Dynamique latérale

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

SUPAERO

Equations du vol latéral

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -r + \dfrac{\rho V S}{2m}\left(Cy_{\beta}\beta\right) + \dfrac{g}{V}\sin\phi \\ \dot{r} = \dfrac{\rho V^2 S\ell}{2C}\left(Cn_{\beta}\beta + Cn_{p}\dfrac{p\ell}{V} + Cn_{r}\dfrac{r\ell}{V} + Cn_{\delta n}\delta n\right) \\ \dot{p} = \dfrac{\rho V^2 S\ell}{2A}\left(Cl_{\beta}\beta + Cl_{p}\dfrac{p\ell}{V} + Cl_{r}\dfrac{r\ell}{V} + Cl_{\delta l}\delta l\right) \\ \dot{\phi} = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\dot{\beta} = \delta\left[\dfrac{\rho V S}{2m}\cdot Cy_\beta\cdot\beta - r + \dfrac{g}{V}\cdot\sin\phi\right] \\ \delta\dot{r} = \dfrac{\rho V^2 S\ell}{2C}\cdot\delta\left[Cn_\beta\cdot\beta + Cn_p\cdot\dfrac{p\ell}{V} + Cn_r\cdot\dfrac{r\ell}{V} + Cn_{\delta n}\cdot\delta n\right] \\ \delta\dot{p} = \dfrac{\rho V^2 S\ell}{2A}\cdot\delta\left[Cl_\beta\cdot\beta + Cl_p\cdot\dfrac{p\ell}{V} + Cl_r\cdot\dfrac{r\ell}{V} + Cl_{\delta l}\cdot\delta l\right] \\ \delta\dot{\phi} = \delta p \end{cases}$$

A partir d'un point d'équilibre, on considère des petites variations $(\delta\beta, \delta r, \delta p, \delta\phi)$ obtenues pour des petites variations des commandes $(\delta l, \delta n)$ en différentiant les équations du vol, par exemple:

$$\delta\dot{\beta} = \delta\left[\frac{\rho V S}{2m}\cdot Cy_\beta\cdot\beta - r + \frac{g}{V}\cdot\sin\phi\right] = \frac{\rho V S}{2m}\cdot Cy_\beta\cdot\delta\beta - \delta r + \frac{g}{V}\cdot\delta\phi$$

Linéarisation des équations

$$\begin{cases} \delta\dot{\beta} = \dfrac{\rho V S C y_\beta}{2m}\delta\beta - \delta r + \dfrac{g}{V}\delta\phi \\ \delta\dot{r} = \dfrac{\rho V^2 S \ell}{2C}\left(Cn_\beta \delta\beta + Cn_p \dfrac{p\ell}{V} + Cn_r \dfrac{r\ell}{V} + Cn_{\delta n}\delta n\right) \\ \delta\dot{p} = \dfrac{\rho V^2 S \ell}{2A}\left(Cl_\beta \delta\beta + Cl_p \dfrac{p\ell}{V} + Cl_r \dfrac{r\ell}{V} + Cl_{\delta l}\delta l\right) \\ \delta\dot{\phi} = p \end{cases}$$

$$\delta\beta = \beta - \beta_e = \beta$$

On obtient la matrice d’état A et la matrice de commande B

$$\dot{X} = A\,X + B\,U$$

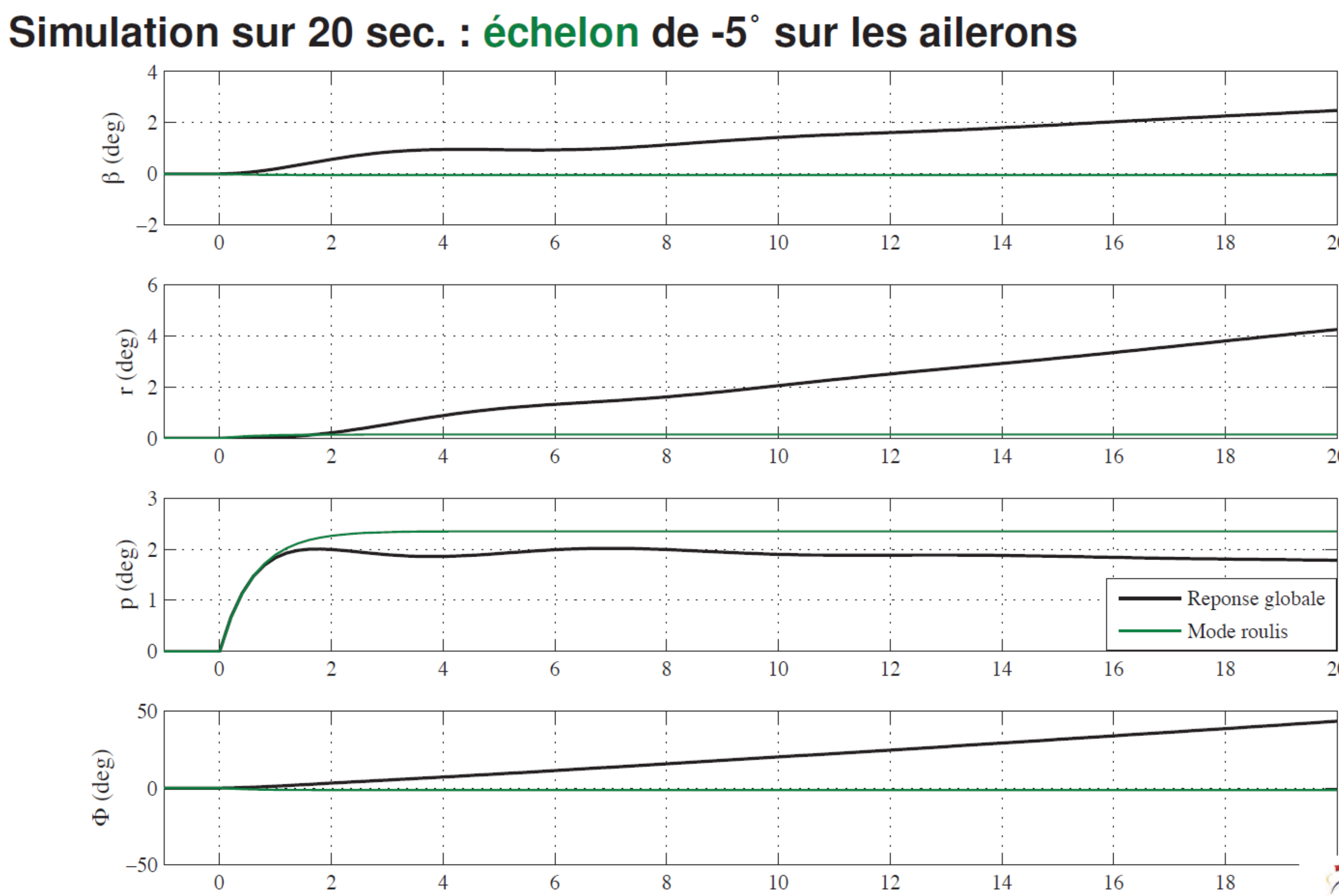
$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\beta & -1 & 0 & \frac{g}{V} \\ n_\beta & n_r & n_p & 0 \\ l_\beta & l_r & l_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_{\delta n} \\ l_{\delta l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix}$$

Exemple : Douglas DC-8

- Conditions de vol : V = 100 m/s, h = 1524 m (5000 ft), ms = -0.3

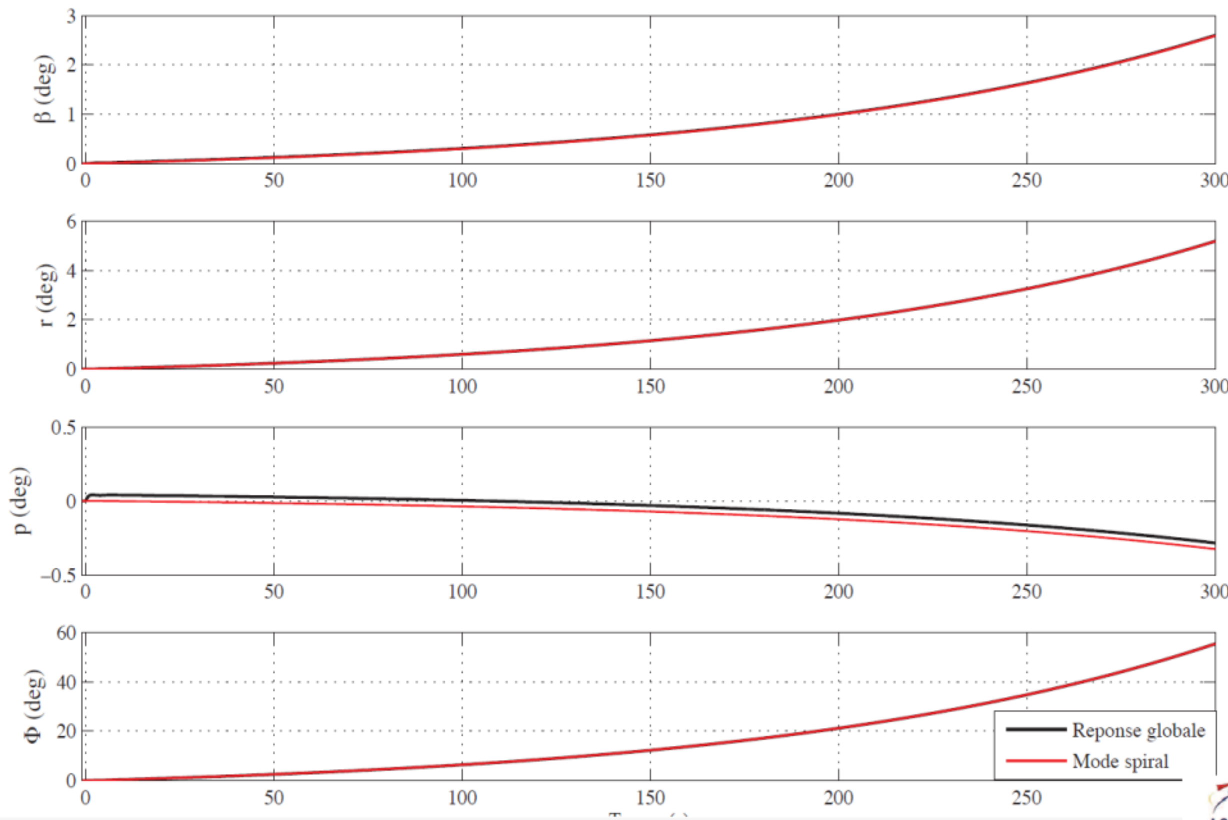
Avions «**classiques**» : Stabilité de route importante $Cn_\beta \gg 0$

Exemple : Douglas DC-8



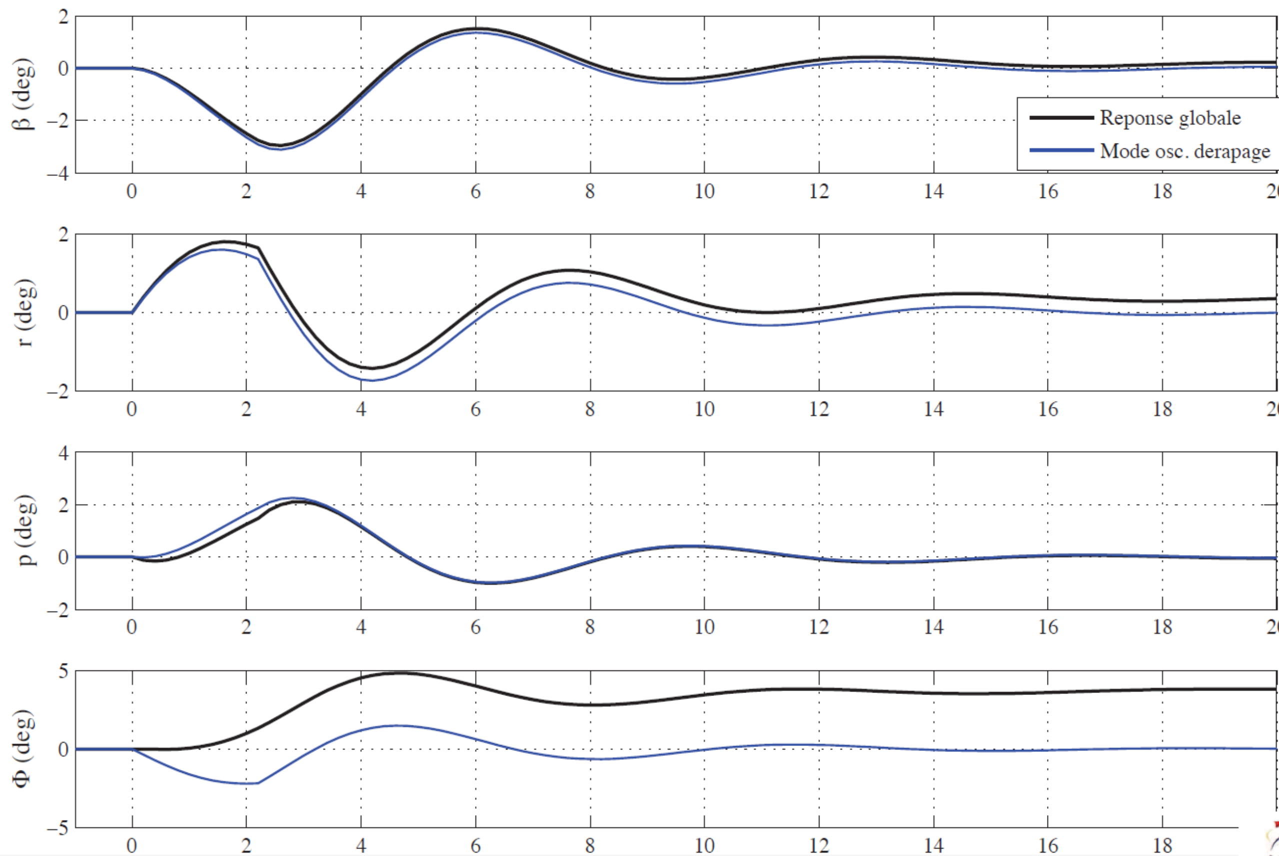
Exemple : Douglas DC-8

Simulation sur 5 min. : échelon de -0.1° sur les ailerons



Exemple : Douglas DC-8

Simulation sur 20 sec. : Créneau de 2 sec. et de 5° sur la direction



Modes

Modes	Grandeurs associées	Type	f_n (Hz)	ξ	τ (s)	$T_{\text{osc.}}$ (s)
Roulis pur	p	apériodique		1	0.6	
Oscillation dérapage	β, r	oscillant	0.15	0.26	4.2	6.9
Spiral	ϕ	apériodique		-1	-120	

Partition de la matrice A

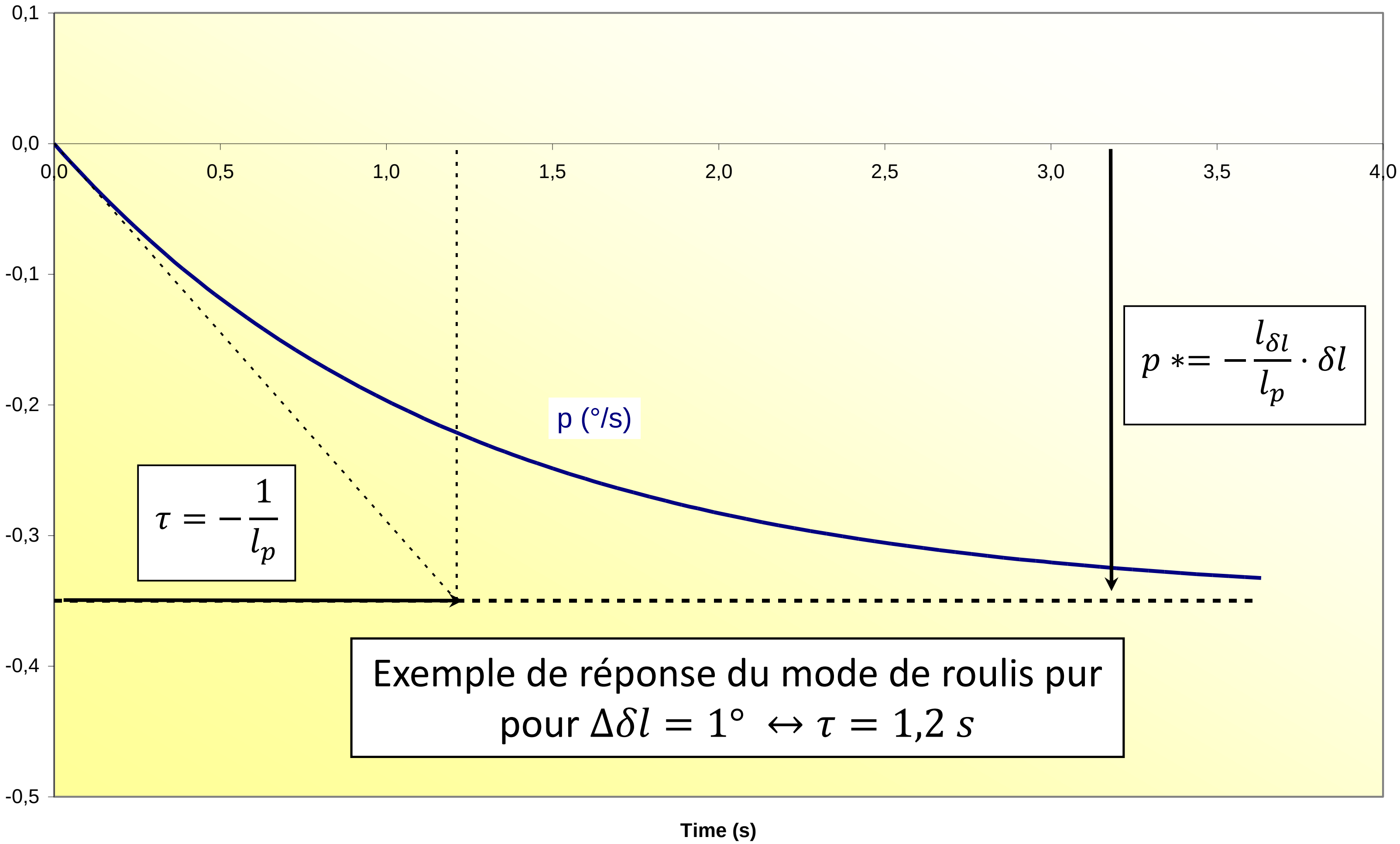
$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\beta & -1 & 0 & \frac{g}{V} \\ n_\beta & n_r & n_p & 0 \\ l_\beta & l_r & \boxed{l_p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_{\delta n} \\ l_{\delta l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta l \\ \delta n \end{pmatrix}$$

Mode de roulis pur

$$\dot{p} - l_p \cdot p = l_{\delta l} \cdot \delta l$$

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = 0 \leftrightarrow s + \frac{1}{\tau} = 0 \leftrightarrow x = x_0 e^{st} = x_0 e^{-t/\tau}$$

- valeur propre réelle
- mode apériodique
- convergent si $s < 0$



$$p* = -\frac{l_{\delta l}}{l_p} \cdot \delta l$$

$$\tau = -\frac{1}{l_p}$$

Exemple de réponse du mode de roulis pur
pour $\Delta\delta l = 1° \leftrightarrow \tau = 1{,}2\ s$

Oscillation de dérapage

Concerne les variables β et r

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_\beta & -1\\ n_\beta & n_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ n_{\delta n}\end{bmatrix}\delta n$$

$$\begin{vmatrix}y_\beta - s & -1\\ n_\beta & n_r - s\end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow s^2 + 2\lambda \cdot s + \omega_0^2 = 0$$

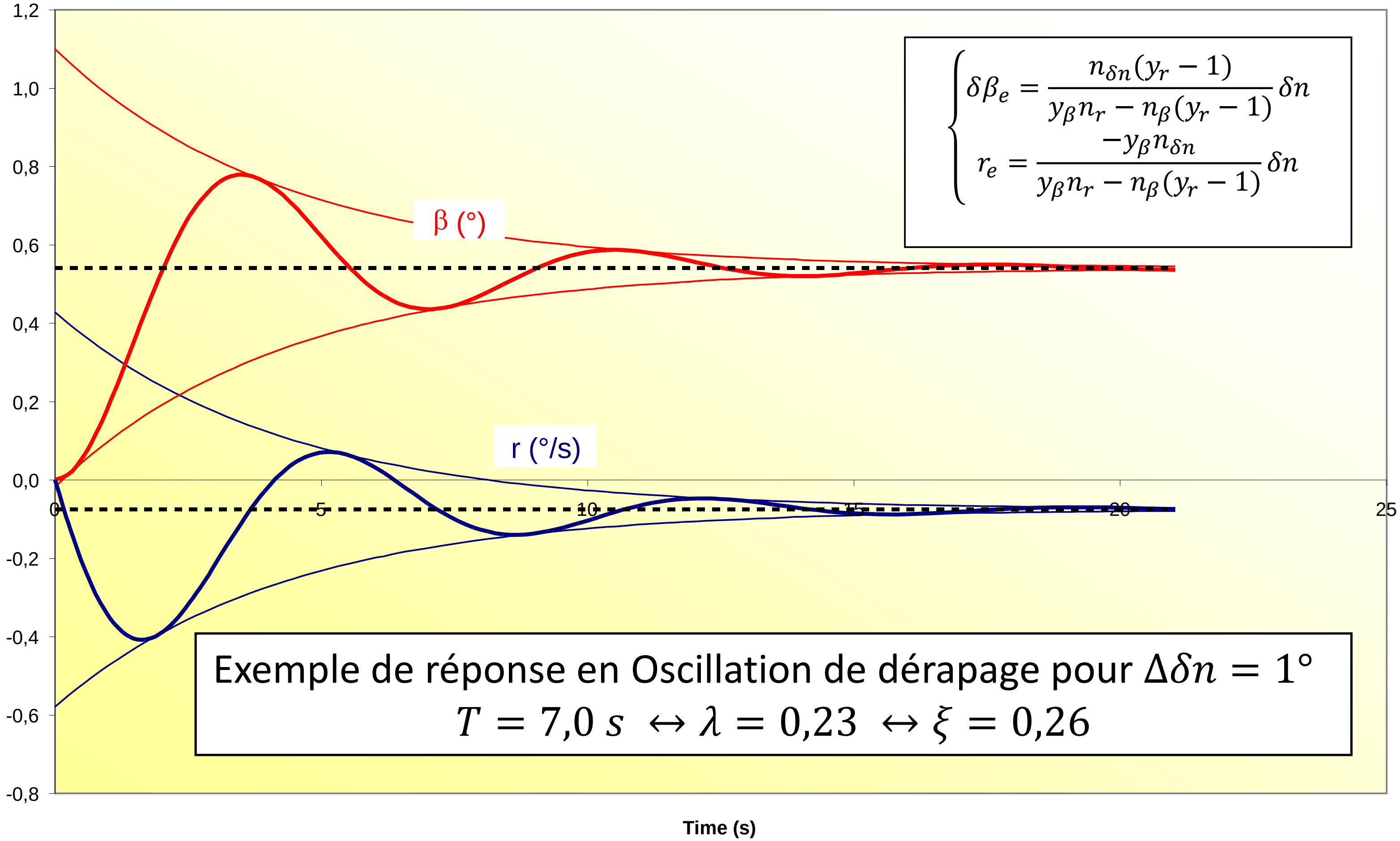
$$s/\bar{s} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\omega_n$$

$\lambda = -\frac{y_\beta + n_r}{2}$ → amortissement positif

$\omega_0^2 = n_\beta + y_\beta n_r$ → stabilité latérale

$$\xi = \frac{\lambda}{\omega_n} \approx \frac{\lambda}{\omega_0}$$

Oscillation de dérapage



Analogie Longitudinal / latéral

Il y a une forte analogie entre les deux modes oscillants périodiques des modes longitudinal et latéral

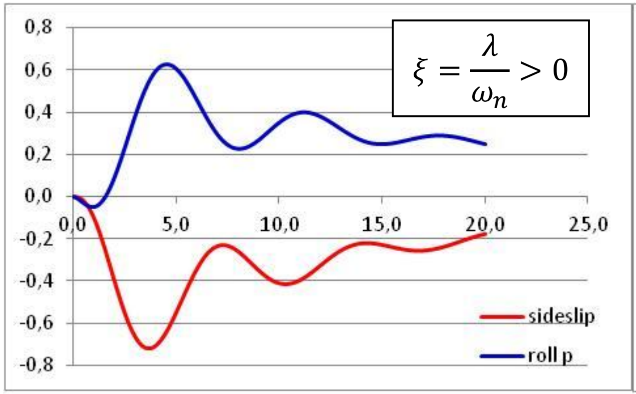
	Oscillation d'incidence	Oscillation de dérapage
Variables	(α, q)	(β, r)
Période	Fonction de Cm_α Rapide Apériodique si CG arrière	Fonction de Cn_β Rapide Toujours périodique / CG
Amortissement	Fonction de Cm_q & Cz_α Fortement amorti	Fonction de Cn_r & Cy_β Faiblement amorti

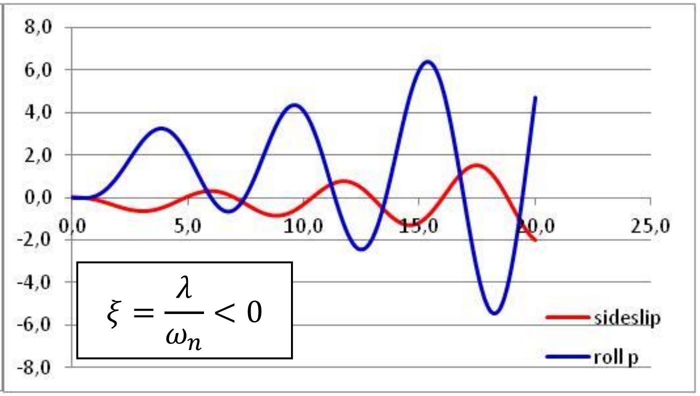
Roulis hollandais (dutch roll)

- En réalite … roulis p

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\beta & -1 & 0 & \frac{g}{V} \\ n_\beta & n_r & \boxed{n_p} & 0 \\ \boxed{l_\beta} & l_r & l_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \phi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_{\delta n} \\ l_{\delta l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\delta l\\ \delta n\end{bmatrix}$$

L'oscillation de dérapage devient plus complexe et l'on parle de **Roulis Hollandais**
C'est un mode périodique (même en centrage arrière CG) mais qui peut devenir divergent





Influence de la dérive (taille et position)

Oscillation de dérapage :

Pulsation propre non amortie $\omega_n (rad/s)$

$$\omega_n \approx \sqrt{n_\beta} = V\sqrt{\frac{\rho\,\ell\,S}{2\,C}}\sqrt{Cn_\beta}$$

Amortissement réduit ξ

$$\xi = -\sqrt{\frac{\rho\,S\,C}{8\,\ell}}\frac{1}{\sqrt{Cn_\beta}}\left(\frac{\ell^2}{C}Cn_r + \frac{Cy_\beta}{m}\right)$$

Pulsation propre non amortie $\omega_n = 2\ rad/s$ (T = 3 s)

L'amortissement réduit $\xi = 0.1$

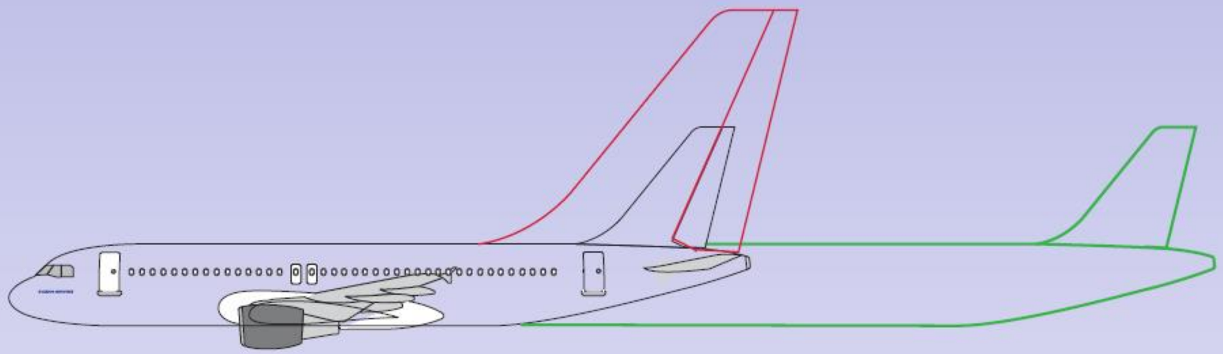
La norme demande :

ω_n > 1 rad/s et ξ > 0.1

Risque de pompage piloté

Nécessité d'un "stabilisateur" de lacet $\delta n = k.r$

Influence de la dérive (taille et position)



Pour doubler l'amortissement réduit,
c'est-à-dire passer de $\xi = 0.1$ à $\xi = 0.2$, il faudrait :

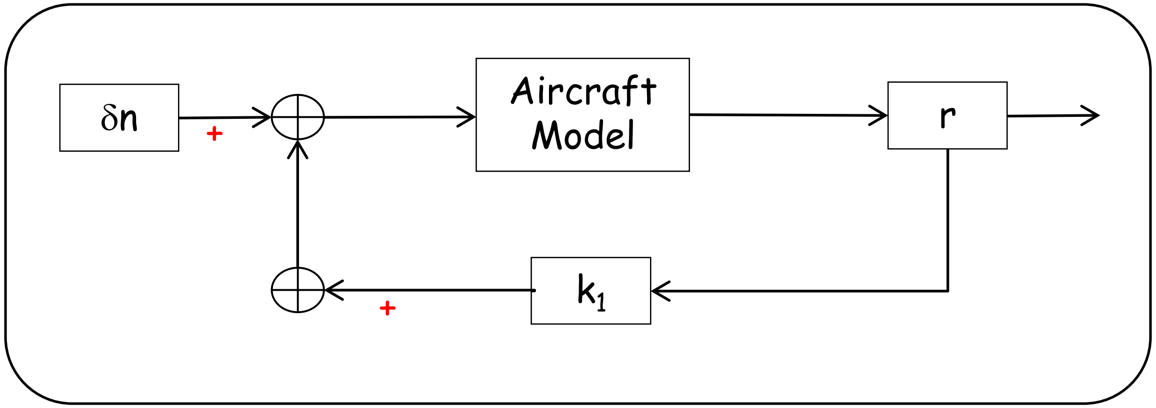
1. soit multiplier la surface dérive par quatre,
2. soit multiplier la distance entre le centre de gravité et la dérive par deux.

Donc il n'est pas possible d'obtenir de bons résultats sur ξ
avec la géométrie de l'avion

Nécessité d'un "stabilisateur" de lacet

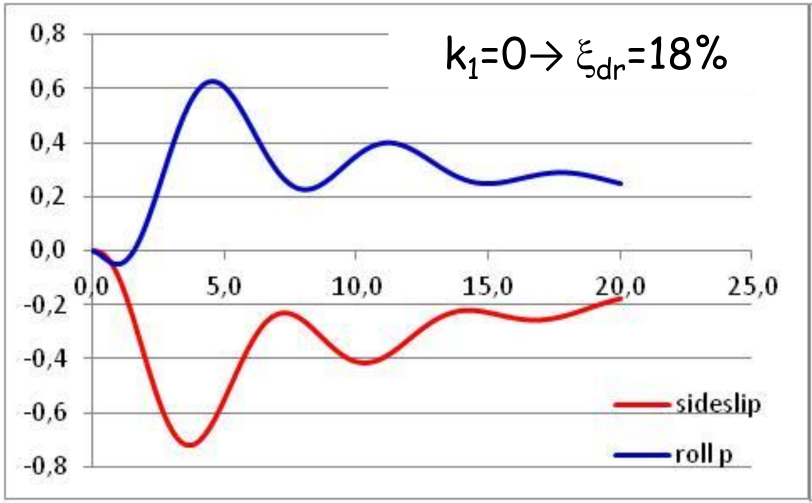
Roulis hollandais

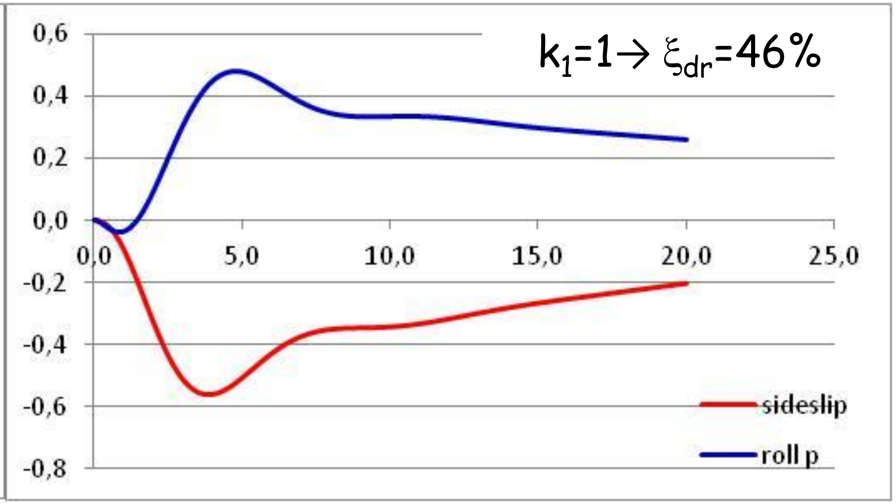
Stabilisateur de lacet : $k_1 > 0$



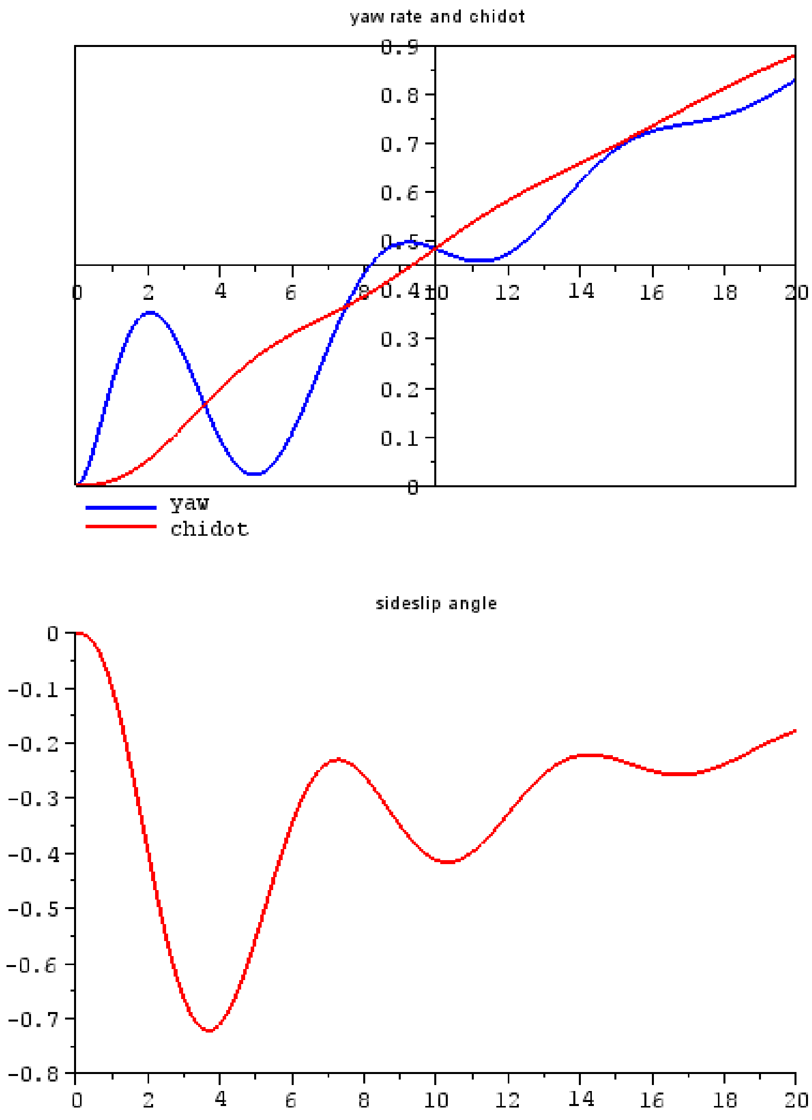
$$\dot{r} = n_\beta \cdot \delta\beta + n_r \cdot r + n_p \cdot p + n_{\delta n} \cdot \delta n$$

$$\dot{r} = n_\beta \cdot \delta\beta + (n_r + k_1 n_{\delta n}) \cdot r + n_p \cdot p + n_{\delta n} \cdot \delta n$$

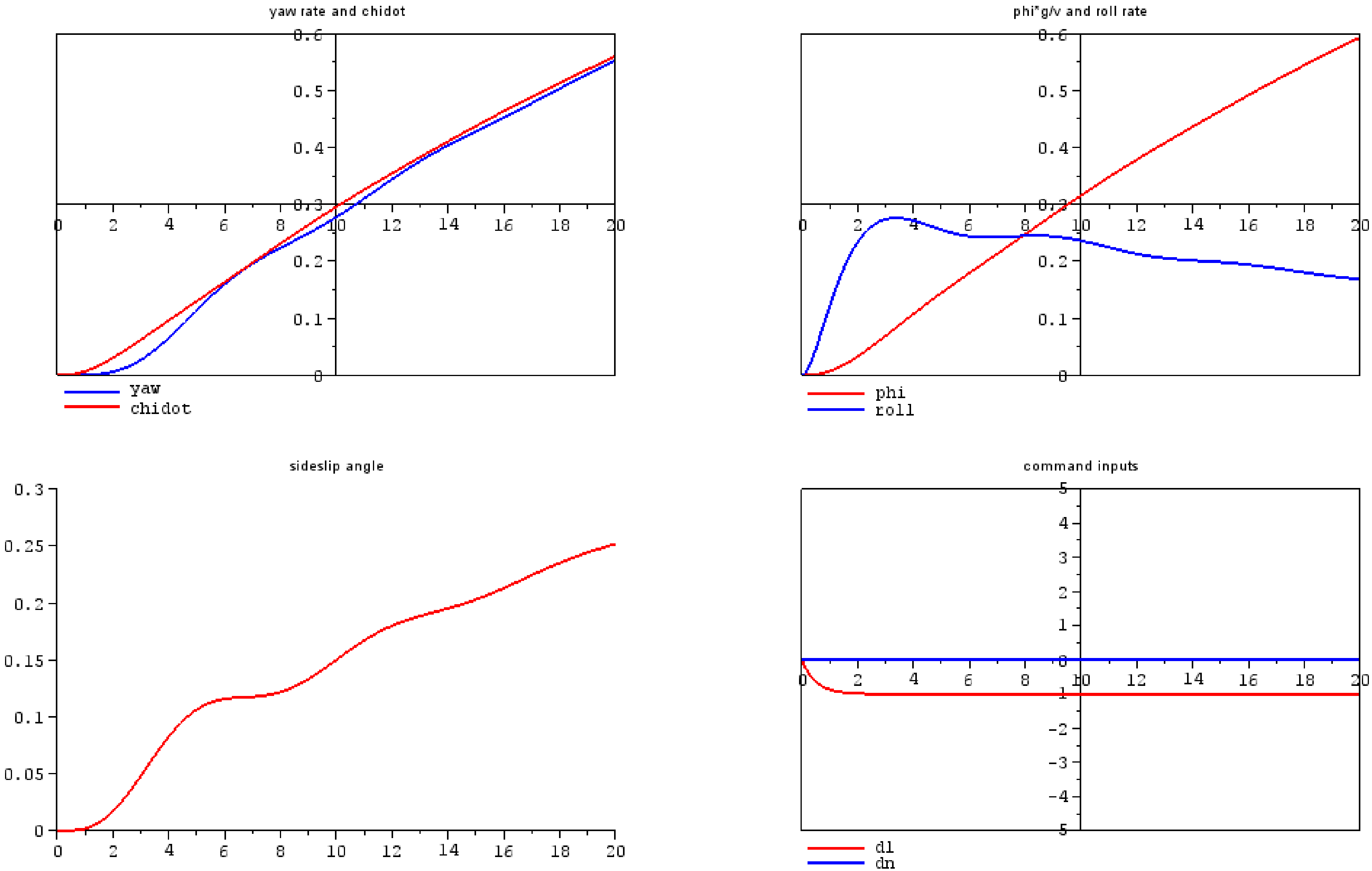




Roulis hollandais par commande en lacet



Roulis hollandais par commande en roulis



Mode spiral : approche usuelle

On suppose que β, r et p ont atteint leurs valeurs d'équilibre

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\dot{\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\beta & -1 & 0 & \frac{g}{V} \\ n_\beta & n_r & n_p & 0 \\ l_\beta & l_r & l_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^*\\r^*\\p^*\\\phi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_{\delta n} \\ l_{\delta l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta l\\\Delta\delta n\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_\beta & -1 & 0 & \frac{g}{V} \\ n_\beta & n_r & n_p & 0 \\ l_\beta & l_r & l_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = 0$$

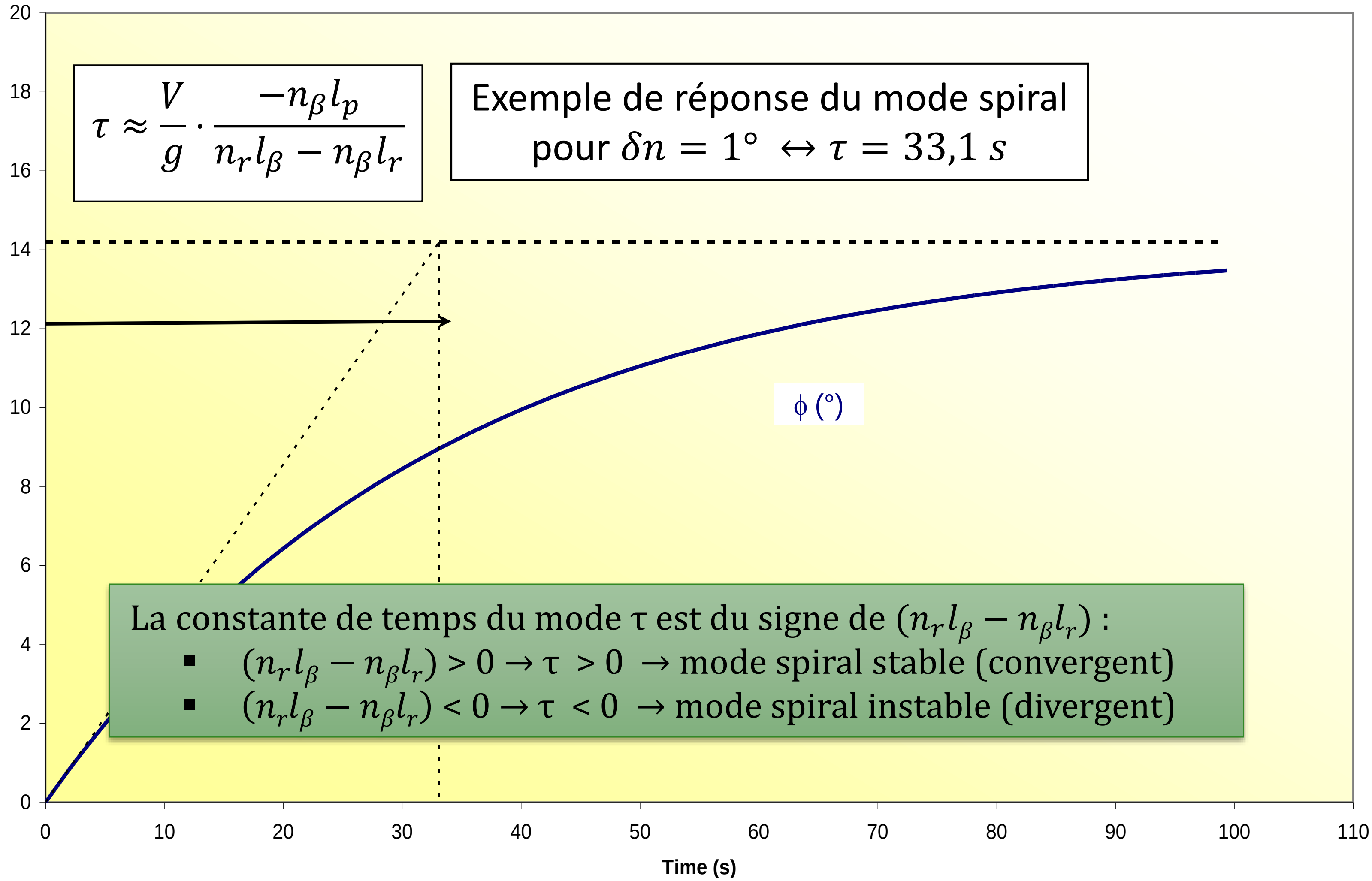
$$\frac{g}{V}\begin{vmatrix} n_\beta & n_r \\ l_\beta & l_r \end{vmatrix} + \left\{ -n_p \begin{vmatrix} y_\beta & -1 \\ l_\beta & l_r \end{vmatrix} + l_p \begin{vmatrix} y_\beta & -1 \\ n_\beta & n_r \end{vmatrix} \right\} \cdot s = 0$$

$$s = \frac{g}{V} \frac{\begin{vmatrix} n_\beta & n_r \\ l_\beta & l_r \end{vmatrix}}{n_p \begin{vmatrix} y_\beta & -1 \\ l_\beta & l_r \end{vmatrix} - l_p \begin{vmatrix} y_\beta & -1 \\ n_\beta & n_r \end{vmatrix}}$$

$$\dot{\phi} + \frac{\phi}{\tau} = 0 \leftrightarrow s + \frac{1}{\tau} = 0 \leftrightarrow \phi = \phi_0 e^{st} = \phi_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{V}{g}\frac{l_p(n_\beta + y_\beta n_r) - n_p(l_\beta + y_\beta l_r)}{n_\beta l_r - n_r l_\beta} \approx \frac{V}{g}\frac{-n_\beta l_p}{n_r l_\beta - n_\beta l_r}$$

Mode spiral



$$\tau \approx \frac{V}{g} \cdot \frac{-n_\beta l_p}{n_r l_\beta - n_\beta l_r}$$

Exemple de réponse du mode spiral
pour $\delta n = 1° \leftrightarrow \tau = 33{,}1\ s$

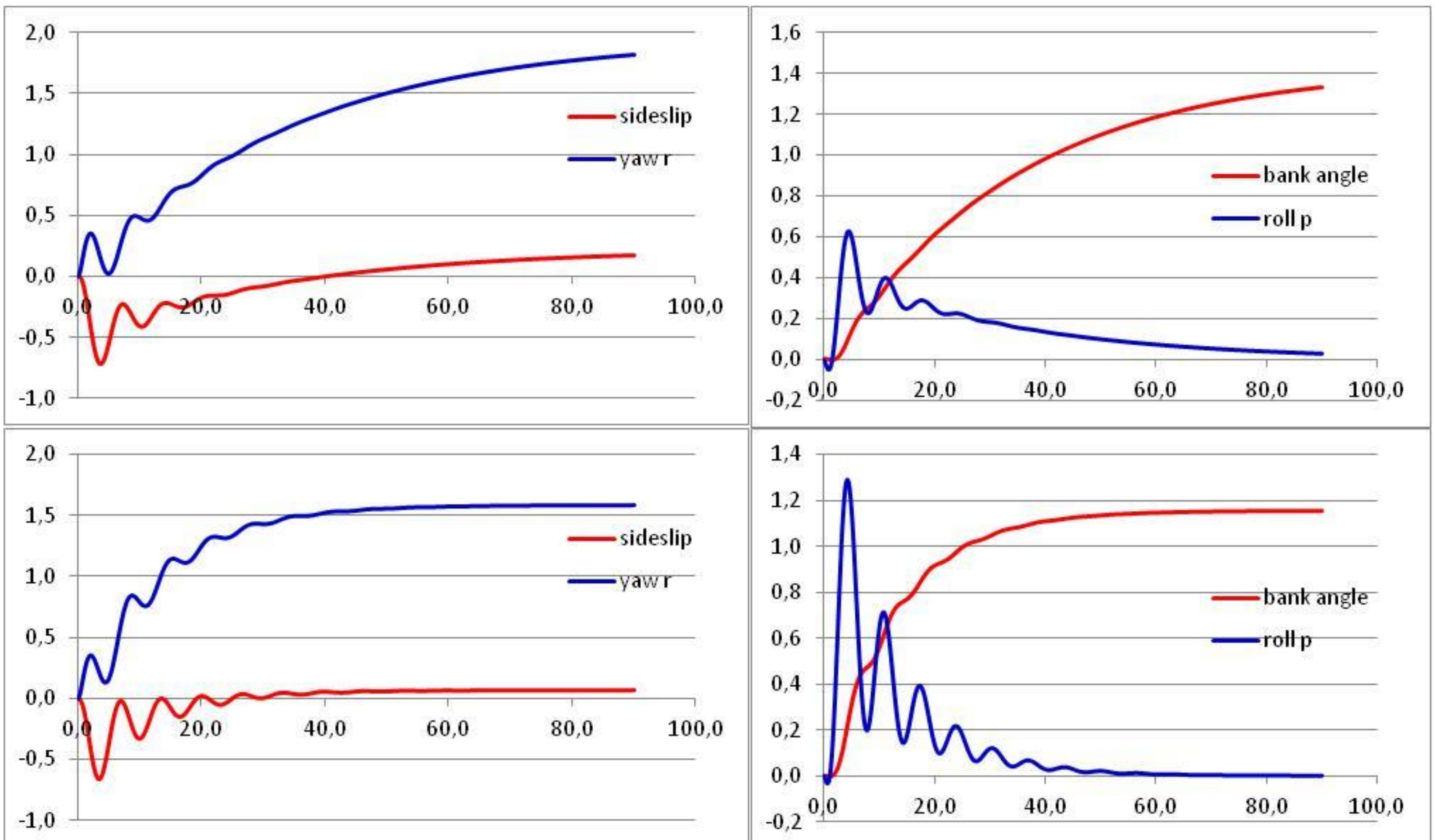
La constante de temps du mode τ est du signe de $(n_r l_\beta - n_\beta l_r)$:

- $(n_r l_\beta - n_\beta l_r) > 0 \rightarrow \tau > 0$ → mode spiral stable (convergent)
- $(n_r l_\beta - n_\beta l_r) < 0 \rightarrow \tau < 0$ → mode spiral instable (divergent)

Mode spiral / influence de l_β

Le mode spiral est un mode apériodique lent
Il peut être légèrement divergent en fonction du signe l_β

$l_\beta \downarrow$ → Spiral mode + stable
→ Dutch roll - stable



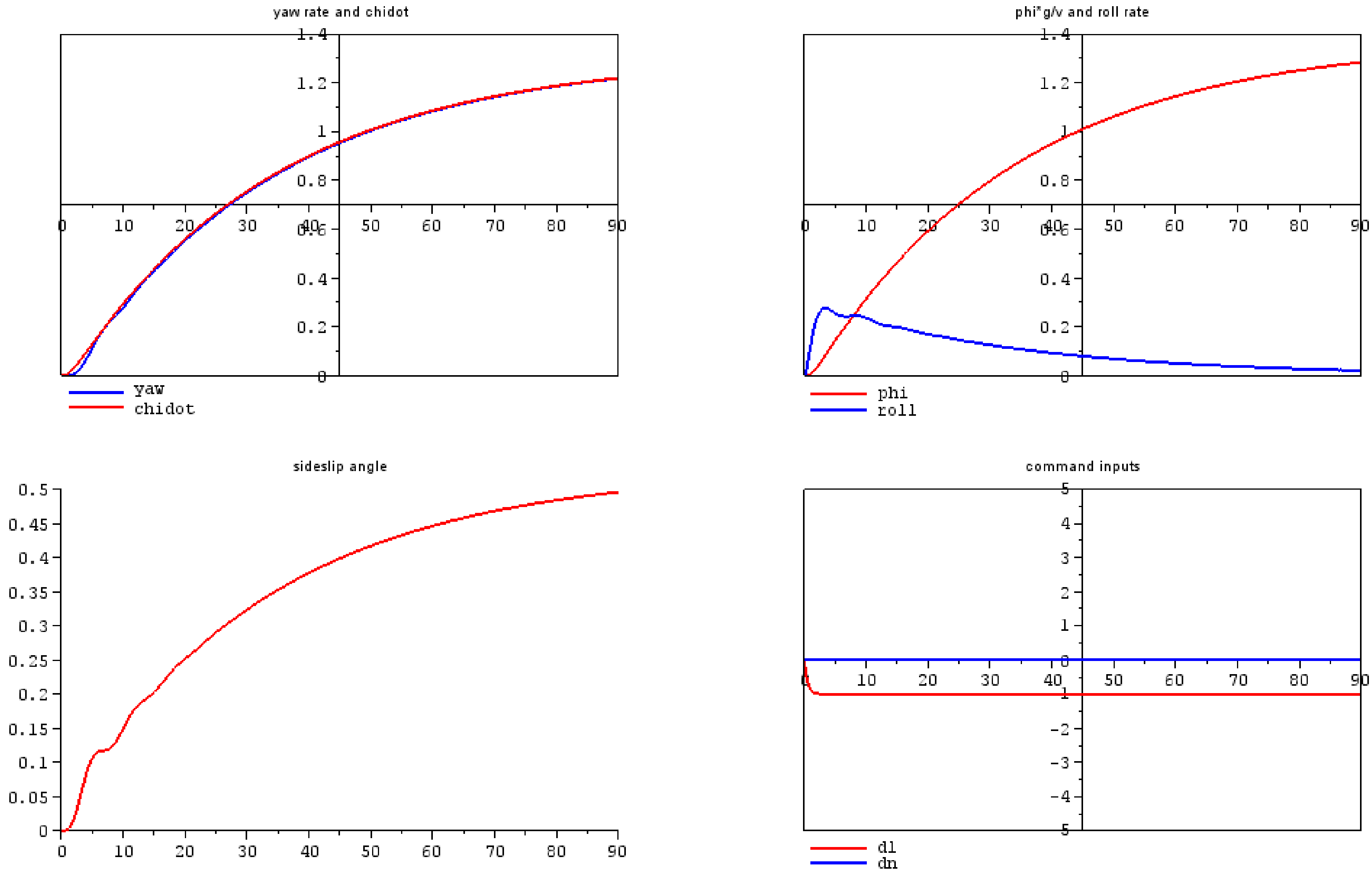
l_β

ξ_{dr}=18%
T_{sp}=33 s

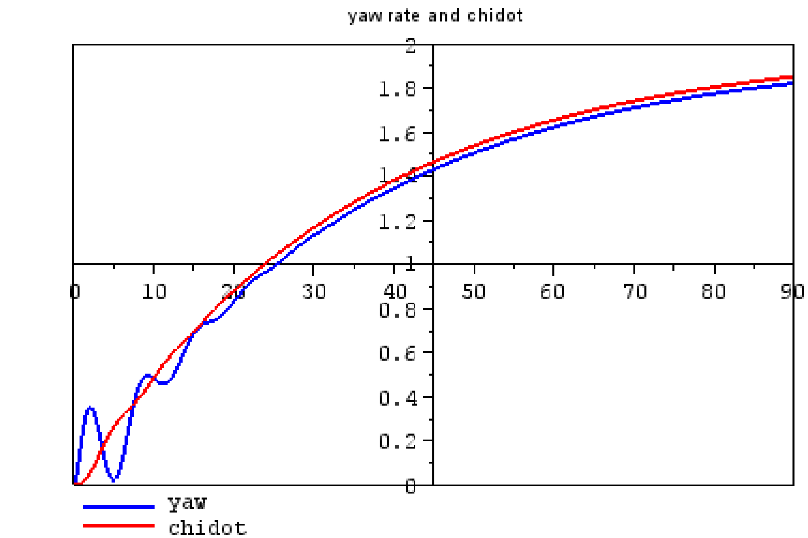
2. l_β

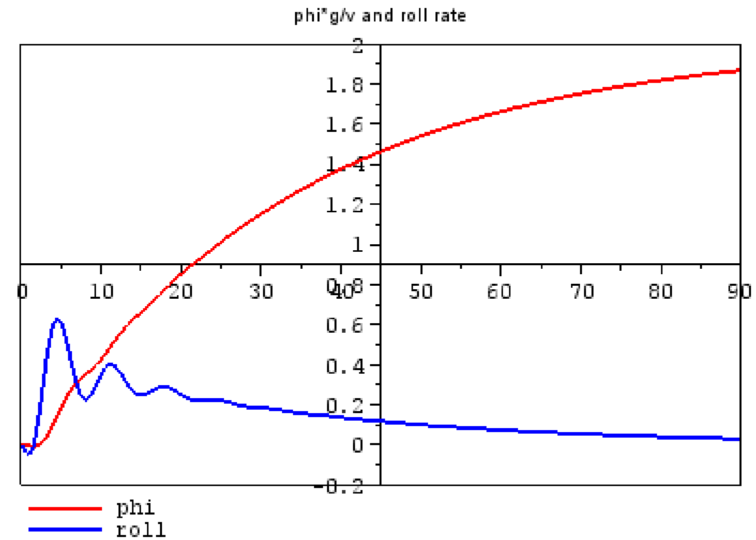
ξ_{dr}=11%
T_{sp}=12 s

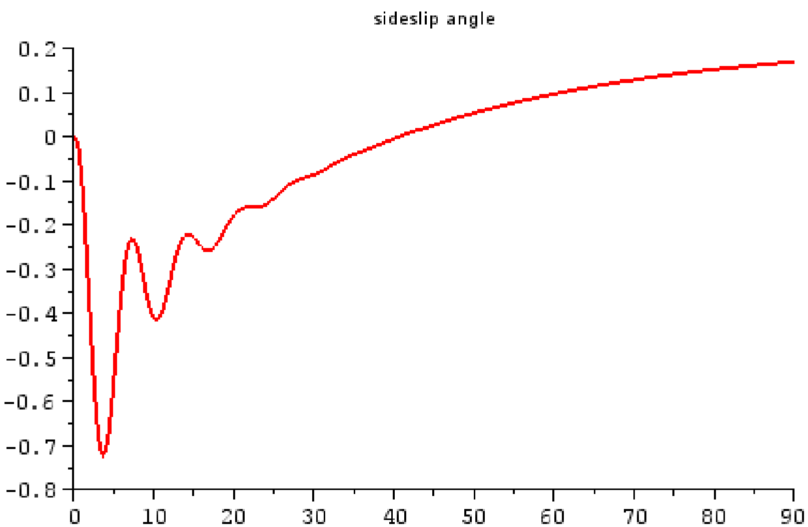
Mode spiral / commande en roulis (δl)

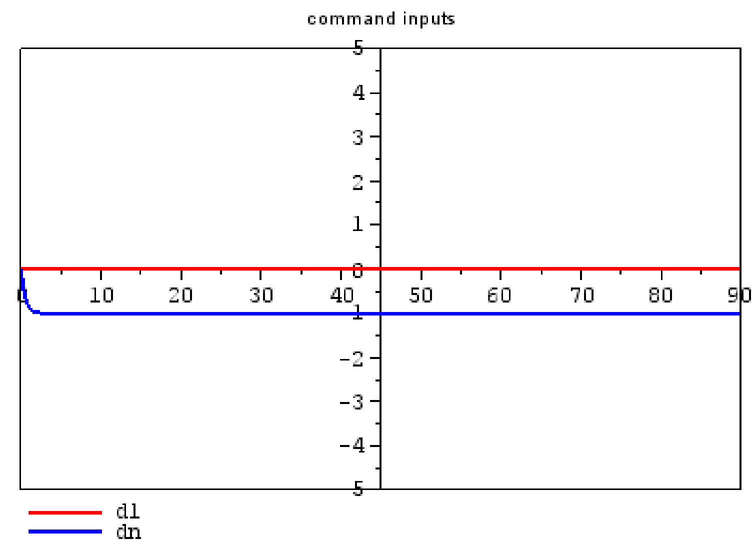


Mode spiral / commande en lacet (δn)









Réglage du mode spiral

La norme n'impose pas la stabilité spirale

c'est le seul mode avion qui est autorisé à être instable

Le temps pour doubler l'amplitude de l'inclinaison ϕ à partir de 20°, doit être supérieur à 12 secondes.

Le dièdre pour un Airbus est de l'ordre de 5°