1 Izometrii în planul 2 dimensional

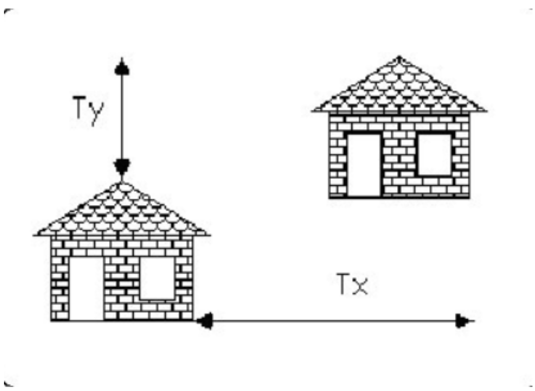
Un obiect 2D/3D se reprezintă prin:

- coordonatele vârfurilor;
- atribute topologice (laturi, etc.);
- atribute de aspect.

1.1 Translaţia

Translaţia este izometria planului care transformă toate punctele planului transformându-le pe aceeaşi direcţie cu un vector de translaţie, astfel forma obiectului nu e modificată. Ecuaţiile translaţiei sunt:

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$



1.2 Scalarea faţă

Scalarea unui punct în spațiu are ca efect relocarea sa în relație cu un punct de referință. Aplicată asupra unui obiect în spațiu, ea produce mărirea sau micșorarea obiectului în direcțiile x, y, z. Factorii de scalare pe cele 3 axe sunt notați s_x, s_y, s_z . Dacă $s_x = s_y = s_z$ se obtine o schimbare a dimensiunilor obiectului. Factorii $0 < s < 1$ produc micșorarea dimensiunilor obiectului iar factorii $s > 1$ produc creșterea dimensiunilor obiectului.

Modelul transformarii este Ecuaţiile sunt:

$$\begin{cases} x' = x \cdot s_x \\ y' = y \cdot s_y \end{cases}$$

În cazul 3 dimensional, se adaugă ecuația $z' = z\dot{s}_z$

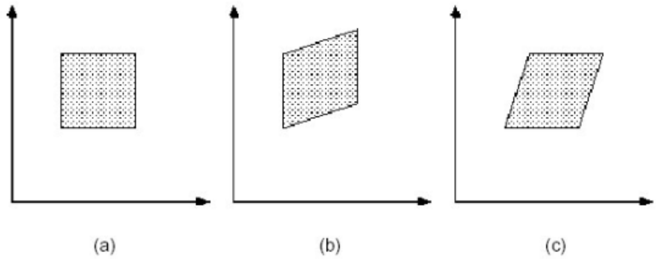


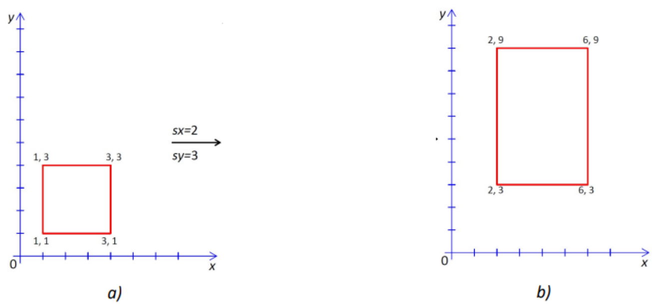
Figura 2.2.3 Scalarea după o axă: (a) figura inițială; (b) figura scalată după axa Y; (c) figura scalată după axa X.

În cazul 2 dimensional, dacă $s_x = s_y$ atunci avem scalare uniformă. În cazul 2 dimensional, dacă $s_x \neq s_y$ atunci avem scalare neuniformă.

Exemplu:

Fie pătratul cu vârfurile: (1,1), (3,1), (3,3), (1,3), (figura 7.4, *a*).

Prin scalarea sa față de origine cu factorii *sx* = 2 și *sy* = 3, se va obține dreptunghiul cu vârfurile: (2,3), (6,3), (6,9), (2,9), (figura 7.4, *b*).

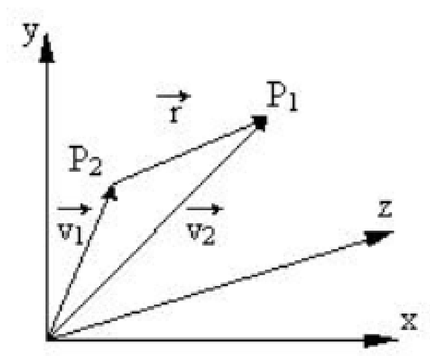


1.3 Rotaţia faţă de un punct oarecare

Aceasta este o transformare care roteşte punctele în sens trigonometric în jurul unui punct numit centru de rotaţie după un unghi fixat numit unghi de rotaţie.

Dacă avem rotaţia de centru $O(x_0, y_0)$ şi unghi α, atunci imaginea unui punct $P(x, y)$ va fi $P'(x_0 + (x–x_0) \cdot \cos(\alpha) - (y–y_0) \cdot \sin(\alpha), y_0 + (x–x_0) \cdot \sin(\alpha) + (y–y_0) \cdot \cos(\alpha))$.
Transformarea are ecuaţia:

$$\begin{cases} x' = x_0 + (x–x_0) \cdot \cos(\alpha) - (y–y_0) \cdot \sin(\alpha) \\ y' = y_0 + (x–x_0) \cdot \sin(\alpha) + (y–y_0) \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$



Proprietăţi:

- păstrează distanţele;
- păstrează orientarea poligoanelor;
- păstrează unghiurile;
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele;
- dacă nu este o rotaţie trivială de unghi 0 atunci are ca punct fix centrul de rotaţie;
- nu are drepte fixe, dar are cercuri fixe centrate în centrul de rotaţie;
- două rotaţii succesive $R_1(O_1, \alpha)$ şi $R_2(O_2, \beta)$ se compun într-o translaţie sau o rotaţie $R_3(O_3, \alpha + \beta)$;
- în general rotaţiile nu comută;

1.4 Rotaţia

1. Rotația față de origine

Această transformare este specificată printr-un unghi;

– dacă unghiul este pozitiv, atunci rotația este efectuată în sensul trigonometric,

– altfel, în sensul mișcării acelor de ceasornic.

Fie un punct $P(x, y)$ și un unghi de rotație t. Punctul $P'(x', y')$ care va fi calculat în funcție de rotația punctului P cu unghiul u, în jurul originii (figura 7.5), se poate exprima prin relațiile:

Coordonatele carteziene ale punctului P:

$$x = r \cdot \cos(t), \quad y = r \cdot \sin(t). \tag{7.7}$$

Coordonatele carteziene ale punctului P':

$$x' = r \cdot \cos(t + u), \quad y' = r \cdot \sin(t + u). \tag{7.8}$$

Înlocuim $\cos(t + u)$ și $\sin(t + u)$ cu expresiile lor din trigonometrie, și astfel obținem:

$$x' = r\,(\cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)), \quad y' = r\,(\cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u)). \tag{7.9}$$

Știind că $x = r \cdot \cos(t)$ și $y = r \cdot \sin(t)$, obținem:

$$x' = x \cdot \cos(u) - y \cdot \sin(u), \quad y' = x \cdot \cos(u) + y \cdot \cos(u). \tag{7.10}$$

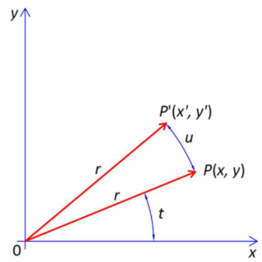


Fig. 7.5. Rotația față de origine

1.5 Compunerea transformărilor

Exemplu:

Rotația față de origine a unui punct P(x, y) se poate exprima matricial în următorul mod:

$$|x' \;\; y'| = |x \;\; y| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}.$$

O scalare față de origine urmată de o rotație față de origine se poate exprima astfel:

$$|x' \;\; y'| = |x \;\; y| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}.$$

Din înmulțirea celor două matrici obținem:

$$S \cdot R = \begin{vmatrix} sx \cdot \cos(u) & sx \cdot \sin(u) \\ -sy \cdot \sin(u) & sy \cdot \cos(u) \end{vmatrix}.$$

Deci formula transformării compuse este:

$$x' = x \cdot sx \cdot \cos(u) - y \cdot sy \cdot \sin(u),$$
$$y' = x \cdot sx \cdot \cos(u) + y \cdot sy \cdot \cos(u).$$

1.6 Coordonate omogene

Exemple:

[1 0 0] este punctul de la infinit pe axa *x* pozitivă;

[0 -1 0] este punctul de la infinit pe axa *y* negativă;

[1 1 0] este punctul de la infinit pe dreapta *y* = *x* în direcția [1 1].

Cele trei transformări elementare cunoscute, se pot exprima astfel, în coordonate omogene:

• Translația:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & 1 \end{vmatrix}.$$

• Scalarea față de origine:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

• Rotația față de origine:

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.7 Oglindirea

a) Față de axa *x* (figura 7.6),

$$x' = x, \quad y' = -y. \tag{7.21}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.22}$$

b) Față de axa *y* (figura 7.7),

$$x' = -x, \quad y' = y. \tag{7.23}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.24}$$

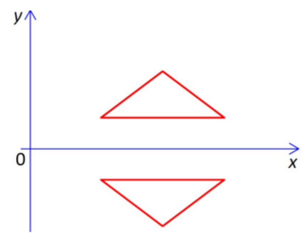


Fig. 7.6. Oglindirea față de axa *x*

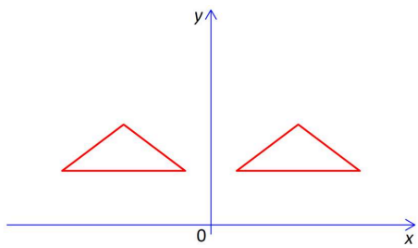


Fig. 7.7. Oglindirea față de axa *y*

7.4.1. Oglindirea (Reflexia)

c) Față de origine (figura 7.8),

$$x' = -x,$$
$$y' = -y. \qquad (7.25)$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.26)$$

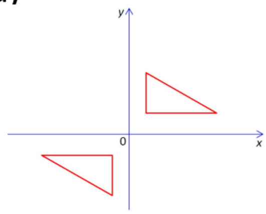


Fig. 7.8. Oglindirea față de origine

d) Față de dreapta $y = x$ (figura 7.9),

$$x' = y,$$
$$y' = x. \qquad (7.27)$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.28)$$

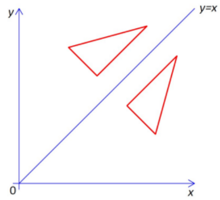


Fig. 7.9. Oglindirea față de dreapta $y = x$

1.8 Forfecarea

Forfecarea este o transformare care produce distorsionarea obiectului transformat.

De exemplu, aplicată unui pătrat (figura 7.10), are ca efect un paralelogram (figura 7.11).

Se specifică prin două numere reale, numite *factorul de forfecare pe axa x*, respectiv *factorul de forfecare pe axa y*.

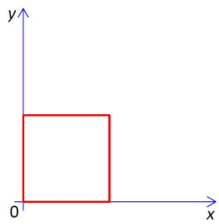


Fig. 7.10. Pătrat pentru se aplică forfecarea

a) Forfecarea pe axa *0x*

$$x' = x + F_x \cdot y,$$
$$y' = y. \qquad (7.29)$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.30)$$

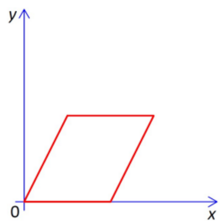


Fig. 7.11. Forfecarea pătratului aplicată pe axa 0*x*

b) Forfecarea pe axa *Oy*, (figura 7.12),

$$x' = x,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \tag{7.31}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.32}$$

c) Forfecarea în caz general (figura 7.13),

$$x' = x + F_x \cdot y,$$
$$y' = y + F_y \cdot x. \tag{7.33}$$

sau

$$|x' \;\; y' \;\; 1| = |x \;\; y \;\; 1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & F_y & 0 \\ F_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.34}$$

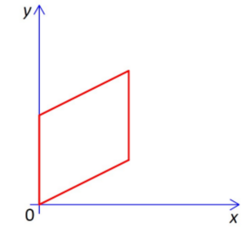


Fig. 7.12. Forfecarea aplicată pe axa *Oy*

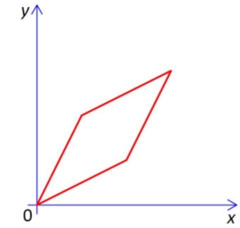


Fig. 7.13. Forfecarea în caz general

1.9 Oglindirea faţă de o axă

Dacă sistemul de coordonate *x′O′y′* s-a obținut prin oglindirea sistemului *xOy* față de axa *Ox* sau față de axa *Oy* (figura 7.17), atunci relația dintre coordonatele aceluiași punct în cele două sisteme coordonate este:

x′ = *x*,
y′ = –*y*, în cazul oglindirii față de axa *Ox*,
x′ = –*x*,
y′ = *y*, în cazul oglindiri față de axa *Oy*.

Se observă că această transformare schimbă orientarea axelor sistemului de coordonate.

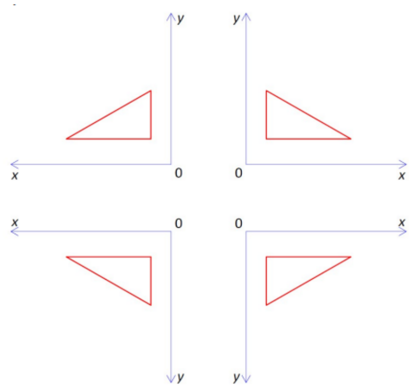


Fig. 7.17. Oglindirea unui system de coordonate