偏微分方程简介

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

偏微分方程

联系自变量、未知函数以及未知函数偏导数的关系式：

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0$$

其中 $x_1, x_2, \ldots x_n$,-自变量，$u=u(x_1, x_2, \ldots x_n)$-未知函数,多元函数.

数学物理方程的发展概况

在物理、力学、化学、电学、及其它自然科学和工程技术中，经常提出大量的偏微分方程问题.如，在水坝的温度应力分析中需要研究热传导方程；在电磁现象研究中，会遇到Maxwell方程；而在大型水利工程中必须研究河渠不稳定流动的Saint-Venant方程等.

早在18世纪初（1715年），Taylor研究了弦线振动的规律，用$u(x,t)$表示弦上x处，在时刻t的位移，他归结为一个非常著名的偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ ——弦振动方程

Bernoulli(贝努利）把上面方程的解表示为级数形式：

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi a}{l}x$$

Fourier采用分离变量法把上面函数分解为$u(x,t)=X(x)T(t)$把偏微分方程归结为常微分方程的特征值问题，把这种方法称为Fourier方法.

随后，Euler，Lagrange(拉格朗日）研究了流体力学. Laplace 研究了势函数以及Fourier研究热的传播等等自然现象的基本规律，都归结出了典型的偏微分方程. 如在流体力学中

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$ —— 连续性方程

$\rho(x,\ y,\ z,\ t)$ —— 流体的密度，

$\vec{v}(x,\ y,\ z,\ t)$ —— 流体的速度

若流体是定常（与时间无关）的、不可压缩的（ ρ 为常数），则上述连续性方程就变为

$$div\ \vec{v} = 0$$

若流体场是一个有势场，即存在一个标量函数 $u(x, y, z)$ 使得

$$\vec{v} = grad\ u \quad \Rightarrow \Delta u = divgrad\ u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ 即 **调和方程或Laplace方程**

典型方程的推导

任何物质的运动都受到一定的自然规律（如物理定律）的制约.我们常见的一些数学物理方程，它们作为描述这些物质运动的数学模型，是从数量形式上刻划了由相应的物理定律所确定的某些物理量之间的制约关系.

与建立数学物理方程关系最密切的物理定律大致可以归结为两大类：

（1）守恒律　（2）变分原理

当然为了使方程（组）成为封闭的，往往还需要其他实验定律，如 Fourier热传导定律、状态方程等

建模步骤：

1、明确要研究的物理量是什么？

从所研究的系统中划出任一微元，分析邻近部分与它的相互作用。

2、研究物理量遵循哪些物理规律？

3、按物理定律写出数理方程（泛定方程）。

应用场景：热传导方程和定解条件

热传导现象：当导热介质中各点的温度分布不均匀时，有热量从高温处流向低温处。

模型及其假设：

1）内部有热源，与周围介质有热交换；

2）均匀，各向同性导热体

一些概念和定律：

1）热量守恒定律

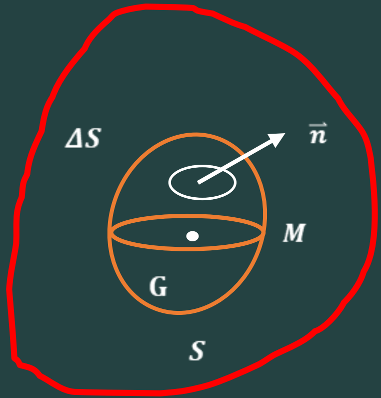
导出导入的净热量Q1=区域热量的变化量Q2

2）Fourier热定律 传导

$$dQ_1 = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

3）某个区域热量.

$$dQ_2 = cm\Delta u = c\rho dv\Delta u$$



热场

1. 三维热传导方程的推导

设 考虑三维空间内的物体 G，假设其为均匀的且各向同性. $(x, y,$ 点处在时刻 t 的温度为 $u(x, y, z,$

在 G 内任取一封闭曲面 s， 它所包围的区域记为 Ω

由热传导的 Fourier 实验定律知，

在$[t, t+dt]$ 时间内，流过曲面 ds 的热量 dQ 为

$$dQ = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dsdt = -k\nabla u \cdot d\vec{S}dt$$

其中 n 为曲面 ds 的外法向向量，k为热传导系数。

故从 t_1到t_2 这段时刻流入曲面内部的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds\right]dt\,.$$

又，区域 Ω 内温度升高吸收的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dxdydz\,.$$

$$Q_2 = \iiint\limits_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]dxdydz\,.$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} c\rho\left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)dt\right]dxdydz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)dxdydz\right]dt$$

由能量守恒定律，有 $Q_1 = Q_2$.

由Gauss公式有

$$\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint_S k\nabla u\cdot d\vec{S}=\iiint_\Omega \nabla(k\nabla u)dxdydz$$

$$=\iiint_\Omega k\Delta u dxdydz$$

故有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega k\Delta u dxdydz\right]dt$$

（区域热量的变化量）　　（导入导出的净导热量）

因此有 $$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\Delta u,$$

由 $$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

令 $$a^2=\frac{k}{c\rho}.$$

得 $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=a^2\Delta u,$$

若物体内部有热源，设单位时间内，

单位体积内所产生的热量为 $F(x,y,z,t)$，

则易得相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t),$$

其中 $f = \dfrac{F}{c\rho}.$

注1 一维和二维的热传导方程形式分别为

$$u_t = a^2 u_{xx} + f$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f$$

分别为均匀细杆和薄板的温度分别情况下的热传导方程。

注2 热传导方程不仅仅是表述热传导现象的，自然界中很多现象可用其刻划，如分子扩散，病毒传播，流行病的传染，商品的流通等

2. 定解条件

初始条件　导热体内$t=0$时刻的温度分布情况，即

$$u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z),(x,y,z)\in\bar{\Omega}$$

边界条件

通常为三类(记$\Sigma=\partial\Omega\times[0,+\infty)$)

(1)已知边界$\partial\Omega$上的温度分布，即$u|_\Sigma=g(x,y,z,t)$

(2)已知边界$\partial\Omega$上的热流量，即$k\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}|_\Sigma=g(x,y,z,t)$

$g>0$表示热量流入，$g<0$表示热量流入,$g=0$表示在边界绝热。

(3) $k\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial\vec{n}}+\sigma u=g,(x,y,z,t)\in\Sigma$

（3）泊松方程或拉普拉斯方程

如果我们考虑的是稳恒的温度场 u,与时间 t 无关，

温度分布达到某种动态平衡状态，则有 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0,$

这时上述两个方程分别变为

$$\Delta u = 0 \qquad \text{Laplace方程}$$

和

$$\Delta u = f \qquad \text{Poisson方程}$$

注 常见的 线性边界条件，数学上分为三类：

- 第一类边界条件，直接规定了所研究的物理量做边界上的数值；
- 第二类边界条件，规定了所研究物理量在边界外法线方向上的方向导数的数值；
- 第三类边界条件，规定了所研究物理量及其外法向导数的线性组合在边界上的数值。

初始条件 ——描述系统的初始状态

热传导方程的初始条件

初始时刻的温度分布：$u(M,t)|_{t=0} = \phi(M)$

泊松方程和拉普拉斯方程的初始条件

不含初始条件，只含边界条件

数学物理方程的分类

（一）线性二阶偏微分方程

把所有自变量依次记作$x_1, x_2, \ldots x_n$，

线性二阶偏微分方程可表为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i} + cu + f = 0$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 只是 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 的函数。

偏微分方程，阶数，线性偏微分方程，自由项，

齐次方程，非齐次方程

微分方程的解

古典解： 如果将某个函数 u 代入偏微分方程中，能使方程成为恒等式，则这个函数就是该偏微分方程的解。

通解： 解中含有相互独立的和偏微分方程阶数相同的任意常数的解。

特解： 通过定解条件确定了解中的任意常数后得到的解。

形式解： 未经过验证的解为形式解。

定解问题的适定性

- 定解问题的适定性:一个定解问题是否能够反映实际，从数学的角度看主要是三个方面的问题：
- 解的存在性:即在给定的定解条件下，定解问题是否有解存在? 从下一章起，我们要介绍三种典型的数学物理方程的解法，它们直接给出了解的存在性的证明。
- 解的唯一性:即在给定的定解条件下，定解问题的解若存在，它是否唯一?如果能知道一个定解问题具有唯一解，那么我们就能采用任何合适的方法去寻找它的解。