第 19 卷第 2 期 大 学 数 学 Vol 19, № 2
2003 年 4 月 COLLEGE MATHEMATICS Apr. 2003

钢管订购和运输问题的二次规划模型求解

储理才
(集美大学 基础教学部, 福建 厦门 361021)

[摘 要] 就 CMCM 2000 钢管订购和运输问题, 建立二次规划模型, 给出详尽的用MATLAB 优化工具箱函数 quadprog 求解该模型的方法, 并指出该模型有多个最优解

[关键词] 钢管订购和运输问题; 二次规划模型; MATLAB 优化工具箱; quadprog
[中图分类号] O29; O221. 1 [文献标识码] C [文章编号] 1672-1454(2003)02-0008-06

1 引 言

2000 年网易杯全国大学生数学建模竞赛B 题是一个运输优化问题, 经过分析, 不难建立一个二次规划模型 求解该模型的方法有很多[1-3], 本文针对问题 1, 给出利用MATLAB 优化工具箱函数 quadprog 求解该模型的程序. 不难发现, 将这个程序稍作修改, 也可用于求解问题 3. 从这个程序中, 读者可以体会到MATLAB 的编程效率高, 计算功能强, 使用简便等特点

2 模型的建立

设如下记号:

c_{ij}——一个单位钢管从钢厂 S_i 到枢纽点 A_j 的最小运价, $i=1,\cdots,7$; $j=1,\cdots,15$;

x_{ij}——S_i 到 A_j 的运量, $i=1,\cdots,7$; $j=1,\cdots,15$;

y_j——A_j 得到的钢管向 A_j 的右边(东边)铺设的数量, $j=1,\cdots,15$;

z_j——A_j 得到的钢管向 A_j 的左边(西边)铺设的数量, $j=1,\cdots,15$;

T_j——A_j 到 A_{j+1} 的区间长度, $j=1,\cdots,14$;

p_i——S_i 销售一个单位钢管的价格, $i=1,\cdots,7$;

s_i——S_i 在指定期限内能生产该钢管的数量, $i=1,\cdots,7$;

构造如下模型(以下将其称为模型 1):

$$\min \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15}(p_i+c_{ij})x_{ij}+\frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{15}[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)], \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{15}x_{ij}\in\{0\}\cup[500,s_i], \quad i=1,\cdots,7, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{7}x_{ij}=z_j+y_j, \quad j=1,\cdots,15, \tag{3}$$

$$y_j+z_{j+1}=T_j, \quad j=1,\cdots,14, \tag{4}$$

$$y_{15}=0 \tag{5}$$

$$z_1=0, \tag{6}$$

[收稿日期] 2002-05-14

$$x_{ij}\geq 0,\ \ y_j\geq 0,\ \ z_j\geq 0,\qquad i=1,\cdots,7;\ j=1,\cdots,15. \tag{7}$$

约束条件(2)的处理:

将约束条件(2)改为

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij}\leq s_i,\qquad i=1,\cdots,7. \tag{8}$$

进行求解, 若存在某些 i, 使得 $\sum_{j=1}^{15} x_{ij}\leq 500$, 采用分枝定界法处理: 将(8)换成 $500\leq\sum_{j=1}^{15} x_{ij}\leq s_i$ 和 $\sum_{j=1}^{15} x_{ij}\leq 0$ 分别进行求解, 比较二者孰优孰劣, 择优选用.

于是模型 1 即成为二次规划模型. 这个模型含有 135 个变量, 近四十个约束条件, 手工计算已不可能, 需考虑借助计算机求解.

3　模型的求解

3.1　计算 S_i 到 A_j 的最佳路线和最小运价, 得到最小运价矩阵

$$C=\begin{pmatrix}
170.7 & 160.3 & 140.2 & 98.6 & 38 & 20.5 & 3.1 & 21.2 & 64.2 & 92 & 96 & 106 & 121.2 & 128 & 142\\
215.7 & 205.3 & 190.2 & 171.6 & 111 & 95.5 & 86 & 71.2 & 114.2 & 142 & 146 & 156 & 171.2 & 178 & 192\\
230.7 & 220.3 & 200.2 & 181.6 & 121 & 105.5 & 96 & 86.2 & 48.2 & 82 & 86 & 96 & 111.2 & 118 & 132\\
260.7 & 250.3 & 235.2 & 216.6 & 156 & 140.5 & 131 & 116.2 & 84.2 & 62 & 51 & 61 & 76.2 & 83 & 97\\
255.7 & 245.3 & 225.2 & 206.6 & 146 & 130.5 & 121 & 111.2 & 79.2 & 57 & 33 & 51 & 71.2 & 73 & 87\\
265.7 & 255.3 & 235.2 & 216.6 & 156 & 140.5 & 131 & 121.2 & 84.2 & 62 & 51 & 45 & 26.2 & 11 & 28\\
275.7 & 265.3 & 245.2 & 226.6 & 166 & 150.5 & 141 & 131.2 & 99.2 & 76 & 66 & 56 & 38.2 & 26 & 2
\end{pmatrix}$$

3.2　MATLAB 5.3 优化工具箱中求解二次规划模型的函数 quadprog 用法简介

quadprog 是用来解形如下述的二次规划型的函数

$$\min_x \frac{1}{2}x^T H x + f^T x,$$

$$\text{s.t.}\ \ A\cdot x\leq b,$$

$$Aeq\cdot x = beq$$

$$lb\leq x\leq ub,$$

这里 H, A 和 Aeq 表示矩阵, f, b, beq, lb, ub 和 x 表示向量.

quadprog 最常用的调用格式为

[x, fval, exitflag] = quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0),

其中 x0 是初始值, 也可以不输入, x 记录返回的最小值点, fval 记录相应的目标函数最小值, 而 exitflag 记录程序退出时的状态, 取值 1, 0, -1, 分别表示运行成功, 未达到给定精度便已超出最大迭代次数, 无可行解或解无界三种状态.

3.3　为利用 quadprog 程序, 将模型 1 改写成矩阵形式

记 y_j 为 x_{8j}, z_j 为 x_{9j}, $j=1,\cdots,15$, 令

$$X=\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,15}\\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,15}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{91} & x_{92} & \cdots & x_{9,15}
\end{pmatrix}$$

用 x 表示将矩阵 X 的行向量顺次连接而成的 135 维向量, 并将其写成列向量形式, 即

$$x=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1,15},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2,15},\cdots,x_{91},x_{92},\cdots,x_{9,15})^T.$$

将目标函数(1)变形

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15}(p_i+c_{ij})x_{ij}+\frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{15}[y_j(y_j+1)+z_j(z_j+1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15}(p_i+c_{ij})x_{ij}+\sum_{j=1}^{15}0.05x_{8j}+\sum_{j=1}^{15}0.05x_{9j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{15}0.1x_{8j}^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{15}0.1x_{9j}^2.$$

于是 H 可表为如下形式的分块矩阵

$$H=\begin{pmatrix} O_{105\times105} & O_{105\times30} \\ O_{30\times105} & 0.1\cdot I_{30\times30}\end{pmatrix},$$

其中 O 表示零矩阵, I 表示单位矩阵. 令

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_7 & p_7 & \cdots & p_7\end{pmatrix},\quad D=(d_{ij})=C+P,$$

于是一次项系数向量 f 可写成

$$f=(d_{11},d_{12},\cdots,d_{1,15},d_{21},d_{22},\cdots,d_{2,15},\cdots,d_{71},d_{72},\cdots,d_{7,15},\overbrace{0.05,0.05,\cdots,0.05}^{30\text{个}})^T,$$

即 f 是由矩阵 D 的 7 个行向量和 2 个 $(0.05,0.05,\cdots,0.05)_{1\times15}$ 拼接而成的.

下面考虑约束条件的矩阵表示.

将(8)写成矩阵形式. 令 A 表示如下形式的列分块矩阵, 其中每个列块含有 15 列, 共 9 个列块.

$$A_1=\begin{pmatrix} 11\cdots1 & O & O & \cdots & O & O & O \\ O & 11\cdots1 & O & \cdots & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & 11\cdots1 & O & O\end{pmatrix}_{7\times135},$$

$$b_1=(s_1,s_2,\cdots,s_7)^T.$$

由于有(7)的非负性约束, 约束条件(5), (6)可改为

$$x_{8,15}\le0,\quad x_{91}\le0$$

令

$$A_2=\begin{pmatrix} O & O & O & \cdots & O & 0\cdots01 & O \\ O & O & O & \cdots & O & O & 10\cdots0\end{pmatrix}_{2\times135},\quad b_2=(0,0)^T,$$

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},$$

则不等式约束条件(8), (5), (6)可写成

$$Ax\le b.$$

令

$$Aeq1=(\overbrace{I_{15}\quad I_{15}\quad\cdots\quad I_{15}}^{7\text{个}}\quad -I_{15}\quad -I_{15}),\quad beq1=(0,0,\cdots,0)^T_{1\times15},$$

$$Aeq2=(O_{14\times105}\quad E_1\quad E_2),\quad beq2=(T_1,T_2,\cdots,T_{14})^T,$$

这里 E_1 表示由 15 阶单位矩阵第 1 行到第 14 行构成的 14×15 阶矩阵, E_2 表示 15 阶单位矩阵第 2 行到第 15 行构成的 14×15 阶矩阵. 令

$$Aeq=\begin{pmatrix}Aeq1\\Aeq2\end{pmatrix},\quad beq=\begin{pmatrix}beq1\\beq2\end{pmatrix},$$

则等式约束(3), (4)可写成

$$Aeq\cdot x=beq.$$

至此, 完成了二次规划模型的矩阵表示.

3.4 程序实现

编制如下 Matlab 程序, 命名为 steel.m

```
% steel m use quadprog in matlab5.3
T= [104  301  750  606  194  205  201  680  480  300  220  210  420  500];
S= [800  800  1000  2000  2000  2000  3000];
C= [170.7  160.3  140.2  98.6  38  20.5  3.1  21.2  64.2  92  96  106  121.2  128  142;
    215.7  205.3  190.2  171.6  111  95.5  86  71.2  114.2  142  146  156  171.2  178  192;
    230.7  220.3  200.2  181.6  121  105.5  96  86.2  48.2  82  86  96  111.2  118  132;
    260.7  250.3  235.2  216.6  156  140.5  131  116.2  84.2  62  51  61  76.2  83  97;
    255.7  245.3  225.2  206.6  146  130.5  121  111.2  79.2  57  33  51  71.2  73  87;
    265.7  255.3  235.2  216.6  156  140.5  131  121.2  84.2  62  51  45  26.2  11  28;
    275.7  265.3  245.2  226.6  166  150.5  141  131.2  99.2  76  66  56  38.2  26  2];
P= [160  155  155  160  155  150  160];
P= kron(P',ones(1, 15));
D= [C+ P; 0.05* ones(2, 15)]';
f= D(:);
H= [zeros(105, 105)  zeros(105, 30);
    zeros(30, 105)  0.1* eye(30, 30)];
A1= kron(eye(7, 9), ones(1, 15));
b1= S';
temp= eye(15);
e1= [zeros(1, 15); temp(1, :)];
e15= [temp(15, :); zeros(1, 15)];
A2= [zeros(2, 105)  e15  e1]
b2= zeros(2, 1);
A= [A1; A2];
b= [b1; b2];
Aeq1= kron([ones(1, 7)  - ones(1, 2)], eye(15));
beq1= zeros(15, 1);
Aeq2= [zeros(14, 105)  temp(1:14, :)  temp(2:15, :)];
beq2= T';
Aeq= [Aeq1; Aeq2];
beq= [beq1; beq2];
[x, fval, exitflag]= quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, zeros(135, 1));
exitflag
x= round(x); % 取整
xm= reshape(x, 15, 9)' % 调运方案矩阵
m= xm(1:7, :);
order= sum(m') % 订购方案矩阵
format long;
fval= 0.5* x'* H* x+ f'* x  % 输出取整后的总费用;
format short;
```

运行此程序, 得到运输方案矩阵 m, 订购矩阵 order, 以及对应的总费用 fval. 此时 exitflag= 0, 表示迭代次数超出限定范围时解还未收敛. 解决这个问题的方法是: 用现在得到的解向量 x 作为初始值, 重新迭代. 于是可将上述程序中调用 quadprog 的语句用下面两条语句替换

```
x0= x;
[x, fval, exitflag]= quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, zeros(135, 1), [ ], x0);
```

再次运行该程序, exitflag= 1, 表示迭代已收敛, 但发现从钢厂 s_7 订购钢管数为 245 个单位, 不符合约束条件(2), 将约束条件 $\sum_{j=1}^{15} x_{7j} \le s_7$ 分别用 $\sum_{j=1}^{15} x_{7j} \le 0$ 和 $500 \le \sum_{j=1}^{15} x_{7j} \le s_7$ 替换, 再次修改程序运行求

解, 发现前者对应总费用最省, 于是得到最优解

最优订货方案矩阵:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
800	800	1000	0	1366	1205	0

最优调运方案矩阵:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_1	0	0	0	335	0	200	265	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	179	0	0	321	0	0	300	0	0	0	0	0	0	0
S_3	0	0	336	0	0	0	0	0	664	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	172	133	295	0	0	0	0	351	415	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	86	333	621	165
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y	0	75	282	0	10	16	76	175	159	30	145	11	134	335	0
Z	0	104	226	468	606	184	189	125	505	321	270	75	199	286	165

总费用: 1 278 631.6 万元

注　用不同的初始值, 重复多次运行程序, 可以得到不同的订货方案和调运方案, 但它们所对应的总费用都为 1 278 631.6 万元, 试举两例

(i) 订货方案矩阵

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
800	800	1000	0	1015	1556	0

最优调运方案矩阵:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_1	0	0	0	0	334	200	266	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	179	321	0	0	0	0	300	0	0	0	0	0	0	0
S_3	0	0	187	0	149	0	0	0	664	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	0	0	600	0	0	0	0	0	415	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	351	0	86	333	621	165
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y	0	75	282	0	9	15	76	175	159	30	145	11	134	335	0
Z	0	104	226	0	1074	185	190	125	505	321	270	75	199	286	165

(ii) 订货方案矩阵:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
800	800	1000	0	1366	1205	0

最优调运方案矩阵:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
S_1	0	0	0	0	335	200	265	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	179	22	149	150	0	0	300	0	0	0	0	0	0	0
S_3	0	0	224	112	0	0	0	0	664	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	262	207	131	0	0	0	0	351	415	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	86	333	621	165
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y	0	75	282	0	10	16	76	175	159	30	145	11	134	335	0
Z	0	104	226	468	606	184	189	125	505	321	270	75	199	286	165

[参　考　文　献]

[1]　邵铮, 等. 钢管的订购和运输解答模型[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(1): 67- 74.
[2]　丁勇, 等. 钢管的订购和运输[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(1): 81- 88.
[3]　段晓军, 等. 钢管订购和运输策略[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(1): 63- 66.

The Solution to the Quadratic Programming Model of Ordering and Transportation of Pipelines

CHU Li-cai
(Dept. of Basic Courses, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper constructs a quadratic programming model to the problem of ordering and transportation of pipelines, and gives a method by using the function quadprog in MATLAB optimization toolbox to solve the model in detail. Then points out that the problem has more than one optimization solutions.

Key words: the problem of ordering and transportation of pipelines; the quadratic programming model; MATLAB optimization toolbox; quadprog