TRABAJO DE SISTEMAS DINAMICOS.

Integrantes: Angie Daniela Marrugo Llamas
Diego Andrés Julio Suárez
Ángel Andrés Miranda Castillo

1. En una reacción química, la substancia A transforma en una substancia B a una velocidad proporcional a la cantidad de A no transformada. En un principio hay 40 gramos de A y, una hora más tarde, queda 12 gramos.
   a. Calcular el tiempo que tardara en transformarse el 40% de A.
   Conociendo que:

$$\frac{dq}{dt} = K(100 - Q)$$

$$\frac{dq}{(100 - Q)} = kdt$$

Integramos a ambos lados:

$$\int \frac{dq}{(100 - Q)} = \int kdt$$

Para poder realizar la integral, realizamos una sustitución:

$$u = 100 - Q$$
$$du = -dq$$
$$-du = dq$$

Reemplazamos:

$$-\int \frac{du}{u} = k\int dt$$
$$\ln|100 - Q| = kt + c$$
$$e^{\ln|100-Q|} = e^{kt+c}$$
$$\frac{1}{100 - Q} = e^{kt+c}$$
$$\frac{1}{100 - Q} = Ce^{kt}$$
$$100 - Q = (Ce^{kt})^{-1}$$
$$Q = 100 - \frac{C}{c^{kt}}$$

Para encontrar C tenemos que si $t = 0\ y\ Q(0) = 0$, entonces:

$$Q(0) = 0$$
$$0 = 100 - \frac{C}{c^{kt}}$$
$$0 = 100 - C$$
$$C = 100$$

Ahora que ya conocemos C:

- Si tenemos que $t = 1\ y\ Q(t) = 70$, entonces:

$$70 = 100 - \frac{100}{e^{k}}$$

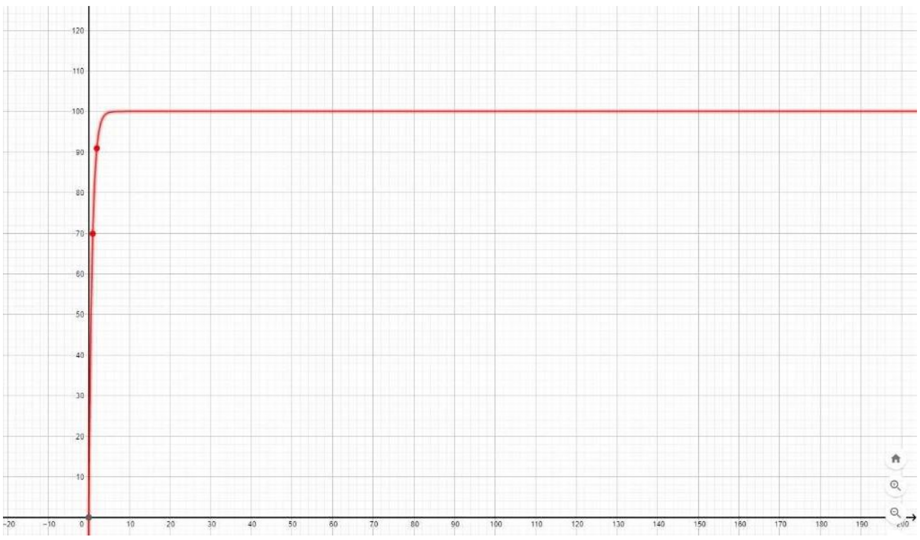
$$\frac{100}{e^k} = 100 - 70$$
$$\frac{100}{e^k} = 30$$
$$\frac{100}{30} = e^k$$
$$\frac{10}{3} = e^k$$
$$\ln\left(\frac{100}{30}\right) = k$$
$$k = 1{,}2$$

- Conociendo k, podemos encontrar el tiempo t:

$$40 = 100 - \frac{100}{e^{1,2t}}$$
$$\frac{100}{e^{1,2t}} = 60$$
$$\frac{100}{60} = e^{1,2t}$$
$$1{,}6 = e^{1,2t}$$
$$\ln|1{,}6^{\circ} = 1{,}2t$$
$$t = \frac{\ln|1{,}6|}{1{,}2}$$
$$t = 0{,}425$$

b. Haga un análisis gráfico de función Q(t) encontrada. La expresión que rige dicho fenómeno, está dada por la expresión:

$\frac{dq}{dt} =$ K (100 - Q) ; Q(t) es el porcentaje de A que se ha transformado en B en un instante t.



2. Una masa que pesa 8 libras alarga dos pies un resorte. Suponiendo que una fuerza amortiguada que es dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema. Suponga que la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3pies/s.

   a. Utiliza la ley de HOOKE para verificar que la ecuación que rige dicho movimiento está dada por la ecuación diferencial:

$$3\frac{d^2}{dt^2} + 24\frac{d}{dt} + 48 = 0$$

Para resolver esta ecuación tenemos:

$$r^2 + 8r + 16 = 0$$

La cual es igual a:

$$(r+4)^2 = 0$$

Entonces tenemos que $r_1 = r_2 = 4$ y obtenemos la siguiente solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 3$:

$$x(0) = c_1 e^{-4(0)} + \ c_2(0)e^{-4(0)}$$
$$x(0) = c_1$$
$$c_1 = 0$$
$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$
$$x'(t) = -4c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} - 4c_2 t e^{-4t}$$
$$x'(0) = -4c_1 e^{-4(0)} + c_2 e^{-4(0)} - 4c_2(0)e^{-4(0)}$$
$$x'(0) = -4c_1 + c_2$$
$$-3 = -4(0) + c_2$$
$$c_2 = -3$$

Entonces sabiendo que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$, la ecuación x(t) que satisface a la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$
$$x(t) = (0)e^{-4t} + (-3)te^{-4t}$$
$$x(t) = -3te^{-4t}$$

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad en un tiempo t se vuelve cero, entonces tenemos que $x'(t) = 0$ entonces:

$$x(t) = -3te^{-4t}$$
$$x'(t) = -3e^{-4t} + 12te^{-4t}$$
$$0 = -3e^{-4t} + 12te^{-4t}$$
$$-3e^{-4t}(1-4t) = 0$$

$-3e^{-4t}(1-4t) = 0$ La expresión $-3e^{-4t}$ nunca podrá ser cero entonces…

b. Hallar la función x(t) y haga su análisis grafico analíticamente.