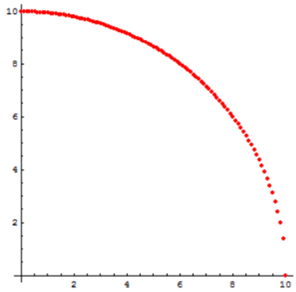
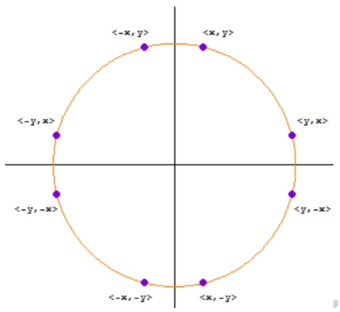
CURS 7 -- Algoritmul lui Bresenham pentru cercuri

Ecuaţia unui cerc cu centrul în origine și rază R este $x^2 + y^2 = R^2$. Această ecuaţie se rescrie $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ şi vom calcula y în raport cu fiecare creştere a variabilei x.
Pe un sfert de cerc, x creşte din unitate în unitate de la 0 la R. Această aproximare este costisitoare, apropierea graficului de dreapta de tangenţă $x = R$, duce la un efect de ”rărire”.



Rasterizarea cercurilor poate fi făcută pe optimi de cerc numite octanţi:

$$(x, y); (x, -y); (x, -y); (-x, -y); (y, x); (-y, x); (y, -x); (-y, -x).$$



Strategia este să alegem între doi pixeli pe cel ce reprezintă cel mai bine punctele de pe cerc cu ajutorul calculului unei funcţii în mijlocul segmentului ce uneşte cei 2 pixeli. Funcţia care defineşte cercul $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$. Aceasta ia valoarea 0 pe cerc, ia valori negative pe interior şi valori pozitive pe exterior. În continuare calculăm pe octantul II: $x \in \left(0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$, cu $y > 0$. Presupunând că am ales pixelul $P(x_p, y_p)$, următorul pixel ales va fi E sau SE. Alegem SE dacă M este în afara cercului: $F(M) > 0$ şi alegem E dacă M este în interiorul cercului

adică $F(M) < 0$.
Definim variabila de decizie d, prin:

$$d = F(M) = F\left(x_p + 1, y_p - \frac{1}{2}\right) = (x_p + 1)^2 + \left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 - R^2$$

$$= x_p^2 + y_p^2 + 2x_p - y_p - R^2 + \frac{5}{4}.$$

Dacă $d > 0$, alegem SE iar valoarea ulterioară a lui d, va fi:

$$d_{min} = F\left(x_p + 2, y_p - \frac{3}{2}\right) = (x_p + 2)^2 + \left(y_p - \frac{3}{2}\right)^2 - R^2$$

$$= d + 2x_p - 2y_p + 5 \Rightarrow d_{min} = d + \Delta_{SE}.$$

1 Algoritmul lui da Silva

Considerăm elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Se divide primul cadran în două regiuni în urma determinării punctului în care tangenta la elipsă are panta -1.

Considerăm $F(x, y) = b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2$.

În punctul $A(x_0, y_0)$ în care componentele normalei sunt egale avem $m = f'(x_0) = -1$, unde $f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ este ecuația explicită a elipsei (în primul cadran) iar x_0 și y_0 verifică $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Rezultă $a^2 \cdot y_0 = b^2 \cdot x_0$.

Să studiem regiunea I: $\boxed{b^2 \cdot x < a^2 \cdot y}$
Variabila de decizie va fi
$d = F(x_P + 1, y_P - \frac{1}{2}) = b^2 \cdot x_p^2 + a^2 \cdot y_p^2 - a^2 \cdot b^2 + 2b^2 \cdot x_p - a^2 \cdot y_p + \frac{a^2}{4}$

• dacă $d = F(M) < 0$, M este în interior, atunci alegem E
$d_{new} = F(x_P + 2, y_P - \frac{1}{2}) =$
$b^2 \cdot x_P^2 + a^2 \cdot y_P^2 - a^2 \cdot b^2 + 4b^2 \cdot x_P - a^2 \cdot y_P + 4b^2 + \frac{a^2}{4}$
$\rightsquigarrow d_{new} = d + \underbrace{2b^2 \cdot x_P + 3b^2}_{deltaE}$ **(d += deltaE)**

• dacă $d = F(M) > 0$, M este în exterior, alegem SE
$d_{new} = F(x_P + 2, y_P - \frac{3}{2}) =$
$b^2 \cdot x_P^2 + a^2 \cdot y_P^2 - a^2 \cdot b^2 + 4b^2 \cdot x_P - 3a^2 \cdot y_P + 4b^2 + \frac{9a^2}{4}$.
$\rightsquigarrow d_{new} = d + \underbrace{2b^2 \cdot x_P - 2a^2 \cdot y_P + 3b^2 + 2a^2}_{deltaSE}$ **(d += deltaSE)**

Să calculăm acum prima valoare a lui d.

$$d_{initial} = F(1, b - \tfrac{1}{2}) = b^2 + a^2 \cdot (b - \tfrac{1}{2})^2 - a^2 b^2 =$$
$$= b^2 + a^2 b^2 - a^2 b + \tfrac{a^2}{4} - a^2 b^2 = b^2 - a^2 b + \tfrac{a^2}{4}.$$

Scriem acum creşterile pentru $deltaE$ și $deltaSE$:

E: $(x_P + 1, y_P)$

$deltaE_{new} = deltaE + 2b^2$ **(deltaE += 2b²)**
$deltaSE_{new} = deltaSE + 2b^2$ **(deltaSE += 2b²)**

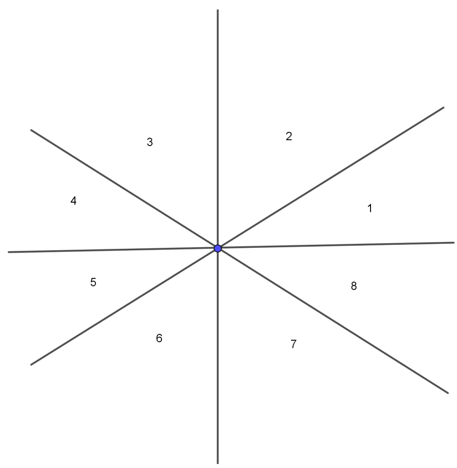
SE: $(x_P + 1, y_P - 1)$

$deltaE_{new} = deltaE + 2b^2$ **(deltaE += 2b²)**
$deltaSE_{new} = deltaSE + 2b^2 + 2a^2$ **(deltaSE += 2b² + 2a²)**

Valorile iniţiale sunt: $deltaE_{initial} = 3b^2$
$deltaSE_{initial} = -2a^2 \cdot b + 3b^2 + 2a^2$

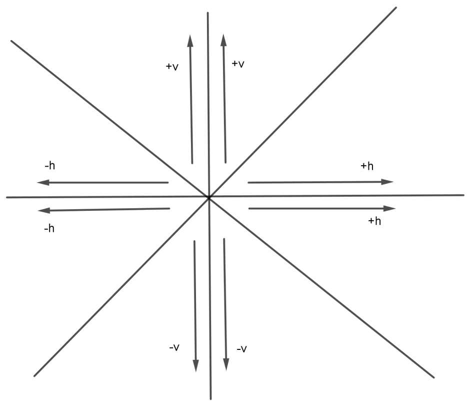
2 Generalizarea algoritmului lui Bresenham

Simetria vectorilor din plan-vectorii în plan sunt clasificaţi în opt clase numite octanţi.



- $dx > 0, dy > 0, dx > dy$;
- $dx > 0, dy > 0, dx < dy$;
- $dx < 0, dy > 0, |dx| < dy$;
- $dx < 0, dy > 0, |dx| > dy$;
- $dx < 0, dy < 0, |dx| > dy$;
- $dx < 0, dy < 0, |dx| < |dy|$;
- $dx > 0, dy < 0, dx < |dy|$;
- $dx > 0, dy < 0, dx > |dy|$;

Orice vector din plan are 7 vectori simetrici cu el în ceilalţi opt octanţi.



Din cauza octanţilor, avem:

- $d_1 : x++, y++$
- $d_2 : x--, y++$
- $d_1 : x--, y--$
- $d_1 : x++, y--$

Deplasarea	1	2	3	4	5	6	7	8
0	+h	+v	+v	-h	-h	-v	-v	+h
D	d_1	d_1	d_2	d_2	d_3	d_3	d_4	d_4

3 BIBLIOGRAFIE

1. Piscoran Laurian, Piscoran Ioan, Elemente de geometrie analitica si diferentiala, Ed. Risoprint, 2010, Cluj Napoca.
2.https://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html