

中国地质大学暑期建模专题培训

# 数学建模 —— 对策论

付丽华

2019.08

# 教学目标与要求

## 【教学目标】

1. 理解下列基本概念：

矩阵对策，矩阵对策三要素，最优纯策略与最优混合策略，鞍点和对策值

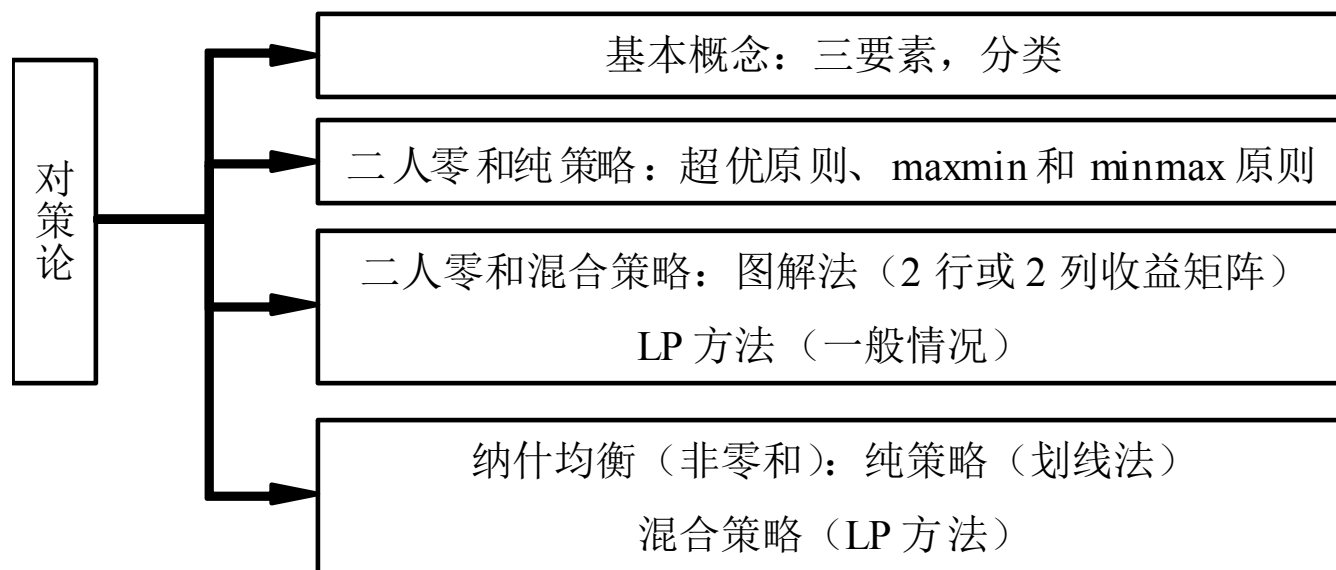
2. 算法要求：

(1) 会用“超优原则”和“最大最小”原则求矩阵对策的最优纯策略

(2) 会用“线性规划”方法求矩阵对策的最优混合策略

(3) 了解纯策略和混合策略的纳什均衡求取。

## 【知识结构】





## 田忌赛马

在我国古代，“田忌赛马”就是一个典型的对策论的例子。战国时期，大将田忌与齐王赛马，比赛分三局，每局双方各出一匹马比赛，负者要付胜者千金，双方都有上、中、下三个等级的马，已知同一级别的马比赛，田忌的马要输给齐王，但是田忌的上等马优于齐王的中等马，田忌的中等马优于齐王的下等马。如果田忌与齐王的同等级的马比赛，田忌要连输三局而付给齐王三千金。当时田忌的一位谋士孙臆出了一个对策，每局比赛先让齐王出马，然后用下等马对齐王的上等马，用上等马对齐王的中等马，用中等马对齐王的下等马，结果田忌两胜一负，赢得千金。





冯·诺依曼 1903-1957

对策论又称为博弈论(Game Theory)、游戏论,是一门研究游戏中参加者各自所选择策略的科学。通常认为是现代数学的一个分支,也是运筹学中的一个重要学科。对策论发展的历史并不长,1944年,冯·诺依曼(Von Neumann)和摩根斯坦(Morgenstern)出版的《博弈论和经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior)一书,在博弈论的历史上享有类似哥伦布的新大陆发现者的地位,应该被看做是博弈论历史的真正起点。

1950-1954年美国数学家、统计学家纳什(John Nash)的系列论文中引入了合作博弈和非合作博弈的区分,并为非合作博弈提出了“纳什均衡(Nash Equilibrium)”这个一般性的概念,证明了有限博弈中纳什均衡的存在性,奠定了现代博弈论学科体系的基础。1965年,塞尔腾(Selten)率先开辟了动态对策模型的研究,给出了子博弈完美均衡(Subgame Perfect Nash Equilibrium)的概念,探讨了有关问题,发展了逆推归纳法等分析方法。使博弈论向前发展。1967—1968年海萨尼(Harsanyi)开创了不完全信息对策研究的新领地,他首先提出贝叶斯纳什均衡(Bayesian Nash Equilibrium),初步运用随机分析方法解决信息不完全和不对称问题。由于纳什、塞尔腾、海萨尼三人在博弈论及其应用方面得突出贡献,1994年,他们荣获了诺贝尔经济学奖。近几年来,在完善和发展博弈理论的同时,西方学者开始更深入地探讨其实际应用的可能性。



摩根斯坦 1902~1977



# 提 纲:

1. 对策论的基本概念
  - 1.1 对策模型的基本要素
  - 1.2 对策问题的分类
2. 矩阵对策的纯策略
  - 2.1 优超原则
  - 2.2 最大最小原则
3. 矩阵对策的混合策略
  - 3.1 混合策略的概念
  - 3.2 图解法
  - 3.3 线性规划法
4. 纳什均衡
  - 4.1 纯策略纳什均衡的划线法
  - 4.2 混合策略纳什均衡的LP方法
5. 应用举例
  - 5.1 案例1——市场竞争策略
  - 5.2 案例2—— 对抗赛项目确定

# 1.1 对策模型的基本要素

## 1. 局中人

局中人(players)是指参与竞争的各方, 每方必须有独立的决策能力和承担风险的能力。(如:田忌、齐王)

## 2. 策略集

在对策问题中, 局中人为了应对其他局中人的行动而采取的方案和手段称为该局中人的一个策略(strategy)。

## 3. 赢得及赢得函数

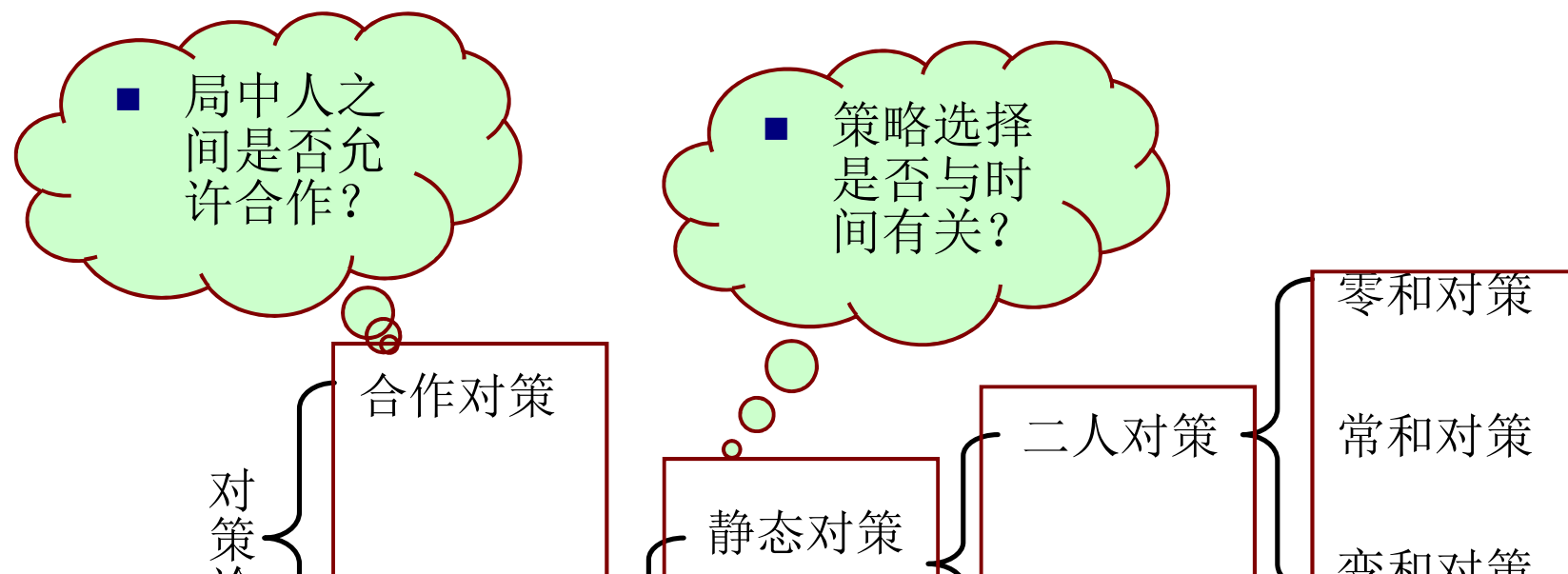
局中人采用不同策略对策时, 各方总是有得或有失, 统称赢得(payoff)或得益。

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
	(上中下)	(上下中)	(中上下)	(中下上)	(下上中)	(下中上)
$\alpha_1$ (上中下)	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
$\alpha_2$ (上下中)	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
$\alpha_3$ (中上下)	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
$\alpha_4$ (中下上)	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
$\alpha_5$ (下上中)	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
$\alpha_6$ (下中上)	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

Back



## 1.2 对策问题的分类



在图 13.1 对策分类中，研究最早、占有重要地位的是二人有限零和对策。

二人有限零和对策需具备以下三个条件。

- (1) 有两个局中人。
- (2) 每个局中人的策略都是有限的。
- (3) 每一策略组合下，各局中人赢得之和始终为零。

## 1.2 对策问题的分类

二人有限零和对策是最简单最重要的对策模型，在理论研究和求解方法两方面都是比较完善和成熟的，而且它的研究思想和方法也具有代表性，所以它是对策论的基础。本章所研究的对策问题主要是矩阵对策，通常矩阵对策表示为  $G = \{S_1, S_2, A\}$ ，表示局中人为甲、乙两个人，各自的策略分别为  $S_1$ 、 $S_2$ ，以及局中人甲的赢得矩阵为  $A$ 。

**【例 13.1】** 甲、乙二人玩剪刀·石头·布游戏，输方付给赢方 1 元人民币，如若双方所出策略相同，例如都出剪刀，则赢得均为零。试写出双方进行一次游戏时各局中人的策略集和局中人甲的赢得矩阵。

解 显然，局中人甲和乙可出的策略有剪刀、石头和布，此对策问题为二人有限零和对策， $S_1 = S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \{\text{剪刀}, \text{石头}, \text{布}\}$ ，局中人甲的赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2 矩阵对策的纯策略

- 为求出对策模型的解，首先需要对双方的对策条件作如下的假设。
- (1) 对策双方的行为是理智的，对策略的选择不存在任何侥幸心理。
- (2) 局中人选取策略的目标是收益最大或损失最小。
- (3) 局中人同时选取各自的行动策略，且不知道对方选取哪一个策略。
- (4) 对策中的有关规定和要求，局中人是知道的。

## 2.1 超优原则

1. 对  $\alpha_r, \alpha_s$  若恒有  $a_{rj} \geq a_{sj}$  则称  $\alpha_r$  超优于  $\alpha_s$
2. 对  $\beta_h, \beta_k$  若恒有  $a_{ih} \leq a_{ik}$  则称  $\beta_h$  超优于  $\beta_k$

### 【例13.2】

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 4 & 6.5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 1.5 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

第3行优超  
于第2行，  
第1行优超  
于第5行



$$A_1 = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ \alpha_1 & 6 & 4 & 5 & 4 & 6.5 \\ \alpha_3 & 5 & 5 & 1.5 & 4 & 9 \\ \alpha_4 & 1 & 3 & -3 & 0 & 10 \end{matrix}$$

第1列优超于  
第5列，第4列  
优超于第2列



$$A_2 = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & 6 & 5 & 4 \\ \alpha_3 & 5 & 1.5 & 4 \\ \alpha_4 & 1 & -3 & 0 \end{matrix}$$

第1行优于  
2、3行



$$A_3 = \begin{matrix} & \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & 6 & 5 & 4 \end{matrix}$$



最优纯策略  $(\alpha_1, \beta_4)$

【例13.3】 某地区有甲、乙两企业生产同种产品，采取相同的价格出售，为了提高市场份额，均采用做广告的方式扩大自己的销售量。甲和乙均有三种广告策略。甲企业所占的市场份额增加的百分数如下面矩阵 $A$ 所示。

$$A = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ -6 \\ -2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ -1 \\ -3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \min \\ \max \\ \max \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ -6 \\ -3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}} \right\} \max = 1$$

解 从 $A$ 中可以看出甲企业的最大赢得为5，如若想得到这个赢得，他就应该选择 $\alpha_2$ 。由于乙企业也是理智的，他考虑到甲企业打算出 $\alpha_2$ 的心理，于是准备用 $\beta_2$ 来对付甲企业，这样甲企业反而损失6。双方都考虑到对方为使自己尽可能少的赢得而采取相应的策略，所以双方都不去左右对方，而采取比较稳妥的策略，即双方有可能出现的

同理，对乙企业来说，从最稳妥的情况出发，从 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 中找到最大损失5、1、4，从中选取最小的1，这时乙企业采取 $\beta_2$ 策略，不管甲企业选择何种策略甲企业的赢得不会超过1。这时甲企业应采取 $\alpha_1$ 策略，乙企业应选择 $\beta_2$ 策略，这时甲企业的赢得值和乙企业的损失值都为1， $(\alpha_1, \beta_2)$ 称为该矩阵对策的最优纯策略。

Back

## 2.2 最大最小原则

$$A = \begin{matrix} & \beta_1 & \cdots & \beta_n & \min \\ \left. \begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{matrix} \right\} \max & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \end{matrix} \right\} \max = a_{rs}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\min = a_{hk}}$

如果  $a_{rs} = a_{hk}$ , 则该值所对应的策略为最优纯策略

【例13.4】

$$A = \begin{matrix} & & & & \min \\ \left. \begin{matrix} 2 & -3 & 4 & -4 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \end{matrix} \right\} \max & \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -4 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} & \end{matrix} \right\} \max = 2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\min = 2}$

最优纯策略  $(\alpha_3, \beta_4)$

[Back](#)



### 3.1 混合策略的概念

【例13.5】 猜硬币游戏：甲、乙两个儿童玩猜硬币游戏，甲手中拿着一枚硬币，把硬币盖在桌子上，让儿童乙猜是正面向上还是反面向上。如若猜对甲给乙1元钱，猜错乙给甲1元钱。

猜硬币游戏属于矩阵对策，儿童甲的策略有出正面向上( $\alpha_1$ )和出反面向上( $\alpha_2$ )，儿童乙的策略有猜正面向上( $\beta_1$ )和猜反面向上( $\beta_2$ )。

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$
$$\max_i \min_j a_{ij} = -1$$
$$\min_j \max_i a_{ij} \neq \max_i \min_j a_{ij}$$



## 3.1 混合策略的概念

该对策问题表明不存在使对立双方达到平衡的局势，因此，局中人采取任何一种纯策略，都有一定的风险。所以，在这种情况下，局中人必须隐瞒自己选取策略的意图。

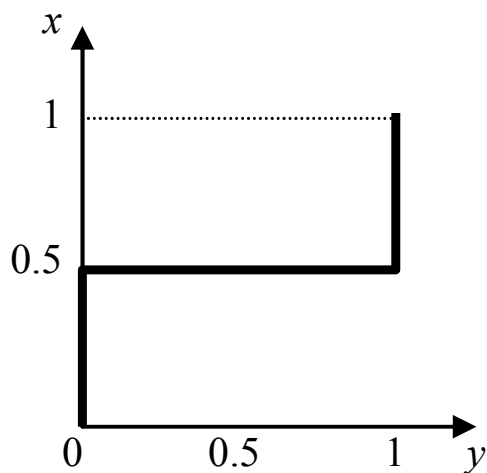
### 3.1 混合策略的概念

设甲出正面( $\alpha_1$ )的概率 $x$ ,出反面( $\alpha_2$ )的概率 $1-x$ ;乙猜正面( $\beta_1$ )的概率 $y$ ,猜反面( $\beta_2$ )的概率 $1-y$ 。则乙两个策略的期望值分别为:

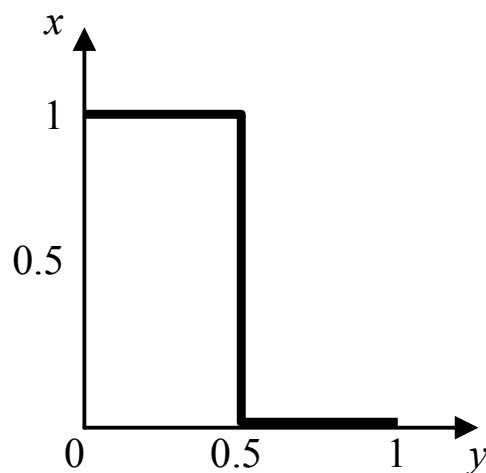
$$E_{\beta_1} = 1 \times x + (-1)(1-x) = 2x-1 \quad E_{\beta_2} = (-1) \times x + 1 \times (1-x) = 1-2x$$

令 $E_{\beta_1} = E_{\beta_2}$ ,可得 $x = 0.5$

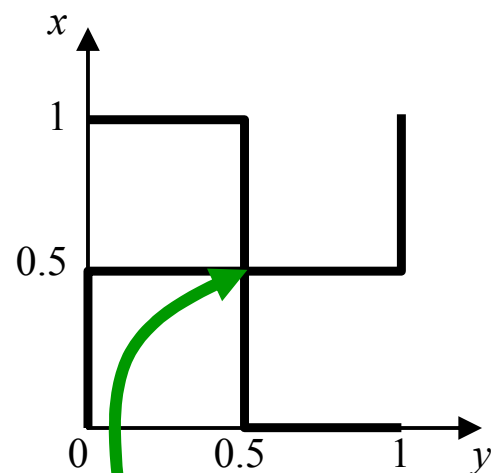
- (1) 当 $x < 0.5$ 时,  $E_{\beta_1} < E_{\beta_2}$ , 理性的儿童乙会选择猜反面;
- (2) 当 $x > 0.5$ 时,  $E_{\beta_1} > E_{beta_2}$ , 理性的儿童乙会选择猜正面;
- (3) 当 $x = 0.5$ 时,  $E_{\beta_1} = E_{\beta_2} = 0$ , 儿童乙不论采取何种策略, 平均赢得都是零。



乙的策略



同理甲的策略



最优混合策略

### 3.1 混合策略的概念

混合扩充：设有矩阵对策  $G = \{S_1, S_2, A\}$  混合扩充  $\rightarrow G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$

$$\begin{array}{rcl}
 & S_2^* \rightarrow & y_1 \quad \cdots \quad y_n \quad \text{甲各方案最} \\
 S_1^* & S_2 & \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n \quad \text{小期望赢得} \\
 \downarrow & S_1 & \\
 A = & \begin{array}{c} x_1 \quad \alpha_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_m \quad \alpha_m \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \min \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{array} \right\} \max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad \text{甲至少期望赢得}
 \end{array}$$

乙各方案最大损失  $\max \sum_{i=1}^m a_{i1} x_i \cdots \max \sum_{i=1}^m a_{in} x_i$

乙最多期望损失  $\min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$

由于甲乙都是理智的，故

最优混合策略为  $\max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} E(X, Y) = \min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} E(X, Y)$  时  $X, Y$  的解



## 3.1 混合策略的概念

矩阵对策  $G = \{S_1, S_2, A\}$

甲的策略集  $S_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  乙的策略集  $S_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  赢得矩阵  $A = (a_{ij})_{mn}$   
设局中人甲使用策略  $\alpha_i$  的概率为  $x_i$

则  $m$  维概率向量  $x = (x_1, \dots, x_m)^T, \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0$  称为甲的一个混合策略

则  $m$  维称  $S_1^* = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m)^T \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$  称为甲的混合策略集

同理可定义局中人乙的混合策略与混合策略集.

当甲采取混合策略  $x$ , 乙采取混合策略  $y$ , 则称  $(x, y)$  为一个混合局势.

$G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$  表示一个混合策略矩阵对策及  $G$  的一个混合扩充.

Back

## 3.2 图解法

图解法求解矩阵对策，一般适用于赢得矩阵为 或 的对策问题，对于 和 都较大的对策问题就不适用了。下面通过例子来说明这种方法。

【例 13.7】 求解矩阵对策  $G = \{S_1, S_2, A\}$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\} \quad S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

解 设甲的混合策略为  $x, (1-x), x \in [0, 1]$ ，则乙分别使用  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  时，甲赢得值：

$$\beta_1 : v_1 = 2x + 7(1-x) = 7 - 5x$$

$$\beta_2 : v_2 = 3x + 5(1-x) = 5 - 2x$$

$$\beta_3 : v_3 = 11x + 2(1-x) = 9x + 2$$

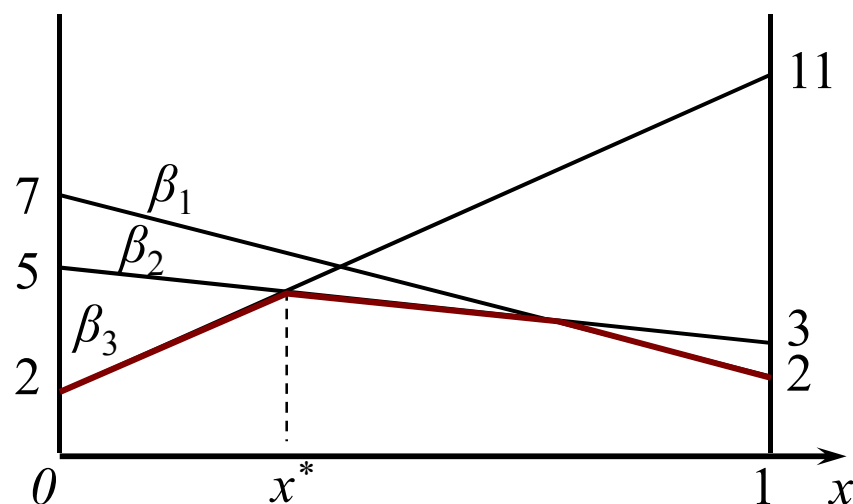
步骤：

(1) 绘制  $x$  数轴，标出  $x$  取值范围  $[0, 1]$

(2)  $x$  取 0 和 1，确定三条直线端点，绘制三条甲赢得值直线

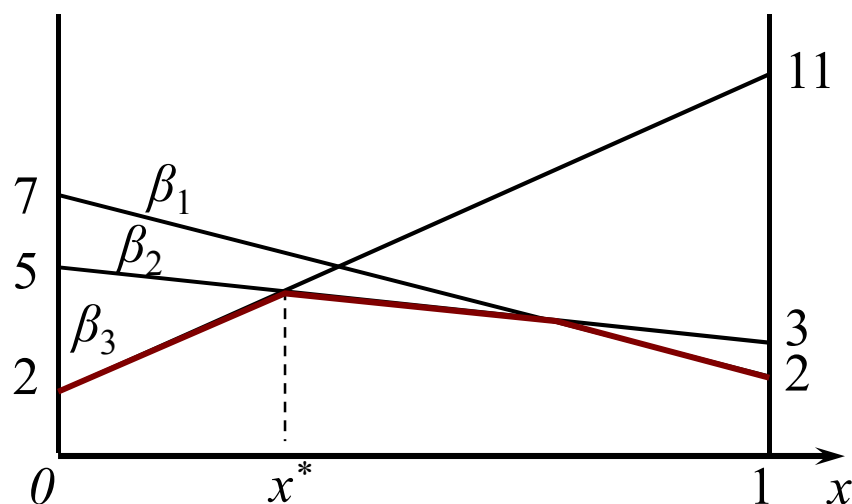
(3) 由于乙是理智的，甲的赢得值只能是最小的(粗线所示)

(4) 甲只能在最小中取最大，对应的策略为  $X^* = (\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$ ，最优对策值为  $V^* = 49/11$



## 3.2 图解法

从图还可以看出局中人乙的最优混合策略为 $\beta_2, \beta_3$ 的组合.



故 $\beta_1$ 的概率为0. 设 $\beta_2, \beta_3$ 的概率为 $y, (1-y)$ . 由效率矩阵:

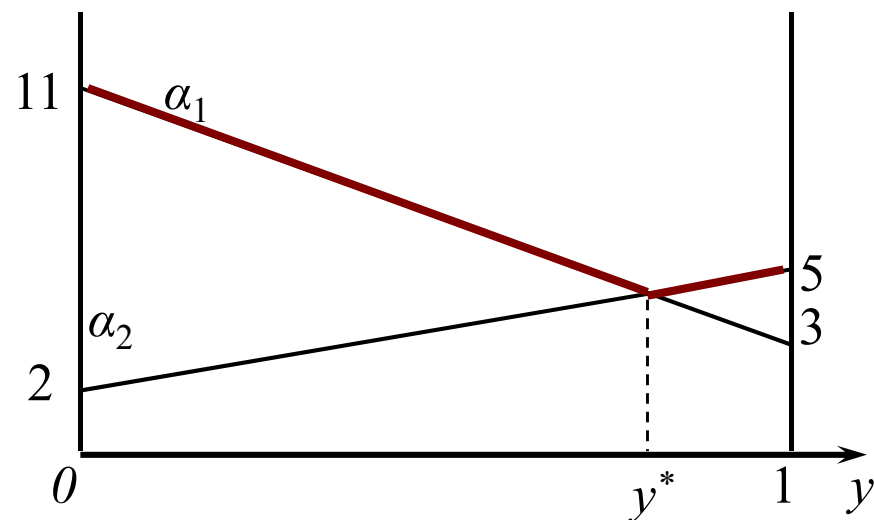
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

可知, 当甲使用 $\alpha_1, \alpha_2$ 时, 乙的损失值为:

$$\alpha_1 : v_3 = 3y + 11(1-y) = 11 - 8y$$

$$\alpha_2 : v_4 = 5y + 2(1-y) = 2 + 3y$$

$y$ 分别取0和1, 绘制图形如下:



由于甲是理智的, 故乙取最大损失(粗线)

乙会在最大损失中找出最小, 即乙最优混合策略为:

$$Y^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$$

Back

### 3.3 线性规划法

$$A = \begin{matrix} & y_1 & \cdots & y_n & \min \\ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{matrix} & \end{matrix} \quad \text{甲至少期望赢得}$$

$$\left. \begin{matrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{matrix} \right\} \max_{X \in S_1^*} \min_{Y \in S_2^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = V$$

乙采取策略组合 $y_1, \dots, y_n$ 时,是从利己主义出发的,会使自己的期望损失最小(也即甲的赢得最小)

甲会使用某种策略组合 $x_1, \dots, x_m$ ,使得在最小赢得的概率组合尽可能地大.

因此有:

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leq V & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_j y_j = 1 \\ y_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{令: } y'_j = \frac{y_j}{V}, \text{ 则: } \sum_{j=1}^n y'_j = \frac{1}{V}, \text{ 于是有:}$$

乙的目标是期望损失最小:  $\min V$  或  $\max \frac{1}{V}$

$$\begin{cases} \max = \sum_{j=1}^n y'_j \\ \sum_j a_{ij} y'_j \leq 1 & i = 1, 2, \dots, m \\ y'_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$



### 3.3 线性规划法

同理, 甲采取策略组合  $x_1, \dots, x_m$  时, 也是从利己主义出发的, 会使自己的期望赢得最大(也即乙的损失最大)

$$A = \begin{matrix} & y_1 & \cdots & y_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\max \underbrace{\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i \cdots \sum_{i=1}^m a_{in} x_i}$$

$$\min_{Y \in S_2^*} \max_{X \in S_1^*} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = V$$

乙会使用某种策略组合  $y_1, \dots, y_n$ , 使得最大损失的某种概率组合尽可能地小.

因此有:

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geq V & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

甲的目标是期望赢得最大:  $\max V$  或  $\min \frac{1}{V}$

令:  $x'_i = \frac{x_i}{V}$ , 则:  $\sum_{i=1}^m x'_i = \frac{1}{V}$ , 于是有:

$$\begin{cases} \min = \sum_{i=1}^m x'_i \\ \sum_i a_{ij} x'_i \geq 1 & j = 1, 2, \dots, n \\ x'_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

综上所述,二人零和对策可以表述成一对对偶规划:

$$\begin{aligned} \min &= \sum_{i=1}^m x'_i \\ \left\{ \begin{aligned} \sum_i a_{ij} x'_i &\geq 1 & j=1,2,\dots,n \\ x'_i &\geq 0 & i=1,2,\dots,m \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max &= \sum_{j=1}^n y'_j \\ \left\{ \begin{aligned} \sum_j a_{ij} y'_j &\leq 1 & i=1,2,\dots,m \\ y'_j &\geq 0 & j=1,2,\dots,n \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

【例13.7】

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

解 写出一对对偶模型

$$\begin{aligned} \min w &= x'_1 + x'_2 + x'_3 & \max z &= y'_1 + y'_2 + y'_3 \\ s.t. \left\{ \begin{aligned} 7x'_1 + 2x'_2 + 9x'_3 &\geq 1 \\ 2x'_1 + 9x'_2 + 0x'_3 &\geq 1 \\ 9x'_1 + 0x'_2 + 11x'_3 &\geq 1 \\ x'_i &\geq 0 \quad i=1,2,3 \end{aligned} \right. & s.t. \left\{ \begin{aligned} 7y'_1 + 2y'_2 + 9y'_3 &\leq 1 \\ 2y'_1 + 9y'_2 + 0y'_3 &\leq 1 \\ 9y'_1 + 0y'_2 + 11y'_3 &\leq 1 \\ y'_j &\geq 0 \quad j=1,2,3 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

解得:

$$\begin{cases} Y'^* = (1/20, 1/10, 1/20) \\ w = 16/80 \end{cases} \quad \begin{cases} X'^* = (1/20, 1/10, 1/20) \\ z = 16/80 \end{cases}$$

$$V = 80/16 = 5$$

求得最优混合局势:

$$X^* = VX'^* = 5 \times (1/20, 1/10, 1/20) = (1/4, 1/2, 1/4)$$

$$Y^* = VY'^* = 5 \times (1/20, 1/10, 1/20) = (1/4, 1/2, 1/4)$$

Back

## 4 纳什均衡



### 阅读案例 13-1

#### “囚徒困境”的故事

话说有一天，一个富翁在家中被杀，财物被盗；警方在此案的侦破过程中，抓到两个犯罪嫌疑人张三和李四，并从他们的住处搜出被害人家中丢失的财物。但是，他们矢口否认曾杀过人，辩称他们只是顺手牵羊偷了点儿东西。于是警方将两人隔离审讯。警察分别对张三和李四说，“由于你们的偷盗罪已有确凿的证据，所以可以判你们 1 年刑期。但是如果你单独坦白杀人的罪行，我只判你 3 个月的监禁，但你的同伙要被判 10 年刑。如果你拒不坦白，而被同伙检举，那么你就将被判 10 年刑，他只判 3 个月的监禁。但是，如果你们两人都坦白交代，那么，你们都要被判 5 年刑。”

于是张三和李四面临着两难的选择——坦白或抵赖。显然最好的策略是双方都抵赖，结果是大家都只被判一年。但是由于两人处于隔离的情况下无法串供，按照亚当·斯密的理论，每一个人都是一个“理性的经济人”，都会从利己的目的出发进行选择。这两个人都会有这样一个盘算过程：假如他招了，我不招，得坐 10 年监狱，招了才 5 年，所以招了划算；假如我招了，他也招，各坐 5 年，他要是不招，我就只坐 3 个月，而他会坐 10 年牢，也是招了划算。综合以上几种情况考虑，不管他招不招，对我而言都是招了划算。两个人都会动这样的脑筋，最终，两个人都选择了“招”？结果都被判 5 年刑期。原本对双方都有利的策略(抵赖)和结局(被判 1 年刑)就不会出现。这就是著名的“囚徒困境”。



## 4 纳什均衡



John F. Nash

表示成赢得矩阵:

张三 \ 李四	坦白 $\beta_1$	抵赖 $\beta_2$
	坦白 $\alpha_1$	抵赖 $\alpha_2$
坦白 $\alpha_1$	$(-5, -5)$	$(-0.25, -10)$
抵赖 $\alpha_2$	$(-10, -0.25)$	$(-1, -1)$

如果某情况下无一参与者可以独自行动而增加收益，则此策略组合被称为纳什均衡点。“纳什均衡”，也叫非合作均衡，由诺贝尔经济学奖获得者——美国普林斯顿大学约翰·纳什提出。

“纳什均衡”描述的就是一种非合作博弈均衡，在现实中非合作的情况要比合作情况普遍。所以“纳什均衡”是对冯·诺依曼和摩根斯坦的合作博弈理论的重大发展，甚至可以说是一场革命。

纳什均衡也分为纯策略与混合策略.纯策略可采取“划线法”；混合策略可采取线性规划方法。

[Back](#)



## 4.1 纯策略纳什均衡的划线法

[Back](#)

仍以囚徒困境为例，说明纯策略下纳什均衡的求取。

- (1) 当李四选择坦白，张三也选择坦白，坐5年牢，否则将坐10年牢 (a)；
- (2) 当李四选择抵赖，张三还选择坦白，坐3月牢，否则会坐1年牢 (b)；
- (3) 当张三选择坦白，李四也选择坦白，坐5年牢，否则将坐10年牢 (c)；
- (4) 当张三选择抵赖，李四还选择坦白，坐3月牢，否则会坐1年牢 (d)。

可见，无论一方采取何种策略，另一方的最优策略均为坦白，故坦白是均衡点。任何一方偏这个均衡点都要受更多的损失。

(a)

张三 \ 李四	坦白 $\beta_1$	抵赖 $\beta_2$
	坦白 $\alpha_1$	抵赖 $\alpha_2$
坦白 $\alpha_1$	(-5, -5)	(-0.25, -10)
抵赖 $\alpha_2$	(-10, -0.25)	(-1, -1)

(b)

张三 \ 李四	坦白 $\beta_1$	抵赖 $\beta_2$
	坦白 $\alpha_1$	抵赖 $\alpha_2$
坦白 $\alpha_1$	(-5, -5)	(-0.25, -10)
抵赖 $\alpha_2$	(-10, -0.25)	(-1, -1)

(c)

张三 \ 李四	坦白 $\beta_1$	抵赖 $\beta_2$
	坦白 $\alpha_1$	抵赖 $\alpha_2$
坦白 $\alpha_1$	(-5, -5)	(-0.25, -10)
抵赖 $\alpha_2$	(-10, -0.25)	(-1, -1)

(d)

张三 \ 李四	坦白 $\beta_1$	抵赖 $\beta_2$
	坦白 $\alpha_1$	抵赖 $\alpha_2$
坦白 $\alpha_1$	(-5, -5)	(-0.25, -10)
抵赖 $\alpha_2$	(-10, -0.25)	(-1, -1)

## 4.2 混合策略纳什均衡的LP方法

由于纳什均衡所解决的问题不是二人零和对策，故对策双方的赢得矩阵不是同一个矩阵，其LP模型也不是一对对偶问题。设甲、乙的赢得矩阵分别为**A**和**B**，混合策略概率分别为：

$$X = (x_1, \dots, x_m)^T \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0 \quad Y = (y_1, \dots, y_n) \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0$$

对于收益等赢得值，有收益最大化**maxV**(即**min1/V**)模型如下：

$$\begin{aligned} \min &= \sum_{i=1}^m x'_i \\ \begin{cases} \sum_j a_{ij} x'_i \geq 1 & j = 1, 2, \dots, n \\ x'_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min &= \sum_{j=1}^n y'_j \\ \begin{cases} \sum_i b_{ij} y'_j \geq 1 & i = 1, 2, \dots, m \\ y'_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

对于成本等损失值，有损失最小化**minV**(即**max1/V**)模型如下：

$$\begin{aligned} \max &= \sum_{i=1}^m x'_i \\ \begin{cases} \sum_j a_{ij} x'_i \leq 1 & j = 1, 2, \dots, n \\ x'_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max &= \sum_{j=1}^n y'_j \\ \begin{cases} \sum_i b_{ij} y'_j \leq 1 & i = 1, 2, \dots, m \\ y'_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

【例13.8】对下表（收益值）求取纳什均衡。

<div>乙</div> <div>甲</div>					
		b1	b2	b3	b4
a1		(1,-1)	(4,-4)	(8,-8)	(7,-7)
a2		(3,-3)	(2,-2)	(3,-3)	(7,-7)
a3		(0, 0)	(3,-3)	(5,-5)	(1,-3)
a4		(0, 0)	(4,-4)	(3,-3)	(7,-7)

解 甲的收益矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

乙的收益矩阵

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 & -7 \\ -3 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

**A**的3、4行收益值不大于第1行，删除  
**B**的3、4列收益值不大于第1列，删除  
 收益矩阵简化及使用概率如下：

Back

甲 \ 乙		y1	y2
		$\beta_1$	$\beta_2$
x1	$\alpha_1$	(1, -1)	(4, -4)
x2	$\alpha_2$	(3, -3)	(2, -2)

乙的收益矩阵各元素+4，对甲、乙建立LP模型并求解如下：

$$\min \frac{1}{v_{\text{甲}}} = x'_1 + x'_2 \quad \min \frac{1}{v_{\text{乙}}} = y'_1 + y'_2$$

$$s.t. \begin{cases} x'_1 + 3x'_2 \geq 1 \\ 4x'_1 + 2x'_2 \geq 1 \\ x'_1, x'_2 \geq 0 \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} 3y'_1 \geq 1 \\ y'_1 + 2y'_2 \geq 1 \\ y'_1, y'_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = 0.1 \\ x'_2 = 0.3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'_1 = 1/3 \\ y'_2 = 1/3 \end{cases}$$

$$v_{\text{甲}} = 1/0.4 = 2.5 \quad v_{\text{乙}} = 3/2$$

$$\begin{cases} x_1 = v_{\text{甲}} x'_1 = 0.25 \\ x_2 = v_{\text{甲}} x'_2 = 0.75 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = v_{\text{乙}} y'_1 = 0.5 \\ y_2 = v_{\text{乙}} y'_2 = 0.5 \end{cases}$$

## 案例-1 市场竞争策略

设  $x_1, x_2, x_3$  为局中人甲企业使用策略  $a_1, a_2, a_3$  的概率；  $y_1, y_2, y_3$  为局中人乙使用策略  $b_1, b_2, b_3$  的概率，则由式 13.11 和式 13.13，可建立如下线性规划模型。

局中人甲对策问题模型：

$$\begin{aligned} \min w &= x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 10x'_1 + 12x'_2 + 6x'_3 \geq 1 \\ -x'_1 + 10x'_2 + 5x'_3 \geq 1 \\ 3x'_1 - 5x'_2 + 6x'_3 \geq 1 \\ x'_1, x'_2, x'_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中，  $x'_i = \frac{x_i}{V}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

局中人乙对策问题模型：

$$\begin{aligned} \max z &= y'_1 + y'_2 + y'_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 10y'_1 - y'_2 + 3y'_3 \leq 1 \\ 12y'_1 + 10y'_2 - 5y'_3 \leq 1 \\ 6y'_1 + 5y'_2 + 6y'_3 \leq 1 \\ y'_1, y'_2, y'_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$y'_j = \frac{y_j}{V}$  ( $j = 1, 2, 3$ )

$S_1 \backslash S_2$		乙企业策略		
		$b_1$	$b_2$	$b_3$
甲企业策略	$a_1$	10	-1	3
	$a_2$	12	10	-5
	$a_3$	6	5	6

[Back](#)

## 案例-2 对抗赛项目确定

有甲、乙两只游泳队举行包括三个项目的对抗赛。这两只游泳队各有一名健将级队员(甲队为李,乙队为王),在这三个项目中成绩都非常突出,但规则要求他们每人只能参加两场比赛,每队的其他两名队员可参加全部比赛。已知各运动员的平均成绩( $s$ )如表 13-8 所示。

假设各运动员在比赛中都发挥正常水平,又比赛第一名得 5 分,第二名得 3 分,第 3 名得 1 分,问教练员应决定让自己队的健将参加哪两项比赛,使本队得分最多(各队参加比赛名单互相保密,定下来之后不许变动)?

表 13-8 各队员平均成绩表

	甲 队			乙 队		
	A1	A2	李	王	B1	B2
100 米蝶泳	59.7	63.2	57.1	58.6	61.4	64.8
100 米仰泳	67.2	68.4	63.2	61.5	64.7	66.5
100 米蛙泳	74.1	75.5	70.3	72.6	73.4	76.9





**分析** 这是一个对抗赛，而非接力赛，不能用指派问题的方法去解决。首先构造两名健将参加某项比赛时甲、乙两队的得分表。如甲队李参加蝶泳，乙队王也参加蝶泳，而另两项目均可参加，则两队得分如下：

蝶泳项目：甲队李获第 1，A1 获第 3，共得 6 分；

仰泳项目：甲队 A1 获第 3，得 1 分，；

蛙泳项目：甲队 A1 获第 2，A2 获第 3，得 4 分。

综上所述，甲队共得分  $6+1+4=11$  分；每个单项总分 9 分，3 个项目共 27 分，乙队共得分  $27-11=16$  分。

用同样的方法算出李和王参加项目的其他组合如表 13-9 和 13-10 所示。

表 13-9 甲队得分表

		王不参加此项比赛			
		蝶泳	仰泳	蛙泳	
李不参加 此项比赛	蝶泳	11	12	10	
	仰泳	12	14	12	
	蛙泳	10	12	12	

表 13-10 乙队得分表

		王不参加此项比赛			
		蝶泳	仰泳	蛙泳	
李不参加 此项比赛	蝶泳	16	15	17	
	仰泳	15	13	15	
	蛙泳	17	15	15	



**解决方案** 这是一个纳什均衡问题。

在甲的收益矩阵中，第2行的收益值均不小于第1、3行，故是一个纯策略问题，即李参加仰泳比赛。

由于甲是理智的，他会让李参加仰泳比赛，而乙对付甲的最优策略时，王参加3个项目比赛时的收益值分别为15、13、15。可见王参加仰泳和蛙泳成本是一样的，各以0.5的概率参加。

**决策建议** 甲队李参加仰泳比赛；乙队王参加参加仰泳或蛙泳比赛。甲队得分12分，乙队得分15分。

[Back](#)



## 小结

对策论是研究具有竞争性质的现象，并为参加者各方提供对策方法的数学理论。无论何种对策，构成一个对策现象的共同特征是具有三个基本要素：局中人、策略集和损益值。

本章重点研究的是矩阵对策，又称为二人有限零和对策，是指两个局中人、每一局中人策略数量都是有限的且在任何一对策略组合下两个局中人的损益值之和始终为零的对策。通常矩阵对策表示为 $G=\{S_1, S_2, A\}$

在求解矩阵对策时，我们可以采取以下步骤：

首先用严格下策反复消去法对赢得矩阵进行简化。

判断对策是否存在鞍点，如若存在，可以用“最大最小”原则进行求解。如若不存在鞍点，说明存在最优混合策略。

若简化后的矩阵为 $m \times 2$ 或 $2 \times n$ 阶，可以采取“图解法”求解。

对于比较复杂的矩阵对策，可以采用“线性规划法”进行求解。

纳什均衡是解决非零和的重要方法，与零和对策不同的是

第一，要分别构造对策各方的收益矩阵

第二，对策各方均以收益最大为目标

第三，在利用超优原则化简时，以各自的收益矩阵进行比较各方案的收益值

第四，对混合策略也以各自的收益矩阵建立LP模型。