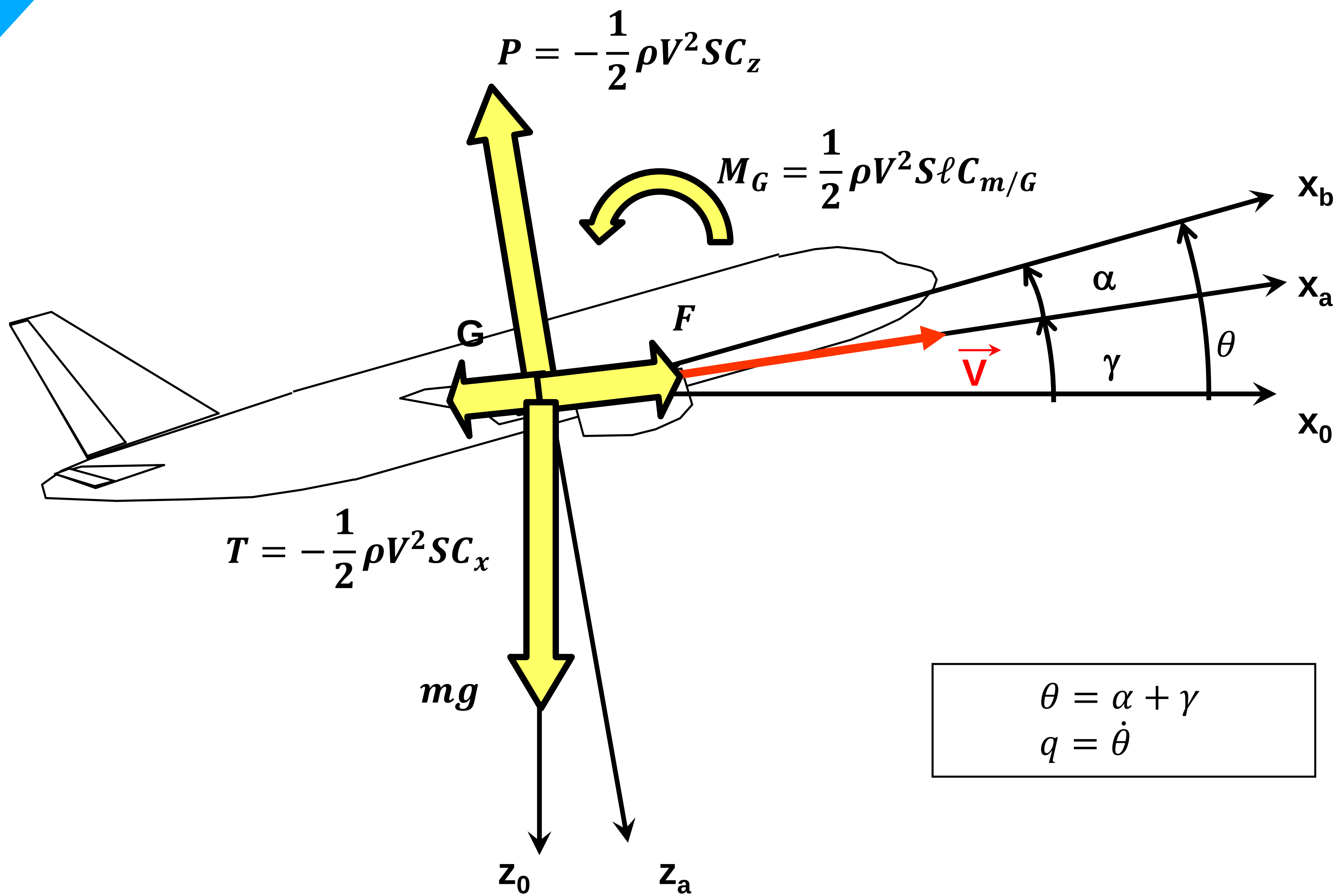
Dynamique longitudinale

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

SUPAERO

Equations longitudinales



$$\theta = \alpha + \gamma$$
$$q = \dot{\theta}$$

Equations longitudinales

Equation de **propulsion** sur x_a :

$$m\dot{V} = -\frac{1}{2}\rho V^2 SCx + F - mg\sin\gamma \qquad \boxed{\text{P}}$$

Equation de **sustentation** sur z_a :

$$-mV\dot{\gamma} = -\frac{1}{2}\rho V^2 SCz + mg\cos\gamma \qquad \boxed{\text{S}}$$

Equation de **moment de tangage** sur y :

$$B\dot{q} = \frac{1}{2}\rho V^2 S\ell\, Cm_{/G} + M_{F/G} \qquad \boxed{\text{M}}$$

Equations cinématiques

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} \qquad \boxed{\text{Cq}}$$

$$\dot{h} = V\sin\gamma \qquad \boxed{\text{Ch}}$$

Modèles :

Portance : $Cz = Cz_{\alpha}(\alpha - \alpha_0) + Cz_q \frac{q\ell}{V} + Cz_{\delta m}\delta m$

Trainée : $Cx = Cx_0 + k_i Cz^2$

Poussée : $F = k_f\, \rho\, V^{\lambda_f}\, \delta x$

Tangage : $Cm_{/G} = Cm_0 + Cm_{\alpha}(\alpha - \alpha_0) + Cm_q \frac{q\ell}{V} + Cm_{\delta m}\delta m$

Atmosphère : $\rho = \rho(h)$

Variables d'état longitudinal:

$$X = [V \quad \gamma \quad \alpha \quad q \quad h]^T$$

$$U = [\delta x \quad \delta m]^T$$

Petits angles

- Les efforts de propulsion sont parallèles à la vitesse.
- Il n'y a pas de moment dû aux moteurs : $M_{F/G} = 0$
- La pente γ est faible : $\cos\gamma = 1$ et $\sin\gamma = \gamma$
- Incidence α faible

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 S}{2m} Cx(\alpha, q, \delta m) + \frac{F(\delta x)}{m} - g \cdot \sin\gamma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V S}{2m} Cz(\alpha, q, \delta m) - \frac{g}{V}$$

$$\dot{q} = \frac{\rho V^2 S \ell}{2B} Cm_{/G}(\alpha, q, \delta m)$$

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma}$$

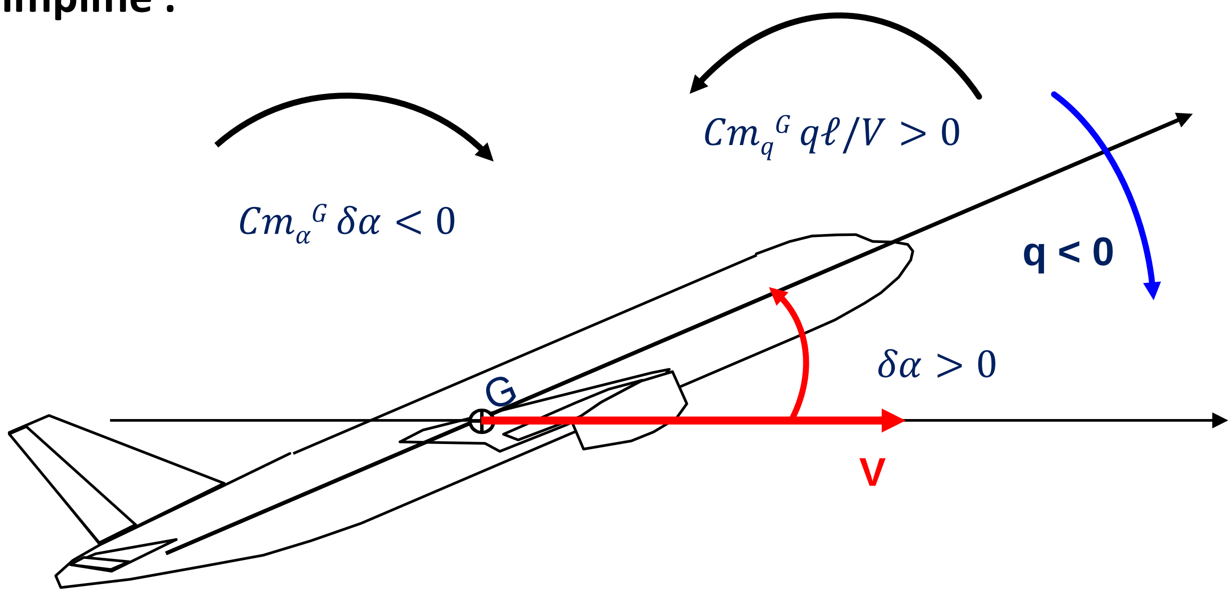
$$\dot{h} = V \cdot \gamma$$

Oscillation d’incidence

Oscillation d'incidence

On suppose que G n'a pas de mouvement verticalement

- **Modèle simplifié :**



$$\dot{q} = \frac{1}{2B}\rho V^2 S\ell \left[Cm_0 + Cm_\alpha^G(\alpha - \alpha_0) + Cm_q \frac{q\ell}{V} + Cm_{\delta m}^G \delta m \right]$$

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} = q$$

Oscillation d’incidence : Modèle simplifié

- $\dot{q} = \frac{1}{2B}\rho V^2 S\ell \left[Cm_{\alpha}^{G}(\alpha - \alpha_0) \ + Cm_q \frac{q\ell}{V} + Cm_{\delta m}^{G}\delta m\right]$
- $\dot{\alpha} = q$

$$m_\alpha = \frac{\rho V^2 S\ell}{2B} Cm_\alpha$$

$$m_q = \frac{\rho V S\ell^2}{2B} Cm_q$$

- $\delta\alpha = \alpha - \alpha_e$
- $\delta q = q - q_e = q$

- $\delta\ddot{\alpha} = m_\alpha \delta\alpha + m_q \delta\dot{\alpha}$

- $s^2 - m_q s - m_\alpha = 0$

- Equation caractéristique d’un oscillateur amorti

Oscillation d’incidence : Modèle simplifié

- Equation caractéristique d’un oscillateur amorti:

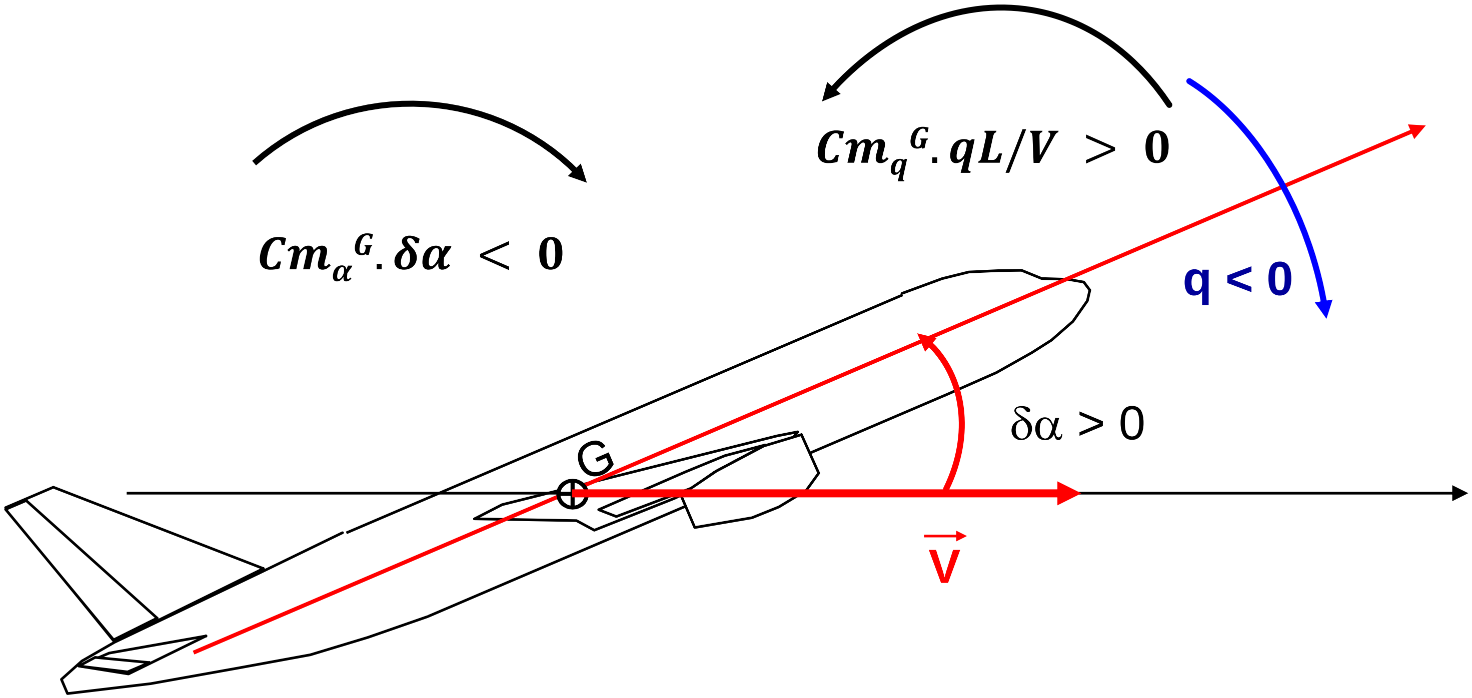
- $s^2 + 2\lambda\, s + \omega_0^2 = 0$

- $s/\bar{s} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega_n$

- Avec
- $\lambda = -\frac{m_q}{2}$

- $\omega_0^2 = -m_\alpha$

Oscillation d'incidence : Modèle simplifié



$$\ddot{\delta\alpha} - m_q \dot{\delta\alpha} - m_\alpha \delta\alpha = 0$$

$$s^2 - m_q s - m_\alpha = 0$$

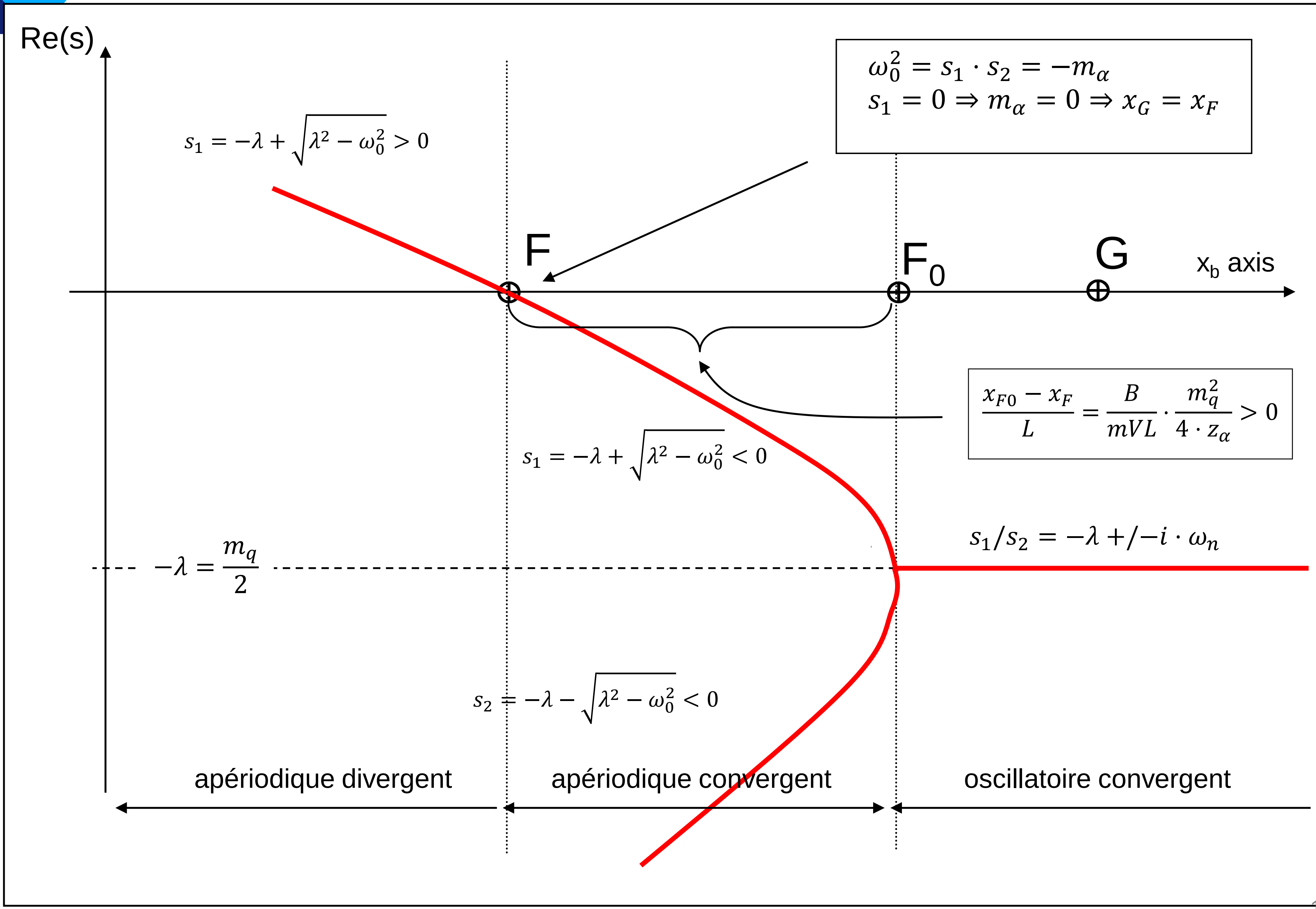
$$\rightarrow s^2 + 2\lambda\, s + \omega_0^2 = 0$$

$$s/\bar{s} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega_n$$

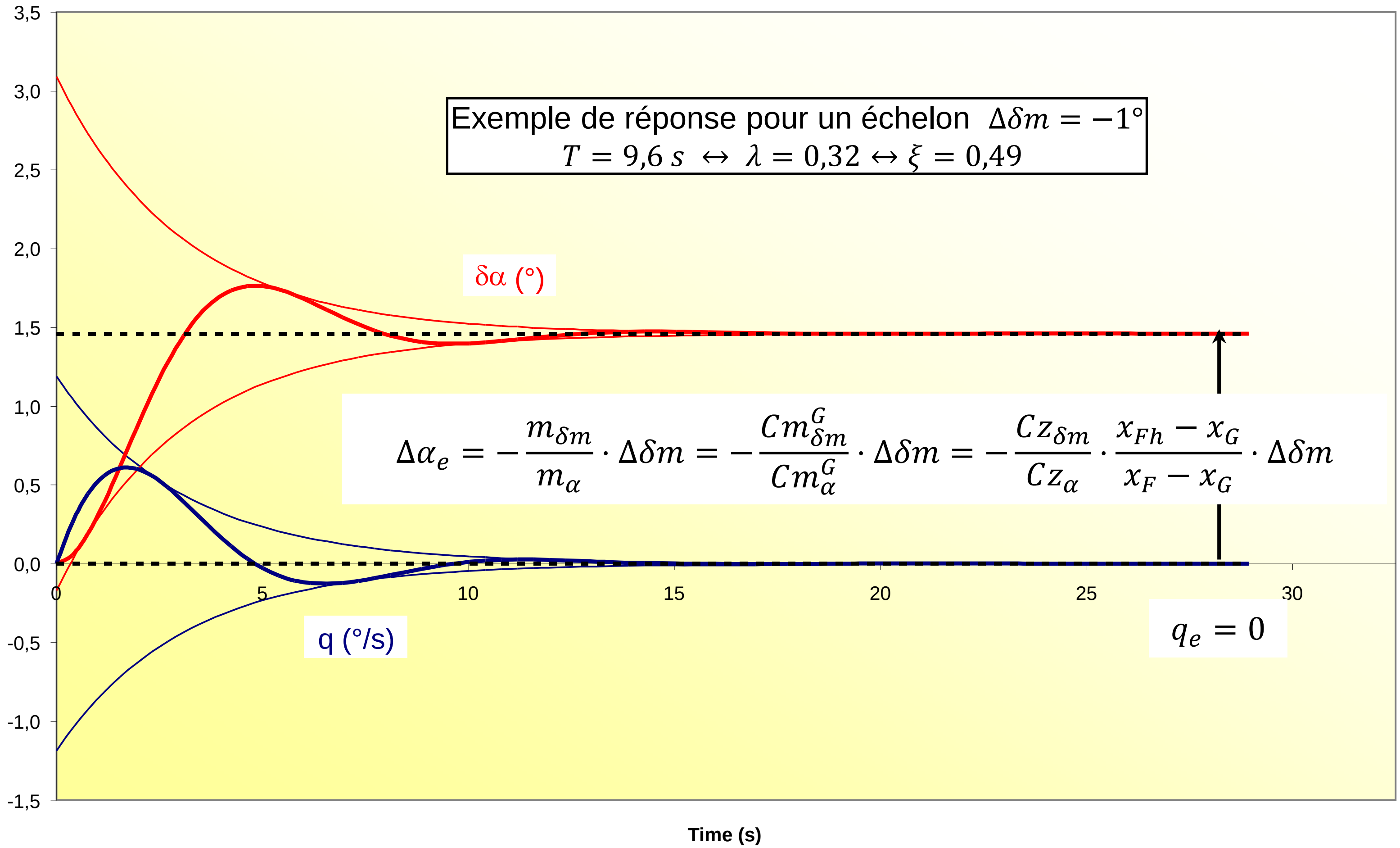
$$\lambda = -\frac{m_q}{2}$$

$$\omega_0^2 = -m_\alpha$$

Oscillation d'incidence : approche simplifiée



Oscillation d'incidence : approche simplifiée



- **Etude de la dynamique : Hypothèse de linéarisation**

  - On suppose le vol symétrique
  - A partir d'un état d 'équilibre pour de « faibles » angles et de petits mouvements

  - Hypothèse de découplage des modes longitudinal et latéral
    - **⇒ 5 Equations Longitudinales et 4 Latérales**

  - Linéarisation des équations autour d'un point d 'équilibre

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 S}{2m} Cx(\alpha, q, \delta m) + \frac{k_f \rho \, V^{\lambda_f}}{m} \delta x - g \cdot \gamma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V S}{2m} Cz(\alpha, q, \delta m) - \frac{g}{V}$$

$$\dot{q} = \frac{\rho V^2 S \ell}{2B} Cm_{/G} \, (\alpha, q, \delta m)$$

$$\dot{\alpha} = q \; - \; \dot{\gamma}$$

$$\dot{h} = V \cdot \gamma$$

Etude de la dynamique

$$\dot{X} = f(X, U)$$

Equilibre pour

$$\dot{X}_e = 0 = f(X_e, U_e)$$

Linéarisation :

$$\delta\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X}(X_e, U_e)\,\delta X + \frac{\partial f}{\partial U}(X_e, U_e)\,\delta U$$

avec $\delta X = X - X_e, \qquad \delta U = U - U_e$

$$\dot{X} = f(X, U) \implies \delta\dot{X} = A\,\delta X + B\,\delta U$$

Etude de la dynamique

$$\dot{X} = A\,X + B\,U$$

Solution de l'équation différentielle sans second membre

$$\dot{X} = A\,\mathrm{X} \implies X = X_0\, e^{st}$$

$$sX_0e^{st} = AX_0e^{st} \Rightarrow [A - \mathrm{s}I]X_0e^{st} = 0$$
$$\Rightarrow [A - \mathrm{s}I]X_0 = 0$$

Pour $X_0 \neq 0$, il y a une solution si :

$$\det[A - sI] = 0$$

(équation caractéristique)

$$\det[A - sI] = 0$$

(s racine de l'équation, est une valeur propre de A)

Si s est réel : $X = X_0 e^{st} \Rightarrow X = X_0 e^{-t/\tau}$

→ le mode est **apériodique**

s < 0 → le mode est convergent $\tau = -\frac{1}{s} > 0$

s > 0 → le mode est divergent $\tau = -\frac{1}{s} < 0$

Si s est complexe : $s = -\lambda \pm \mathrm{i}\omega \Longrightarrow X = e^{-\lambda t}(\mathrm{K}\cos\omega t + \mathrm{K}'\sin\omega t)$

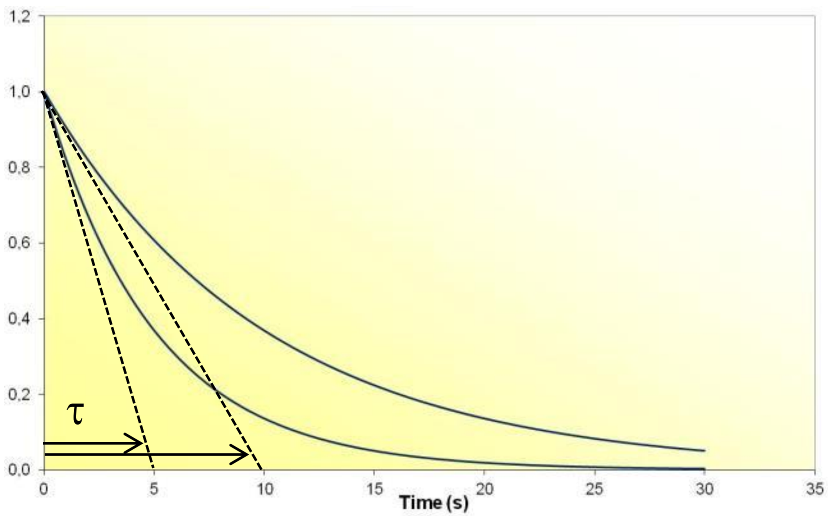
→le mode est **oscillant** (périodique)

$\mathrm{Re}(s) = -\lambda < 0$ → le mode est convergent $\xi = \frac{\lambda}{\omega} > 0$

$\mathrm{Re}(s) = -\lambda > 0$ → le mode est divergent $\xi = \frac{\lambda}{\omega} < 0$

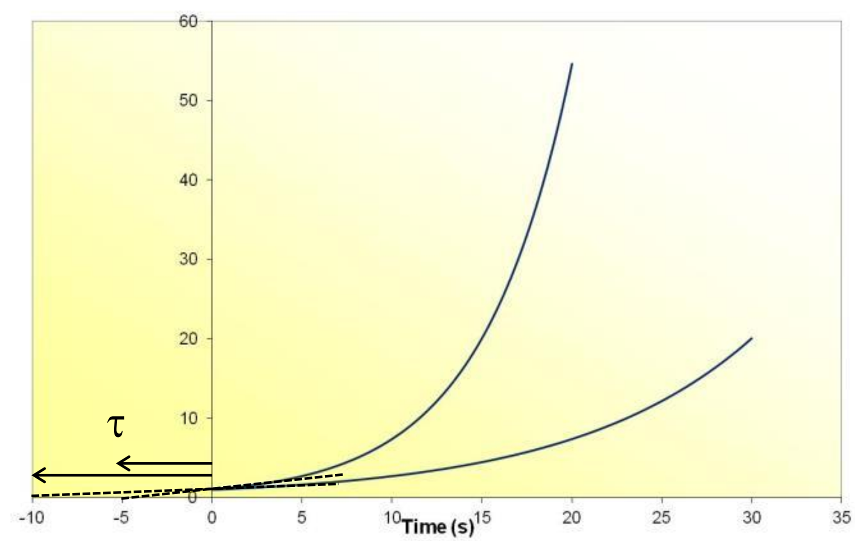
Mode apériodique – 1ier ordre

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{\tau} \Rightarrow x=x_0e^{st}=x_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$



τ positif : mode convergent

τ négatif : mode divergent

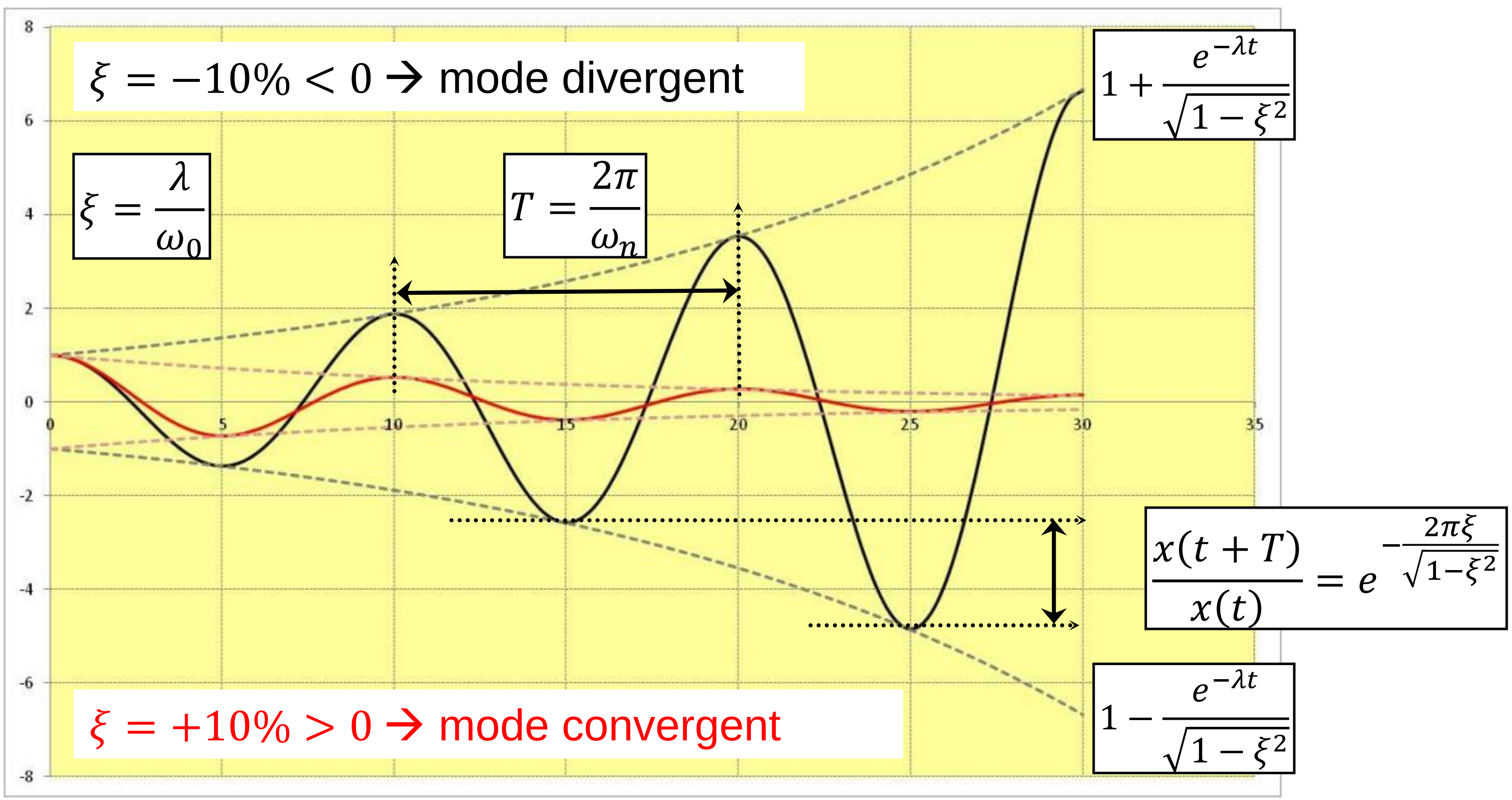


Mode oscillatoire – 2nd ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x = 0 \Rightarrow s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$$

$$\Rightarrow s/\bar{s} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega_n \Rightarrow x = x_0\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n t + \varphi)$$



Mode oscillatoire – 2nd ordre

$$s^2 + 2\lambda\, s + \omega_0^2 = 0$$

Amortissement : λ

Fréquence réelle ou fréquence propre : ω_O

Amortissement réduit : $\xi = \lambda/\omega_0$

Fréquence propre non armorie : $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

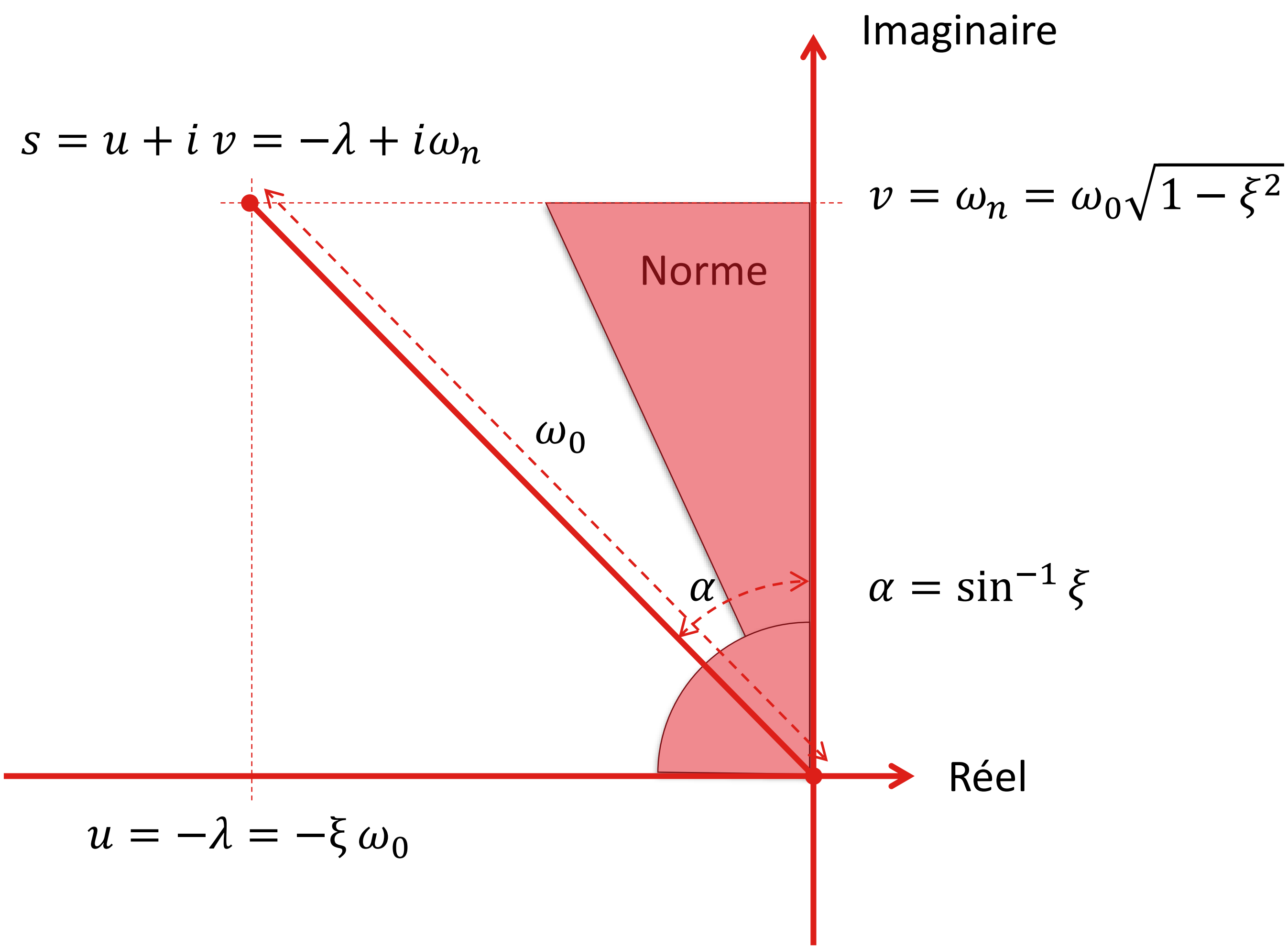
Norme : Confort & Sécurité :

Fréquence : $\omega_O > 1\,\text{rad/s}$

Amortissement : $\xi > 0{,}3$

Constante de temps : $\tau_{min} < \tau < \tau_{max}$

Mode oscillatoire – 2nd ordre



Dynamique longitudinale

Equations longitudinales

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 S}{2m} Cx(\alpha, q, \delta m) + \frac{k_f \rho \, V^{\lambda_f}}{m} \delta x - g \sin \gamma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V S}{2m} Cz(\alpha, q, \delta m) - \frac{g}{V}$$

$$\dot{q} = \frac{\rho V^2 S \ell}{2B} Cm_{/G} \, (\alpha, q, \delta m)$$

$$\dot{\alpha} = q \; - \; \dot{\gamma}$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

Pour un point d'équilibre $(V_e, \gamma_e = 0, \alpha_e, q_e = 0, h_e)$

On pose :

$$\begin{aligned}
\delta V &= V - V_e \\
\delta\gamma &= \gamma - \gamma_e = \gamma \\
\delta\alpha &= \alpha - \alpha_e \\
\delta q &= q - q_e = q \\
\delta h &= h - h_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\delta x &= \delta x - \delta x_e \\
\delta\delta m &= \delta m - \delta m_e
\end{aligned}$$

Exemple de linéarisation (en supposant ρ constant) – équation de sustentation

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V S}{2m} Cz(\alpha, q, \delta m) - \frac{g}{V}$$

$$\delta\dot{\gamma} = \delta\left[\frac{\rho V S}{2m} Cz - \frac{g}{V}\right]$$

$$= \frac{\rho S Cz}{2m}\delta V + \frac{\rho V S}{2m}\delta Cz + \frac{g}{V^2}\delta V = \left[\frac{\rho S Cz}{2m} + \frac{g}{V^2}\right]\delta V + \frac{\rho V S}{2m}\delta Cz$$

$$= \frac{2g}{V^2}\delta V + \frac{\rho V S}{2m}\left(Cz_\alpha \delta\alpha + Cz_q \frac{l}{V}\delta q + Cz_{\delta m}\delta\delta m\right)$$

$$\delta\dot{\gamma} = \frac{2g}{V^2}\delta V + \frac{\rho V S Cz_\alpha}{2m}\delta\alpha + \frac{\rho S l Cz_q}{2m}\delta q + \frac{\rho V S Cz_{\delta m}}{2m}\delta\delta m$$

Modèle d'état linéarisé

Equations d'état :

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 S}{2m}(Cx_0 + k_i Cz^2) + \frac{k_f \rho\, V^{\lambda_f}}{m}\delta x - g \cdot \gamma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V S}{2m} Cz - \frac{g}{V}$$

$$\dot{q} = \frac{\rho V^2 S \ell}{2B} Cm_{/G}$$

$$\dot{\alpha} = q \; - \; \dot{\gamma}$$

$$\dot{h} = V \cdot \gamma$$

Forme d'état linéarisée

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{V} \\ \delta\dot{\gamma} \\ \delta\dot{\alpha} \\ \delta\dot{q} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_\alpha & x_q & 0 \\ z_V & 0 & z_\alpha & z_q & z_h \\ -z_V & 0 & -z_\alpha & (1 - z_q) & -z_h \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ 0 & V_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V \\ \delta\gamma \\ \delta\alpha \\ \delta q \\ \delta h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} \\ 0 & z_{\delta m} \\ 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\delta x \\ \delta\delta m \end{bmatrix}$$

Modèle d'état linéarisé

Equation de propulsion ($\delta\dot{V}$)

$$x_V = \frac{g(\lambda_f - 2)}{f_e}, \qquad x_\gamma = -g, \quad x_\alpha = -2gk_i Cz_\alpha, \qquad x_q = -\frac{2g\ell k_i}{V_e} Cz_q$$

$$x_{\delta x} = \frac{g}{f_e}\frac{1}{\delta x_e}, \qquad x_{\delta m} = -2gk_i Cz_{\delta m}$$

Equation de sustentation ($\dot{\delta\gamma}$)

$$z_V = \frac{2g}{V_e}, \qquad z_\gamma = 0, \quad z_\alpha = \frac{\rho_e V_e S}{2m} Cz_\alpha, \qquad z_q = \frac{\rho_e S\ell}{2m} Cz_q$$

$$z_{\delta x} = 0, \qquad z_{\delta m} = \frac{\rho_e V_e S}{2m} Cz_{\delta m}$$

Equation de tangage ($\dot{\delta q}$)

$$m_V = 0, \qquad m_\gamma = 0, \quad m_\alpha = \frac{\rho_e V_e^2 S\ell}{2B} Cm_\alpha, \qquad m_q = \frac{\rho_e V_e S\ell^2}{2B} Cm_q$$

$$m_{\delta x} = 0, \qquad m_{\delta m} = \frac{\rho_e V_e^2 S\ell}{2B} Cm_{\delta m}$$

Exemple du DC8

Douglas DC-8	
Constructeur	Douglas Aircraft Company puis McDonnell Douglas
Équipage	3 (1 pilote, 1 copilote et 1 officier mécanicien navigant)
Premier vol	30 mai 1958
Mise en service	18 septembre 1959
Retrait	Retiré du service
Premier client	United Airlines et Delta Air Lines
Production	556
Dimensions	
Longueur	45,87 m
Envergure	43,41 m
Hauteur	13,21 m
Aire alaire	257,4 m²
Masse et capacité d'emport	
Max. à vide	54,88 t
Max. au décollage	140,6 t
Passagers	200
Motorisation	
Moteurs	4 turboréacteurs Pratt & Whitney JT3C-6 ou JT4A-9
Poussée unitaire	60,06 kN
Poussée totale	240,24 kN
Performances	
Vitesse de croisière maximale	940 km/h
Vitesse maximale	990 km/h
Autonomie	7 250 km
Plafond	9 150 m
Charge alaire	546,2 kg/m²
Rapport poussée/poids	0,217

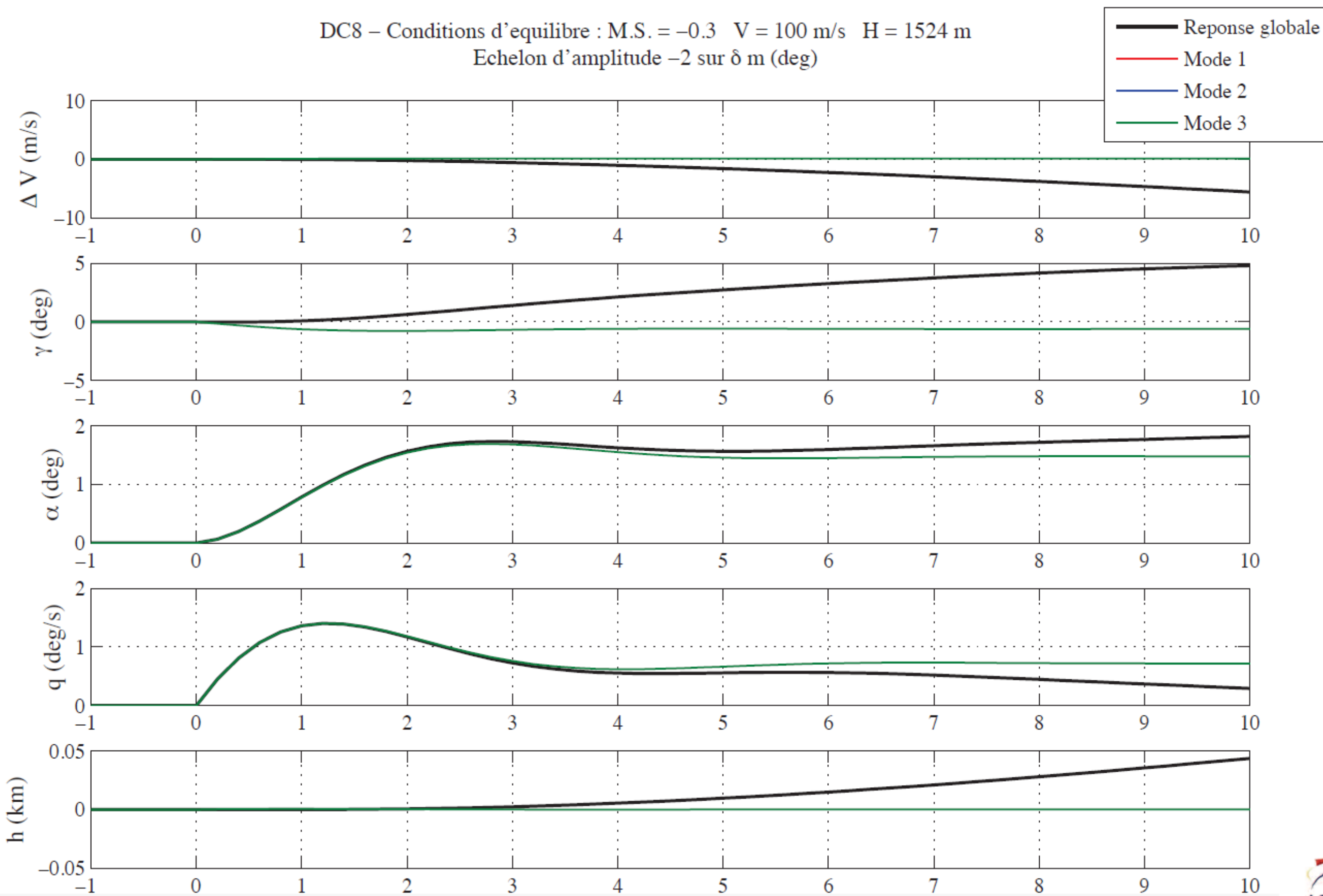
Avion « classique »

Condition de vol :

- Marge statique à -30%
- Altitude 1524 m = 5000 ft
- Vitesse 100 m/s = 194 kts (M = 0.3)

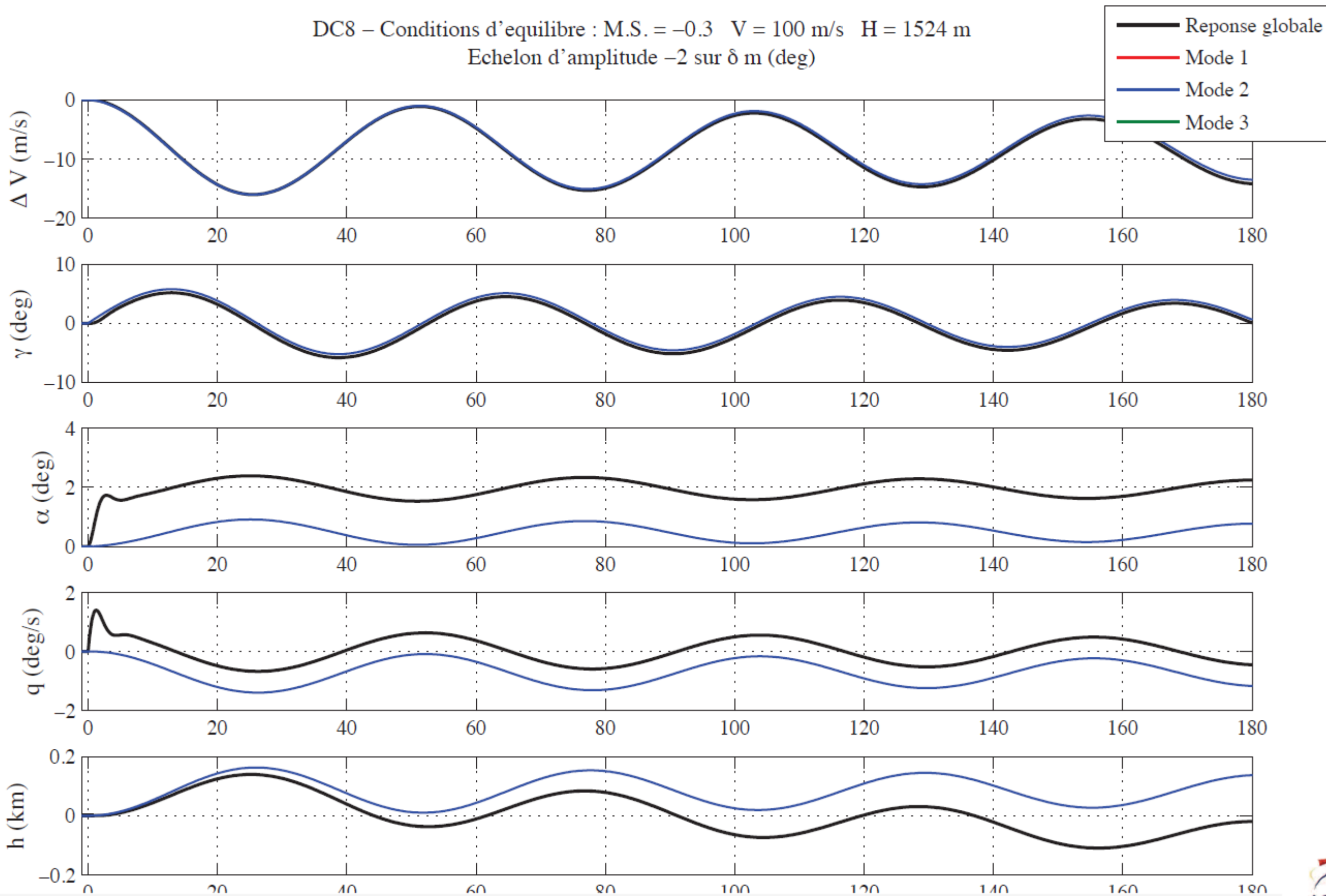
Exemple du DC8

Réponse de l'avion sur 10 sec.



Exemple du DC8

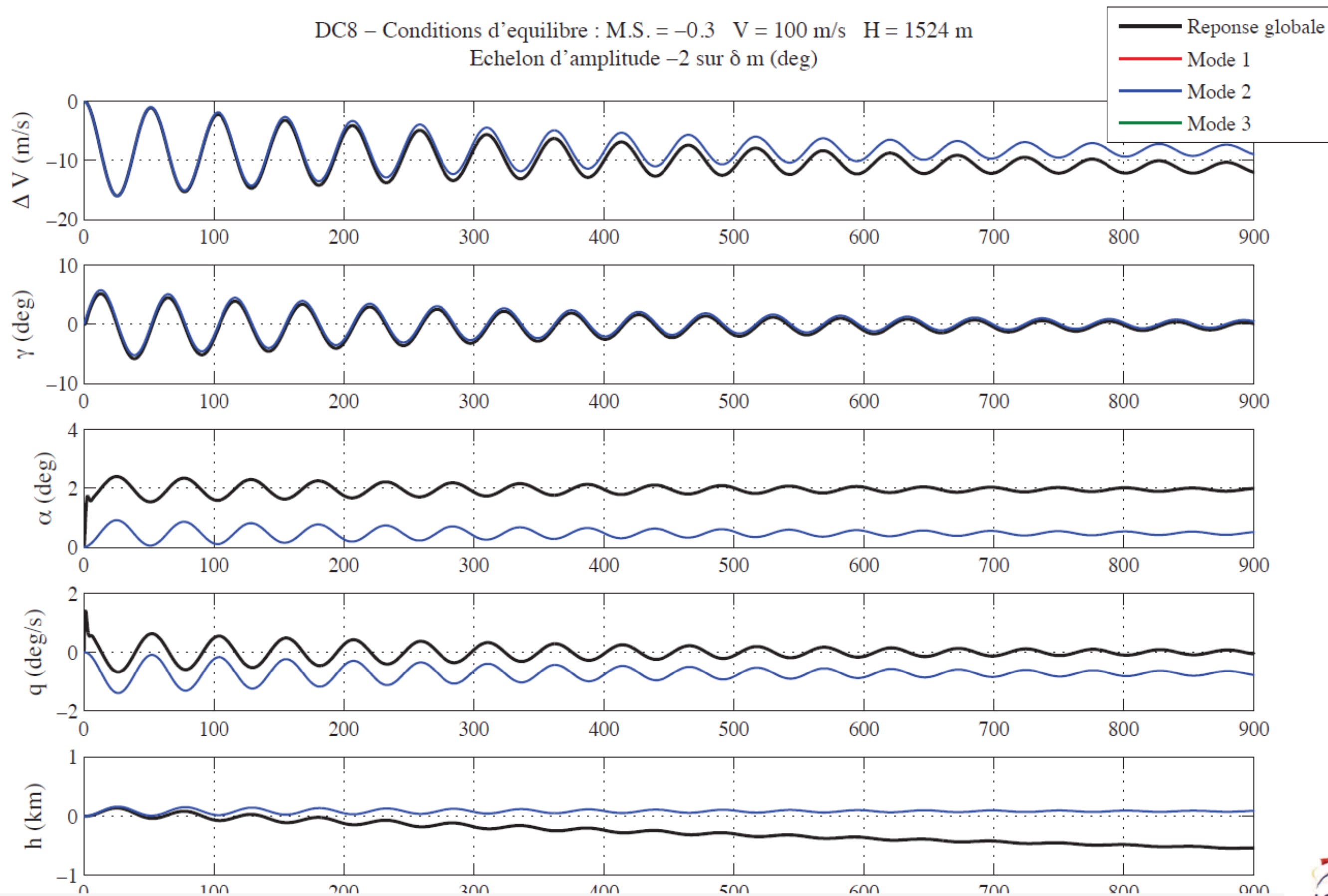
Réponse de l'avion sur 3 min.



isae

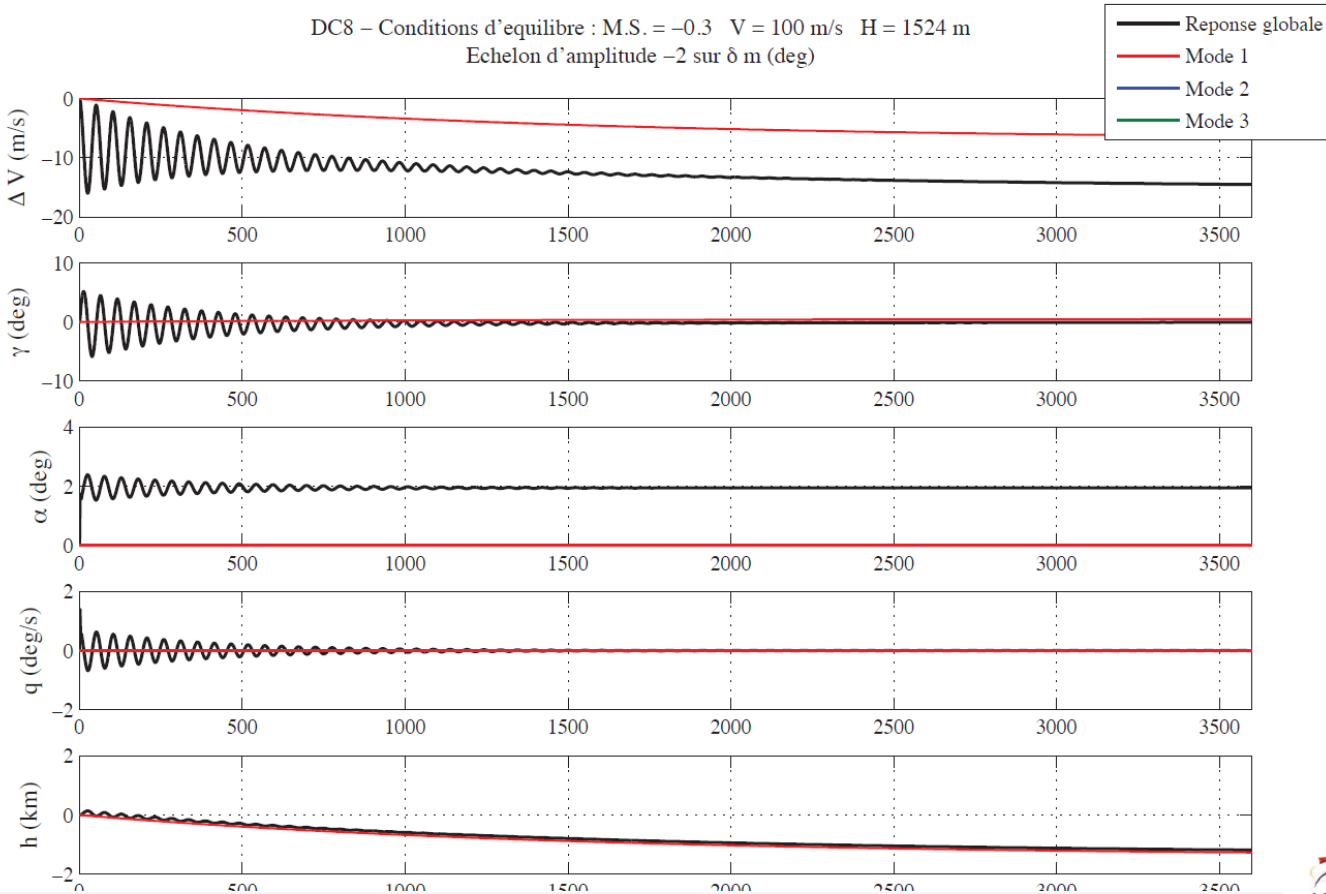
Exemple du DC8

Réponse de l'avion sur 15 min.



Exemple du DC8

Réponse de l'avion sur 1 heure



$$\begin{bmatrix} \delta\dot{V} \\ \delta\dot{\gamma} \\ \delta\dot{\alpha} \\ \delta\dot{q} \\ \delta\dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_\alpha & x_q & 0 \\ z_V & 0 & z_\alpha & z_q & z_h \\ -z_V & 0 & -z_\alpha & (1-z_q) & -z_h \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ 0 & V_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V \\ \delta\gamma \\ \delta\alpha \\ \delta q \\ \delta h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} \\ 0 & z_{\delta m} \\ 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\delta x \\ \delta\delta m \end{bmatrix}$$

Modes longitudinaux

Modes	Grandeurs associées	Type	Freq f_n (Hz)	Amort. ξ	Constante de temps (s)
Oscillation d'Incidence	α, q	Oscillant	0.208	0.52	1.46
Phugoïde	V, γ	Oscillant	0.019	0.02	400
Rappel de Propulsion	h	Apériodique			1511

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{V}} \\ \dot{\bar{\gamma}} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_\alpha & x_q & 0 \\ z_V & 0 & z_\alpha & z_q & z_h \\ -z_V & 0 & -z_\alpha & (1-z_q) & -z_h \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ 0 & V_e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{\gamma} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{q} \\ \bar{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} \\ 0 & z_{\delta m} \\ 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \overline{\delta m} \end{bmatrix}$$

PH OI RP

Oscillation d’incidence : approche couplée

Oscillation d'incidence : approche couplée

On suppose que h ne varie pas et que V est constant : $\delta V = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\gamma}} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_\alpha & z_q \\ 0 & -z_\alpha & 1 - z_q \\ 0 & m_\alpha & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{\alpha} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_{\delta m} \\ 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \delta m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_\alpha & 1 - z_q \\ m_\alpha & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \delta m \end{bmatrix}$$

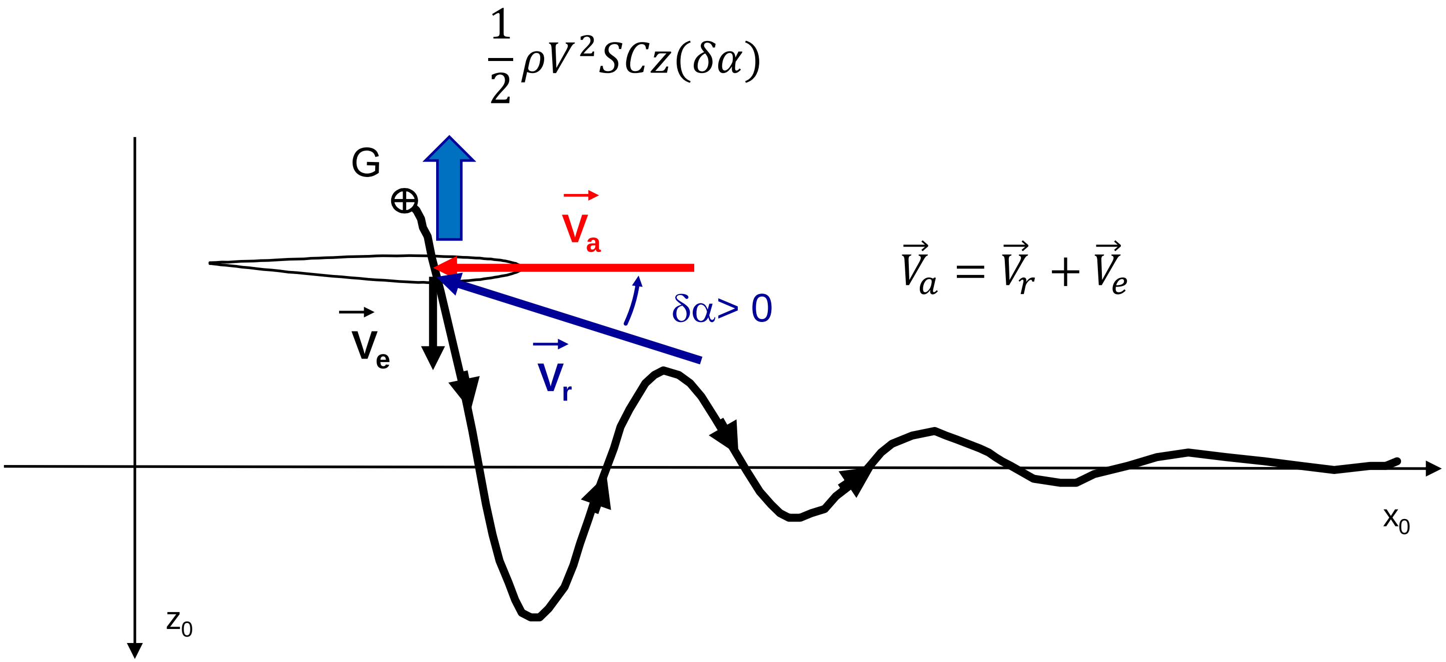
$$\rightarrow s^2 + 2\lambda\, s + \omega_0^2 = 0$$

$$s/\bar{s} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\, \omega_n$$

$$\lambda = -\frac{m_q - z_\alpha}{2}$$

$$\omega_0^2 = -m_\alpha (1 - z_q) - m_q z_\alpha$$

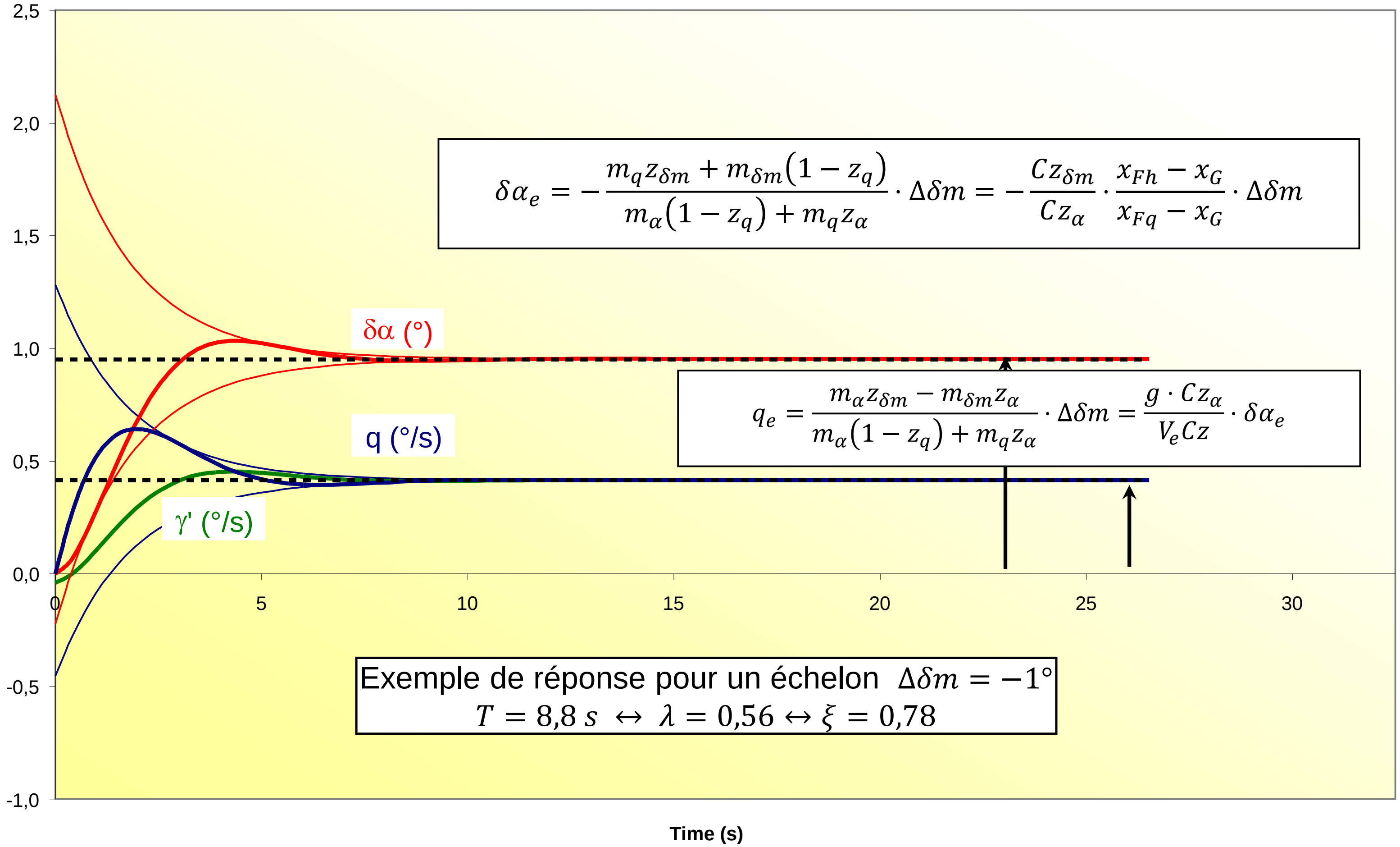
Oscillation d'incidence : approche couplée



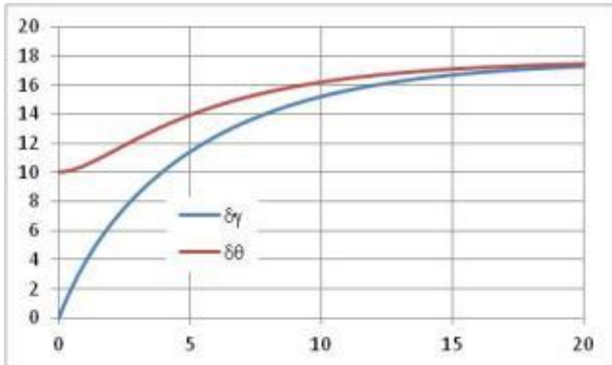
Le centre de gravité G est animé par un mouvement d'oscillation vertical du aux variation de portance.

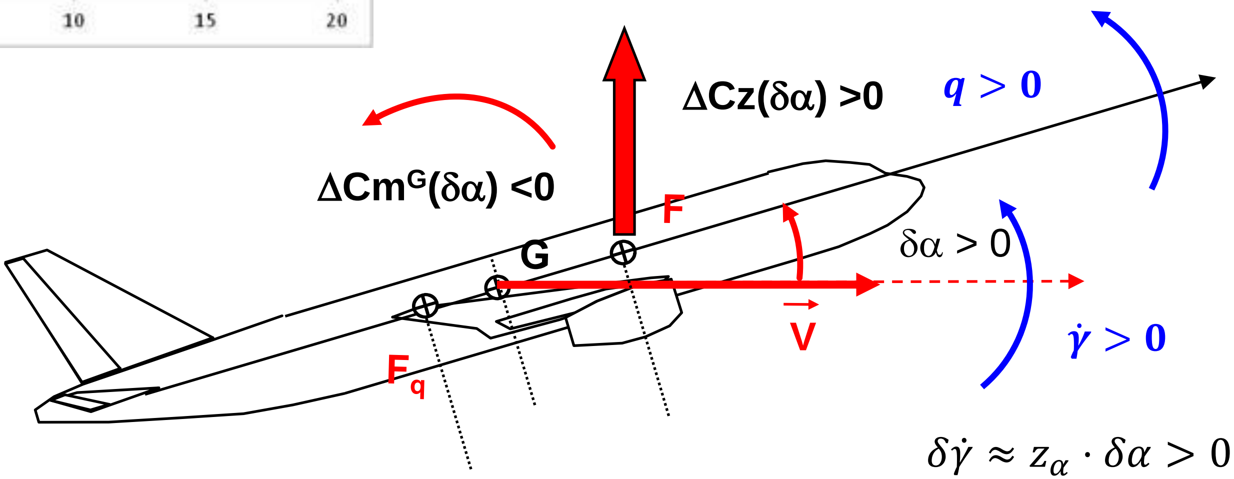
L'aile voit une variation d'angle d'incidence ce qui produit une variation de portance opposé au mouvement de G

Oscillation d'incidence : approche couplée



Oscillation d'incidence : approche couplée

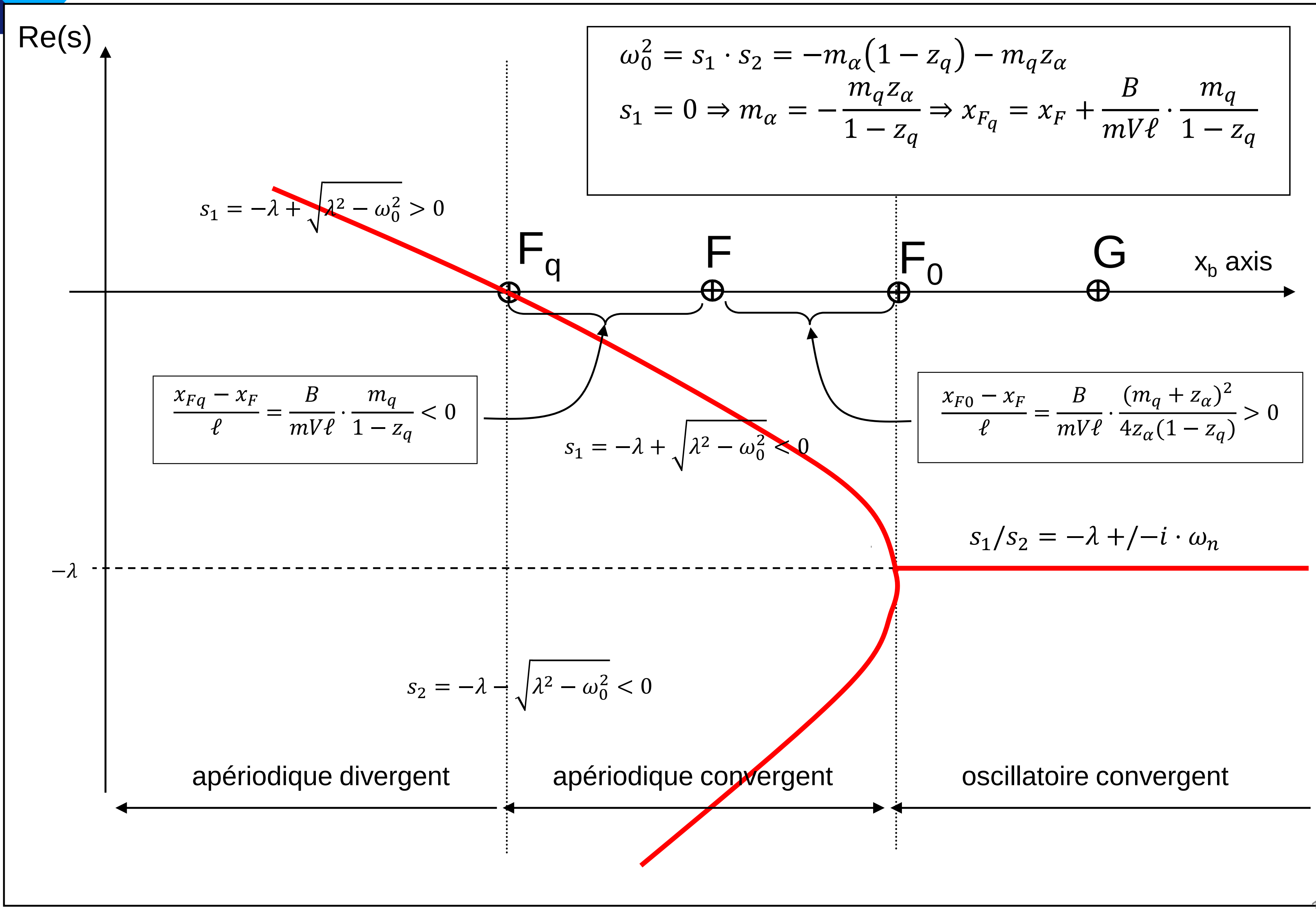




$$\delta\dot{\gamma} \approx z_\alpha \cdot \delta\alpha > 0$$

Bien que l'avion soit instable « statiquement », le vecteur vitesse change de direction de sorte que la variation d'incidence $(\alpha = \theta - \gamma)$ peut décroitre

Oscillation d'incidence : Point de Manœuvre



Phugoïde

Phugoïde

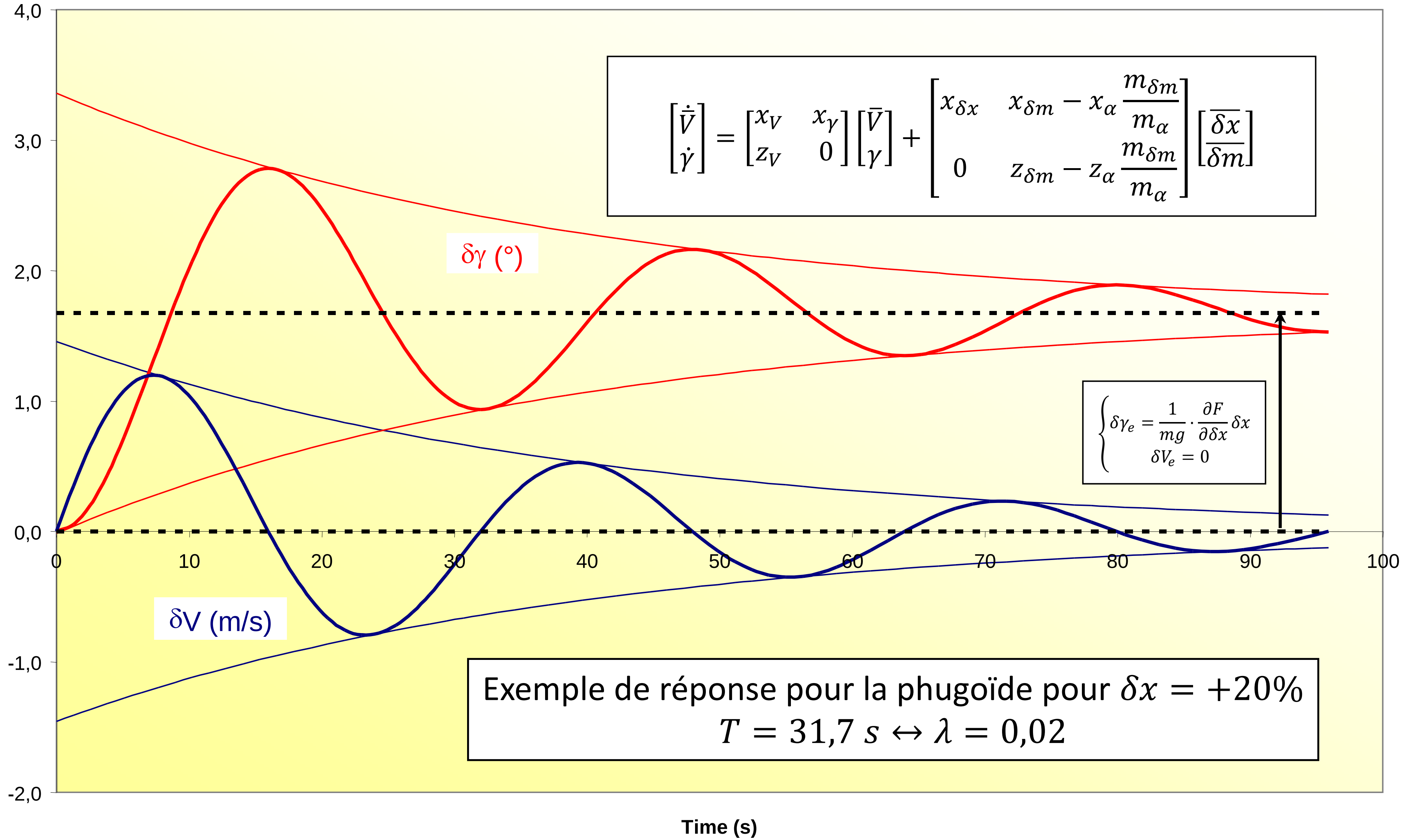
On suppose que : $\alpha = \text{cst}$ et $q = 0$
(hypothèse de découplage)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{V}} \\ \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_\alpha & x_q \\ z_V & 0 & z_\alpha & z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \gamma \\ \bar{\alpha} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} \\ 0 & z_{\delta m} \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{\delta m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \overline{\delta m} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{V}} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma \\ z_V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} - x_\alpha \dfrac{m_{\delta m}}{m_\alpha} \\ 0 & z_{\delta m} - z_\alpha \dfrac{m_{\delta m}}{m_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \overline{\delta m} \end{bmatrix}$$

Phugoïde



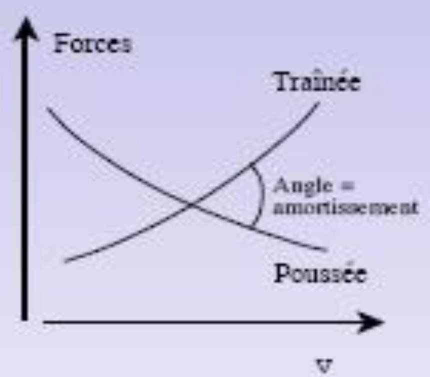
$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{V}}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_V & x_\gamma\\ z_V & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{V}\\ \gamma\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_{\delta x} & x_{\delta m} - x_\alpha \dfrac{m_{\delta m}}{m_\alpha}\\ 0 & z_{\delta m} - z_\alpha \dfrac{m_{\delta m}}{m_\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\delta x}\\ \overline{\delta m}\end{bmatrix}$$
δγ (°)
$$\begin{cases}\delta\gamma_e = \dfrac{1}{mg}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial \delta x}\delta x\\ \delta V_e = 0\end{cases}$$
δV (m/s)
Exemple de réponse pour la phugoïde pour $\delta x = +20\%$
$T = 31{,}7\ s \leftrightarrow \lambda = 0{,}02$
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
-1,0
-2,0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Time (s)

Interprétation physique :

Equation de propulsion : $m\dot{V} = F - T - mg\,\gamma$

Equation de sustentation : $mV\dot{\gamma} = P - mg$

⇒ Linéarisation



Evolution du bilan propulsif avec la vitesse - amortissement de la phugoïde

$$m\dot{\bar{V}} = \frac{\partial(F-T)}{\partial V}\bar{V} - mg\,\gamma$$

$$mV\dot{\bar{\gamma}} = \frac{2mg}{V}\bar{V}$$

$$\ddot{\bar{V}} - \frac{1}{m}\frac{\partial(F-T)}{\partial V}\dot{\bar{V}} + \frac{2g^2}{V^2}\bar{V} = 0$$

Phugoïde

Matrice d'état :

$$A_{PH} = \begin{pmatrix} x_V & x_\gamma \\ z_V & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x_V = \frac{g(\lambda_f - 2)}{fV} & x_\gamma = -\frac{g}{V} \\ z_V = \frac{2g}{V} & \end{cases}$$

Fréquence propre & amortissement :

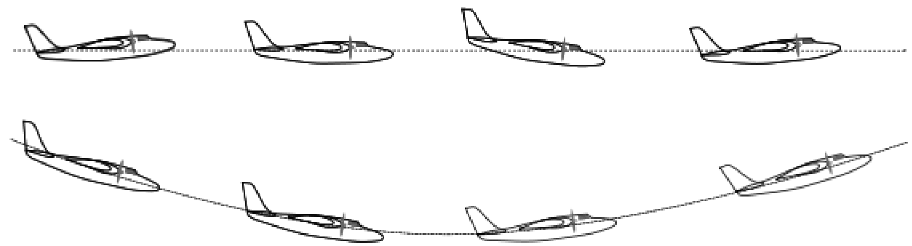
$$\lambda = -\frac{x_V}{2} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial V} - \rho V S C x\right) = \frac{2 - \lambda_f}{2f}\frac{g}{V}$$

$$\omega_0^2 = -z_V x_\gamma \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}\frac{g}{V}$$

Soit :

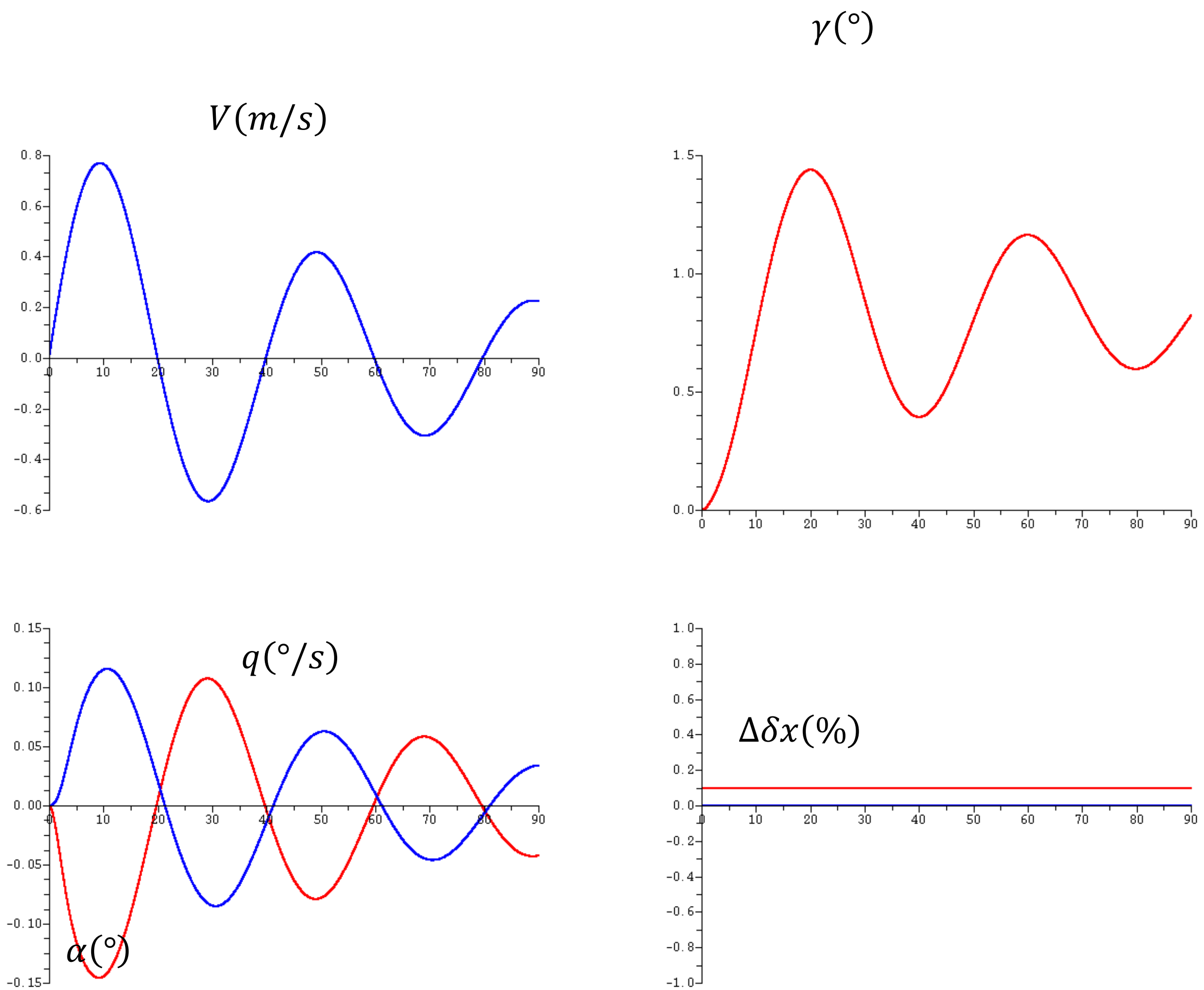
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0{,}45\ V$$

$$\xi = \frac{2 - \lambda_f}{2\sqrt{2} f}$$



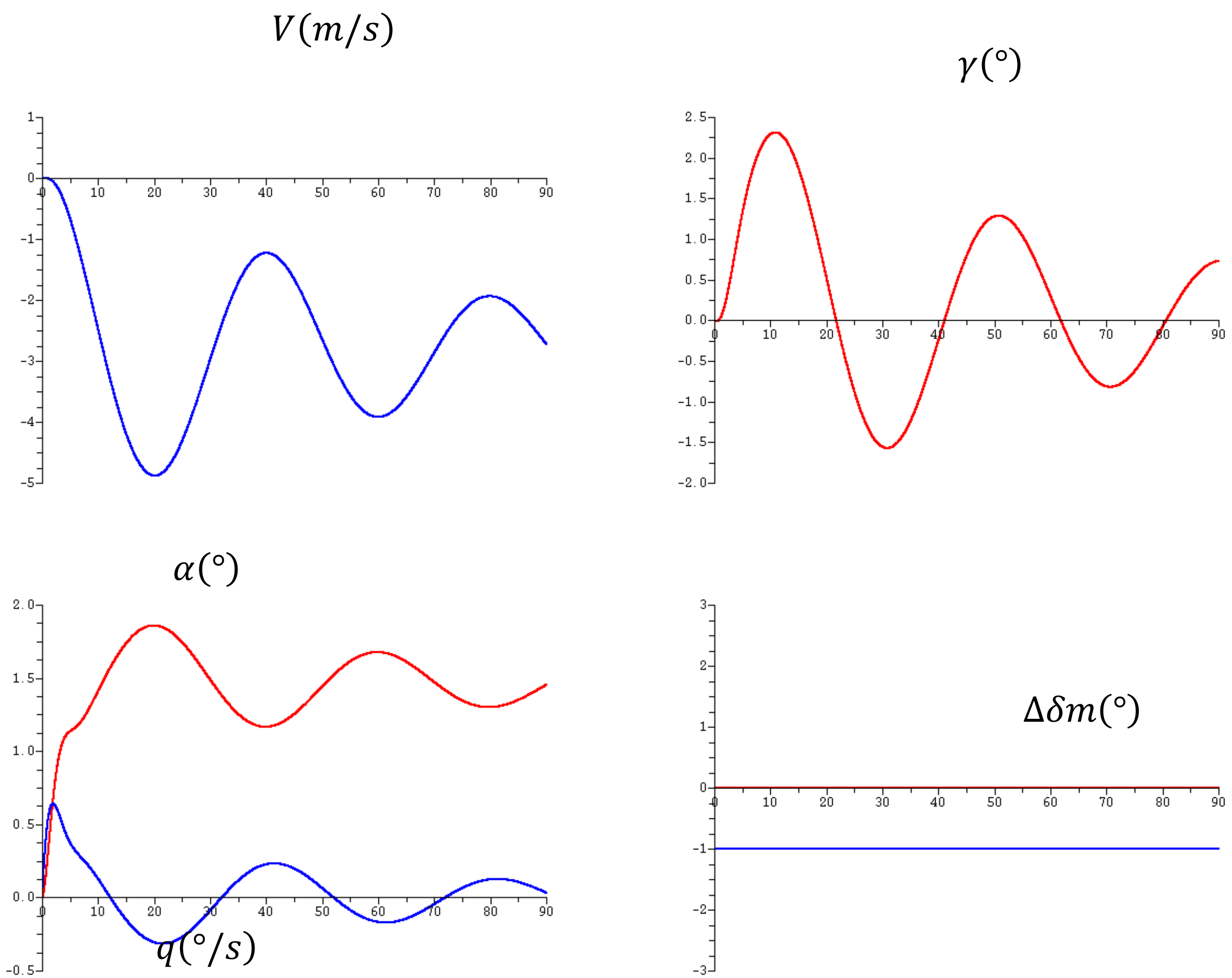
	Oscillation d'Incidence	Phugoïde
Variables	(α, q)	(V, γ)
Période	Fonction de Cm_α « rapide » apériodique pour CG arrière	$T = 0.45 * V$ « lente » Toujours périodique
Amortissement	Fonction de Cm_q & Cz_α Fortement amorti	Fonction de Cx & dF/dV Faiblement amorti

Réponse à un échelon de commande des gaz : $\Delta\delta x$



Réponse de la phugoïde à un échelon $\Delta\delta x$

Réponse à un échelon de gouverne : $\Delta\delta m$



Oscillation d'incidence puis Phugoïde
par une commande δm

Rappel de propulsion

Hypothèse de découplage :

Toutes les équation à l'équilibre sauf : $\dot{h} = V\,\gamma$

⇒ Mouvement apériodique très lent qui ramène la pente à zéro.

$\dot{h} = V\,\gamma$ à l'équilibre $\gamma = 0$

Equation d'état

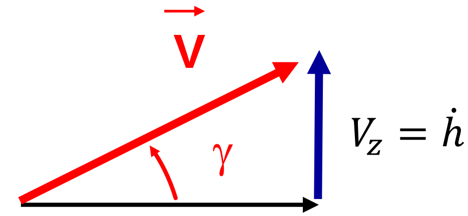
$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{V}} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{q} \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_\alpha & x_q & x_h \\ z_V & 0 & z_\alpha & z_q & z_h \\ -z_V & 0 & -z_\alpha & (1 - z_q) & -z_h \\ 0 & 0 & m_\alpha & m_q & 0 \\ 0 & V_e & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \gamma \\ \bar{\alpha} \\ q \\ \bar{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\delta x} & x_{\delta m} \\ 0 & z_{\delta m} \\ 0 & -z_{\delta m} \\ 0 & m_{\delta m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta x} \\ \overline{\delta m} \end{bmatrix}$$

Rappel de propulsion

On suppose que V et γ ont atteint leur équilibre

$$\begin{cases} x_h = \frac{1}{m}\left(F_h - \frac{1}{2}V^2 SCx \cdot \rho_h\right) \approx \frac{1}{m}\left(F_h - \frac{F}{\rho} \cdot \rho_h\right) \\ z_h = \frac{VSCz}{2m} \cdot \rho_h = \frac{g}{\rho V} \cdot \rho_h \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\gamma & x_h \\ z_V & 0 & z_h \\ 0 & V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{\gamma} \\ \bar{h} \end{bmatrix}$$



$$\delta X = \delta X_0 e^{st} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_V & x_\gamma & x_h \\ z_V & 0 & z_h \\ 0 & V & -s \end{vmatrix} = 0$$

$$s = -V \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_V & x_h \\ z_V & z_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_V & x_\gamma \\ z_V & 0 \end{vmatrix}} = \frac{V}{g} \cdot \left(x_h - z_h \frac{x_V}{z_V}\right) = \frac{V^2}{2mg} \cdot \left(\frac{2F_h}{V} - \frac{\rho_h F_V}{\rho}\right) < 0$$

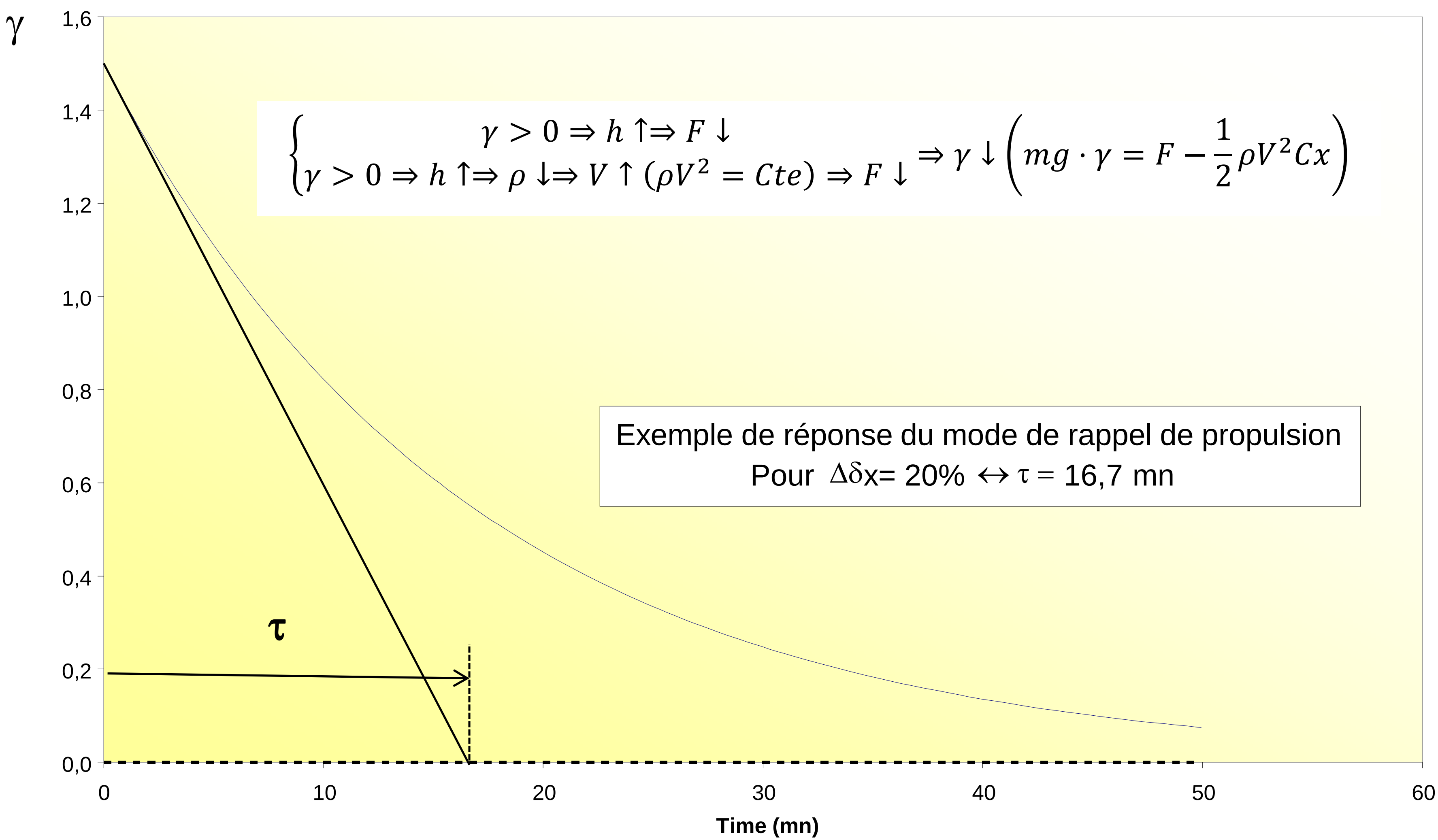
s est une valeur propre réelle → mode apériodique ; convergent si $\tau > 0$

$$\frac{d\delta h}{dt} + \frac{\delta h}{\tau} = 0 \leftrightarrow s + \frac{1}{\tau} = 0 \leftrightarrow \delta h = \delta h_0 \cdot (1 - e^{st}) = \delta h_0 \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\tau = -\frac{1}{s} = \frac{2mg}{V^2} \cdot \frac{\rho V}{\rho_h V \cdot F_V - 2\rho F_h} > 0$$

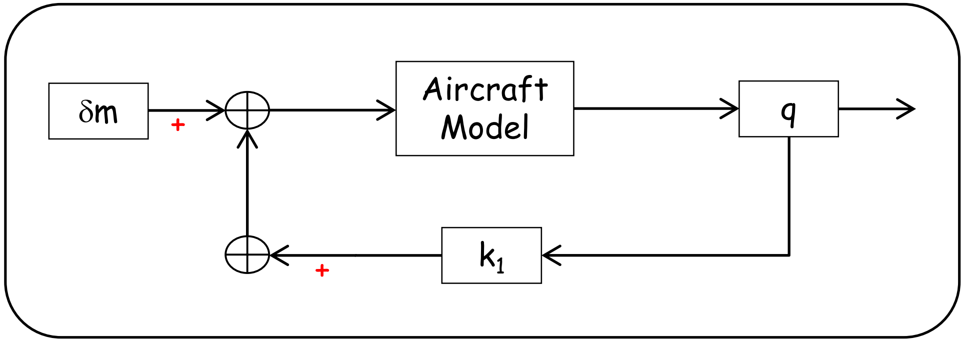
Rappel de propulsion

$$\dot{h} = V \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\dot{h}}{V} = \frac{\delta h_0}{V\tau} \cdot e^{-t/\tau} = \gamma_0 \cdot e^{-t/\tau}$$



Stabilité augmentée

Amortisseur de tangage



Amortisseur de tangage : $k_1 > 0$

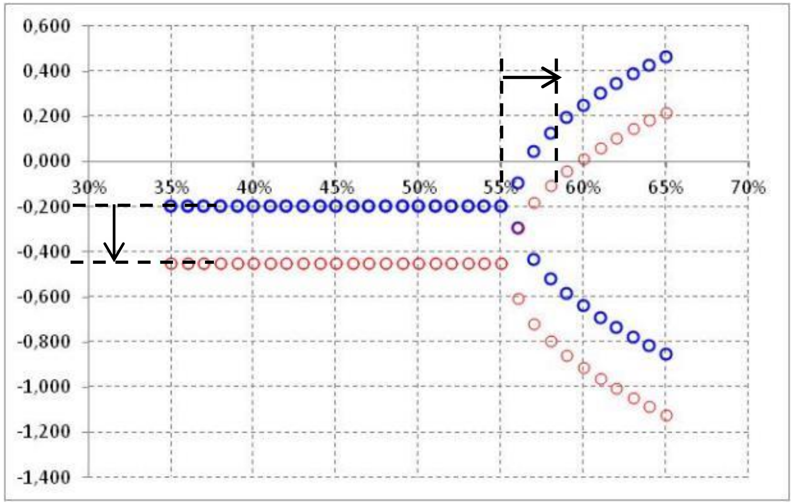
⇨ m_q est augmenté de $k_1.m_{\delta m}$

$$Cm = Cm_0 + Cm_\alpha \overline{\alpha} + Cm_q \frac{qL}{V} + Cm_{\delta m}[\delta m + k_1 q]$$

$$Cm = Cm_0 + Cm_\alpha \overline{\alpha} + \left[Cm_q + k_1 Cm_{\delta m} \frac{V}{L}\right] \frac{qL}{V} + Cm_{\delta m} \delta m$$

⇨ Les oscillations d'incidence sont amorties

⇨ Le « point de manœuvre » est situé plus en arrière



Concorde : XF/L=56% ; XFq/L= 56.6% → 59.8% (k1=1)