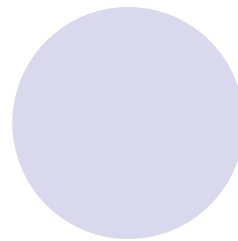
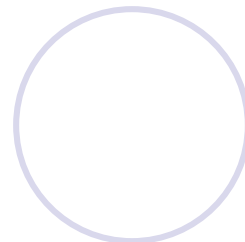
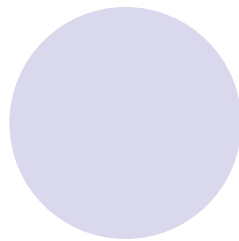
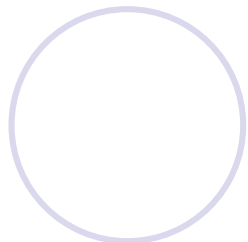
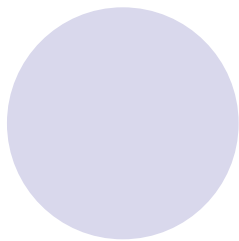


《数学建模方法》通选课

微分方程及其解法

2019年秋季学期



- 微分方程建模
- 常微分方程数值解法
- Matlab求解常微分方程
- 有限差分方法简介

第一节 基础知识

- 一、基本概念：
- 微分方程、阶、解、通解、特解、积分曲线、初值问题
- 二、方程的类型及其解法
- 简单一阶方程及其解法、简单的可降阶的高阶方程、简单的微分方程组

三、微分方程稳定性理论简介

- 1、一阶方程的平衡点和稳定性

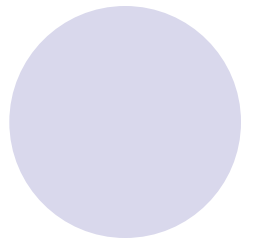
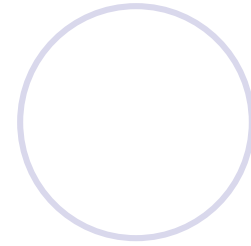
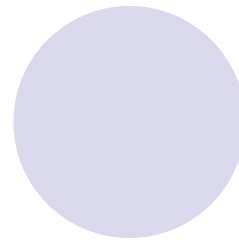
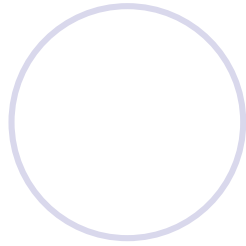
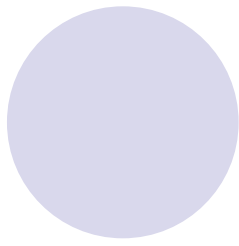
- (1) 定义1: 设有微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) \quad (1)$$

右端不显含自变量 t , 代数方程

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

的实根 $x = x_0$ 称为方程 (1) 的平衡点 (或奇点) ,
显然它是方程 (1) 的解 (或称奇解) .

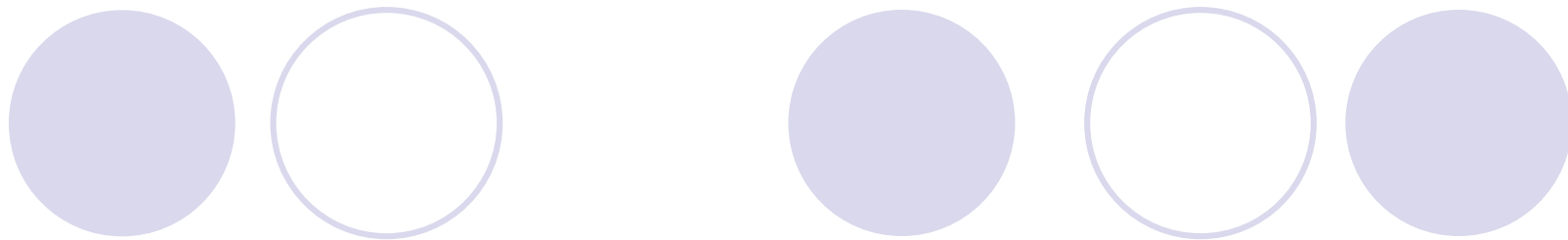


- **定义2:** 如果从所有可能的初始条件出发, 方程 (1) 的解 $x(t)$ 都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad (3)$$

则称平衡点 x_0 是**稳定的**（或**渐近稳定**）；

否则，称平衡点 x_0 是**不稳定的**（或**不渐近稳定**）；




(2) 判断平衡点 x_0 是否稳定的两种常用方法:

- 间接法: 利用定义2, 即利用 (3) 式.
- 直接法: 不求方程 (1) 的解 $x(t)$, 将 $f(x)$ 在点 x_0 处作泰勒展开, 只取一次项, 方程 (1) 近似为

$$\frac{dx(t)}{dt} = f'(x_0)(x - x_0) \quad (4)$$

(4) 称为 (1) 的近似线性方程, 显然 x_0 也为方程 (4) 的平衡点。



方程 (4) 的通解 $x(t) = ce^{f'(x_0)t} + x_0$

- 则关于平衡点 x_0 是否稳定有如下结论:
- 若 $f'(x_0) < 0$, 则平衡点 x_0 对于方程 (4) 和 (1) 都是稳定的;
- 若 $f'(x_0) > 0$, 则平衡点 x_0 对于方程 (4) 和 (1) 都是不稳定的

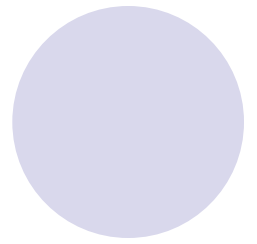
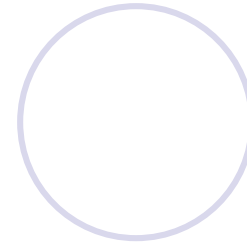
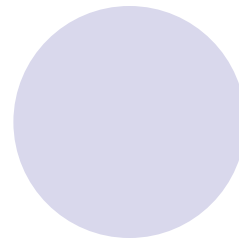
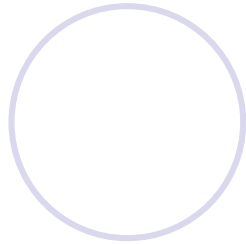
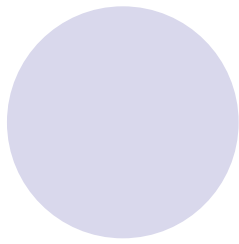
2、二阶方程的平衡点和稳定性

- 方程的一般形式可用两个一阶方程表示

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

定义3: 代数方程组 $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ 的实数根 $x = x_0, y = y_0$ ，称它为 (5) 的一个平衡点（或奇点），记为

$P_0(x_0, y_0)$.



- **定义4:** 如果从所有可能的初始条件出发, 方程 (5) 的解 $y(t)$, $x(t)$ 都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 \quad (6)$$

- 则称平衡点 $P_0(x_0, y_0)$ 是**稳定的** (或**渐近稳定**) ; 否则, 称 $P_0(x_0, y_0)$ 是**不稳定的** (或**不渐近稳定**) .

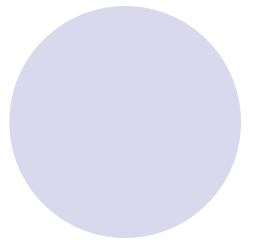
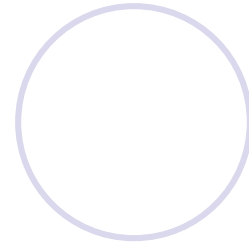
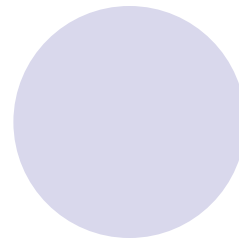
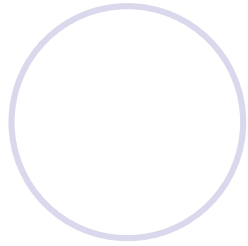
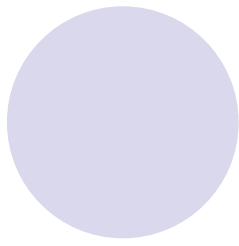
下面给出判断平衡点 p_0 是否稳定的判别准则， 设

$$\left\{ \begin{array}{l} p = - \left[\frac{\partial f(p_0)}{\partial x} + \frac{\partial g(p_0)}{\partial y} \right] \\ q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(p_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(p_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(p_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(p_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

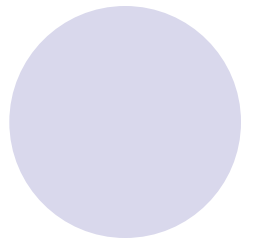
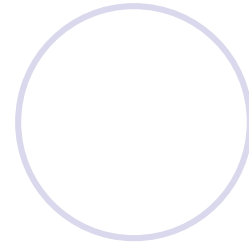
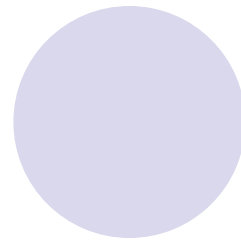
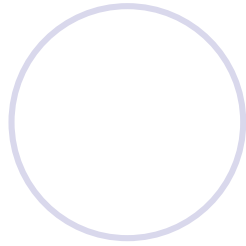
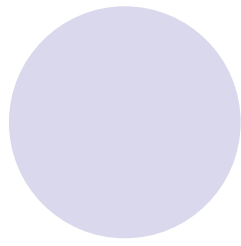
则当 $p > 0$ 且 $q > 0$ 时 p_0 是稳定的， 当 $p < 0$ 或 $q < 0$ 时平衡点 p_0 是不稳定的。

第二节 微分方程模型

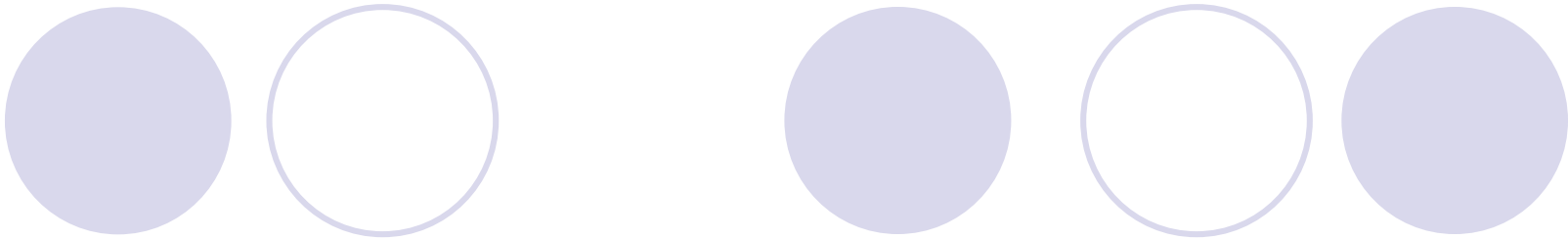
- 应用微分方程建立数学模型通常要运用如下两种方法：
- **1、所谓平衡原理**是指自然界的任何物质在其变化的过程中一定受到某种平衡关系的支配.注意发掘实际问题中的平衡原理是从物质运动机理的角度组建数学模型的一个关键问题.就象中学的数学应用题中等量关系的发现是建立方程的关键一样.

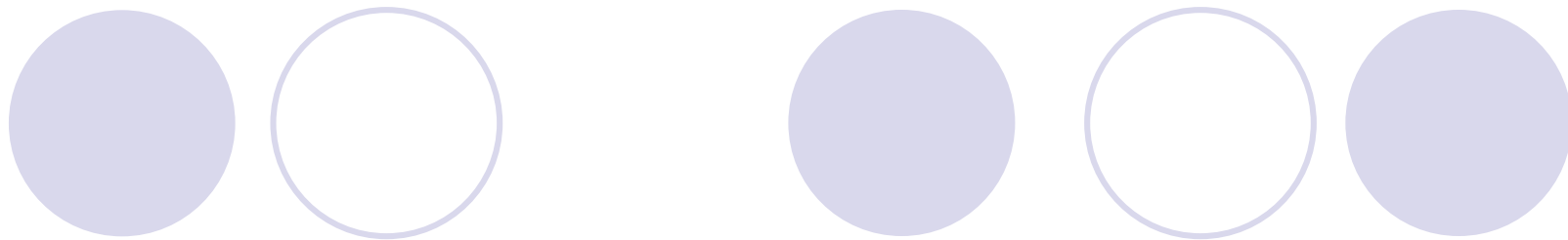


- **2、微元法**是指在组建对象随着时间或空间连续变化的动态模型时，经常考虑它在时间或空间的微小单元变化情况，这是因为在这些微元上的平衡关系比较简单，而且容易使用微分学的手段进行处理。这类模型基本上是以微分方程的形式给出的。



- 这里介绍几个典型的用微分方程建立数学模型的例子.
- 一、人口预测模型
- 由于资源的有限性,当今世界各国都注意有计划地控制人口的增长,为了得到人口预测模型,必须首先搞清影响人口增长的因素,而影响人口增长的因素很多,如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素,如果一开始就把所有因素都考虑进去,则无从下手.因此,先把问题简化,建立比较粗糙的模型,再逐步修改,得到较完善的模型.

- 
- 例1（马尔萨斯（**Malthus**）人口模型或称指数增长模型）
 - 英国人口统计学家马尔萨斯（1766—1834）在担任牧师期间,查看了教堂100多年人口出生统计资料,发现人口出生率是一个常数,于1789年在《人口原理》一书中提出了闻名于世的马尔萨斯人口模型,他的基本假设是：在人口自然增长过程中,净相对增长（出生率与死亡率之差）是常数,即单位时间内人口的增长量与人口成正比,比例系数设为 r ;在此假设下,推导并求解人口随时间变化的数学模型.



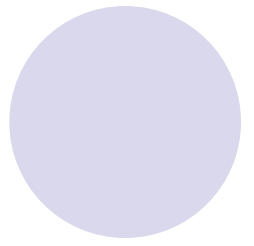
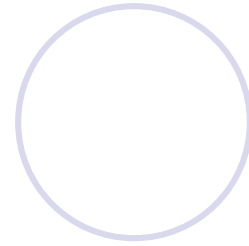
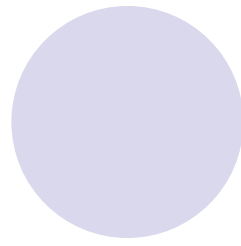
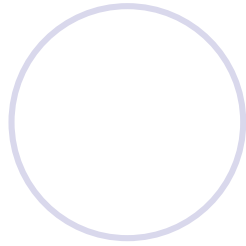
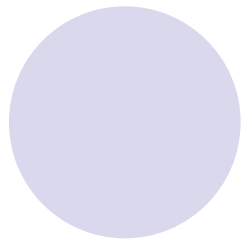
解 设 t 时刻的人口为 $N(t)$,把 $N(t)$ 当作连续、可微函数处理（因人口总数很大,可近似地这样处理,此乃离散变量连续化处理）,据马尔萨斯的假设,在 t 到 $t + \Delta t$ 时间段内,人口的增长量为

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

并设 $t = t_0$ 时刻的人口为 N_0 ,于是
$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases}$$

这就是马尔萨斯人口模型,用分离变量法易求出其解为
$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$$

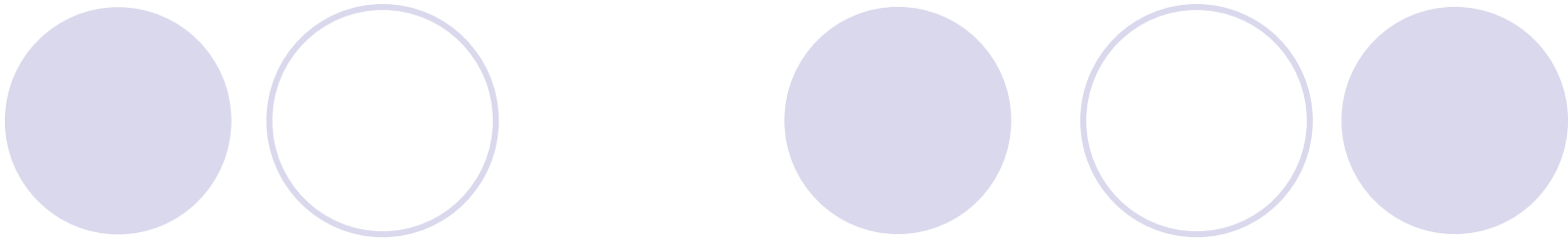
此式表明人口以指数规律随时间无限增长.



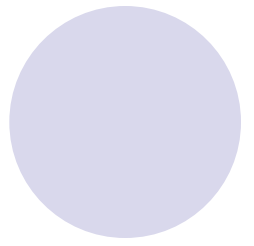
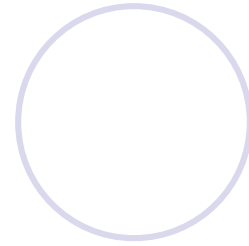
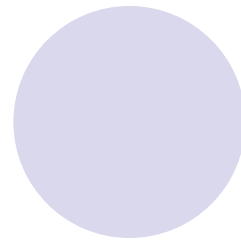
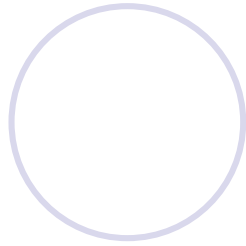
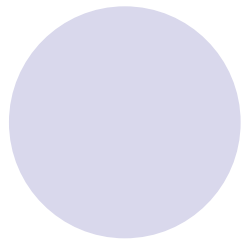
- 模型检验：据估计**1961**年地球上的人口总数为 3.06×10^9 ,而在以后**7**年中,人口总数以每年**2%**的速度增长,
- 这样 $t_0 = 1961$, $N_0 = 3.06 \times 10^9$, $r = 0.02$,于是

$$N(t) = 3.06 \times 10^9 e^{0.02(t-1961)}$$

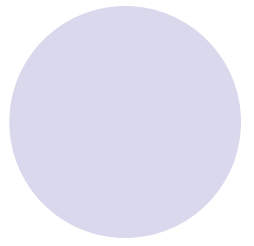
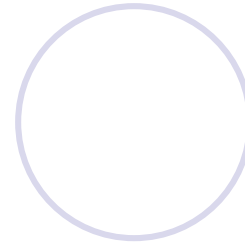
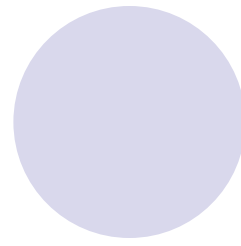
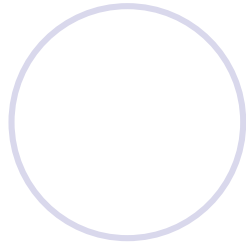
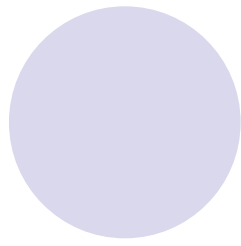
这个公式非常准确地反映了在**1700—1961**年间世界人口总数.因为,这期间地球上的人口大约每**35**年翻一番,而上式断定**34.6**年增加一倍.



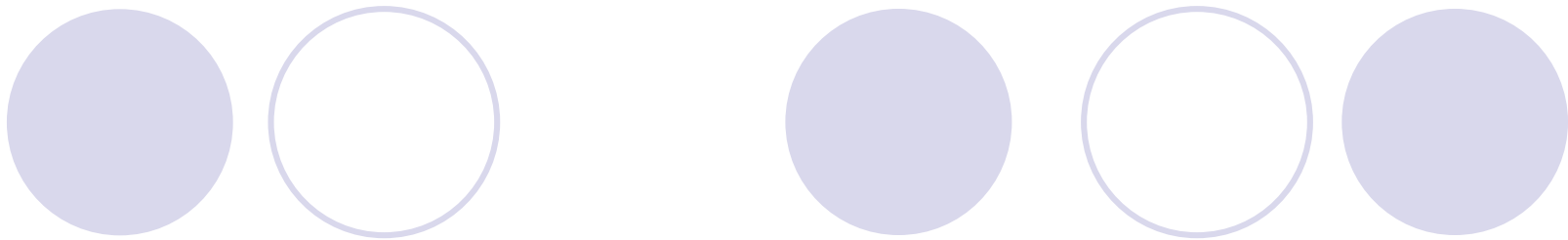
但是,后来人们以美国人口为例,用马尔萨斯模型计算结果与人口资料比较,却发现有很大的差异,尤其是在用此模型预测较遥远的未来地球人口总数时,发现更令人不可思议的问题,如按此模型计算,到**2670**年,地球上将有**36 000**亿人口.如果地球表面全是陆地(事实上,地球表面还有**80%**被水覆盖),我们也只得互相踩着肩膀站成两层了,这是非常荒谬的,因此,这一模型应该修改.



- **例2（Logistic模型或称阻滞增长模型）**
- 马尔萨斯模型为什么不能预测未来的人口呢？这主要是地球上的各种资源只能供一定数量的人生活,随着人口的增加,自然资源环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著,如果当人口较少时,人口的自然增长率可以看作常数的话,那么当人口增加到一定数量以后,这个增长率就要随人口的增加而减小.因此,应对马尔萨斯模型中关于净增长率为常数的假设进行修改.



- 1838年,荷兰生物数学家韦尔侯斯特(Verhulst)引入常数 N_m (最大人口容量),用来表示自然环境条件所能容许的最大人口数(一般说来,一个国家工业化程度越高,它的生活空间就越大,食物就越多,从而 N_m 就越大),并假设将增长率等于 $r\left(1 - \frac{N(t)}{N_m}\right)$,即净增长率随着 $N(t)$ 的增加而减小,当 $N(t) \rightarrow N_m$ 时,净增长率趋于零,按此假定建立人口预测模型.



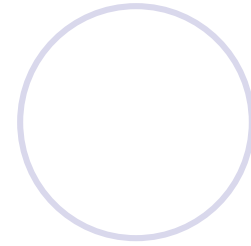
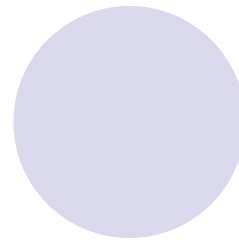
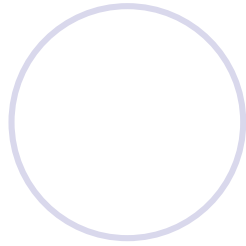
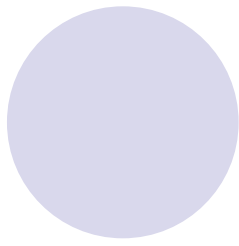
解 由韦尔侯斯特假定,马尔萨斯模型应改为

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) N, \\ N(t_0) = N_0 \end{cases},$$

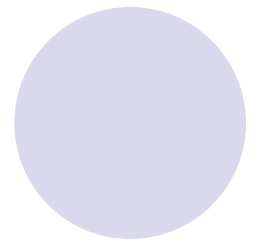
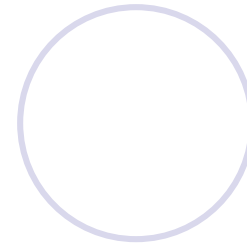
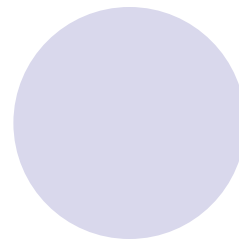
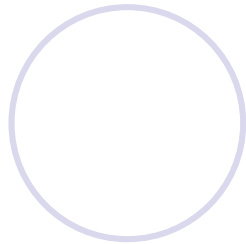
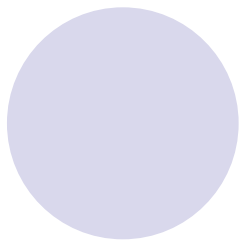
上式就是**Logistic**模型,该方程可分离变量,其解为

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\frac{N_m}{N_0} - 1 \right) e^{-r(t-t_0)}}$$

下面,我们对模型作一简要分析.



- (1) 当 $t \rightarrow \infty$, $N(t) \rightarrow N_m$, 即无论人口的初值如何, 人口总数趋向于极限值 N_m ;
- (2) 当 $0 < N < N_m$ 时, $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right) N > 0$, 这说明 $N(t)$ 是时间 t 的单调递增函数;

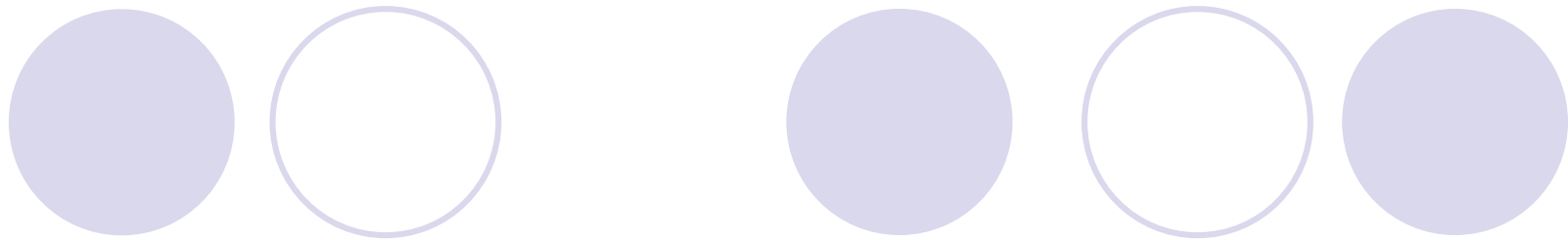


(3) 由于 $\frac{d^2N}{dt^2} = r^2 \left(1 - \frac{N}{N_m}\right) \left(1 - \frac{2N}{N_m}\right) N$, 所以当 $N < \frac{N_m}{2}$ 时, $\frac{d^2N}{dt^2} > 0$, $\frac{dN}{dt}$ 单增; 当时 $N > \frac{N_m}{2}$, $\frac{d^2N}{dt^2} < 0$, $\frac{dN}{dt}$ 单减, 即人口增长率 $\frac{dN}{dt}$ 由增变减, 在 $\frac{N_m}{2}$ 处最大,

也就是说在人口总数达到极限值一半以前是加速生长期, 过这一点后, 生长的速率逐渐变小, 并且迟早会达到零, 这是减速生长期;



(4) 用该模型检验美国从**1790**年到**1950**年的人口,发现模型计算的结果与实际人口在**1930**年以前都非常吻合,自从**1930**年以后,误差愈来愈大,一个明显的原因是在**20**世纪**60**年代美国的实际人口数已经突破了**20**世纪初所设的极限人口.由此可见该模型的缺点之一是 N_m 不易确定,事实上,随着一个国家经济的腾飞,它所拥有的食物就越丰富, N_m 的值也就越大;

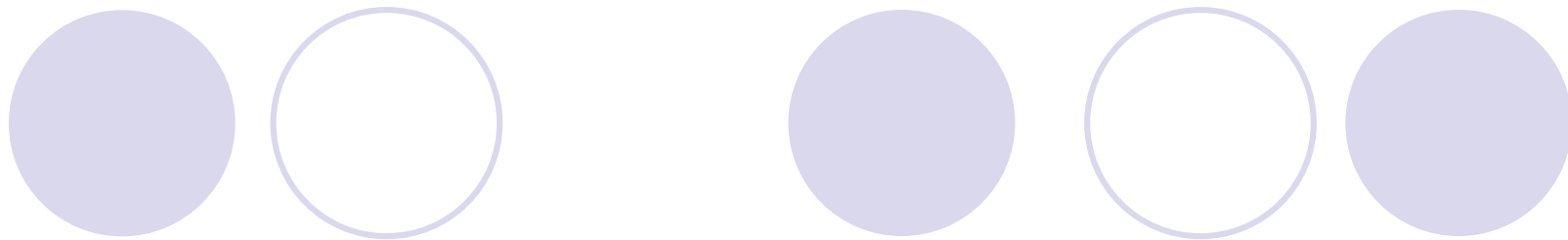


(5) 用**Logistic**模型来预测世界未来人口总数.某生物学家估计, $r = 0.029$, 又当人口总数为 3.06×10^9 时, 人口每年以**2%**的速率增长, 由**Logistic**模型得

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{N_m} \right)$$

即

$$0.02 = 0.029 \left(1 - \frac{3.06 \times 10^9}{N_m} \right)$$



从而得 $N_m = 9.86 \times 10^9$

即世界人口总数极限值近100亿.

值得说明的是：人也是一种生物,因此,上面关于人口模型的讨论,原则上也可以用于在自然环境下单一物种生存着的其他生物,如森林中的树木、池塘中的鱼等, **Logistic** 模型有着广泛的应用.

二、种群竞争

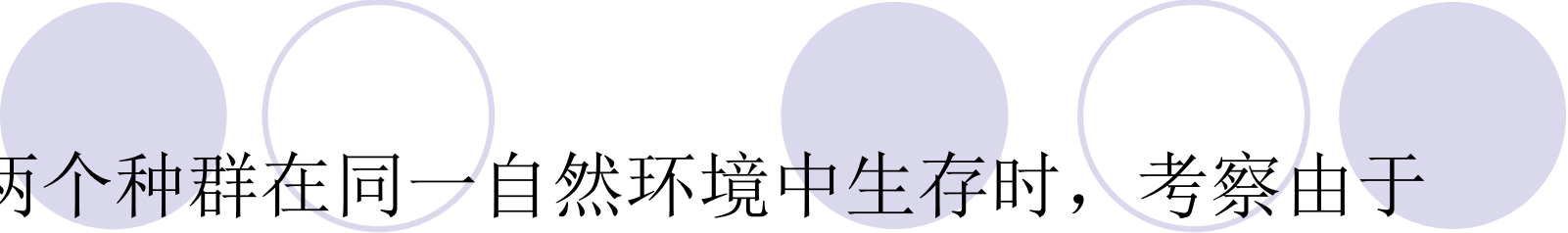
当某个自然环境中只有一种生物的群体（生态学上称为种群）生存时，人们常用**Logistic**模型来描述这个群数量的演变过程，即

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$x(t)$ 是种群在时刻 t 的数量， r 是固有增长率，

N 是环境资源容许的种群最大数量，

$x_0=N$ 是稳定平衡点，即 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow N$ ，从模型本身的意义看这是明显的结果。



当两个种群在同一自然环境中生存时，考察由于乙消耗同一种有限资源对甲的增长产生的影响
得到种群甲方增长的方程

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

类似地，甲的存在也影响了乙的增长，种群乙的方程应该是

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

稳定性分析 为了研究两个种群相互竞争的结局，即 $t \rightarrow \infty$ 时 $x_1(t), x_2(t)$ 的趋向，不必要解方程（2）、（3），只需对它的平衡点进行稳定性分析。首先根据微分方程（2）、（3）解代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}) = 0 \\ g(x_1, x_2) = r_2 x_2 (1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}) = 0 \end{cases}$$

得到4个平衡点：

$$P_1(N_1, 0), P_2(0, N_2), P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}), P_4(0, 0)$$

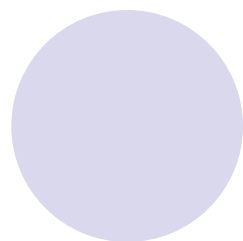
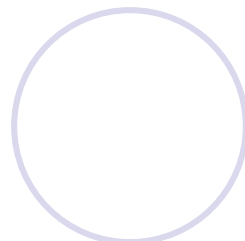
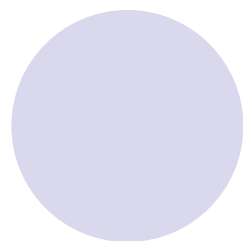
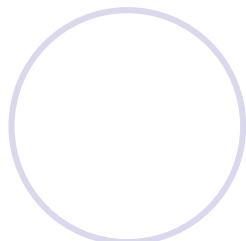
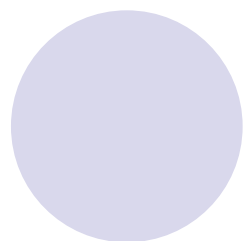
因为仅当平衡点位于平面坐标系的第一象限时才有实际意义，所以对 P_3 而言要求 σ_1 σ_2 同时小于1，或同时大于1。

按照判断平衡点性的方法（见前面）计算

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2}) & -\frac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2(1 - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \frac{2x_2}{N_2}) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x_1} + g_{x_2})|_{P_i}, i = 1, 2, 3, 4$$

$$q = \det A|_{P_i}, i = 1, 2, 3, 4$$

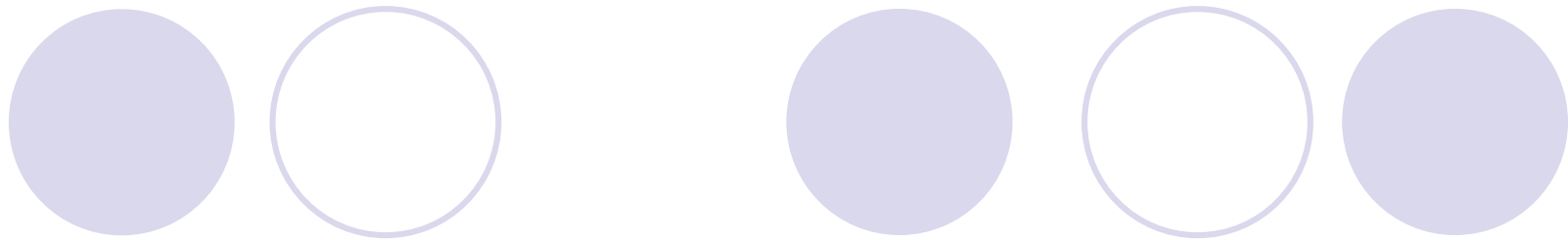


平衡点↵	p ↵	q ↵	稳定条件↵
$P_1(N_1, 0)$ ↵	$r_1 - r_2(1 - \sigma_2)$ ↵	$-r_1r_2(1 - \sigma_2)$ ↵	$\sigma_2 > 1$ ↵
$P_2(0, N_2)$ ↵	$-r_1(1 - \sigma_1) + r_2$ ↵	$-r_1r_2(1 - \sigma_1)$ ↵	$\sigma_1 > 1$ ↵
$P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2})$ ↵	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ ↵	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ ↵	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ ↵
$P_4(0, 0)$ ↵	$-(r_1 + r_2)$ ↵	r_1r_2 ↵	不稳定↵

↵

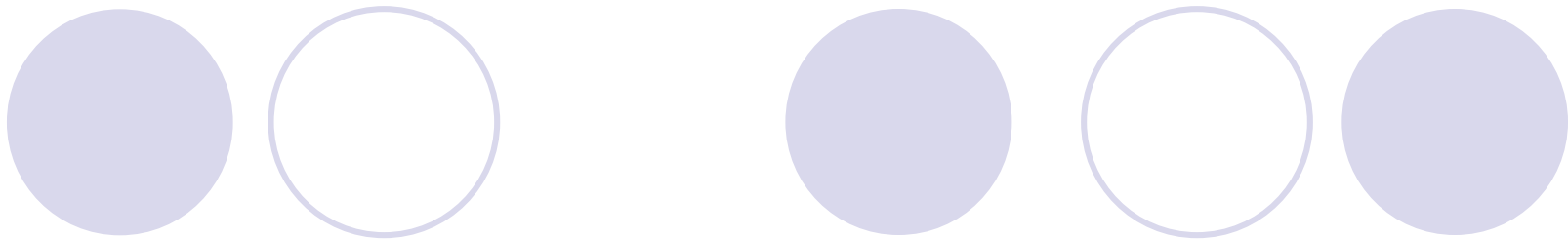
三、市场价格模型

对于纯粹的市场经济来说,商品市场价格取决于市场供需之间的关系,市场价格能促使商品的供给与需求相等(这样的价格称为(静态)均衡价格).也就是说,如果不考虑商品价格形成的动态过程,那么商品的市场价格应能保证市场的供需平衡,但是,实际的市场价格不会恰好等于均衡价格,而且价格也不会是静态的,应是随时间不断变化的动态过程.



例3 试建立描述市场价格形成的动态过程的数学模型

解 假设在某一时刻 t , 商品的价格为 $p(t)$, 它与该商品的均衡价格间有差别, 此时, 存在供需差, 此供需差促使价格变动. 对新的价格, 又有新的供需差, 如此不断调节, 就构成市场价格形成的动态过程, 假设价格 $p(t)$ 的变化率 $\frac{dp}{dt}$ 与需求和供给之差成正比, 并记 $f(p, r)$ 为需求函数, $g(p)$ 为供给函数 (r 为参数), 于是



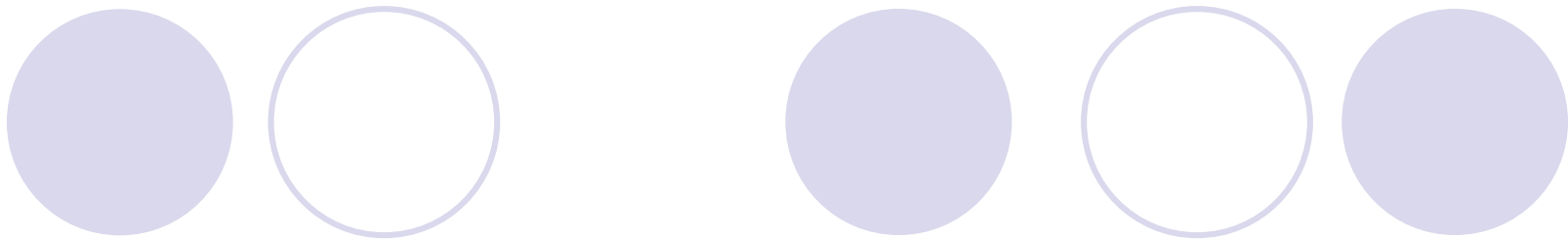
$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha [f(p, r) - g(p)] , \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

其中 p_0 为商品在时刻 $t = 0$ 的价格, α 为正常数.

若设 $f(p, r) = -ap + b$, $g(p) = cp + d$, 则上式变为

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\alpha(a + c)p + \alpha(b - d) , \\ p(0) = p_0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

其中 a, b, c, d 均为正常数.



其解为

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{b-d}{a+c} \right) e^{-\alpha(a+c)t} + \frac{b-d}{a+c}$$

下面对所得结果进行讨论:

(1) 设 \bar{p} 为静态均衡价格, 则其应满足

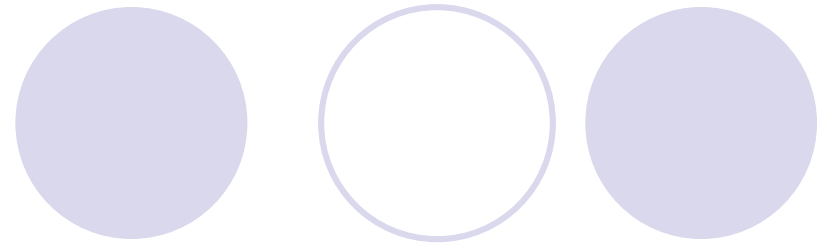
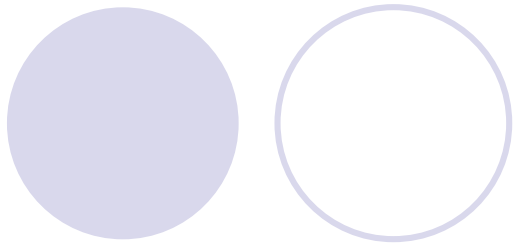
$$f(\bar{p}, r) - g(\bar{p}) = 0$$

即

$$-a\bar{p} + b = c\bar{p} + d$$

于是得 $\bar{p} = \frac{b-d}{a+c}$ 从而价格函数 $p(t)$ 可写为

$$p(t) = (p_0 - \bar{p})e^{-\alpha(a+c)t} + \bar{p}$$



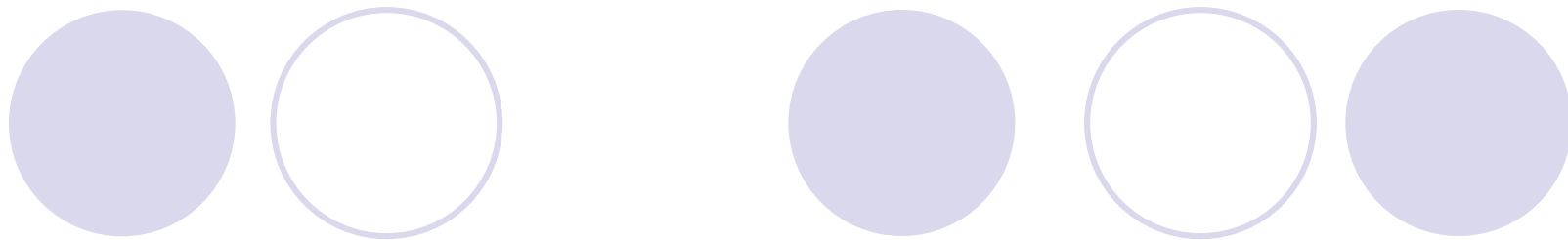
令 $t \rightarrow +\infty$,取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \bar{p}$$

这说明,市场价格逐步趋于均衡价格.又若初始价格

$p_0 = \bar{p}$,则动态价格就维持在均衡价格 \bar{p} 上,

整个动态过程就化为静态过程;



(2) 由于
$$\frac{dp}{dt} = (\bar{p} - p_0)\alpha(a + c)e^{-\alpha(a+c)t}$$

所以,当 $p_0 > \bar{p}$ 时, $\frac{dp}{dt} < 0$ $p(t)$ 单调下降向 \bar{p} 靠拢;

当 $p_0 < \bar{p}$ 时, $\frac{dp}{dt} > 0$ $p(t)$ 单调增加向 \bar{p} 靠拢.

这说明: 初始价格高于均衡价格时,动态价格就要逐步降低,且逐步靠近均衡价格;否则,动态价格就要逐步升高.因此,式①在一定程度上反映了价格影响需求与供给,而需求与供给反过来又影响价格的动态过程,并指出了动态价格逐步向均衡价格靠拢的变化趋势.

• 建模假设的 **修改** :

(1) 商品需求 $D(t)$ 随价格 $p(t)$ 的增大而下降 .

假定它们之间的关系近似为 **线性关系** :

$$D(t) = d_0 - d_1 \cdot p(t)$$

(2) 商品供应 $S(t)$ 随价格 $p(t)$ 的增大而上升 .

假定它们之间的关系也近似为 **线性关系** ;

$$S(t) = s_0 + s_1 \cdot p(t)$$

(3)* 商品价格的变化速度 $p'(t)$ 与市场的 **过剩需求** $D(t) - S(t)$ 对时间 t 的累积量有关 (即考虑过剩需求的时间滞后效应) .

假定它们之间成 **正比** :

$$p'(t) = a \cdot \int_0^t [D(\tau) - S(\tau)] d\tau$$

• 模型再建立:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(t) = d_0 - d_1 \cdot p(t) \\ S(t) = s_0 + s_1 \cdot p(t) \\ p'(t) = a \cdot \int_0^t [D(\tau) - S(\tau)] d\tau, \\ p(0) = p_0 \end{array} \right. .$$

$$p'(t) = a \cdot \int_0^t [(d_0 - s_0) - (d_1 + s_1) \cdot p(t)] dt$$

$$p''(t) + a(d_1 + s_1)p(t) = a(d_0 - s_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(t) &= c_1 \sin(\sqrt{a(d_1 + s_1)} t) + c_2 \cos(\sqrt{a(d_1 + s_1)} t) + p^* \\ &= A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + p^* \end{aligned}$$

商品价格随时间演变而处在 **等幅震荡** 之中。

结论还未能达到建模目的！

- 建模假设的 **再次修改**：
假设 (1)、(2) 不变；

$$\begin{cases} D(t) = d_0 - d_1 \cdot p(t) \\ S(t) = s_0 + s_1 \cdot p(t) \end{cases}$$

- (3)** 商品价格的变化速度 $p'(t)$ 不仅与市场过剩需求 $D(t) - S(t)$ 对时间 t 的累积量有关，
仍假定它们之间成 **正比**；
还与当时的价格与平衡价格 p^* 的 **偏差程度** 有关
(即考虑健全的市场有政府宏观调控因素)，
假定它们之间也成 **正比**，且比例系数

$$k < 2\sqrt{a(d_1 + s_1)} \quad (\text{强调政府宏观调控只是微调}).$$
$$\Rightarrow p'(t) = a \cdot \int_0^t [D(t) - S(t)] dt - k(p(t) - p^*)$$

- 模型又一次建立:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(t) = d_0 - d_1 \cdot p(t) \\ S(t) = s_0 + s_1 \cdot p(t) \\ p'(t) = a \int_0^t [D(\tau) - S(\tau)] d\tau - k(p(t) - p^*), \\ p(0) = p_0 \end{array} \right. ,$$

$$p''(t) + kp'(t) + a(d_1 + s_1)p(t) = a(d_0 - s_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(t) &= [c_1 \sin(\frac{\sqrt{4a(d_1 + s_1) - k^2}}{2}t) + c_2 \cos(\frac{\sqrt{4a(d_1 + s_1) - k^2}}{2}t)] \cdot e^{-\frac{kt}{2}} + p^* \\ &= A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \cdot e^{-\frac{kt}{2}} + p^* \end{aligned}$$

商品价格随时间演变而呈现 **阻尼震荡** 现象。

该结论达到建模目的！ 模型可采用

四、传染病模型

建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程，分析受感染人数的变化规律，探索制止传染病蔓延的手段等，一直是关注的课题。不同类型的传染病的传播过程有其各自不同的特点，从一般的传播机理分析建立各种模型，如简单模型（I模型），SI模型，SIS模型，SIR模型等、

SIS传染病模型

SIS传染病模型是指易感者（Susceptible）被传染后变为染病者（Infective），染病者可以被治愈，但不会产生免疫力，所以仍为易感者，人员流动图为： $S \rightarrow I \rightarrow S$ 。

模型1

已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触 (足以使人致病) 人数为 λ

建模

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \lambda i$$

$$i(0) = i_0$$



$$i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$



$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，
则不能使病人数增加



必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)



模型2

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1) 总人数 N 不变, 病人和健康人的比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2) 每个病人每天有效接触人数为 λ , 且使接触的健康人致病

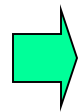
$\lambda \sim$ 日接触率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si$$

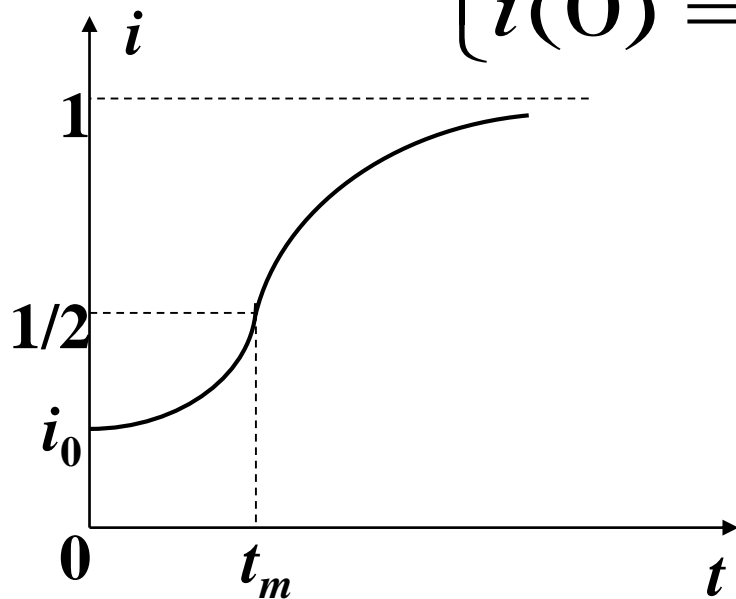
$$s(t) + i(t) = 1$$



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$t=t_m$, di/dt 最大

$t_m \sim$ 传染病高潮到来时刻

λ (日接触率) $\downarrow \rightarrow t_m \uparrow$

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right) e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right)$$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 1$?

病人可以治愈!

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设

3) 病人每天治愈的比例为 μ

μ ~ 日治愈率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

λ ~ 日接触率

$1/\mu$ ~ 感染期

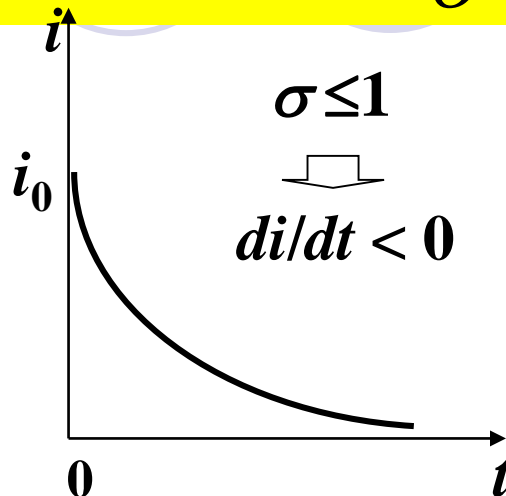
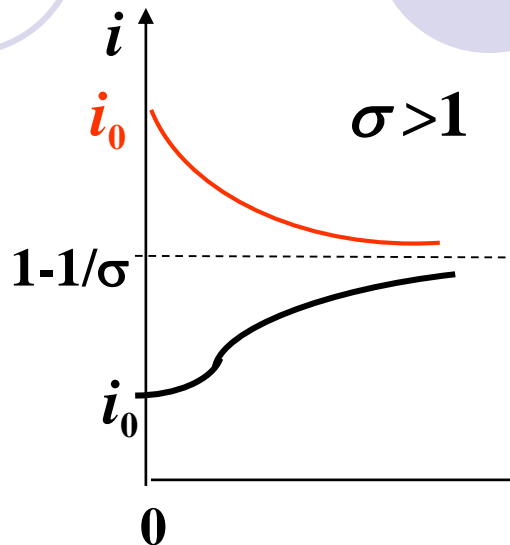
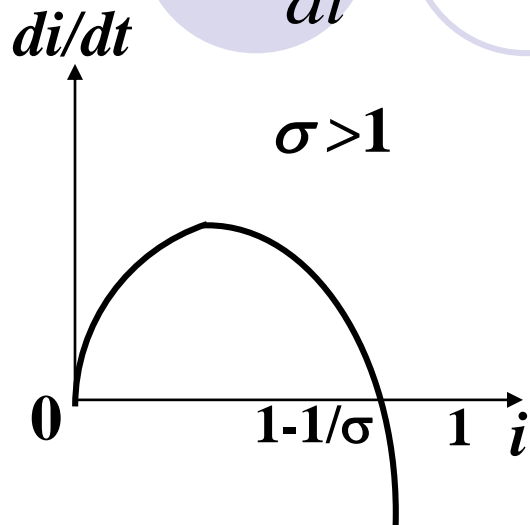
$$\sigma = \lambda / \mu$$

σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

模型3

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \quad \sigma = \lambda / \mu$$

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right]$$



$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$$

接触数 $\sigma = 1$ ~ 阈值

$$\sigma \leq 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$$

$\sigma > 1$

i_0 小 $\Rightarrow i(t)$ 按 S 形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

SIR模型

假设

- 1) 总人数 N 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t)$, $s(t)$, $r(t)$
- 2) 病人的日接触率 λ ，日治愈率 μ ，
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t)$, $s(t)$, $r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda s i - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda s i \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

无法求出 $i(t), s(t)$
的解析解

在相平面 $s \sim i$ 上
研究解的性质

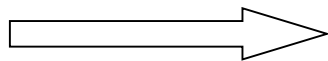
$i_0 + s_0 \approx 1$ (通常 $r(0) = r_0$ 很小)

模型4

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去 dt

$$\sigma = \lambda / \mu$$



SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

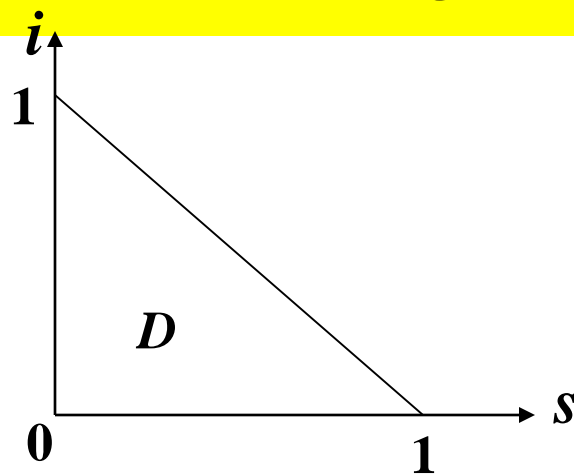
相轨线 \Downarrow

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

在 D 内作相轨线 $i(s)$
的图形, 进行分析



模型4

相轨线 $i(s)$ 及其分析

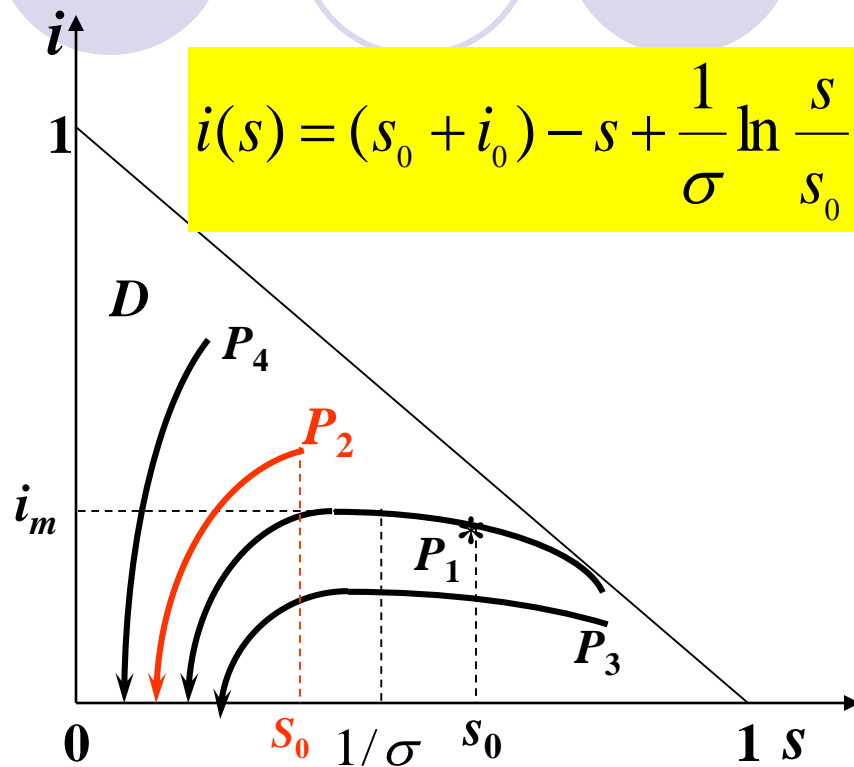
SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$s(t)$ 单调减 \rightarrow 相轨线的方向

$$s = 1/\sigma, i = i_m \quad t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$$

$$s_\infty \text{ 满足 } s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$



$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

$P_1: s_0 > 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 先升后降至0

\Rightarrow 传染病蔓延

$P_2: s_0 < 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 单调降至0

\Rightarrow 传染病不蔓延

$1/\sigma$
~ 阈值

s_∞

模型4

预防传染病蔓延的手段

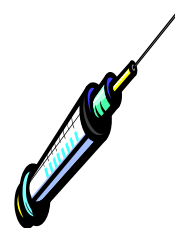
SIR模型

传染病不蔓延的条件—— $s_0 < 1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ \Rightarrow 降低 $\sigma (= \lambda/\mu)$ $\Rightarrow \lambda \downarrow, \mu \uparrow$

λ (日接触率) $\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平 \uparrow

μ (日治愈率) $\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平 \uparrow



- 降低 s_0 \Rightarrow 提高 r_0 \Rightarrow 群体免疫

$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

σ 的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \text{忽略 } i_0$$

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

模型4

被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$



$$i_0 \cong 0, s_0 \cong 1$$

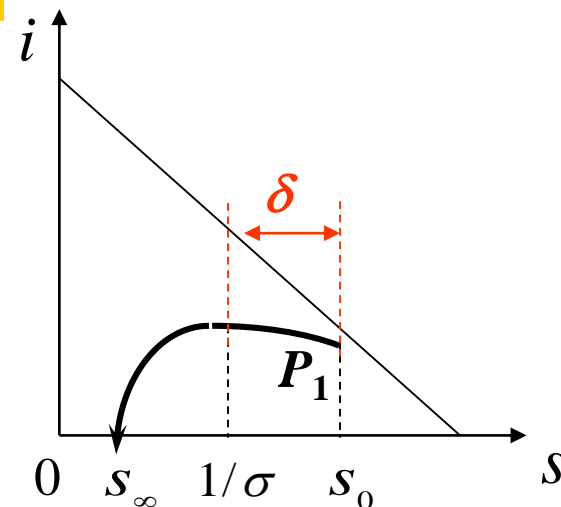
$$x + \frac{1}{\sigma} \ln(1 - \frac{x}{s_0}) \cong 0$$



$$x \ll s_0$$

$$x(1 - \frac{1}{s_0 \sigma} - \frac{x}{2s_0^2 \sigma}) \cong 0$$

$$\Rightarrow x \approx 2s_0 \sigma (s_0 - \frac{1}{\sigma})$$



$$s_0 - 1/\sigma = \delta$$



$$x \cong 2\delta$$

$$\delta \text{ 小, } s_0 \sigma \cong 1$$

提高阈值 $1/\sigma \rightarrow$ 降低
被传染人数比例 x

模型5

传染病有潜伏期

SEIR模型

假设

- 1) 总人数 N 不变, 病人、健康人、潜伏者和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), e(t), r(t)$
- 2) 病人的日接触率 λ , 日治愈率 μ ,
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$
- 3) 单位时间内潜伏者以比例常数 β 转为染病者

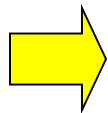
建模

$$s(t) + i(t) + e(t) + r(t) = 1$$

建立 $i(t), s(t), e(t), r(t)$ 方程

模型5

SEIR模型



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ \frac{de}{dt} = \lambda si - \beta e \\ \frac{di}{dt} = \beta e - \mu i \\ \frac{dr}{dt} = \mu i \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0, e(0) = e_0 \end{array} \right.$$

五、热传导方程的导出

物理模型：在三维空间中，考虑一均匀、各向同性的物体 G （其边界为分片光滑曲面 Γ ），假定其内部有热源，并且与周围介质有热交换。研究物体内部温度的分布和变化。

物理定律：物体内部由于各部分温度不同，产生热量的传递。热传导过程中遵循 **能量守恒定律**，即，物体内部热量的增加等于通过物体的边界流入的热量与由物体内部的热源所产生的热量的总和：

在 G 内任取一小块区域 Ω ，其边界为闭曲面 $\partial\Omega$ 。

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{热量} \\ t=t_2 \end{array} - \begin{array}{c} \text{热量} \\ t=t_1 \end{array}}_{Q_1} = \underbrace{\begin{array}{c} \text{通过边界的流入量} \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array}}_{Q_2} + \underbrace{\begin{array}{c} \text{热源的生成量} \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array}}_{Q_3}$$

数学推导：

①在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内，物体 Ω 的温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 变到 $u(x, y, z, t_2)$ 所需要的热量为 Q_1 ：

$$Q_1 = \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dx dy dz$$

其中 $c(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$ 分别为点 (x, y, z) 处的比热与质量体密度。由于考虑的是均匀、各向同性的物体, 因此 $c(x, y, z) = c(\text{常数})$, $\rho(x, y, z) = \rho(\text{常数})$ 。

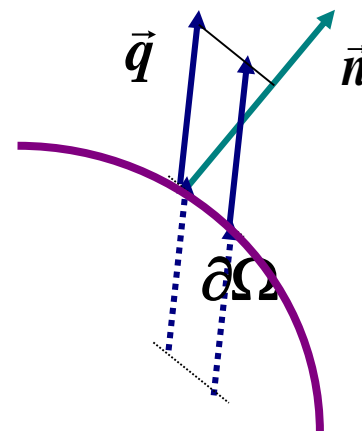
$$\begin{aligned}\therefore Q_1 &= \iiint_{\Omega} c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]dx dy dz \\&= \iiint_{\Omega} \left[c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} dt \right] dx dy dz \\&= \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left[c\rho \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right] dx dy dz dt\end{aligned}$$

②由 **Fourier 热传导定律**：热流向量 \vec{q} 与温度的梯度成正比，即

$$\vec{q} = -k\nabla u = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

负号表明热量是由高温向低温流动，
 k 是导热系数，这里为常数。

设 \vec{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，则



$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial\Omega} k \nabla u \cdot \vec{n} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial\Omega} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} \nabla(k \nabla u) dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} k \Delta u dx dy dz \end{aligned}$$

③ 设物体内部热源密度为 $F(x, y, z, t)$, 则

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dx dy dz$$

由能量守恒律, 得:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} [k\Delta u + F(x, y, z, t)] dx dy dz$$

由 $[t_1, t_2]$ 及 Ω 的任意性知:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + F(x, y, z, t)$$

记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{F}{c\rho}$, 得三维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$$

或写为: $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$ (1)

若物体内部无热源, 则 $f \equiv 0$, 得齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

或写为: $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ (2)