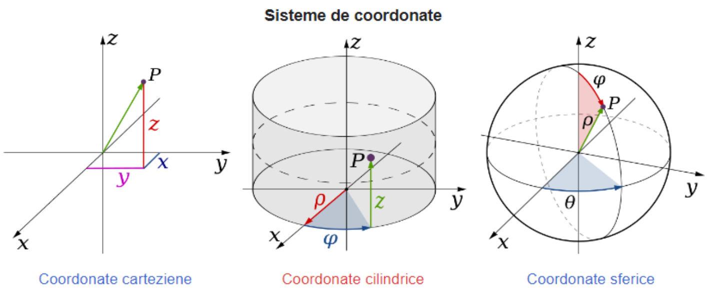
# 1 RECAPITULARE.VECTORI.COMBINATII AFINE

Notăm elementele spațiului Euclidian 3 dimensional cu $\mathbb{E}^3$, astfel: $a, b, \ldots$ și așa mai departe. Un spațiu tridimensional, spațiu cu trei dimensiuni sau 3-spațiu, este un spațiu geometric în care sunt necesare trei valori (numite coordonate) pentru a determina poziția unui punct). Acesta este sensul informal al termenului dimensiune.

# 2 Sisteme de coordonate

Geometria analitică (numită și geometrie carteziană) descrie fiecare punct din spațiul tridimensional prin intermediul a trei coordonate. Se dau trei axe de coordonate, fiecare perpendiculară pe celelalte două în origine, punctul în care se intersectează. De obicei sunt etichetate x, y și z. În raport cu aceste axe, poziția oricărui punct din spațiul tridimensional este dată de un triplet ordonat de numere reale, fiecare număr oferind distanța acelui punct de la origine, măsurată de-a lungul axei date, care este egală cu distanța acelui punct de planul determinat de celelalte două axe.

Alte metode de descriere a localizării unui punct în spațiul tridimensional sunt sistemele de coordonate cilindrice și coordonate sferice, dar există un număr infinit de metode posibile. Mai jos sunt imagini cu sistemele menționate mai sus.




Cel mai cunoscut mod de a reprezenta un punct în planul $\mathbb{R}^2$ îl constituie coordonatele rectangulare $(x, y)$. Anumite probleme necesită utilizarea **coordonatelor polare** $(r, \theta)$, care sunt legate de cele rectangulare prin relațiile:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

unde $r \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

**Coordonatele cilindrice** $(r, \theta, z)$ ale unui punct $(x, y, z)$ sunt definite ca:

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z. \qquad (1)$$

Pentru a exprima $r, \theta, z$ cu ajutorul lui $x, y, z$ și pentru a ne asigura că $\theta \in [0, 2\pi]$, putem scrie:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \textit{dacă } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \textit{dacă } x < 0 \\ 2\pi + \arctan\frac{y}{x} & \textit{dacă } x > 0,\ y < 0 \end{cases} \qquad z = z,$$

unde $\arctan\dfrac{y}{x}$ este luat între $-\dfrac{\pi}{2}$ și $\dfrac{\pi}{2}$. Necesitatea ca $\theta \in [0, 2\pi]$ determină un unic $\theta$ și $r \geq 0$ pentru un anumit $x$ și $y$. Dacă $x = 0$, atunci $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ pentru $y > 0$ și $\dfrac{3\pi}{2}$ pentru $y < 0$. Dacă $x = y = 0$, atunci $\theta$ nu este definit.

Cu alte cuvinte, pentru orice punct $(x, y, z)$ se poate rescrie primele două coordonate în termeni de coordonate polare, iar a treia să rămână neschimbată. Formula (1) arată faptul că, dându-se $(r, \theta, z)$, tripletul $(x, y, z)$ este complet determinat și invers, dacă restricționăm $\theta$ la intervalul $[0, 2\pi]$ (uneori este convenabil și domeniul $(-\pi, \pi]$) și impunem ca $r > 0$.

Pentru a înțelege de ce se utilizează denumirea de *coordonate cilindrice*, trebuie să remarcăm faptul că dacă sunt respectate condițiile $0 \leq \theta < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$ și $r = a$ este o constantă pozitivă, atunci locul acestui punct este cilindrul de rază $a$.

Coordonatele cilindrice nu reprezintă singura modalitate de generalizare a coordonatelor polare în spațiul tridimensional. Să ne amintim că, în plan, modulul vectorului $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (care este $\sqrt{x^2 + y^2}$) este acel $r$ din sistemul de coordonate polare. În cazul coordonatelor cilindrice, lungimea vectorului $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ și anume $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nu este una dintre coordonatele acestui sistem, în locul acesteia utilizând modulul $\sqrt{x^2 + y^2}$, unghiul $\theta$ și *înălțimea* $z$.

Vom modifica aceasta introducând sistemul de *coordonate sferice*, care utilizează $\rho$ drept coordonată. Coordonatele sferice sunt eficace în problemele în care apare o simetrie sferică, în timp ce coordonatele cilindrice sunt utile în cazul simetriei față de o dreaptă.

Dându-se un punct $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, fie:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

și să reprezentăm $x, y$ prin coordonate polare în planul $xy$ :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad (2)$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\theta$ este determinat de formula (1) [vezi expresia pentru $\theta$ care succede formulei (1)]. Coordonata $z$ este dată de:

$$z = \rho\cos\phi,$$

unde $\phi \in [0, \pi]$ este unghiul pe care îl face cu $Oz$ raza vectoare $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ în planul format de $\mathbf{v}, Ox$.

Cu ajutorul produsului scalar, se obține:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \text{adică } \phi = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Deoarece:

$$r = \rho\sin\phi,$$

putem utiliza formula (2) pentru trecerea de la coordonate carteziene la cele sferice:

**Definiție. Coordonatele sferice** ale punctului $(x, y, z)$ reprezintă tripletul $(\rho, \theta, \phi)$ definit astfel:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

unde:

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

**Observatie:** Vectorii în spațiu pot fi descriși drept triplete de numere reale iar pentru 2 puncte $a, b$, avem un vector unic de la $a$ la $b$: $v = b - a$, $a, b \in \mathbb{E}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$.

**Definiție** Numim combinație afină sau baricentrică, suma

$$b = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j b_j \qquad (1)$$

$b_j \in \mathbb{E}^3$, cu $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.

Expresia (1) de mai sus se poate rescrie:

$$b = b_0 + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (b_j - b_0).$$

care este evident suma dintre un punct si un vector. Un exemplu de combinație baricentrică o reprezintă centrul de greutate al unui triunghi de vârfuri $a, b, c$:

$$g = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Termenul de combinație baricentrică provine din fizică și reprezintă centru de gravitație. Dacă avem $b_j$ centre de greutate ale unor corpuri de mase $m_j$, atunci centrul de gravitație va fi:

$$b = \frac{\sum m_j b_j}{\sum m_j}$$

Impunând condiția $\sum m_j = 1$, normalizăm expresia de mai sus. Un caz special al combinațiilor baricentrice îl reprezintă combinațiile afine care ne conduc la definiția acoperirilor convexe.
Daca vrem sa generam un vector dintr-o multime de puncte, scriem

$$v = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j p_j$$

unde impunem conditia $\sum \sigma_j = 0$.

## 2.1 Aplicații Afine

În grafica pe calculator, pentru mărimea obiectelor sau scalarea acestora sau pentru găsirea poziției lor folosim aplicații afine.
**Definiție** O aplicație $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, daca lasă combinațiile baricentrice invariante. Așa că, dacă

$$x = \sum \alpha_j a_j, \sum \alpha_j = 1, x, a_j \in \mathbb{E}^3$$

iar $\phi$ este o aplicatie afina, atunci:

$$\phi x = \sum \alpha_j \phi a_j$$

unde $\phi x, \phi a_j \in \mathbb{E}^3$. Daca avem un sistem de coordonate iar $x$ este un triplet, o aplicatie afina va fi $\phi x = Ax + v$, unde $A \in M_{3x3}(V)$ iar $v \in \mathbb{R}^3$ este un vector. Intr-adevar pentru $\sum \alpha_j = 1$ avem:

$$\phi\left(\sum \alpha_j a_j\right) = \sum \alpha_j \phi a_j =$$

$$A\left(\sum \alpha_j a_j\right) + v = \sum \alpha_j A a_j + \sum \alpha_j v =$$

$$\sum \alpha_j (A a_j + v) = \sum \alpha_j \phi a_j.$$

# 3 BIBLIOGRAFIE

1. Piscoran Laurian, Piscoran Ioan, Elemente de geometrie analitica si diferentiala, Ed. Risoprint, 2010, Cluj Napoca.