微分方程建模技巧

模型的使用背景

微分方程模型的概念

在研究实际问题时，常常会联系到某些变量的变化率或导数，这样所得到变量之间的关系式就是微分方模型。

微分方程模型反映的是变量之间的间接关系，因此，要得到直接关系，就需要求解微分方程。

微分方程建模是数学建模的重要方法，在科技工程，经济管理，生态环境，人口，交通等领域中有着广泛的应用。

微分方程模型的建立方法

- 根据规律列方程

利用数学、力学、物理、化学等学科中的定理或经过实验检验的规律等来建立微分方程模型。

- 微元分析法

利用已知的定理与规律寻找微元之间的关系式，与第一种方法不同的是对微元而不是直接对函数及其导数应用规律。

微分方程模型的建立方法

- **模拟近似法**

在生物、经济等学科的实际问题中，许多现象的规律性不很清楚，即使有所了解也是极其复杂的，建模时在不同的假设下去模拟实际的现象，建立能近似反映问题的微分方程，然后从数学上求解或分析所建方程及其解的性质，再去同实际情况对比，检验此模型能否刻画、模拟某些实际现象。

案例分析

缉私问题

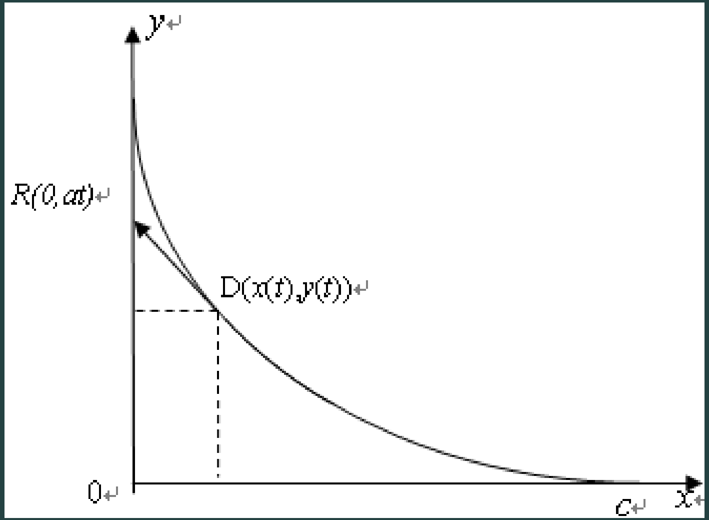
一艘缉私舰雷达发现距c km处有一艘走私船正以匀速 a km/min沿直线行驶。缉私舰立即以最大的速度 b km/min追赶，若用雷达进行跟踪，保持船的瞬时速度方向始终指向走私船，试求缉私舰追逐路线和追上的时间。

缉私问题

模型建立

建立如右坐标系，缉私船在(c,0)处发现走私船在(0,0)处，走私船逃跑方向为*y*轴方向。

在*t*时刻，走私船到达*R(0,at)*，缉私舰到达*D(x,y)*



缉私问题

根据题意有如下关系式

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha = \frac{y-at}{x-0} \qquad (1)$$

化简得：

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}$$

又因 $\frac{ds}{dt} = -b$ ，s为弧长

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (2)$$

缉私问题

将（2）代入（1）得：

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dx^2}=r\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \\ y(c)=0, y'(c)=0 \end{cases}$$

其中$r=a/b$

模型求解：

1) 求解析解

（1）当 $r=\dfrac{a}{b}<1$，

缉私问题

$$y=\frac{c}{2}\left[\frac{1}{1+r}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+r}-\frac{1}{1-r}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-r}\right]+\frac{cr}{1-r^2}$$

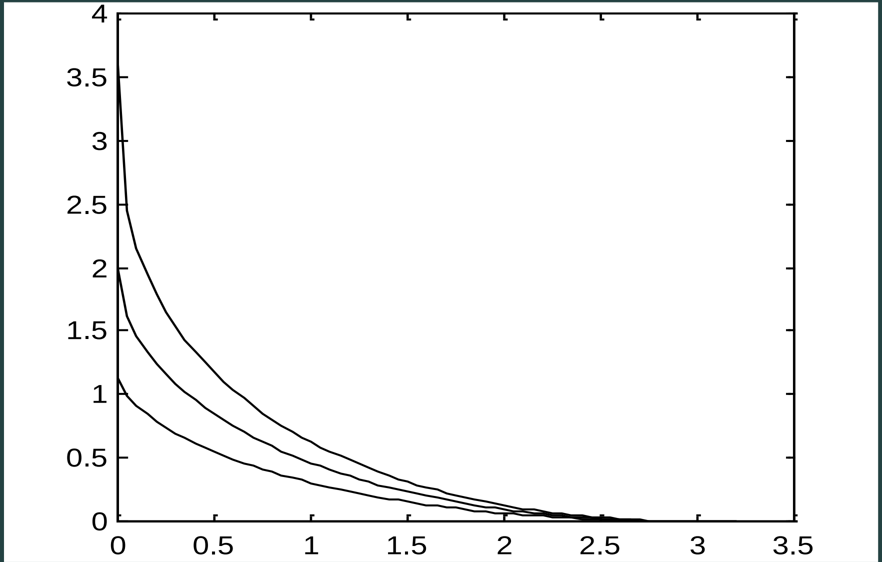
当x=0时，

$$y=\frac{cr}{1-r^2}$$

$$t=\frac{y}{a}=\frac{cr}{a(1-r^2)}=\frac{bc}{(b^2-a^2)}$$

缉私问题

c=3km，a=0.4(km/min)，分别取b=0.6,0.8,1.2 (km/min)，缉私艇追赶路线图形如下：



缉私问题

（2）当 $r=\frac{a}{b}\geq 1$ ，缉私艇不可能追赶上走私船

微分方程的MATLAB求解

（1）dsolve

（2）数值解ode23 (二三阶龙格库塔算法)或者ode45 (四五阶龙格库塔算法)

（3）计算机仿真