

文章编号:1005-3085(2005)07-0108-05

## DVD 在线租赁

黄 梅, 李 忠, 白海军

指导教师: 符 伟

(西南交通大学峨眉校区, 四川峨眉 614202)

**编者按:** 本文采用 0-1 规划和 lingo 软件解决了 DVD 分配问题; 采用了双目标线性规划模型, 并加权处理为单目标问题, 给出了较好的结果, 方法简洁、恰当。

**摘 要:** 针对网站 DVD 在线租赁问题, 我们建立了以线性规划为基础的单目标、多目标及混合整数规划等多个数学模型, 很好的解决了 DVD 的分配问题。对问题一, 我们建立了单目标整数规划模型, 利用 lingo 数学软件包求解, 求出了两种不同情况下 DVD 的最小购买量; 对问题二, 首先我们对所给的表格数据进行了规范化处理, 采用倒数公式得到了每个人对每种 DVD 的满意度系数矩阵, 然后建立了单目标混合整数规划的数学模型, 最后使用 lingo 数学软件包求得了最大满意度时的 DVD 分发方案; 对问题三, 我们建立了双目标规划模型, 为使 DVD 的购买量最小且会员满意度最大, 引进了权重系数  $\varphi$ , 通过加权组合构造了一个新的单目标的混合整数规划模型, 最后使用 lingo 数学软件包求得了每种 DVD 的最小购买量以及此时 DVD 的分配方案。

**关键词:** 满意度; 在线租赁

**分类号:** AMS(2000) 90C10

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

## 1 基本假设

- 1) 网站根据现有 DVD 数量及会员订单对各类 DVD 进行分发, 且只对当前在线人数进行统计。
- 2) 每位会员对同一种 DVD 只租一次。
- 3) 每个会员每个月租赁次数不得超过2次, 每次获得3张 DVD。
- 4) 会员提交的订单包括多张 DVD, 这些 DVD 是基于其偏爱程度排序。
- 5) 对愿意观看这五类 DVD 的人数调查出来的结果具有代表性。

## 2 问题二的建模与求解

## 1) 问题分析

要使会员总的满意度最大, 首先我们需要对题目所给出的体现第  $i$  个会员对第  $j$  类 DVD 的偏爱程度的数据进行规范化处理, 我们采用简单的倒数公式, 即:  $c_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$ , 这里  $a_{ij}$  为表中所给数据, 且  $a_{ij} = 0$  时, 定义  $c_{ij} = 0$  目标函数为全体会员的满意度, 即

$$W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}$$

约束条件有:

## ① DVD 总数的约束

$$\sum_{i=1}^{100} x_{ij} = b_j,$$

## ② 每位会员每次只能租3张或不租的约束

$$\sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i.$$

## 2) 模型建立

按照以上分析, 我们建立了下列 0-1 规划模型

$$\begin{aligned} \max W &= \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \sum_{i=1}^{100} x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100; j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sigma_i \in \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

## 3) 模型求解

利用 Lingo 软件我们很快就求出了问题的解, 得到了前30位会员 DVD 分发策略如表1。

表 1: 前30位会员 DVD 分发策略表

会员名	获得 DVD 的编号	会员名	获得 DVD 的编号
C0001	D003, D017, D020	C0016	D007, D011, D017
C0002	D001, D006, D012	C0017	D004, D007, D017
C0003	D013, D017, D020	C0018	D007, D018, D020
C0004	D007, D011, D012	C0019	D006, D007, D017
C0005	D006, D007, D019	C0020	D006, D009, D020
C0006	D006, D012, D016	C0021	D006, D013, D015
C0007	D007, D011, D020	C0022	D003, D007, D011
C0008	D007, D013, D014	C0023	D011, D012, D013
C0009	D003, D007, D015	C0024	D007, D011, D017
C0010	D010, D012, D017	C0025	D006, D017, D020
C0011	D003, D007, D010	C0026	D003, D006, D016
C0012	D007, D011, D019	C0027	D006, D007, D010
C0013	D006, D017, D019	C0028	D005, D007, D009
C0014	D006, D016, D017	C0029	D012, D013, D020
C0015	D007, D017, D020	C0030	D003, D017, D020

### 3 问题三的建模与求解

#### 1) 问题分析

问题三中有两个目标：最少的购买量和最大的满意度，于是我们建立了双目标规划模型，并将其通过加权组合转化为单目标的混合整数规划模型。

首先会员的满意程度仍采用问题二中的规范化处理方法，得到每个人对每种 DVD 的满意度系数矩阵  $c_{ij}$ ，那么总的满意度  $W$  和总的购买量分别为

$$W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}, \quad Z = \sum_{j=1}^{20} z_j.$$

目标函数和约束条件为

$$\begin{aligned} \max Y &= \varphi W - (1 - \varphi) Z \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} &= 3\sigma_i, \quad \sum_{i=1}^{100} x_{ij} \leq z_j, \\ \sum_{i=1}^{100} \sigma_i &\geq \lambda M, \quad \text{其中 } \lambda = 95\%; \quad M = 100. \end{aligned}$$

#### 2) 模型建立

经过以上的分析，我们建立了如下的混合整数规划模型：

$$\begin{aligned} \max Y &= \varphi W - (1 - \varphi) Z \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} W = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} c_{ij} x_{ij}, & i = 1, 2, \dots, 100, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ Z = \sum_{j=1}^{20} z_j, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 3\sigma_i, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ \sum_{i=1}^{100} x_{ij} \leq z_j, & j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sum_{i=1}^{100} \sigma_i \geq \lambda M, & i = 1, 2, \dots, 100, \\ x_{ij} = \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100, \quad j = 1, 2, \dots, 20, \\ \sigma_i = \{0, 1\}, & i = 1, 2, \dots, 100. \end{cases} \end{aligned}$$

#### 3) 模型求解

利用 lingo 数学软件，我们对该混合整数规划模型进行了求解，得到了网站应决定的各种 DVD 的购买量如表2。

此时部分 DVD 的分配方案如表3。

在问题三中，我们只对权重系数  $\varphi = 0.618$  时的情况给出了结果，而这个权重系数是可以根据实际情况发生改变的，如果更注重成本则可以选择较小的  $\varphi$ ，如果更注重会员的感受则可以选择稍大的  $\varphi$ 。

表 2: 网站购买各种 DVD 的数量表

DVD种类	网 站 定 购DVD数量	欢迎程度	DVD种类	网 站 定 购DVD数量	欢迎程度
D001	16	0.056	D011	15	0.053
D002	10	0.035	D012	15	0.053
D003	16	0.056	D013	16	0.056
D004	15	0.053	D014	12	0.042
D005	10	0.035	D015	17	0.060
D006	18	0.063	D016	10	0.035
D007	15	0.053	D017	15	0.053
D008	17	0.060	D018	14	0.049
D009	19	0.067	D019	16	0.056
D010	12	0.042	D020	7	0.025

表 3: 部分 DVD 的分配表

会员名	C0001	C0002	C0003	C0004	C0005	C0006
获得DVD的编号	D003 D008 D016	D001 D012 D015	D013 D014 D017	D011 D012 D019	D013 D015 D019	D012 D015 D016
会员名	...	C0050	C0051	C0052	C0053	...
获得DVD的编号	...	D001 D005 D006	D003 D017 D018	D001 D004 D015	D010 D015 D019	...
会员名	C0095	C0096	C0097	C0098	C0099	C0100
获得DVD的编号	D007 D009 D011	D009 D017 D019	D002 D012 D014	D001 D006 D018	D002 D013 D014	D009 D016 D018

由于各类 DVD 的受欢迎程度对其购买量具有较强的影响力, 所以各类 DVD 的受欢迎程度的比例图也可以给网站在购买各种 DVD 时提供有用参考数据, 其中各类 DVD 受欢迎程度比例图如图1。

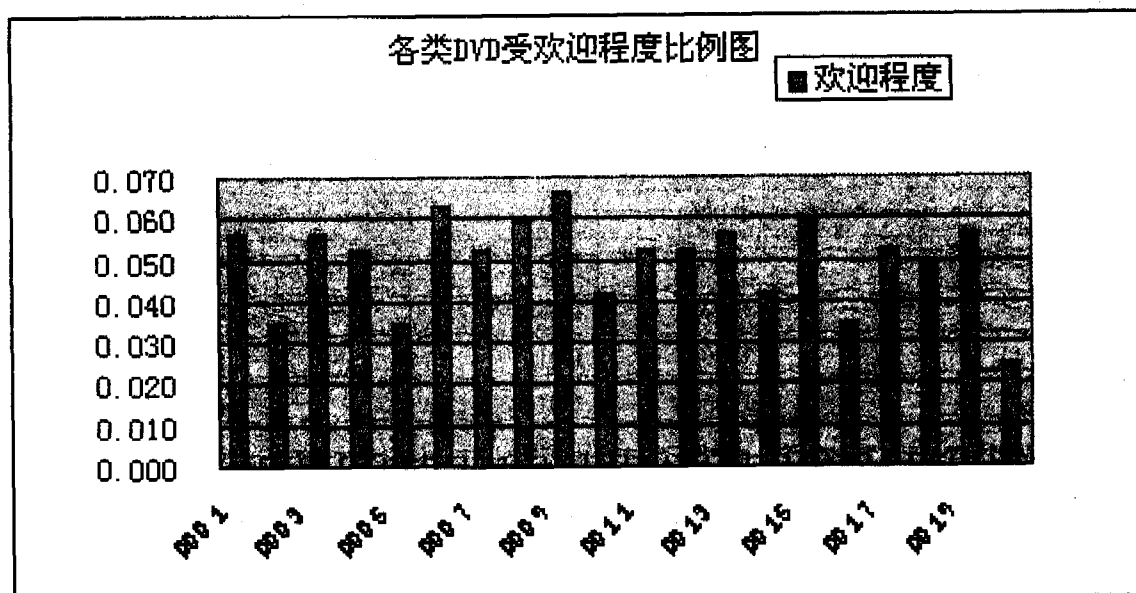


图 1: 各类 DVD 受欢迎程度比例图

#### 参考文献:

- [1] 费培之等. 数学模型实用教程[M]. 成都: 四川大学出版社, 1998年
- [2] 朱德通. 最优化模型与实验[M]. 上海: 同济大学出版社, 2003年
- [3] 卢开澄. 单目标、多目标与整数规划[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999年

### DVD On-line Rents

HUANG Mei, LI Zhong, BAI Hai-jun

Advisor: FU Wei

(Emei School, Southwest Jiaotong University Emeishan City 614202)

**Abstract:** Aimed at the problem of renting DVD on-line, 0-1 planning mathematical model is established. By using Lingo software the problem of assigning DVD has been solved reasonably. Specially, for problem 3, a double-object linear programming model is approached, then processed to the single-object problem by weighting treatment, the better results are obtained.

**Keywords:** degree of satisfaction; on-line rents