网络优化入门

《美国数学建模竞赛》

完整课程请长按下方二维码

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

网络优化基本概念

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

网络优化的基本概念

- 优化(Optimization) : 从若干可能的方案中寻求某种意义下的最优方案
- 网络(Network)：数学模型、数学结构 ---- 图
- 网络优化就是研究与（赋权）图有关的最优化问题
- 与图论有联系，也有区别（侧重点不同）

图论：

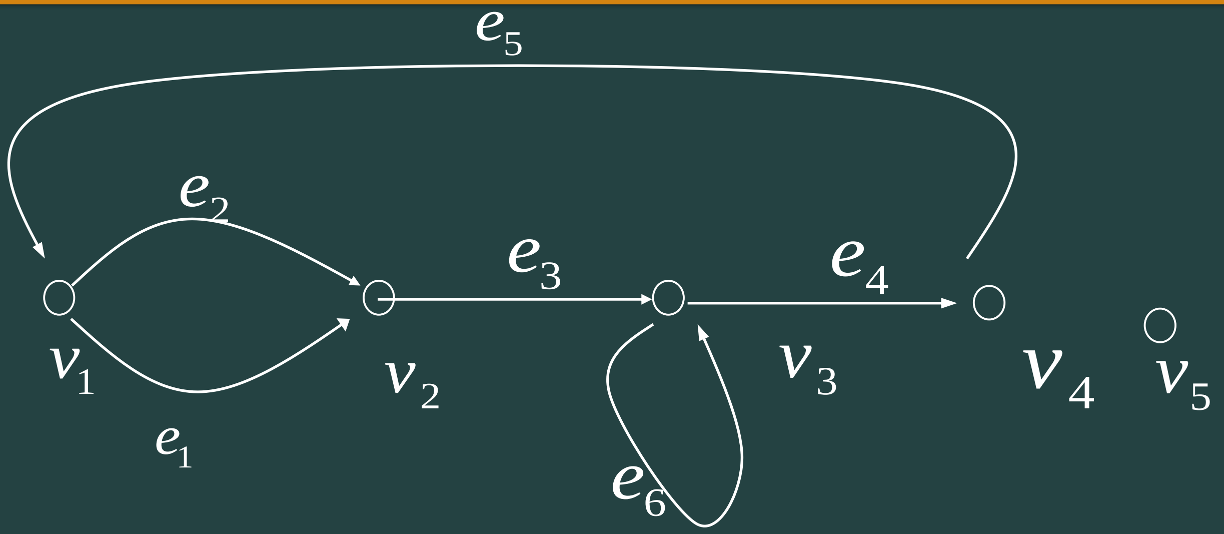
图的性质

网络优化：

与（赋权）图有关的优化问题

与数学规划紧密相关

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码



图$G=(V,E)$，其中顶点集$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

弧集$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

弧$e_1=(v_1, v_2)$，$e_2=(v_1, v_2)$，$e_3=(v_2, v_3)$，

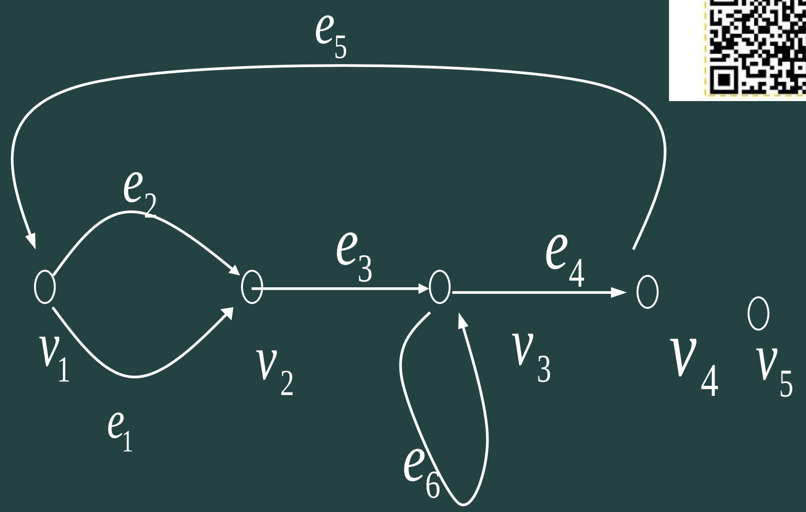
$e_4=(v_3, v_4)$ $e_5=(v_4, v_1)$ $e_6=(v_3, v_3)$

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

定义1　一个有序二元组 (V, E) 称为一个图, 记为 $G=(V, E)$,

其中

① V或$V(G)$称为G的顶点集, $V\neq\Phi$, 其元素称为顶点或结点, 简称点;



② E或E(G)称为G的边集, 其元素称为边, 它联结V 中的两个点, 如果这两个点是无序的, 则称该边为无向边, 否则, 称为有向边.

可以用[V]或者[E]表示图G的顶点数和边数。

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

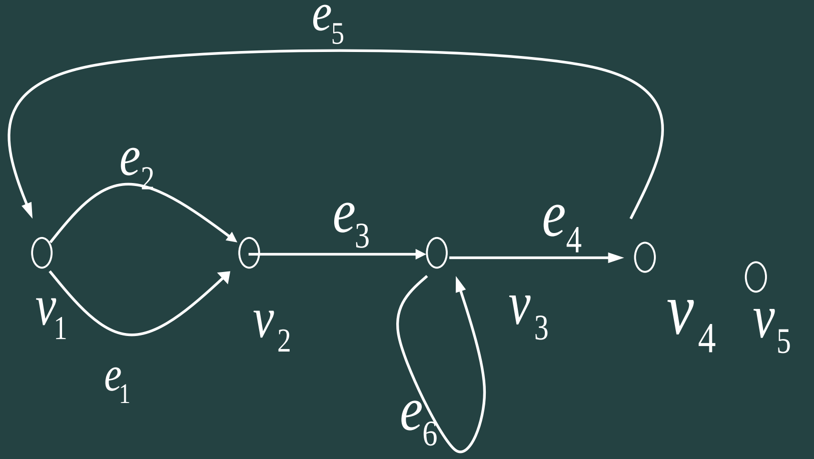
如果$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$是有限非空点集, 则称$G$为**有限图**或$n$**阶图**.

如果E的每一条边都是无向边, 则称G为**无向图**;

如果E的每一条边都是有向边, 则称G为**有向图**;

否则, 称G为**混合图**.

记$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}(e_k=v_iv_j)$.



《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

对于一个图$G = (V, E)$, 人们常用图形来表示它, 称其为**图解**.

凡是有向边, 在图解上都用箭头标明其方向.

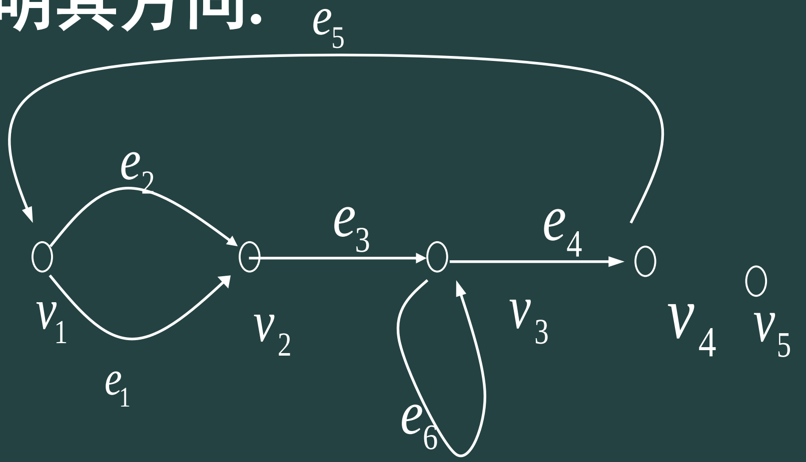
称点v_i, v_j为边v_iv_j的**端点**.

有边联结的两个点称为**相邻顶点**,

有一个公共端点的边称为**相邻边**.

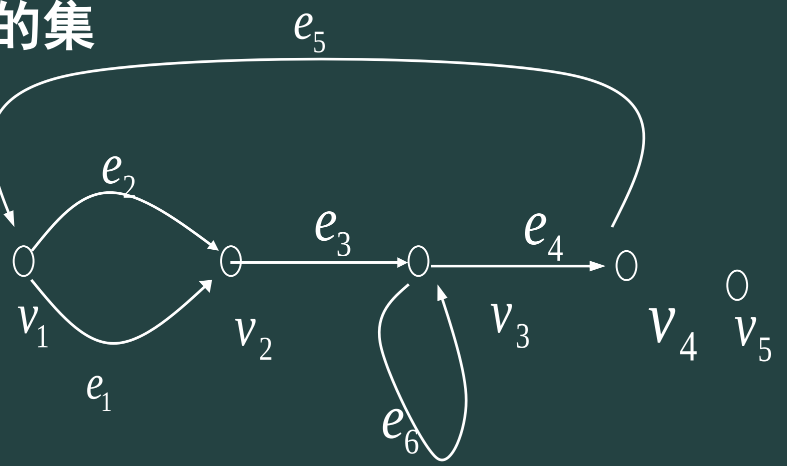
边和它的端点称为**互相关联**.

有向图中的关联又分**出关联**和**入关联**。

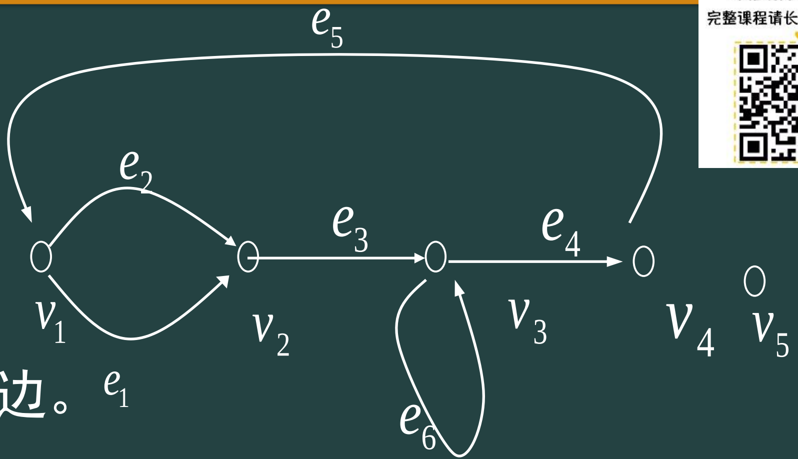


《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

- 常用$d(v)$表示图G中与顶点v关联的边的数目，称为顶点v的**度数**.
- 与顶点v出关联的边的数目称为**出度**，记作$d^+(v)$,
- 与顶点v入关联的边的数目称为**入度**，记作$d^-(v)$。
- 用$N(v)$表示图G中所有与顶点v相邻的顶点的集
- 两个端点重合的边称为**环**。
- 无向图中有相同端点的边称为**平行边**,
- 有向图中有相同的头与尾的边称为**平行边**。



《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码



- 没有关联边的顶点称为**孤立点**。
- 恰有一条关联边的顶点称为**悬点**，
- 与悬点关联的的边称为**悬边**。
- 在计算与顶点关联的边时，环算作两条边。
- 有向图G略去边的方向，得到一个无向图称为**图G的基础图**。
- 有n个顶点m条边的图称为**(n,m)图**。（n,0）图叫**零图**。（1,0）图叫**平凡图**。
- 没有环与平行边的图称为**简单图**。
- 任意两顶点都相临的简单图称为**完全图**。
- 有n个顶点的完全图记为K_n。

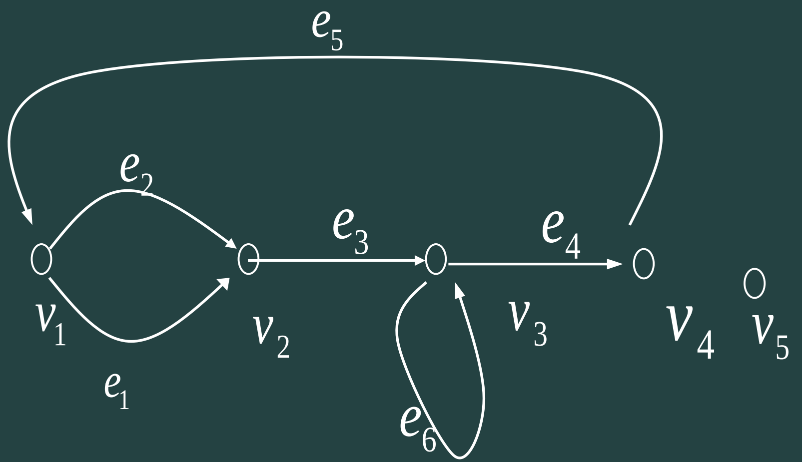
《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

定义2 若将图G的每一条边e都对应一个实数$F(e)$,则称$F(e)$为该边的**权**, 并称图G为**赋权图(网络)**, 记为$G=(V, E, F)$.

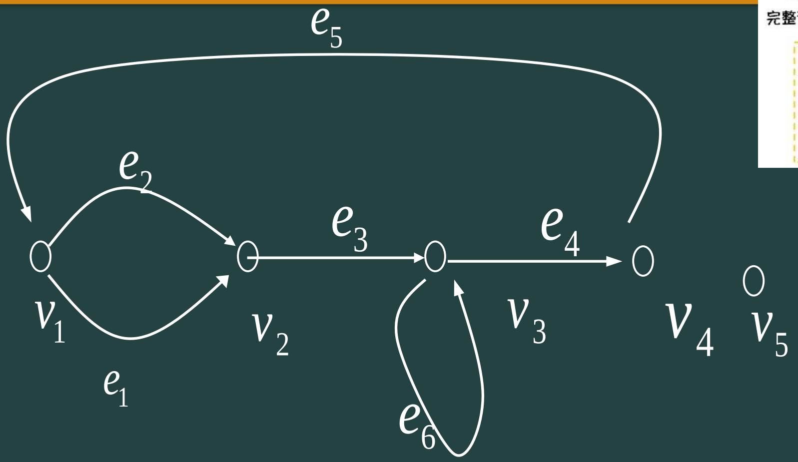
定义3 设$G=(V, E)$是一个图, $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, 且 “$1\leq i\leq k$, $v_{i-1}v_i \in E$, 则称$v_0 v_1 \ldots v_k$是G的一条**通路**.

如果通路中没有相同的顶点, 则称此通路为**路径**, 简称**路**.

始点和终点相同的路称为**圈**或**回路**.



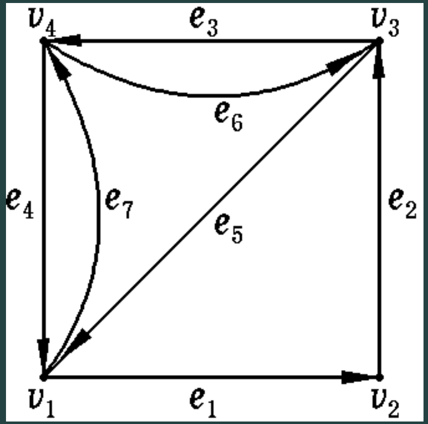
图的矩阵表示



(1) 邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_iv_j\in E\\0, v_iv_j\notin E\end{cases}$$

例 写出右图的邻接矩阵：



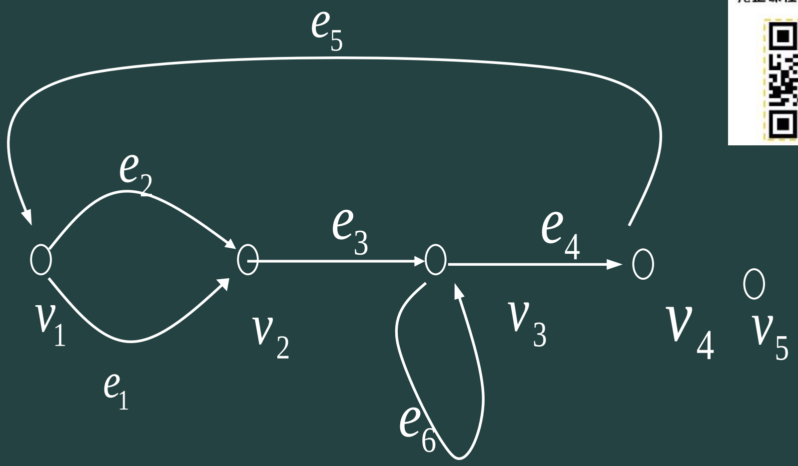
解

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

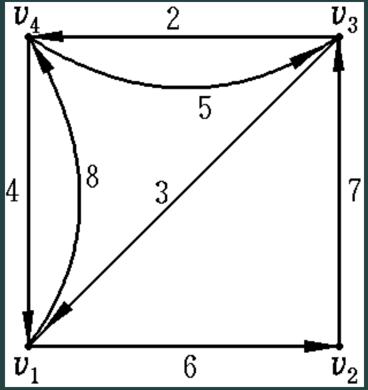
图的矩阵表示



(2) 权矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$$a_{ij}=\begin{cases} F(v_iv_j), & v_iv_j \in E \\ 0, & i=j \\ \infty, & v_iv_j \notin E \end{cases}$$

例 写出右图的权矩阵：



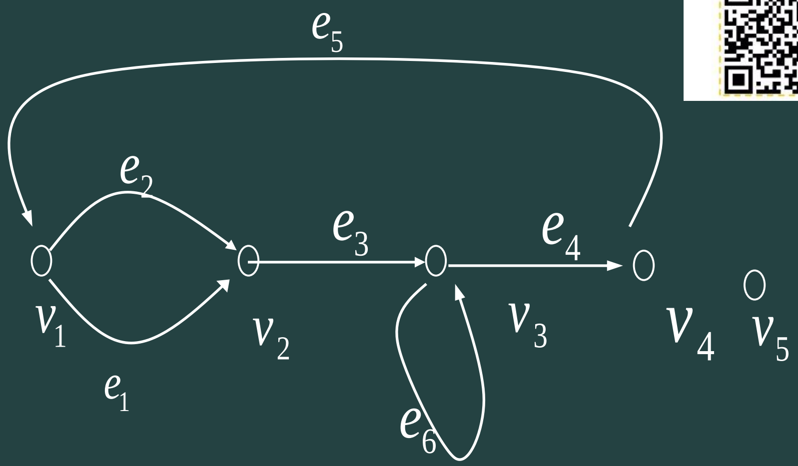
解

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 8 \\ \infty & 0 & 7 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

图的矩阵表示

(3) **关联矩阵** $A=(a_{ij})_{n\times m}$



有向图： $a_{ij}=\begin{cases}1, 若v_i是e_j的始点\\ -1, \ 若v_i是e_j的终点\\ 0, \ v_i与e_j不关联\end{cases}$

无向图： $a_{ij}=\begin{cases}1, 若v_i与v_j关联\\ 0, 若v_i与v_j不关联\end{cases}$

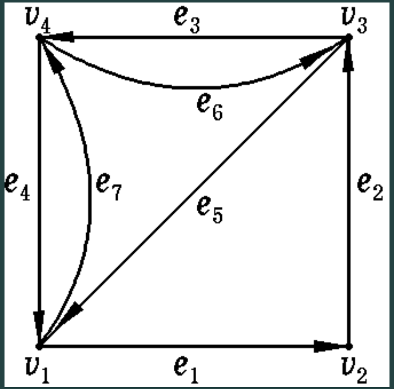
《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

图的矩阵表示

例 写出右图与其基本图的关联矩阵

解 分别为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

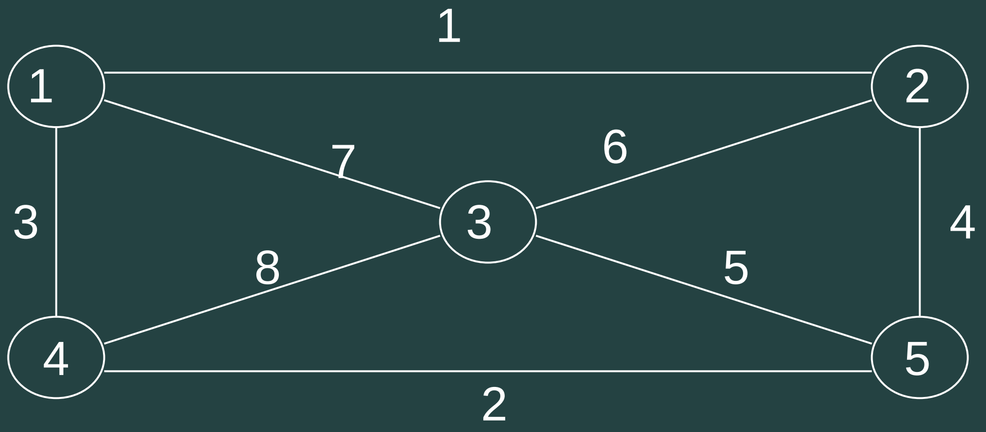
《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

网络优化经典案例

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

例： 公路连接问题

- 某一地区有若干个主要城市，现准备修建高速公路把这些城市连接起来，使得从其中任何一个城市都可以经高速公路直接或间接到达另一个城市. 假定已经知道了任意两个城市之间修建高速公路的成本，那么应如何决定在哪些城市间修建高速公路，使得总成本最小？



最小(生成)树

也称为

最小(支撑)树

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

例 关键路径问题

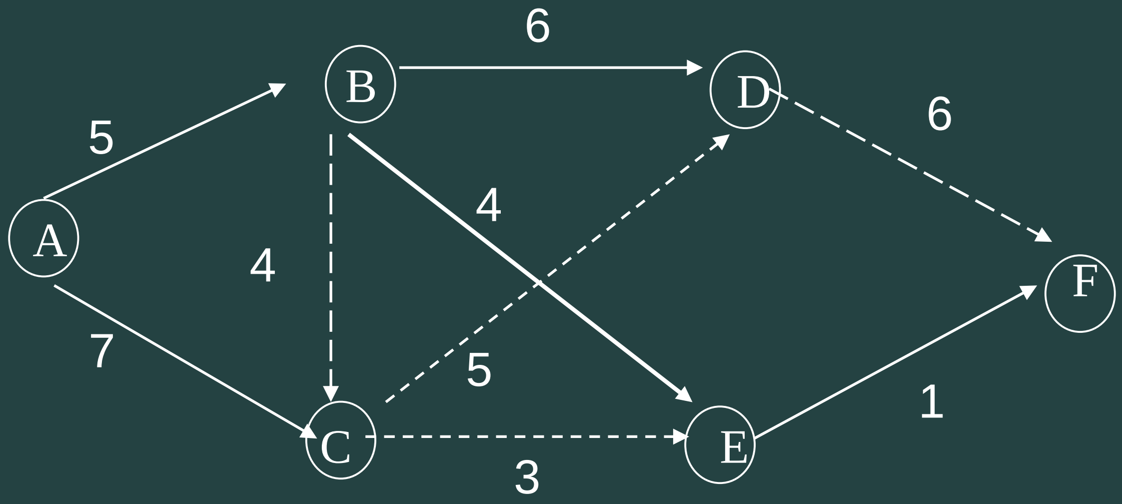
一项工程任务,大到建造一座大坝,一座体育中心,小至组装一台机床,一架电视机, 都要包括许多工序.这些工序相互约束,只有在某些工序完成之后, 一个工序才能开始. 即它们之间存在完成的先后次序关系,一般认为这些关系是预知的, 而且也能够预计完成每个工序所需要的时间.

这时工程领导人员迫切希望了解最少需要多少时间才能够完成整个工程项目, 影响工程进度的要害工序是哪几个?

《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

例 最短路问题（SPP-Shortest Path Problem）

- 一名货柜车司机奉命在最短的时间内将一车货物从甲地运往乙地. 从甲地到乙地的公路网纵横交错，因此有多种行车路线，这名司机应选择哪条线路呢？假设货柜车的运行速度是恒定的，那么这一问题相当于需要找到一条从甲地到乙地的最短路.



《美国数学建模竞赛》
完整课程请长按下方二维码

灾情巡视路线(CUMCM-1998B)