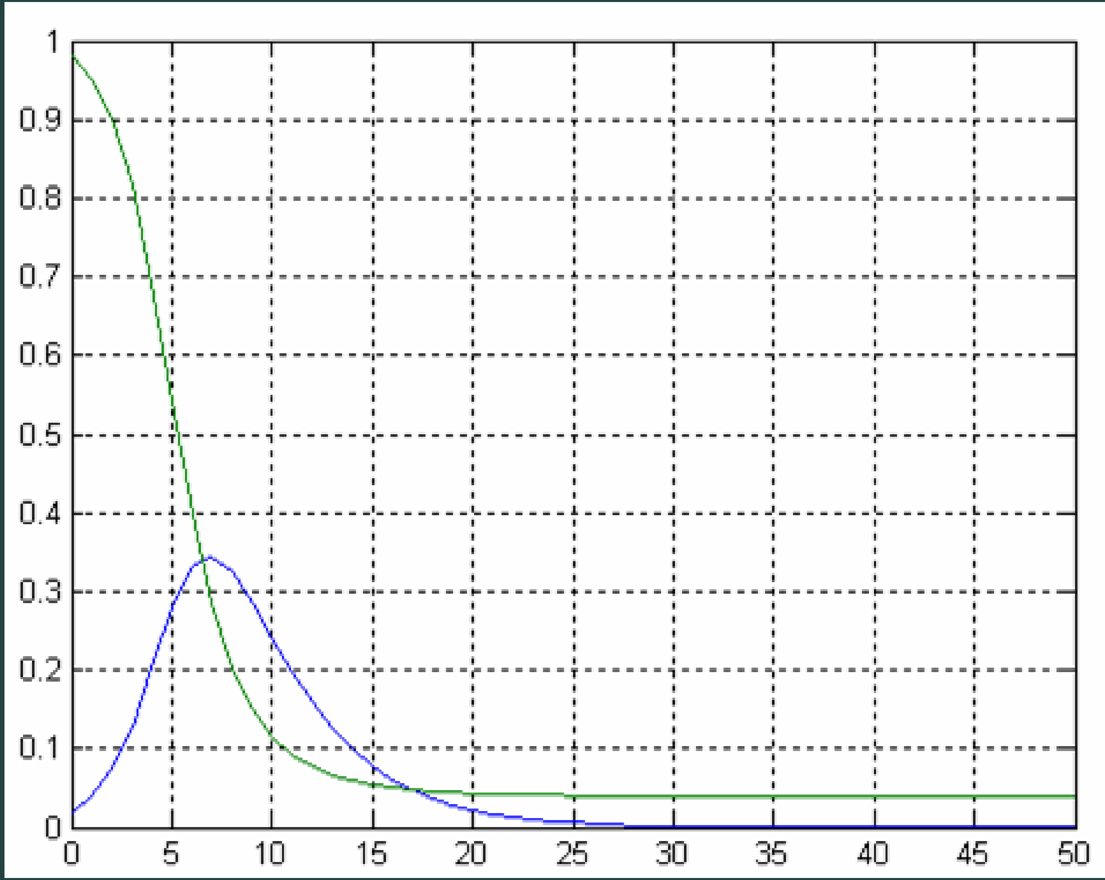
$i_0+s_0 \approx 1$ (通常$r(0)=r_0$很小)

传染病模型

MATLAB程序如下：

```
ts=0:50;
x0=[0.02,0.98];
[t,x]=ode45('ill',ts,x0)            %调用ode45求解'ill'方程组
plot(t,x(:,1),t,x(:,2)),grid,       %画出健康者和病人的变化曲线
figure,plot(x(:,2),x(:,1)),grid       %画出相图
function y=ill(t,x)                   %函数ill，表示模型IV
a=1;b=0.3;
y=[a*x(1)*x(2)-b*x(1),-a*x(1)*x(2)]';
```

画出健康者和病人的变化曲线



传染病模型

结论：

在初始时刻健康者和病人百分比的总和为1；病人的数量先增加然后下降，说明在某时刻传染病得到抑制；而治愈的人群退出此系统，所以最后系统的人群数量为0；这时所有的人群均是免疫者。