REZULTATE PRELIMINARE

1 Spaţiul de coordonate $\mathbb{R}^n$

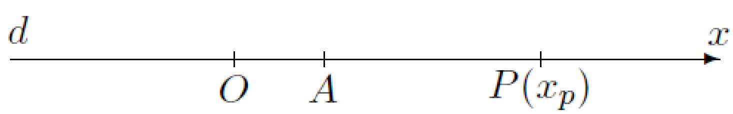
Fie $\mathbb{R}^n$ mulţimea tuturor n-uplelor de forma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ se numesc componentele lui x.

Două n-uple $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sunt egale dacă:
$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$.

2 Coordonate carteziene în $\mathcal{E}_1$

Fie $\mathcal{E}_1$ spaţiul euclidian 1-dimensional.
Fie O şi A, două puncte fixe pe o dreaptă astfel ca $OA = 1$.



Obţinem o orientare a dreptei d (de la O spre A) şi definim funcţia

$$f : \mathcal{E}_1 \to \mathbb{R}, \qquad f_1(P) = x_P$$

unde $|x_P| = OP$ şi

$$\begin{cases} x_P \geq 0, P \in [OA \\ x_P < 0, P \notin [OA \end{cases}$$

f_1 este o funcţie bijectivă şi asociază pentru orice punct $P \in \mathcal{E}_1$ un număr real unic x_P.

Definiţie. Spunem că Ox este un sistem de coordonate în $\mathcal{E}_1$ cu originea în punctul O şi axa Ox, iar x_P se numeşte coordonata lui P.

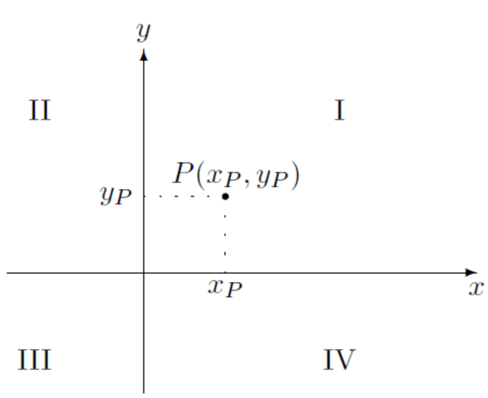
3 Sistem rectangular de coordonate în $\mathcal{E}_2$

Fie $\mathcal{E}_2$ spaţiul euclidian 2-dimensional. Fie $O \in \mathcal{E}_2$ un punct fix şi d, d' două drepte perpendiculare care trec prin O. Pe fiecare din cele 2 drepte d şi d' putem alege un sistem de coordonate în mod analog cu procedeul prezentat în secţiunea precedentă.

Obţinem astfel axele Ox şi Oy.

Fie $P \in \mathcal{E}_2$. Acestui punct îi putem asocia o pereche unică $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ astfel ca

$$f_2 : \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_2(P) = (x_P, y_P).$$



Definiţie. Originea O împreună cu cele 2 axe formează un nou sistem de coordonate xOy în $\mathcal{E}_2$, iar (x_P, y_P) se numesc coordonate ortogonale (rectangulare) ale punctului P.

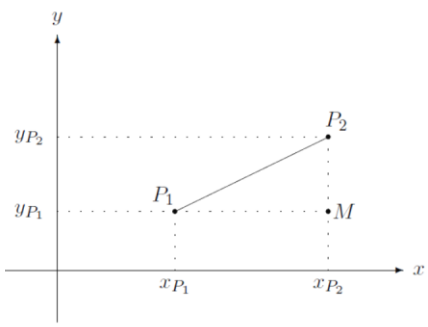
Cele 2 axe Ox, Oy împart planul $\mathcal{E}_2$ în 4 regiuni numite cadrane.

Putem caracteriza un punct $P(x_P, y_P)$, după semnul pe care îl are într-unul din cele 4 cadrane:

Cadran	I	II	III	IV
x_P	$+$	$-$	$-$	$+$
y_P	$+$	$+$	$-$	$-$

Lungimea unui segment $[P_1P_2]$ unde $P_1(x_{P_1}, y_{P_1})$, $P_2(x_{P_2}, y_{P_2})$ se poate găsi astfel:

$$P_1{P_2}^2 = (x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2$$



pentru că dacă ducem prin punctul P_1 o paralelă la axa Ox, obţinem triunghiul P_1MP_2 care este dreptunghic.

Observăm că

$$\begin{cases} P_1M = x_{P_2} - x_{P_1} \\ P_2M = y_{P_2} - y_{P_1} \end{cases}$$

deci folosind teorema lui Pitagora în triunghiul P_1MP_2, obţinem: $P_1P_2^2 = P_1M^2 + P_2M^2$

$$P_1P_2^2 = (x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}$$

Dacă punctul P împarte segmentul $[P_1P_2]$ în proporţia k, adică

$$\frac{PP_1}{PP_2} = k$$

atunci coordonatele lui P vor fi:

$$P\left(\frac{x_{P_1} + kx_{P_2}}{k+1}, \frac{y_{P_1} + ky_{P_2}}{\mathrm{k}+1}\right).$$

4 Coordonate rectangulare în $\mathcal{E}_3$

Fie $\mathcal{E}_3$ spaţiul euclidian 3-dimensional. Fie O un punct fix iar d, d' şi d'', 3 drepte perpendiculare care se intersectează în O. Alegem cele 3 drepte ca axe de coordonate: Ox, Oy şi Oz.

Pentru un punct $P(x_P, y_P, z_P)$ oarecare, putem defini

$$f_3 : \mathcal{E}_3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f_3(P) = (x_P, y_P, z_P)$$

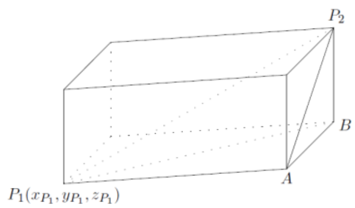
Definiţie Reperul rectangular de coordonate $Oxyz$ are elementele:

- originea reperului O
- axe de coordonate: Ox, Oy, Oz
- planele de coordonate: xOy, yOz, xOz.

Teoremă *Distanţa între punctele* $P_1(x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $P_2(x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$ *este dată de:*

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2 + (z_{P_2} - z_{P_1})^2}.$$

Demonstraţie. Construim paralelipipedul care are P_1 şi P_2 puncte pe diagonala principală.



$$\left.\begin{aligned} P_1A &= |y_{P_2} - y_{P_1}| \\ AB &= |x_{P_2} - x_{P_1}| \\ BP_2 &= |z_{P_2} - z_{P_1}| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow P_1B^2 = P_1A^2 + AB^2$$

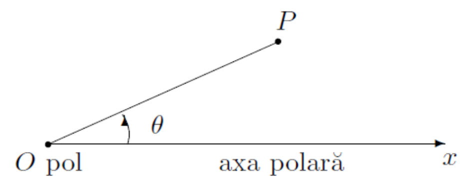
$$P_1P_2^2 = (x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2 + (z_{P_2} - z_{P_1})^2$$

Teoremă *Dacă punctul* P *împarte segmentul* $[P_1P_2]$ *, unde* $P_1(x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$ *şi* $P_2(x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$*, în raportul* k *(astfel ca* $\frac{PP_1}{PP_2} = k$*) atunci coordonatele punctului* P *sunt:*

$$P\left(\frac{x_{P_1}+kx_{P_2}}{k+1}, \frac{y_{P_1}+ky_{P_2}}{k+1}, \frac{z_{P_1}+kz_{P_2}}{k+1}\right).$$

5 Sistemul de coordonate polare (SP)

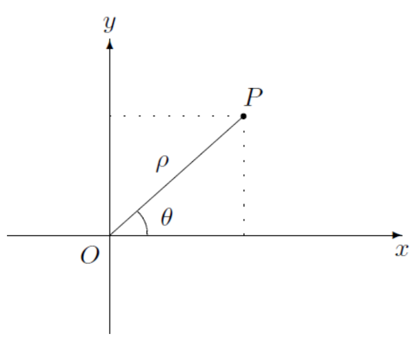
Ca o alternativă la sistemul rectangular de coordonate, considerăm în plan, un punct O fix numit **pol** şi o semidreaptă direcţionată spre dreapta faţă de O numită **axă polară**.



Dacă specificăm distanţa de la polul O la punctul P şi o notăm ρ şi considerăm unghiul θ dintre axa polară şi OP, atunci coordonatele polare ale lui P sunt (ρ, θ).

Trecerea din coordonate polare în coordonate rectangulare se face după formula:

$$\begin{cases} x_P = \rho \cos\theta \\ y_P = \rho \sin\theta \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

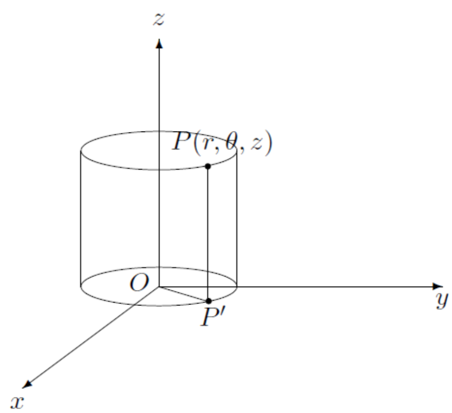
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Caz 1. Dacă $x \neq 0,\ tg\ \ \theta = \frac{y}{x}$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$, unde

$$k \in \begin{cases} 0, & P \in I \cup (Ox \\ 1, & P \in I \cup II \cup III \cup Ox' \\ 2, & P \in IV \end{cases}$$

Caz 2. Dacă $x = 0$ şi $y \neq 0$ $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, P \in (Oy \\ \frac{3\pi}{2}, P \in (Oy' \end{cases}$

Caz 3. Dacă $x = 0,\ y = 0,\ \theta = 0.$



6 Sistemul de coordonate cilindrice

Fie $P(x, y, z) \in Oxyz$ şi P' proiecţia lui P în planul xOy. Putem asocia punctului P, tripletul (r, θ, z) unde (r, θ) sunt coordonatele polare ale lui P', tripletul (r, θ, z) ne dă **coordonatele cilindrice**

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Trecerea la coordonate rectangulare se face astfel:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, z = z$$

iar pentru unghiul θ, avem cele 3 cazuri de la sisteme de coordonate polare, adică

Caz 1. Dacă $x \neq 0,\ tg\ \theta = \frac{y}{x}$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$, unde

$$k \in \begin{cases} 0, & P \in I \cup (Ox \\ 1, & P \in I \cup II \cup III \cup Ox' \\ 2, & P \in IV \end{cases}$$

Caz 2. Dacă $x = 0$ şi $y \neq 0$ $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, P \in (Oy \\ \frac{3\pi}{2}, P \in (Oy' \end{cases}$

Caz 3. Dacă $x = 0,\ y = 0,\ \theta = 0.$

7 Sistemul de coordonate sferice

Fie $P(x, y, z)$ un punct din reperul $Oxyz$ iar P' proiecţia lui pe planul xOy. Notăm $\rho = \| OP \|$ şi θ unghiul dintre $[Ox$ şi $[OP'$, iar φ unghiul dintre $[Oz$ şi $[OP$. Tripletul (ρ, θ, φ) formează **coordonatele sferice** ale punctului P.

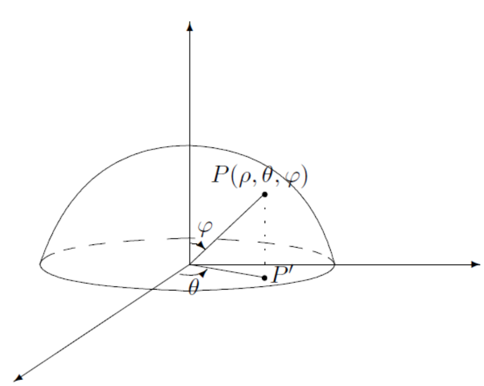
Trecerea din coordonate sferice în coordonate rectangulare se realizează astfel:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

iar θ se găseşte ca şi în celelalte 3 cazuri de la sistemele de coordonate prezentate la paragrafele anterioare, adică

Caz 1. Dacă $x \neq 0,\ tg\ \theta = \frac{y}{x}$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi$, unde



$$k \in \begin{cases} 0, & P \in I \cup (Ox \\ 1, & P \in I \cup II \cup III \cup Ox' \\ 2, & P \in IV \end{cases}$$

Caz 2. Dacă $x = 0$ şi $y \neq 0$ $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, P \in (Oy \\ \frac{3\pi}{2}, P \in (Oy' \end{cases}$

Caz 3. Dacă $x = 0,\ y = 0,\ \theta = 0.$