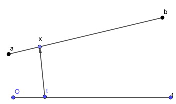
1 Interpolare liniară

Fie $a, b \in \mathbb{E}^3$ două puncte distincte.

Definiție 1 *Mulțimea de puncte $x \in \mathbb{E}^3$, de forma $x = x(t) = (1-t)a + tb$, $t \in \mathbb{R}$, se numește linie dreaptă de la a la b. Orice 3 puncte de pe o dreaptă se numesc coliniare.*

Pentru $t = 0$, dreapta trece prin a, iar pentru $t = 1$, dreapta trece prin b. Pentru $t \in [0, 1]$, avem descris un punct între a și b iar ecuația de mai sus reprezintă x ca și o combinație baricentrică a două puncte din $\mathbb{E}^3$.
Deci interpolarea liniara reprezinta o aplicație afină a dreptei reale în $\mathbb{E}^3$.



Pentru $\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, avem:

$$\phi x = \phi\left((1-t)a + tb\right) = (1-t)\phi a + t\phi b$$

Mai apropiat de conceptul de interpolare liniara este conceptul de coordonate baricentrice. Fie A, x, b, 3 puncte coliniare din $\mathbb{E}^3$, $x = \alpha a + \beta b$, $\alpha + \beta = 1$, atunci α, β se numesc coordonatele baricentrice ale punctului x față de a și b.
Conexiunea dintre coordonate baricentrice si interpolare liniara este clara. Avem $\alpha = 1 - t, \beta = t$, ceea ce demonstrează că, coordonatele baricentrice nu trebuie să fie pozitive întotdeauna, pentru $t \notin [0, 1]$, α sau β este negativ. Pentru trei puncte coliniare, a, b, c, coordonatele baricentrice ale punctului b față de punctele a și c, se exprimă astfel:

$$\alpha = \frac{vol_1(b,c)}{vol_1(a,c)}; \beta == \frac{vol_1(a,b)}{vol_1(a,c)}$$

unde vol_1 reprezinta volumul 1-dimensional adica distanta dintre puncte.
Raportul a 3 puncte coliniare poate fi dat prin formula:

$$ratio(a,b,c) = \frac{vol_1(a,b)}{vol_1(b,c)}$$

$$\rightarrow ratio(a,b,c) = \frac{\beta}{\alpha}$$

La fel pentru o aplicatie afină ϕ, avem

$$ratio(\phi a, \phi b, \phi c) = \frac{\beta}{\alpha}$$

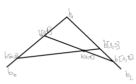
Am definit dreapta $[a,b]$ ca fiind imaginea afina a intervalului $[0,1]$, cu $t \in [0,1]$ si $u \in [a,b] \rightarrow t = \frac{u-a}{b-a}$. Punctul interpolat de pe dreapta, va fi de forma

$$x(t) = (1-t)a + tb$$

iar $x(u) = \frac{b-u}{b-a}a + \frac{u-a}{b-a}b$. Deci interpolarea liniara este invarianta sub transformari afine.

1.1 Teorema lui Menelaus

Aceasta teorema poate fi folosita la studiul multor algoritmi



Referindu-ne la aceasta figura, punctul $b[s,t]$ poate fi obținut prin interpolare liniară în t sau s.

$$ratio\,(b[s,1], b[1,t], b_1) \cdot ratio\,(b_1, b[0,t], b[s,0]) \cdot ratio\,(b[s,0], b[s,t], b[s,1]) = -1$$

pentru ca

$$b[0,t] = (1-t)b_0 + tb_1$$
$$b[s,0] = (1-s)b_0 + sb_1$$
$$b[1,t] = (1-t)b_1 + tb_2$$
$$b[s,1] = (1-s)b_1 + sb_2$$
$$b[s,t] = (1-t)b[s,0] + tb[s,1]$$
$$b[t,s] = (1-s)b[0,t] + sb[t,1]$$

Teorema lui Menelaus ne spune ca cele doua puncte sunt identice $b[s,t] = b[t,s]$. Verificam usor:

$$b[s,t] = (1-t)(1-s)b_0 + [(1-t)s + t(1-s)]b_1 + stb_2 = b[t,s]$$

2 Coordonate baricentrice in plan

Consideram triunghiul de varfuri a, b, c si al patrulea punct in interiorul triunghiului $p \in \mathbb{E}^2$, Punctul p il exprimam astfel:

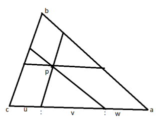
$$p = ua + vb + wc$$

, cu $u + v + w = 1$.
Coeficientii (u, v, w) sunt coordonatele baricentrice ale punctului p față de punctele a, b, c. Daca cele 4 puncte a, b, c, p sunt date atunci putem obtine folosind regula lui Cramer:

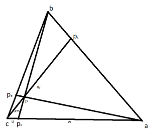
$$u = \frac{Aria(p,b,c)}{Aria(a,b,c)}, v = \frac{Aria(a,p,c)}{Aria(a,b,c)}, w = \frac{Aria(a,b,p)}{Aria(a,b,c)}$$

unde

$$Aria(a,b,c) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



sau



O consecință directă a acestor figuri este teorema lui Ceva:

$$ratio(a, p_c, b) \cdot ratio(b, p_a, c) \cdot ratio(c, p_b, a) = 1$$

Observații
1)Putem folosi coordonatele baricentrice pentru a defini **interpolarea liniară bivariată**. Presupunem că avem 3 puncte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{E}^3$, deci orice punct de forma

$$p = p(u) = up_1 + vp_2 + wp_3$$

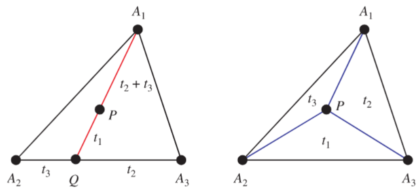
cu $u + v + w = 1$, cade in planul delimitat de p_1, p_2, p_3.
2) Coordonatele baricentrice nu sunt definite doar in cazul 2 dimensional, se pot defini si in cazul 3 dimensional pentru un tetraedru cu varfurile p_1, p_2, p_3, p_4, astfel:

$$p = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 + u_4p_4$$

MATERIAL SUPLIMENTAR:

Barycentric Coordinates

Barycentric coordinates are triples of numbers (t_1, t_2, t_3) corresponding to masses placed at the vertices of a reference triangle $\Delta A_1 A_2 A_3$. These masses then determine a point P, which is the geometric centroid of the three masses and is identified with coordinates (t_1, t_2, t_3). The vertices of the triangle are given by $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, and $(0, 0, 1)$. Barycentric coordinates were discovered by Möbius in 1827 (Coxeter 1969, p. 217; Fauvel *et al.* 1993).



To find the barycentric coordinates for an arbitrary point P, find t_2 and t_3 from the point Q at the intersection of the line $A_1 P$ with the side $A_2 A_3$, and then determine t_1 as the mass at A_1 that will balance a mass $t_2 + t_3$ at Q, thus making P the centroid (left figure). Furthermore, the areas of the triangles $\Delta A_1 A_2 P$, $\Delta A_1 A_3 P$, and $\Delta A_2 A_3 P$ are proportional to the barycentric coordinates t_3, t_2, and t_1 of P (right figure; Coxeter 1969, p. 217).

Barycentric coordinates are homogeneous, so

$$(t_1, t_2, t_3) = (\mu t_1, \mu t_2, \mu t_3) \qquad (1)$$

for $\mu \neq 0$.

To find the barycentric coordinates for an arbitrary point P, find t_2 and t_3 from the point Q at the intersection of the line $A_1 P$ with the side $A_2 A_3$, and then determine t_1 as the mass at A_1 that will balance a mass $t_2 + t_3$ at Q, thus making P the centroid (left figure). Furthermore, the areas of the triangles $\Delta A_1 A_2 P$, $\Delta A_1 A_3 P$, and $\Delta A_2 A_3 P$ are proportional to the barycentric coordinates t_3, t_2, and t_1 of P (right figure; Coxeter 1969, p. 217).

Barycentric coordinates are homogeneous, so

$$(t_1, t_2, t_3) = (\mu t_1, \mu t_2, \mu t_3) \qquad (1)$$

for $\mu \neq 0$.

Barycentric coordinates normalized so that they become the actual areas of the subtriangles are called homogeneous barycentric coordinates. Barycentric coordinates normalized so that

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1, \qquad (2)$$

so that the coordinates give the areas of the subtriangles *normalized by the area of the original triangle* are called areal coordinates (Coxeter 1969, p. 218). Barycentric and areal coordinates can provide particularly elegant proofs of geometric theorems such as Routh's theorem, Ceva's theorem, and Menelaus' theorem (Coxeter 1969, pp. 219-221).

(Not necessarily homogeneous) barycentric coordinates for a number of common centers are summarized in the following table. In the table, a, b, and c are the side lengths of the triangle and s is its semiperimeter.

3 BIBLIOGRAFIE

1. Piscoran Laurian, Piscoran Ioan, Elemente de geometrie analitica si diferentiala, Ed. Risoprint, 2010, Cluj Napoca.
2.https://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html