数学建模----模糊综合评判法

“模模糊糊”的概念

在我们的日常生活中有许多的事物，或多或少都具有模糊性和混淆不清的特点。“模模糊糊”的概念，是最微妙且难以捉摸，但却又是常见最重要的，但在近代数学中却有了很清晰的定义。

如果到火车站去接人，如下描述
“大胡子，高个子，长头发戴宽边黑色眼镜的中年男人”

除了男人的信息是精确的之外，其它信息全是模糊的，但是我们却能够找到那个人。

为什么要模糊？

✓在人们的实际生活与工作中，无法避免模糊性。

例如：

1）某一生态条件对某种害虫、某种作物的存活或适应性可以评价为“有利、比较有利、不那么有利、不利”；

2）灾害性霜冻气候对农业产量的影响程度为“较重、严重、很严重”，等等。

- ✓事事要求精确，人们简直无法顺利地交流思想。

例1：两人见面，问“你好吗？”

问：什么叫做好，又有谁能给个精确地定义？

- ✓有些现象是精确地，但是适当地模糊可能使问题得到简化，灵活性大为提高。

例**1**：在田地里找最大的玉米与找比较大的玉米。

例**2**：分大瓜、小瓜。

模糊集合及其运算

一、经典集合与特征函数

集合： 具有某种特定属性的对象集体。

通常用大写字母A、B、C等表示。

论域： 对局限于一定范围内进行讨论的对象的全体。

通常用大写字母U、V、X、Y等表示。

论域U中的每个对象u称为U的元素。

在论域U中任意给定一个元素u及任意给定一个经典集合A，则必有$u \in A$或者$u \notin A$，用函数表示为：

$$\chi_A : U \to \{0,1\}$$
$$u \mapsto \chi_A(u),$$

其中

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A \\ 0, & u \notin A \end{cases}$$

函数χ_A称为集合A的特征函数。

二、模糊集合及其运算

美国控制论专家**Zadeh**教授正视了经典集合描述的“非此即彼”的清晰现象，提示了现实生活中的绝大多数概念并非都是“非此即彼”那么简单，而概念的差异常以中介过渡的形式出现，表现为“亦此亦彼”的模糊现象。基于此，**1965**年，**Zadeh**教授在《**Information and Control**》杂志上发表了一篇开创性论文“**Fuzzy Sets**”，标志着模糊数学的诞生。

1、模糊子集

定义：设U是论域，称映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1],$$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$$

确定了一个U上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$。映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称为 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度，简称隶属度。

模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 唯一确定，故认为二者是等同的。为简单见，通常用A来表示 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 。

例如：“老人”是个模糊概念，
70岁的肯定属于老人，它的从属程度是 1，
40岁的人肯定不算老人，它的从属程度为 0，
按照查德给出的公式，55岁属于“老”的程度为0.5，即“半老”，60岁属于“老”的程度0.8。

查德认为，指明各个元素的隶属集合，就等于指定了一个集合。当隶属于0和1之间值时，就是模糊集合。

论域 $U=\{140,150,160,170,180,190\}$ （还是经典集合）

模糊集 A：高个子

定义隶属函数（具有主观性）：$A(x)=\dfrac{x-140}{190-140}$

$$A=\frac{0}{140}+\frac{0.2}{150}+\frac{0.4}{160}+\frac{0.6}{170}+\frac{0.8}{180}+\frac{1}{190}$$ （Zadeh表示法）

模糊集并不再回答“是或不是”的问题，而是对每个对象给一个隶属度，所以与经典集有本质区别。而且与隶属函数是捆绑一起的，所以可以不做区分。

模糊子集通常简称模糊集，其表示方法有：

（1）Zadeh表示法

$$A=\frac{A(x_1)}{x_1}+\frac{A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{A(x_n)}{x_n}$$

这里 $\frac{A(x_i)}{x_i}$ 表示 x_i 对模糊集A的隶属度是$A(x_i)$ 。

（2）序偶表示法

$$A=\{(x_1,A(x_1)),(x_2,A(x_2)),\cdots,(x_n,A(x_n))\}$$

（3）向量表示法

$$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$$

若论域U为无限集，其上的模糊集表示为：

$$A=\int_{x\in U}\frac{A(x)}{x}$$

2、模糊集的运算

定义：设A，B是论域U的两个模糊子集，定义

相等： $A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in U$

包含： $A \subset B \Leftrightarrow A(x) \le B(x), \forall x \in U$

并： $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x), \forall x \in U$

交： $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x), \forall x \in U$

余： $A^c(x) = 1 - A(x), \forall x \in U$

$\vee$表示取大；

$\wedge$表示取小。

几个常用的算子：

（1）Zadeh算子 $(\vee,\wedge)$

$$a \vee b = \max\{a,b\}, a \wedge b = \min\{a,b\}$$

（2）取大、乘积算子 $(\vee,\cdot)$

$$a \vee b = \max\{a,b\}, a \cdot b = ab$$

（3）环和、乘积算子 $(\hat{+},\cdot)$

$$a \,\hat{+}\, b = a + b - ab, a \cdot b = ab$$

（4）有界和、取小算子 $(\oplus,\wedge)$

$$a\oplus b=1\wedge(a+b),a\wedge b=\min\{a,b\}$$

（5）有界和、乘积算子 $(\oplus,\cdot)$

$$a\oplus b=1\wedge(a+b),a\cdot b=ab$$

（6）Einstain算子 $(\overset{+}{\varepsilon},\overset{-}{\varepsilon})$

$$a\overset{+}{\varepsilon}b=\frac{a+b}{1+ab},a\overset{-}{\varepsilon}b=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

3、模糊矩阵

定义：设 $R=(r_{ij})_{m\times n}, 0\le r_{ij}\le 1$, 称$R$为模糊矩阵。

当 r_{ij}只取0或1时，称R 为布尔（Boole）矩阵。

当模糊方阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的对角线上的元素r_{ij}都为1时，称R为模糊自反矩阵。

（1）模糊矩阵间的关系及运算

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是模糊矩阵，定义

相等：$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$

包含：$A\le B\Leftrightarrow a_{ij}\le b_{ij}$

并：$A \cup B = (a_{ij} \vee b_{ij})_{m\times n}$

交：$A \cap B = (a_{ij} \wedge b_{ij})_{m\times n}$

余：$A^c = (1 - a_{ij})_{m\times n}$

例：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$,则

$$A \cup B = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad A \cap B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad B^c = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

（2）模糊矩阵的合成

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，称模糊矩阵

$$A\circ B=(c_{ij})_{m\times n}$$

为A与B的合成，其中$c_{ij}=\max\{(a_{ik}\wedge b_{kj})|1\le k\le s\}$。

例：设$A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.6\\ 0.1 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4\\ 0.5 & 0.6\end{pmatrix}$,则

$$A\circ B=\begin{pmatrix}0.5 & 0.6\\ 0.3 & 0.3\end{pmatrix}\quad B\circ A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.4 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

模糊综合评判

设与被评价事物相关的因素有n个，记作

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

称之为因素集。又设所有可能出现的评语有m个，记作

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$$

称之为评语集。由于各种因素所处地们不同，作用也不一样，考虑用权重$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$来衡量。

步骤：

（1）确定因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$;

（2）确定评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$;

（3）进行单因素评判得到$r_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$;

（4）构造综合评价矩阵：

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

（5）综合评判：对于权重$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,计算

$B=A\circ R$，并根据隶属度最大原则作出评判。

根据运算$\circ$的不同定义，可得到以下不同模型：

模型 I　$M(\wedge,\vee)$ 一主因素决定型

$$b_j = \max\{(a_i \wedge r_{ij}), 1 \le i \le n\} \quad (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型 II　$M(\cdot,\vee)$ 一主因素突出型

$$b_j = \max\{(a_i \cdot r_{ij}), 1 \le i \le n\} \quad (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型III　$M(\cdot,+)$ 一加权平均型

$$b_j = \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot r_{ij}) \quad (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型Ⅳ　$M(\wedge,\oplus)$—取小上界和型

$$b_j = \min\{1, \sum_{i=1}^{n}(a_i \wedge r_{ij})\}\ (j = 1,2,\cdots,m);$$

模型Ⅴ　$M(\wedge,+)$—均衡平均型

$$b_j = \sum_{i=1}^{n}(a_i \wedge \frac{r_{ij}}{r_j})\ (j = 1,2,\cdots,m);$$

$$r_j = \sum_{k=1}^{n} r_{kj}.$$

例：考虑一个服装的评判问题。

（1）建立因素集$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,其中

u_1:花色；u_2:式样；u_3:耐穿程度；u_4:价格。

（2）建立评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其中v_1:很欢迎；

v_2:较欢迎；v_3:不太欢迎；v_4:不欢迎。

（3）进行单因素评判得到：

$$u_1 \mapsto r_1=(0.2,0.5,0.2,0.1)$$

$$u_2 \mapsto r_2=(0.7,0.2,0.1,0)$$

$$u_3 \mapsto r_3=(0,0.4,0.5,0.1)$$

$$u_4 \mapsto r_4=(0.2,0.3,0.5,0).$$

（4）由单因素评判构造综合评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

（5）综合评判

设有两类顾客，他们根据自己的喜好对各因素所分配的权重分别为

$$A_1=(0.1,0.2,0.3,0.4)$$

$$A_2=(0.4,0.35,0.15,0.1)$$

用模型$M(\wedge,\vee)$计算综合评判为

$$B_1 = A_1 \circ R = (0.2,0.3,0.4,0.1)$$

$$B_2 = A_2 \circ R = (0.35,0.4,0.2,0.1)$$

按最大隶属原则，第一类顾客对此服装不太欢迎，而第二类顾客对此服装比较欢迎。

对于类似于B_2的情形，在下结论前通常将其归一化为

$$B_2' = (\frac{0.35}{1.05},\frac{0.4}{1.05},\frac{0.2}{1.05},\frac{0.1}{1.05}) = (0.33,0.38,0.19,0.1)$$

例1 某单位对员工的年终综合评定。

解 (1) 取因素集 $\boldsymbol{U}=\{$政治表现 u_1,工作能力 u_2,工作态度 u_3,工作成绩 $u_4\}$。

(2) 取评语集 $\boldsymbol{V}=\{$优秀 v_1,良好 v_2,一般 v_3,较差 v_4,差 $v_5\}$。

(3) 确定各因素的权重 $\boldsymbol{A}=[0.25,0.2,0.25,0.3]$。

(4) 确定模糊综合评判矩阵,对每个因素 u_i 做出评价。

① u_1 比如由群众评议打分来确定:

$$\boldsymbol{R}_1=[0.1,0.5,0.4,0,0]。$$

上式表示,参与打分的群众中,有10%的人认为政治表现优秀,50%的人认为政治表现良好,40%的人认为政治表现一般,认为政治表现较差或差的人为0。用同样方法对其他因素进行评价。

② u_2,u_3 由部门领导打分来确定:

$$\boldsymbol{R}_2=[0.2,0.5,0.2,0.1,0],\boldsymbol{R}_3=[0.2,0.5,0.3,0,0]。$$

③ u_4 由单位考核组成员打分来确定:

$$\boldsymbol{R}_4=[0.2,0.6,0.2,0,0]。$$

以 $\boldsymbol{R}_i$ 为第 i 行构成评价矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

它是从因素集 $\boldsymbol{U}$ 到评语集 $\boldsymbol{V}$ 的一个模糊关系矩阵。

（5）模糊综合评判。进行矩阵合成运算：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=[0.25,0.2,0.25,0.3]\cdot\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0.175,0.53,0.275,0.02,0]。$$

取数值最大的评语作为综合评判结果，则评判结果为“良好”。

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004，汞 0 (mg/L)

例2 水污染模糊综合评价

环境水文地质评价内容之一是对城市地下水污染程度的评价. 某市水质评价分级表如下:

评价指标 \ 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

单位: mg/L (毫克/升)

在 58 号检测点实测数据是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004，汞 0（mg/L），试用模糊综合评判来评价该市的工业污染对地下水质的影响程度.

1. 因素集（评价指标集）是 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$={ 酚，氰，砷，铬，汞 }.

2. 评判集（污染级别集）是 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$={ 微污染，轻污染，中污染，重污染，严重污染 }.

3. 确定模糊评判矩阵 $\underset{\sim}{R}=\{r_{ij}\}_{n\times m}$.

首先，用隶属函数表示污染程度，仅举出 58 号检测点关于酚的隶属函数如下：

$$v_1\text{级}:\mu_{v_1}(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ -2000(x-0.0005), & 0<x<0.0005;\\ 0, & x\geq 0.0005.\end{cases}$$

$$v_2\text{级}:\mu_{v_2}(x)=\begin{cases}2000x, & 0<x<0.0005;\\ 1, & x=0.0005\ ;\\ -666.67(x-0.002), & 0.0005<x<0.002.\end{cases}$$

$$v_3\text{级}:\mu_{v_3}(x)=\begin{cases}666.67(x-0.0005), & 0.0005<x<0.002;\\ 1, & x=0.002\ ;\\ -1000(x-0.003), & 0.002<x<0.003.\end{cases}$$

$$v_4\text{级}:\mu_{v_4}(x)=\begin{cases}1000(x-0.002), & 0.002<x<0.003;\\ 1, & x=0.003\ ;\\ -1000(x-0.004), & 0.003<x<0.004.\end{cases}$$

$$v_5\text{级}:\mu_{v_5}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0.003;\\ 1000(x-0.0030, & 0.003<x<0.004\ ;\\ 1, & x\ge 0.004.\end{cases}$$

评 价 指标 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004， 汞 0 (mg/L)

将 58 号检测点所测酚（u_1）的检测值 $x_1 = 0.0019$ 代入上述 5 个隶属函数得检测值 $x_1 = 0.0019$ 归属 5 个污染级别的隶属度，即对指标酚（u_1）的模糊评判为：

$$f(u_1) = (r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{15}) = (\mu_1(0.0019), \mu_2(0.0019), \cdots, \mu_5(0.0019)) = (0, 0.067, 0.938, 0, 0).$$

类似地，可以分别求得氰，砷，铬，汞的隶属函数并计算出 58 号检测点所测氰，砷，铬，汞的检测值的隶属度（略）. 从而构成模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}$：

0.933

评价 指标 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.067 & 0.093 & 0 & 0 \\ 0.84 & 0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 模糊综合评判.

1) 计算指标权重.

记 x_i 为第 i 指标实测值，$(x_1,x_2,\cdots,x_5)=(0.0019,0.0004,0.004,0.004,0)$， p_i 为该指标在水质评价分类表中五个数据的平均值，$(p_1,p_2,\cdots,p_5)=(0.0019,0.0095,0.042,0.0526,0.00105)$，第 i 指标权重为 $w_i=\dfrac{x_i/p_i}{\sum_{k=1}^{5}(x_k/p_k)}$，从而得 U 上模糊子集 $\underset{\sim}{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_5)=(0.824,0.035,0.078,0.063,0)$

2）模糊矩阵乘法运算.

表示权重的模糊子集 $\underline{W}$ 与表示隶属度的模糊矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 作乘法，而获得模糊综合评价

0.933

$$\underset{\sim}{W}\circ\underset{\sim}{R}=(0.824,0.035,0.078,0.063,0)\circ\begin{bmatrix}0 & 0.067 & 0.093 & 0 & 0\\ 0.84 & 0.16 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(0.078,0.067,0.824,0,0)$$

是酚 0.0019，氰 0.0004，砷 0.004，铬 0.004，汞 0（mg/L）

5 最大可能评判.

$\max(0.078, 0.067, 0.824, 0, 0) = 0.824$，可见 v_3 级的隶属度 0.824 最大. 所以，58 号点最大可能评价为中污染水质. 如果对各个检测点按上述方法评价，可的水质评价的平面图.

评价 指标 污染级别	酚	氰	砷	铬	汞
微污染	0	0	0.01	0.0013	0.00025
轻污染	0.0005	0.0025	0.02	0.0025	0.0005
中污染	0.002	0.01	0.04	0.05	0.001
重污染	0.003	0.015	0.06	0.075	0.0015
严重污染	0.004	0.02	0.08	0.1	0.002

模糊综合评价法根据模糊数学的隶属度理论把定性评价转化为定量评价，即用模糊数学对受到多种因素制约的事物或对象做出一个总体的评价。

它具有结果清晰，系统性强的特点，能较好地解决模糊的、难以量化的问题，适合各种非确定性问题的解决。

1，如何建立模糊综合评价矩阵？

调查问卷法，专家经验法，参考文献法等。

2，如何给出因素的权重？

众人评估法、加权平均法、层次分析法等。