



网络优化算法：Dijkstra算法

《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码





最短路问题

- 在现实生活中，经常需要用到两点间的最短距离。在图论模型中，最短路问题是最基本的问题之一。现实问题能抽象成对象关系间的效率，成本，时间或费用相关的赋权图，通常都可能涉及到最短路问题。求两点间的最短路及最短距离，常用的为Dijkstra（迪克斯彻）算法与Floyd算法。



Dijkstra（迪克斯彻）算法

- 艾兹格·W·迪克斯彻（Edsger Wybe Dijkstra, 1930年5月11日~2002年8月6日）荷兰人。
- Dijkstra算法是典型最短路算法，用于计算一个节点到其他所有节点的最短路径。主要特点是以起始点为中心向外层层扩展，直到扩展到终点为止。Dijkstra算法能得出最短路径的最优解，但由于它遍历计算的节点很多，所以效率低。



Dijkstra算法思想

- Dijkstra算法本质上是一个贪心算法，其基本思想是：设置一个顶点集合 S 并不断地做贪心选择来扩充这个集合。该算法适用：边权为正、有向无向都适用。
- Dijkstra算法思想为：设 $G=(V,E)$ 是一个带权有向图，把图中顶点集合 V 分成两组，第一组为已求出最短路径的顶点集合(用 S 表示，初始时 S 中只有一个源点，以后每求得一条最短路径，就将终点加入到集合 S 中，直到全部顶点都加入到 S 中，算法就结束了)，第二组为其余未确定最短路径的顶点集合(用 U 表示)，按最短路径长度的递增次序依次把第二组的顶点加入 S 中。在加入的过程中，总保持从源点 v 到 S 中各顶点的最短路径长度不大于从源点 v 到 U 中任何顶点的最短路径长度。此外，每个顶点对应一个距离， S 中的顶点的距离就是从 v 到此顶点的最短路径长度。 U 中的顶点的距离，是从 v 到此顶点只包括 S 中的顶点为中间顶点的当前最短路径长度。



- Dijkstra算法步骤为：

- 1. S 中初始时仅包含源点
- 2. 从 $V - S$ 中选取最短特殊路径长度最短的顶点，并将其加入 S
- 3. 对数组 d 进行更新（更新条件：若通过该顶点到某个顶点的路径比原先 d 数组保存的小）



- Dijkstra算法步骤为：
- (i) 令 $l(u_0) = 0$ ，对 $v \neq u_0$ ，令 $l(v) = \infty$ ， $S_0 = \{u_0\}$ ， $i = 0$ 。
- (ii) 对每个 $v \in \bar{S}_i$ ($\bar{S}_i = V \setminus S_i$)，用 $\min_{u \in S_i} \{l(v), l(u) + w(uv)\}$ 代替 $l(v)$ 。计算 $\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$ ，把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1} ，令 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$ 。
- (iii) 若 $i = |V| - 1$ ，停止；若 $i < |V| - 1$ ，用 $i + 1$ 代替 i ，转 (ii)。



Dijkstra算法程序

- Dijkstra算法的matlab函数文件dijkstra.m:

• function [l,t]=dijkstra(A,v)

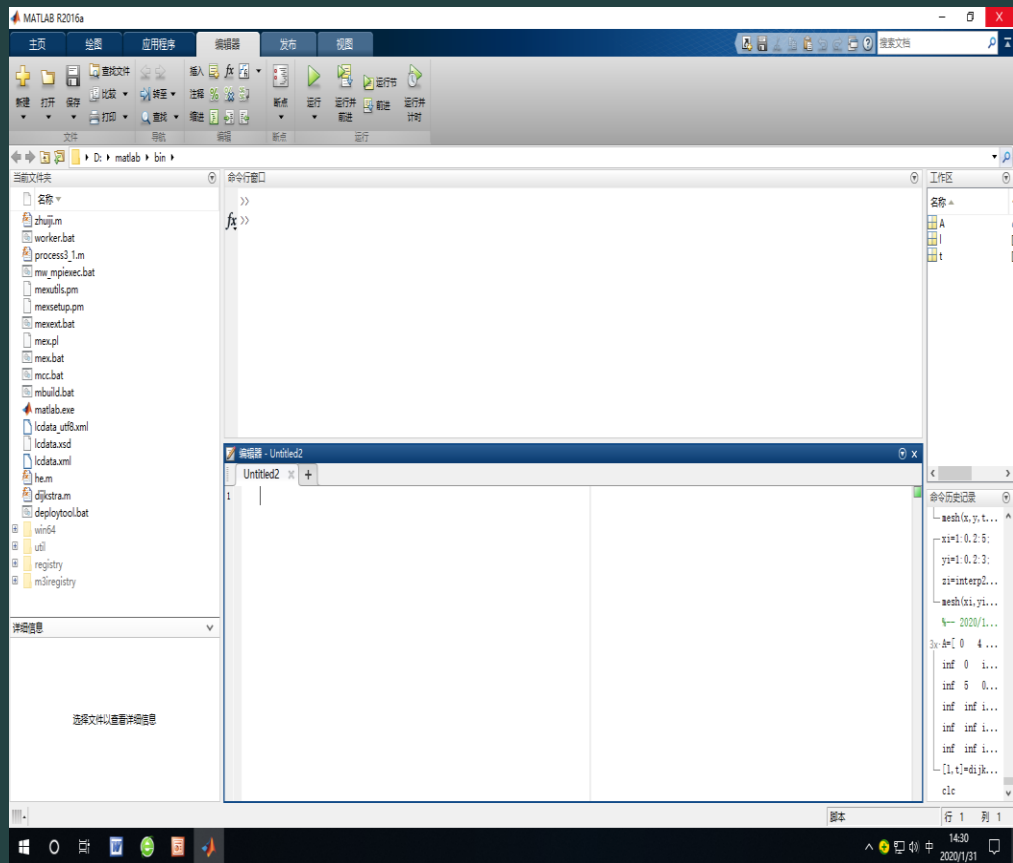
- %dijkstra最短路算法,l为顶点v到其余顶点的最短距离, t为父点
- n=length(A);%顶点个数
- V=1:n;%顶点集合
- s=v;%已经找到最短路的点, 初始为v
- l=A(v,:);%当前各个点到v点的距离, 初始为直接距离
- t=v.*ones(1,n);%当前距离时点的父顶点, 初始都为v
- ss=setdiff(V,s);nn=length(ss);% 返回V中那些不属于S的元素
- for j=1:n-1%一共进行n-1次迭代
 - for i=1:nn %遍历当前还没有找到最短路的点
 - k=ss(1);
 - if l(k)>l(ss(i))
 - k=ss(i);
 - l(k)=l(ss(i));%取当前迭代中距离最小值

- if l(k)==inf %如果当前行最小值是无穷大, 则结束
 - break;
- else %否则k点的最短路找到
 - s=union(s,k);% 返回s和k的并集
 - ss=setdiff(V,s);
 - nn=length(ss);
- end
- if length(s)==n %全部点的最短路都找到
 - break;
- else
 - for i=1:nn %以k为生长点, 如果通过k点会更短, 则更改当前最短距离
 - if l(ss(i))>l(k)+A(k,ss(i))
 - l(ss(i))=l(k)+A(k,ss(i));
 - t(ss(i))=k;
 - end
- end
- end



• 逆向搜索路径的matlab函数 文件path.m

- function p=path(t,v,vv)
- k=vv;p=k;
- while(1)
- if k==v
- p % 路径
- break;
- else
- k=t(k);
- p=[k,p];
- end
- end





MATLAB R2016a

选择要保存的文件

我的电脑 > 工具娱乐 (D:) > matlab > bin

搜索"bin"

名称	修改日期	类型	大小
m3iregistry	2018/3/6 19:30	文件夹	
registry	2018/3/6 19:46	文件夹	
util	2018/3/6 19:28	文件夹	
win64	2018/3/6 20:07	文件夹	
dijkstra.m	2020/1/31 14:24	M 文件	1 KB
he.m	2019/10/22 20:37	M 文件	1 KB
process3_1.m	2019/2/3 21:11	M 文件	1 KB
zhuiji.m	2020/1/6 23:10	M 文件	1 KB

文件(N): dijkstra

保存类型(T): MATLAB 代码文件 (*.m)

保存(S) 取消

```
19 else % 当前点k为最短路径点
20     s=union(s,k); % 返回s和k的并集
21     ss=setdiff(V,s);
22     nn=length(ss);
23 end
24 if length(s)==n % 全部点的最短路径都找到
25     break;
26 else
27     for i=1:nn % 以k为生长点, 如果通过k点会更短, 则更改当前最短距离
28         if l(ss(i))>l(k)+A(k,ss(i))
29             l(ss(i))=l(k)+A(k,ss(i));
30             t(ss(i))=k;
31         end
32     end
33 end
34 end
35
```

工作区

名称

- A
- l
- t

命令历史记录

```
mesh(x,y,t)
xi=1:0.2:5;
yi=1:0.2:3;
zi=interp2...
mesh(xi,yi,...
%-- 2020/1...
3x A=[ 0 4 ...
inf 0 i...
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
clc
```

dijkstra 行 35 列 1

14:32 2020/1/31



例：求图中从 v_1 到其他顶点的最短路

• 解：在主程序窗口输入

• $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & 0 & \text{inf} & 4 & 2 & 4 \\ \text{inf} & 5 & 0 & \text{inf} & 6 & 7 \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 0 & \text{inf} & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 5 & 0 & \text{inf} \\ \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & \text{inf} & 3 & 0 \end{bmatrix};$

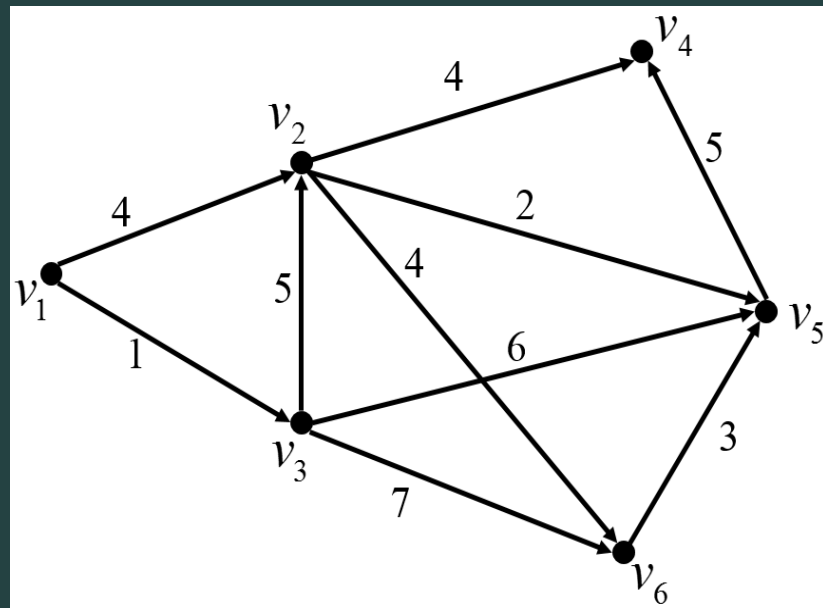
$[l, t] = \text{dijkstra}(A, 1)$

• $l =$

• $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

• $t =$

• $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$





MATLAB R2016a

主页 绘图 应用程序 编辑器 发布 视图

新建 打开 保存 比较 转至 注释 断点 运行 运行并前进 运行并计时

文件 打印 查找 导航 编辑 断点 运行

当前文件夹: D:\matlab\bin

名称

- zhuji.m
- worker.bat
- process3_1.m
- mw_mpiexec.bat
- mexutlis.pm
- mexsetup.pm
- mexext.bat
- mex.pl
- mex.bat
- mcc.bat
- mbuild.bat
- matlab.exe
- lcddata_utf8.xml
- lcddata.xsd
- lcddata.xml
- he.m
- dijkstra.m
- deploytool.bat
- win64
- util
- registry
- m3iregistry

详细信息

选择文件以查看详细信息

命令窗口

```
fx >> A=[ 0 4 1 inf inf inf
inf 0 inf 4 2 4
inf 5 0 inf 6 7
inf inf inf 0 inf inf
inf inf inf 5 0 inf
inf inf inf inf 3 0];
[1,t]=dijkstra(A,1)
```

编辑器 - D:\matlab\bin\dijkstra.m

```
dijkstra.m
19 case 自定义函数或脚本
20 s=union(s,k);% 返回s和k的并集
21 ss=setdiff(V,s);
22 nn=length(ss);
23 end
24 if length(s)==n;%全部点的最短路都找到
25 break;
26 else
27 for i=1:nn;%以k为生长点,如果通过k点会更短,则更改当前最短距离
28 if 1(ss(i))>1(k)+A(k,ss(i))
29 1(ss(i))=1(k)+A(k,ss(i));
30 t(ss(i))=k;
31 end
32 end
33 end
34 end
35
```

工作区

名称

- A
- l
- t

命令历史记录

```
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
clc
2x A=[ 0 4 ...
inf 0 i...
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
clc
```

14:34
2020/1/31



MATLAB R2016a

主 页 绘图 应用程序 编辑器 发布 视图

新建 打开 保存 比较 转至 注释 断点 运行 运行并前进 运行并计时

文件 导航 编辑 运行

当前文件夹: D:\matlab\bin

名称

- zhuji.m
- worker.bat
- process3_1.m
- mw_mpiexec.bat
- mexutils.pm
- mexsetup.pm
- mexext.bat
- mex.pl
- mex.bat
- mcc.bat
- mbuild.bat
- matlab.exe
- lcddata_utf8.xml
- lcddata.xsd
- lcddata.xml
- he.m
- dijkstra.m
- deploytool.bat
- win64
- util
- registry
- m3iregistry

详细信息

选择文件以查看详细信息

命令窗口

```

inf inf inf inf 3 0] :
[1,t]=dijkstra(A,1)

1 =

    0    4    1    8    6    8

t =

    1    1    1    2    2    2

fx >>
    
```

编辑器 - D:\matlab\bin\dijkstra.m

```

19  % 返回s和k的并集
20  s=union(s,k); % 返回s和k的并集
21  ss=setdiff(V,s);
22  nn=length(ss);
23  end
24  if length(s)==n % 全部点的最短路都找到
25  break;
26  else
27  for i=1:nn % 以k为生长点，如果通过k点会更短，则更改当前最短距离
28  if l(ss(i))>l(k)+A(k,ss(i))
29  l(ss(i))=l(k)+A(k,ss(i));
30  t(ss(i))=k;
31  end
32  end
33  end
34  end
35  end
    
```

工作区

名称

- A
- l
- t

命令历史记录

```

inf 0 i...
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
clc
A=[ 0 4 ...
inf 0 i...
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
    
```

14:35
2020/1/31



- 如果要求到具体某个点的最短路径，可继续输入
- $\text{path}(t,1,6)$
- $p =$
- $\begin{matrix} 1 & 2 & 6 \end{matrix}$
- 需要说明的是，Dijkstra算法只适用于边权非负的情况。



MATLAB R2016a

选择要另存的文件

我的电脑

3D 对象

Desktop

视频

图片

文档

下载

音乐

本地磁盘 (C:)

工具娱乐 (D:)

名称

修改日期

类型

大小

m3iregistry

2018/3/6 19:30

文件夹

registry

2018/3/6 19:46

文件夹

util

2018/3/6 19:28

文件夹

win64

2018/3/6 20:07

文件夹

dijkstra.m

2020/1/31 14:33

M 文件

1 KB

he.m

2019/10/22 20:37

M 文件

1 KB

process3_1.m

2019/2/3 21:11

M 文件

1 KB

zhuji.m

2020/1/6 23:10

M 文件

1 KB

文件名(N):

path

保存类型(T):

MATLAB 代码文件 (*.m)

保存(S)

取消

dijkstra.m

deploytool.bat

win64

util

registry

m3iregistry

选择文件以查看详细信息

```

1 function p=path(t,v,vv)
2     k=vv;p=k;
3     while(1)
4         if k==v
5             %路径
6             break;
7         else
8             k=t(k);
9             p=[ k, p];
10        end
11    end
12

```

工作区

名称

A

i

t

命令历史记录

inf 0 i...

inf 5 0...

inf inf i...

inf inf i...

inf inf i...

[1,t]=dijk...

clc

A=[0 4 ...

inf 0 i...

inf 5 0...

inf inf i...

inf inf i...

inf inf i...

[1,t]=dijk...

path

行 12 列 1



MATLAB R2016a

主 页 绘图 应用程序 编辑器 发布 视图

新建 打开 保存 比较 转至 插入 注释 断点 运行 运行并前进 运行并计时

文件 导航 编辑 断点 运行

当前文件夹: D:\matlab\bin

名称

- zhuji.m
- worker.bat
- process3_1.m
- path.m
- mw_mpiexec.bat
- mexutils.pm
- mexsetup.pm
- mexext.bat
- mex.pl
- mex.bat
- mcc.bat
- mbuild.bat
- matlab.exe
- lcdata_utf8.xml
- lcdata.xsd
- lcdata.xml
- he.m
- matlab.m
- dijkstra.m
- deploytool.bat
- win64
- util
- registry
- m3iregistry

详细信息

选择文件以查看详细信息

命令窗口

```
>> path(t,1,6)

p =

     1     2     6

ans =

     1     2     6

fx >>
```

编辑器 - D:\matlab\bin\path.m

dijkstra.m path.m +

```
1 function p=path(t,v,w)
2     k=v;p=k;
3     while(1)
4         if k==v
5             %路径
6             break;
7         else
8             k=t(k);
9             p=[ k,p];
10        end
11    end
12
```

工作区

名称

- A
- ans
- i
- t

命令历史记录

```
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
clc
A=[ 0 4 ...
inf 0 i...
inf 5 0...
inf inf i...
inf inf i...
inf inf i...
[1,t]=dijk...
path(t,1,6)
```

14:38
2020/1/31