

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

## Отчет о научно-исследовательской работе

Сенов Михаил Андреевич

РОБАСТНЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА SSA ДЛЯ АНАЛИЗА  
КОМПЛЕКСНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Н. Э. Голяндина

Санкт-Петербург

2022

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Алгоритм SSA и L-ранги</b> . . . . .	5
1.1. Описание алгоритма SSA (CSSA) . . . . .	5
1.1.1. Вложение . . . . .	5
1.1.2. Сингулярное разложение . . . . .	5
1.1.3. Группировка . . . . .	6
1.1.4. Диагональное усреднение . . . . .	6
1.2. L-ранги гармоник . . . . .	6
<b>Глава 2. Робастные варианты CSSA.</b> . . . . .	8
2.1. Проекция по норме $\mathbb{L}_1$ . . . . .	9
2.2. Проекция по взвешенной норме $\mathbb{L}_2$ с итеративным обновлением весов . . . . .	10
2.3. Модификация метода с итеративным обновлением весов . . . . .	13
2.4. Примеры работы алгоритмов . . . . .	15
2.4.1. Постоянная амплитуда и шум постоянной дисперсии . . . . .	15
2.4.2. Растущая амплитуда и шум непостоянной дисперсии . . . . .	18
2.4.3. Сравнение вещественного и комплексного подхода . . . . .	21
<b>Глава 3. Ошибка восстановления</b> . . . . .	22
3.1. Применение теории возмущений к SSA и CSSA . . . . .	23
3.1.1. Сравнение CSSA и SSA в случае совпадающих пространств сигналов . . . . .	23
3.1.2. Случай двух зашумленных синусоид . . . . .	25
3.1.3. Случай константных сигналов с выбросом . . . . .	27
3.2. Численное сравнение первого порядка ошибки и полной ошибки оценивания сигнала . . . . .	31
3.2.1. Случай зашумленных гармоник . . . . .	31
3.2.2. Случай константных сигналов с выбросом . . . . .	32
<b>Заключение</b> . . . . .	34

Список литературы . . . . .	35
-----------------------------	----

## Введение

Временным рядом называется набор значений некоторой функции от времени, собранных в разные моменты времени.

Предположим, что временной ряд является суммой нескольких временных рядов, к примеру, тренда (медленно меняющейся составляющей), сезонной составляющей и шума. Для работы с таким рядом полезно выделить эти составляющие, поскольку работать с ними по отдельности может быть проще чем с исходным рядом, сделать это позволяет метод «Гусеница»-SSA (в дальнейшем просто SSA).

При подобном анализе возникает следующее затруднение. В данных часто возникают выделяющиеся ошибки, значительно большие, чем размер шума. Эти ошибки называются выбросами. Соответственно, возникает задача построения изначально устойчивых к выбросам модификаций SSA.

Решению данной задачи была посвящена работа [1]. Результаты были получены для вещественнозначных рядов. В реальности данные с многих приборов снимаются изначально в комплексном виде и, поэтому, задача анализа комплекснозначных временных рядов так же важна. Поэтому, целью данной работы является рассмотрение возможности переноса полученных ранее результатов на комплексный случай и их обобщение в случае неудачи.

В случае комплексного ряда возникает два способа решения задачи, применение комплексных методов или применение вещественных методов отдельно к вещественной и мнимой части. Исходя из этого, в работе проведено теоретическое сравнение CSSA и SSA, примененного отдельно к вещественной и мнимой части, на основе первого порядка ошибки оценки сигнала, где первый порядок рассматривается по величине возмущения.

В данной работе использовался подход к аналитическому вычислению ошибки восстановления и её дисперсии, описанный в работах [2], [3]. Для константного сигнала получен явный вид первого порядка ошибки его оценки в случае наличия в ряде выброса, на основе данного подхода.

Было проведено численной сравнение первого порядка ошибки с полной ошибкой восстановления, с целью показания осмысленности применения результатов для первого порядка к полной ошибке.

## Глава 1

### Алгоритм SSA и L-ранги

В этом разделе рассмотрим базовый алгоритм SSA, приведённый в [4]. Помимо этого, рассмотрим понятие  $L$ -ранга, применительно к случаю гармонических рядов.

#### 1.1. Описание алгоритма SSA (CSSA)

Рассмотрим ненулевой ряд  $\mathbf{X}_N = (x_1, \dots, x_N)$ , где  $N > 2$ . Базовый алгоритм SSA выполняет разложение исходного ряда в сумму из нескольких новых рядов и осуществляется в четыре этапа. Приведённое ниже описание так же соответствует CSSA, являющегося комплексным обобщением алгоритма SSA.

##### 1.1.1. Вложение

Первым этапом алгоритма является построение траекторной матрицы. Пусть  $L$  — некоторое целое число (*длина окна*),  $1 < L < N$

$L$ -траекторная матрица — это матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}, K = N - L + 1.$$

Часто данную матрицу называют просто траекторной матрицей ряда.

##### 1.1.2. Сингулярное разложение

Вторым этапом является сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы ряда, оно может быть записано как:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d$$

где  $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ ,  $\lambda_i$  —  $i$ -ое собственное число по убыванию матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ ,  $U_i$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , соответствующий  $\lambda_i$ ,  $V_i$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ , соответствующий  $\lambda_i$ ,  $d$  — ранг матрицы  $\mathbf{X}$ .

### 1.1.3. Группировка

Третьим этапом является объединение в группы полученных матриц  $\mathbf{X}_i$ .

Матрица, соответствующая группе  $I$ :

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_r}.$$

И результат группировки:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_l}.$$

### 1.1.4. Диагональное усреднение

Последним этапом является перевод каждой матрицы, соответствующей группе, в новый ряд длины  $N$ .

Пусть  $\mathbf{Y}$  — некоторая матрица  $L \times K$  с элементами  $y_{ij}$ . Положим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$ ,  $N = L + K - 1$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , если  $L < K$ , и  $y_{ij}^* = y_{ji}$  иначе.

Диагональное усреднение переводит матрицу  $\mathbf{Y}$  в ряд  $(y_0, \dots, y_{N-1})$  по формуле:

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } 0 \leq i \leq L^* - 1 \\ \frac{1}{L^*} \sum_{i=1}^{L^*} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq i \leq K^* \\ \frac{1}{N-k} \sum_{i=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } K^* \leq i \leq N-1 \end{cases}$$

Таким образом, мы разложили исходный ряд в сумму  $l$  новых рядов:

$$\mathbf{X}_N = \sum_{i=1}^l \mathbf{X}_{N_i}.$$

## 1.2. L-ранги гармоник

**Определение.**  $L$ -рангом ряда называется ранг его  $L$ -траекторной матрицы. Обозначим  $L$ -ранг ряда  $X$  как  $\text{rk}_L X$ .

Рассмотрим ряды  $\mathbf{S}^{(1)} = (s_1^{(1)}, \dots, s_N^{(1)})$  и  $\mathbf{S}^{(2)} = (s_1^{(2)}, \dots, s_N^{(2)})$ , вида

$$s_l^{(1)} = A \cos(2\pi\omega l + \phi_1), \quad s_l^{(2)} = B \cos(2\pi\omega l + \phi_2), \quad (1.1)$$

где  $0 < \omega \leq 0.5$  и  $0 \leq \phi_i < 2\pi$ .

**Утверждение 1** ([5]). Пусть  $S = S^{(1)} + iS^{(2)}$ . Тогда

1.  $\text{rk}_L S^{(i)} = 2$ ,  $\text{rk}_L S = 1$ , если  $A = B$  и  $|\phi_1 - \phi_2| = \pi/2 \pmod{\pi}$ , в остальных случаях  $\text{rk}_L S = 2$ .

2. Если  $\text{rk}_L = 2$ , то пространство столбцов траекторной матрицы натянуто на вектора

$$(1, \cos(2\pi\omega), \dots, \cos(2\pi(L-1)\omega))^T, (0, \sin(2\pi\omega), \dots, \sin(2\pi(L-1)\omega))^T.$$

Пространство строк траекторной матрицы натянуто на вектора

$$(1, \cos(2\pi\omega), \dots, \cos(2\pi(K-1)\omega))^T, (0, \sin(2\pi\omega), \dots, \sin(2\pi(K-1)\omega))^T.$$

3. Если  $\text{rk}_L S = 1$ , то пространство столбцов траекторной матрицы  $S$  и пространство строк натянуты соответственно на вектора

$$(1, e^{i2\pi\omega}, \dots, e^{i2\pi(L-1)\omega})^T \text{ и } (1, e^{i2\pi\omega}, \dots, e^{i2\pi(K-1)\omega})^T.$$

**Замечание 1.** В случае  $\omega = 0$   $\text{rk}_L = 1$ , пространство столбцов траекторной матрицы и пространство строк натянуты на вектора

$$(1, \dots, 1)^T \text{ и } (1, \dots, 1)^T.$$

В дальнейшем  $L$ -ранг будет рассматриваться в задаче выделения сигнала и будет выполнять роль одного из параметров алгоритма SSA (CSSA).

## Глава 2

## Робастные варианты CSSA.

В данном разделе мы рассмотрим устойчивые к выбросам (робастные) модификации CSSA.

В терминах, рассмотренных ниже, CSSA и SSA эквивалентны, поэтому, для простоты, будем рассматривать базовый метод, SSA. Рассматриваем вариант метода SSA для выделения сигнала, когда группировка заключается в выборе первых  $r$  компонент. Для стандартного метода SSA это эквивалентно проекции по норме Фробениуса траекторной матрицы ряда на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$ .

Пусть имеется временной ряд  $\mathbf{X}_N = (x_1, \dots, x_N)$ .

$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$  — пространство ганкелевых матриц  $L \times K$ ,

$\mathcal{M}_r$  — пространство матриц ранга, не превосходящего  $r$ , размера  $L \times K$ .

Оператор вложения  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{H}} : \mathcal{T}(\mathbf{X}_N) = \mathbf{X}$ ,

$\Pi_r : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_r$  — проектор на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$ , по некоторой норме в пространстве матриц,

$\Pi_{\mathcal{H}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$  — проектор на пространство ганкелевых матриц по некоторой норме в пространстве матриц.

В результате применения данных операторов получаем оценку сигнала:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{T}^{-1} \Pi_{\mathcal{H}} \Pi_r \mathcal{T}(\mathbf{X}_N).$$

В случае, когда проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_{\mathcal{H}}$  берутся по норме в пространстве  $\mathbb{L}_2$ , оценка сигнала соответствует алгоритму SSA, для случая, когда восстановление производится по одной группе, состоящей из первых  $r$  компонент.

Существует два известных подхода к построению устойчивых к выбросам модификаций SSA:

- Проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_{\mathcal{H}}$  строятся по норме в пространстве  $\mathbb{L}_1$ ,
- Проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_{\mathcal{H}}$  строятся по взвешенной норме в пространстве  $\mathbb{L}_2$ .

В работе [1] были предложены реализации обоих подходов, приведём адаптированные на комплексный случай алгоритмы ниже.



## 2.1. Проекция по норме $\mathbb{L}_1$

Пусть  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда. Необходимо решить задачу

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H\|_1 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}, \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}.$$

---

**Алгоритм 1:** Последовательный метод построения  $\mathbb{L}_1$ -проектора на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала; параметры критерия останова:  $\varepsilon = 10^{-4}$ , максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — проекция траекторной матрицы на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

Инициализация  $\mathbf{V}(0) \in \mathbb{C}^{L \times r}$ , нормировка столбцов  $\mathbf{V}(0)$ ;

$t := 0$ ;

**до тех пор, пока**  $\max_{\substack{i=1, \dots, L \\ j=1, \dots, r}} |u_{ij}(t) - u_{ij}(t-1)| > \varepsilon$  **и**  $t < N_{iter}$  **выполнять**

$t := t + 1$ ;

$\mathbf{U}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1$ ;

$\mathbf{V}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}(t)\mathbf{V}^H\|_1$ ;

Нормировка столбцов  $\mathbf{V}(t)$ ;

**конец**

$\mathbf{U} := \mathbf{U}(t)$ ;  $\mathbf{V} := \mathbf{V}(t)$ ;

---

В приведённой реализации  $\mathbf{V}(0)$  инициализируется при помощи сингулярного разложения, но, согласно [6], инициализация может быть произведена при помощи любой матрицы требуемого размера с сохранением сходимости.

Рассмотрим подробнее решение задачи

$$\mathbf{U}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{K \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1. \quad (2.1)$$

Целевую функцию можно представить в виде

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1 = \sum_{i=1}^L \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{V}(t-1)\mathbf{u}_i^H\|_1,$$

где  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^K$  — строки  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^r$  — строки  $\mathbf{U}$ . Согласно [6], задача (2.1) может быть

разбита на  $L$  независимых подзадач

$$\mathbf{u}_i(t) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{V}(t-1)\mathbf{u}^H\|_1. \quad (2.2)$$

Подзадача (2.3) в свою очередь может быть разбита на  $r$  подзадач

$$\mathbf{u}_{ic}(t) = \underset{u_c}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{v}_c(t-1)\mathbf{u}_c^H\|_1. \quad (2.3)$$

Решение каждой из которых является взвешенной медианой вектора  $\frac{\mathbf{y}_i}{\mathbf{v}_c(t-1)}$  с вектором весов  $|\mathbf{v}_c(t-1)|$ .

## 2.2. Проекция по взвешенной норме $\mathbb{L}_2$ с итеративным обновлением весов

Пусть  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда. Необходимо решить задачу

$$\|\mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}, \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}.$$

Для начала рассмотрим алгоритм с фиксированной матрицей весов.

---

**Алгоритм 2:** Алгоритм решения задачи взвешенной аппроксимации для фиксированной матрицы весов  $\mathbf{W}$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг

сигнала,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L \times K}$  — матрица весов;

параметры критерия остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,

максимальное число итераций  $N_\alpha = 5$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — решение задачи взвешенной

аппроксимации при фиксированной матрице весов

$\mathbf{W}$

1.  $t := 0$ ;

2. **до тех пор, пока**  $\|\mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 > \varepsilon$  **и**  $t < N_\alpha$  **выполнять**

а. Вычисление матрицы  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  с помощью решения задачи

$$(y_i^H - \mathbf{V}u_i^H)^H \mathbf{W}_i (y_i^H - \mathbf{V}u_i^H) \rightarrow \min_{u_i}, \quad i = 1, \dots, L, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{W}_i = \text{diag}(w_i) \in \mathbb{R}^{K \times K}$  — матрица, составленная из  $i$ -ой строки  $\mathbf{W}$ ;

б. Вычисление матрицы  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}$  с помощью решения задачи

$$(y_j - \mathbf{U}v_j^H)^H \mathbf{W}^j (y_j - \mathbf{U}v_j^H) \rightarrow \min_{v_j}, \quad j = 1, \dots, K, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{W}^j = \text{diag}(W_j) \in \mathbb{R}^{L \times L}$  — матрица, составленная из  $j$ -го столбца  $\mathbf{W}$ ;

в.  $t := t + 1$ .

**конец**

---

Задачи (2.4), (2.5) решаются при помощи QR-разложения матриц  $\mathbf{V}^H \mathbf{W}_i \mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}^H \mathbf{W}^j \mathbf{U}$  соответственно, алгоритм решения представлен в [7].

У авторов этого алгоритма в [8] допущена ошибка в его описании. Дело в том, что в задаче 2.4 решение линейного уравнения ищется по эрмитово-сопряжённой системе, а не изначальной, а в задаче 2.5 находится сразу  $\mathbf{V}^H$ , а не  $\mathbf{V}$ . Эта ошибка была несущественной в случае вещественной реализации в [1], так как вещественный аналог эрмитового сопряжения — транспонирование, не меняет элементы, но оказалась существенной в комплексном случае.

Теперь рассмотрим алгоритм с итеративным обновлением весов.

---

**Алгоритм 3:** Метод с итеративным обновлением весов для нахождения проекции на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала; параметр весовой функции  $\alpha = 4.685$ ;  
параметры критерия остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  
максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — проекция траекторной матрицы на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

Инициализация  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  и  $\mathbf{V}(0) \in \mathbb{C}^{K \times r}$  (например, с помощью сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{Y}$ );

$t := 0$ ;

**до тех пор, пока  $\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 > \varepsilon$  и  $t < N_{iter}$  выполнять**

Вычисление матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n,p} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H$ ;

Обновление матрицы  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ ;

Вычисление матрицы весов  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \{w(\frac{r_{ij}}{\sigma_{ij}})\}_{i,j=1}^{L,K}$ , используя

$$w(x) = \begin{cases} (1 - (\frac{|x|}{\alpha})^2)^2 & |x| \leq \alpha \\ 0 & |x| > \alpha \end{cases};$$

Решение задачи взвешенной аппроксимации (обновление матриц  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ )

$$\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}},$$

при помощи алгоритма 2;

**конец**

---

Данный алгоритм был предложен в [8], авторы предложили взять  $\alpha = 4.685$ ,  $N_\alpha = 5$  и  $N_{iter} = 10$ , ссылаясь на численные эксперименты.

Параметр сигма предлагается взять равным  $\sigma_{ij} = \sigma = 1.4826 \text{ med } |\mathbf{X}R - \text{med } |\mathbf{X}R||$ , где  $\mathbf{X}R$  — это вектор, составленный из всех элементов матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ , то есть

$$\mathbf{X}R = (r_{11}, \dots, r_{1K}; r_{21}, \dots, r_{2K}; \dots; r_{L1}, \dots, r_{LK}).$$

Данная оценка предлагается авторами ввиду её робастности.

## 2.3. Модификация метода с итеративным обновлением весов

У представленного выше алгоритма есть одна важная проблема, а именно, выбор параметра  $\sigma_{ij}$  не зависящим от  $i$  и  $j$ . В случае не стационарных рядов выявление выбросов может происходить неверно. Например, если шум растёт к концу ряда, то выбросы в начале ряда могут получить больший вес, чем не выбросы в конце ряда. В [1] была приведена модификация алгоритма, призванная решить эту проблему. Здесь же мы рассмотрим её комплексную адаптацию.

Ключевая задача параметра  $\sigma_{ij}$  — приписывание определённого веса определённому элементу ряда, чем элемент больше похож на выброс, тем больше сигма и наоборот. Ввиду такой интерпретации логично рассматривать сигмы как ряд, идущий дополнением к данному  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ , а после, ганкелизацией привести этот ряд к матричному виду  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ . Сам же ряд  $\sigma$  автор [1] предлагает взять равным тренду (математическому ожиданию) ряда из модулей остатков. Это предложение справедливо и для комплексного случая, так как в комплексном случае выброс характеризуется величиной модуля.

Теперь рассмотрим сам алгоритм.

---

**Алгоритм 4:** Модификация метода с итеративным обновлением весов для нахождения проекции на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала;  
 параметр весовой функции  $\alpha = 4.685$ ; параметры критерия  
 остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ , максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$   
**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$  — проекция траекторной матрицы на множество  
 матриц ранга, не превосходящего  $r$

1. Инициализация  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  и  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}$  (например, с помощью сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{Y}$ );
2.  $t := 0$ ;
3. **повторять**

- a. Вычисление матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n,p} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H$ ;
- b. Ганкелизация матрицы  $\mathbf{R}$  и получение ряда длины  $N$  из остатков:  
 $\mathbf{R} = \mathcal{T}^{-1}\Pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{R}) = (r_1, \dots, r_N)$ ;
- c. Пусть  $\mathbf{R}_+ = (|r_1|, \dots, |r_N|)$  — ряд из модулей остатков. Вычисление  
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  как оценки мат. ожидания  $\mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{R}_+)$  некоторым методом;
- d. Получение матрицы  $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \mathcal{T}(\boldsymbol{\sigma})$ ;
- e. Вычисление матрицы весов  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \{w(\frac{r_{ij}}{\sigma_{ij}})\}_{i,j=1}^{L,K}$ , используя

$$w(x) = \begin{cases} (1 - (\frac{|x|}{\alpha})^2)^2, & |x| \leq \alpha \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases}$$

- f. Решение задачи взвешенной аппроксимации (обновление матриц  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ )

$$\left\| \mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H) \right\|_F^2 \rightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}$$

- g.  $t := t + 1$ .

**до тех пор, пока**  $\left\| \mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H) \right\|_F^2 > \varepsilon$  и  $t < N_{IRLS}$ ;

---

Преимуществом данного алгоритма, является то, что пользователь сам может выбрать, каким методом он хочет вычислять матожидание ряда. В приведённой реализации представлены три метода: локальная регрессия loess, скользящая медиана и взвешенная локальная регрессия lowess.

## 2.4. Примеры работы алгоритмов

В данном разделе мы приведём несколько примеров комплексных временных рядов и сравним результаты работы методов.

Сравнение будет проводиться по величине среднеквадратичной ошибки, согласованной с  $\mathbb{L}_2$ , которая вычисляется по формуле

$$\text{MSE} = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - \hat{s}_i)^2 \right), \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{X}S = (s_1, \dots, s_N)^T$  — сигнал,  $\mathbf{X}\hat{S} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_N)^T$  — его оценка. Будем вычислять

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}.$$

Так же будем проверять значимость сравнения, для этого будем использовать гипотезу, что MSE для некоторых методов равны между собой.

$H_0 : \mathbb{E}(\xi_1 - \xi_2) = 0$ . Имеем две выборки  $X = (x_1, \dots, x_M)$  и  $Y = (y_1, \dots, y_M)$  объема  $M$ . Обозначим  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  — их выборочные средние,  $s_x^2$  и  $s_y^2$  — выборочные дисперсии,  $\hat{\rho}$  — коэффициент корреляции. Статистика критерия

$$t = \frac{\sqrt{M}(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 - 2s_x s_y \hat{\rho}}}$$

имеет асимптотически нормальное распределение.

Шум в примерах будет иметь стандартное комплексное нормальное распределение. Определим, что это значит.

**Определение.** *Комплексная случайная величина  $Z$  имеет стандартное комплексное нормальное распределение, если*

1.  $\text{Re}(Z)$  и  $\text{Im}(Z)$  независимы,
2.  $\text{Re}(Z), \text{Im}(Z) \sim N(0, 1/2)$ .

И обозначается  $Z \sim CN(0, 1)$ .

### 2.4.1. Постоянная амплитуда и шум постоянной дисперсии

Рассмотрим ряд с постоянной амплитудой и шумом постоянной дисперсии. Длину ряда возьмём  $N = 240$

$$x_n = e^{i2n\pi/30} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim CN(0, 1).$$

Рассмотрим результаты работы методов для такого ряда (2.1). В таблице 2.2 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Ранг ряда равен 1.

Таблица 2.1. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда без выбросов.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	<b>0.1016</b>	0.125	0.1017	0.103	0.105	0.104

Таблица 2.2. p-value для сравнения различных методов с наилучшим без выбросов.

Method	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
CSSA	1.5e-06	<b>0.91</b>	<b>0.69</b>	<b>0.24</b>	<b>0.43</b>

В случае отсутствия выбросов лучший результат показывают метод Complex SSA, но сравнение значимо только с методом проекции на  $\mathbb{L}_1$ .

Теперь добавим к ряду 5% выбросов с величиной выброса  $5x_i$ . Графики ряда представлены на Рис. 2.1, 2.2.

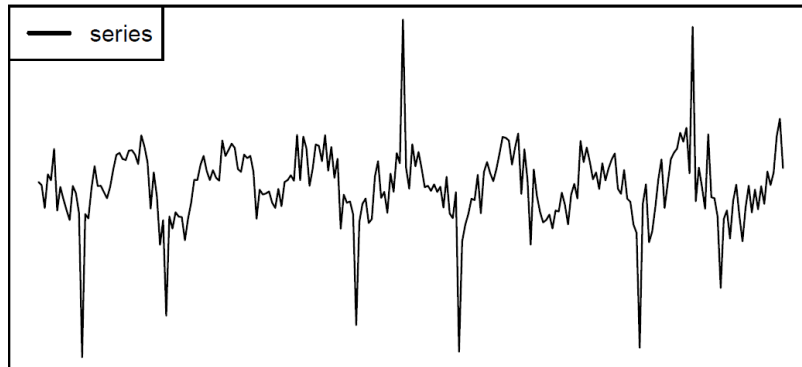


Рис. 2.1. График вещественной части ряда.



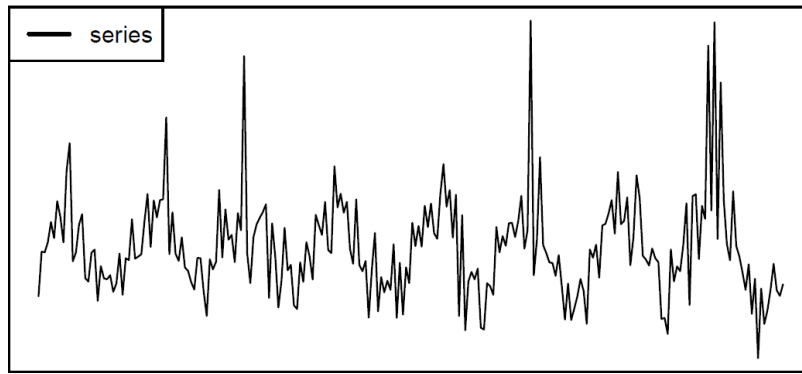


Рис. 2.2. График мнимой части ряда.

Графики результатов анализа представлены в Рис. 2.3, 2.4. В таблице 2.3 представлены сравнения ошибок для различных методов. В таблице 2.4 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Длина окна взята  $L = 120$ .

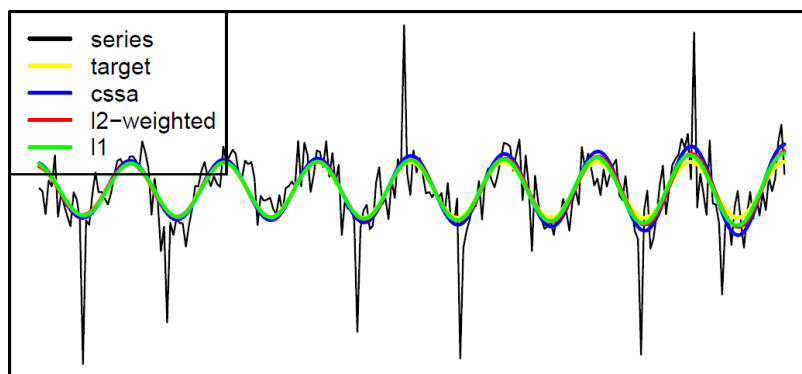


Рис. 2.3. Вещественная часть выделения тренда несколькими способами.

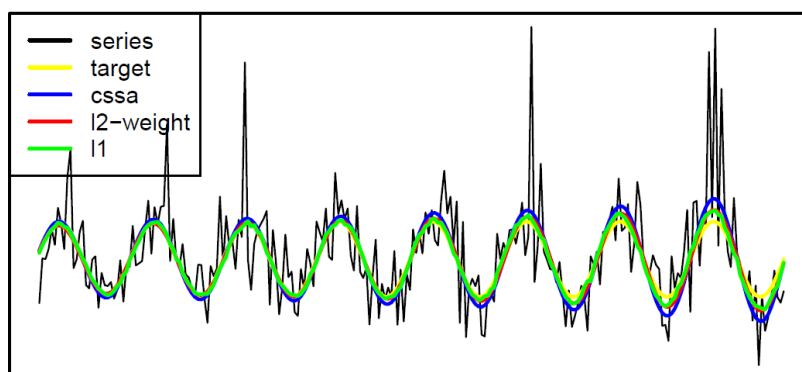


Рис. 2.4. Мнимая часть выделения тренда несколькими способами.

Таблица 2.3. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	0.285	0.147	0.158	<b>0.112</b>	0.114	0.114

Таблица 2.4. p-value для сравнения различных методов с наилучшим с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	median L2	lowess L2
loess L2	0	7.7e-13	4.1e-10	<b>0.134</b>	<b>0.262</b>

В случае наличия выбросов метод loess проекции на  $\mathbb{L}_2$  показал наилучший результат, за исключением того, что сравнения с другими вариациями модифицированной взвешенной проекции незначимы.

#### 2.4.2. Растущая амплитуда и шум непостоянной дисперсии

Рассмотрим ряд с растущей амплитудой и шумом непостоянной дисперсии. Длину ряда возьмём  $N = 240$

$$x_n = e^{4n/N} e^{i2n\pi/30} + \frac{1}{2} e^{4n/N} \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim CN(0, 1).$$

Рассмотрим результаты работы методов для такого ряда (2.5). В таблице 2.6 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Ранг ряда равен 1.

Таблица 2.5. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда без выбросов.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	<b>1.28</b>	1.52	1.90	1.36	1.43	1.37

Таблица 2.6. p-value для сравнения различных методов с наилучшим без выбросов.

Method	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
CSSA	0.005	0.0001	0.001	7.6e-5	0.0007

В случае отсутствия выбросов лучший результат показывает Complex SSA. Здесь же видно, что модифицированный метод взвешенной проекции справляется с не стационарным рядом куда лучше чем классический, к примеру, сравнивая классический и loess, сравнение является значимым с  $p\text{-value} = 0.0005$ .

Теперь добавим к ряду 5% выбросов с величиной выброса  $5x_i$ . Графики ряда представлены на Рис. 2.5, 2.6.

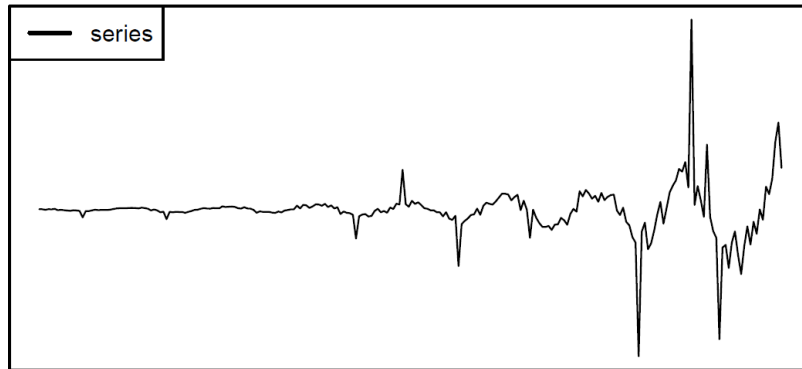


Рис. 2.5. График вещественной части ряда.

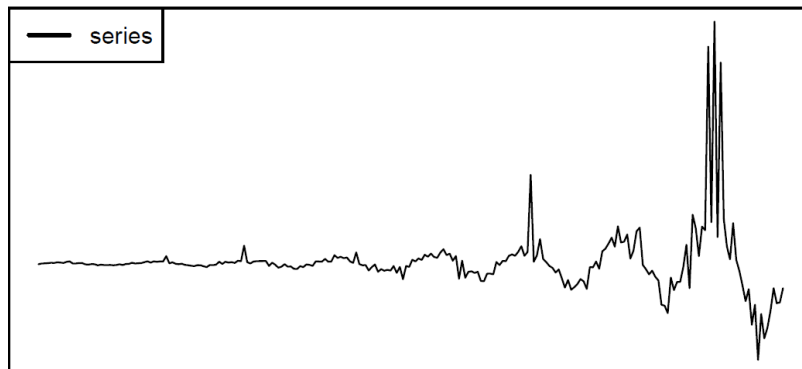


Рис. 2.6. График мнимой части ряда.

Графики результатов анализа представлены на Рис. 2.7, 2.8. В таблице 2.7 представлены сравнения ошибок для различных методов. В таблице 2.8 представлены  $p\text{-value}$  для сравнения методов с лучшим. Длина окна взята  $L = 120$ .

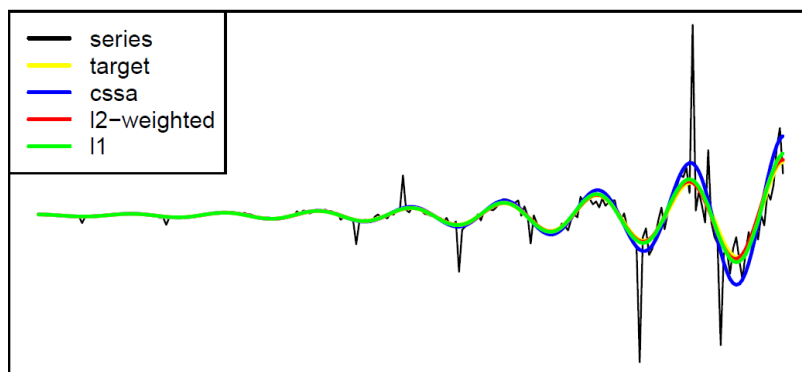


Рис. 2.7. Вещественная часть выделения тренда несколькими способами.

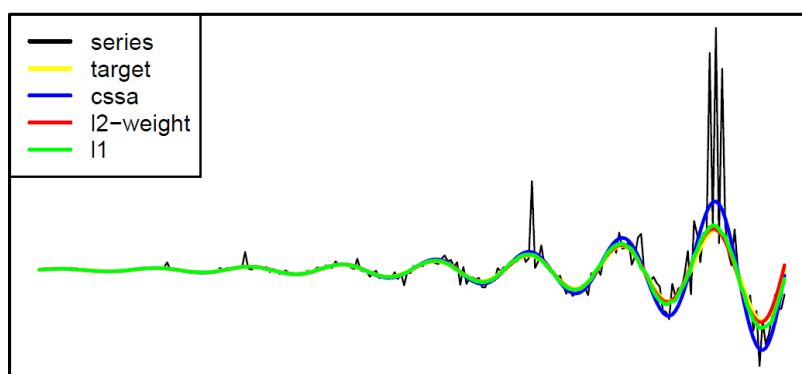


Рис. 2.8. Мнимая часть выделения тренда несколькими способами.

Таблица 2.7. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	6.14	1.78	1.66	<b>1.48</b>	1.50	1.49

Таблица 2.8. p-value для сравнения различных методов с наилучшим с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	median L2	lowess L2
loess L2	3.5e-16	0.005	<b>0.13</b>	<b>0.387</b>	<b>0.28</b>

В случае присутствия выбросов метод loess проекции на  $\mathbb{L}_2$  показывает себя наилучшим образом на данном примере, однако сравнения с взвешенным  $\mathbb{L}_2$ , median  $\mathbb{L}_2$  и lowess  $\mathbb{L}_2$  не являются значимыми.

### 2.4.3. Сравнение вещественного и комплексного подхода

В данной работе вещественные алгоритмы, представленные в [1], были обобщены на комплексный случай. Зная, что комплексное число раскладывается на две вещественные компоненты, вещественную и мнимую части, возможно использовать вещественные алгоритмы для приближения отдельно вещественной и мнимой частей ряда. Второй же подход — использовать комплексный алгоритм для всего ряда.

Сравним оба этих подхода на примере. Длину ряда возьмём  $N = 50$ ,  $L = 20$

$$x_n = \cos(2n\pi/30) + i \cos(2n\pi/30 + \pi/4) + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim CN(0, 0.01).$$

добавим к ряду 5% выбросов с величиной выброса  $5x_i$ ,

Результаты сравнения MSE приведены в таблице 2.9.

Таблица 2.9. MSE для комплексных и вещественных алгоритмов на 50 повторях.

Method	CSSA(SSA)	weighted L2	median L2	lowess L2	loess L2
X	0.155	0.0011	0.012	0.0013	0.0012
Re(X)	0.079	0.0005	0.006	0.0008	0.0007
Im(X)	0.073	0.0006	0.006	0.0009	0.0008

Из таблицы видно, что, с точки зрения MSE, для данного сигнала оба подхода эквивалентны (MSE для комплексного алгоритма равно суммарному MSE для двух применений вещественного алгоритма). Откуда возникает подобный эффект и для каких сигналов он наблюдается, рассмотрим в следующем разделе.

## Глава 3

### Ошибка восстановления

В работе были рассмотрены комплексные обобщения методов, приведённых в [1]. Комплексный временной ряд представляется через свою вещественную и мнимую части, к каждой из которых можно применить вещественный метод и, таким образом, получить оценку комплексного сигнала. Исходя из этого, возникает вопрос, насколько осмыслены комплексные обобщения методов? В данном разделе мы постараемся ответить на данный вопрос, с точки зрения ошибки восстановления, на примере сравнения CSSA с SSA.

Пусть наблюдаемый комплексный временной ряд имеет вид  $X = S + R$ . Для получения оценки сигнала будем использовать метод CSSA. Кроме применения CSSA ко всему ряду, будем также применять метод SSA отдельно к вещественной и мнимой части ряда  $X$ .

Для анализа ошибки оценивания сигнала используется теория возмущений [9], которая была применена для случая выделения сигнала методом SSA в ряде работ, см., например, [10].

Хотя теория возмущения Като дает вид полной ошибки, однако ее исследование представляется сложной задачей. Поэтому мы будем рассматривать только первый порядок ошибки в разложении ошибки по величине возмущения.

При этом проведем численное сравнение первого порядка ошибки и полной ошибки для выявления случаев, когда анализ первого порядка ошибки плохо описывает полную ошибку и поэтому его анализ не представляет интереса.

Даже для первого порядка ошибки получение его явного вида — довольно трудоемкая задача. Нам удалось его получить для случая константного сигнала и возмущения в виде выброса. В общем случае результаты касаются сравнения MSE ошибок оценки сигнала методом CSSA и суммарного MSE при применении SSA отдельно к мнимой и вещественной частям.

### 3.1. Применение теории возмущений к SSA и CSSA

Наблюдаем комплексный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , данный ряд представляется как  $\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{S}$  — сигнал ранга  $r$ ,  $\mathbf{R}$  — возмущение. Возьмем некоторую длину окна  $L$ ,  $L > r$ .

В [10] вводится разложение восстановления сигнала в модели  $\mathbf{S}(\delta) = \mathbf{S} + \delta\mathbf{R}$ , что соответствует  $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}_L\mathbf{S}(\delta)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{S}(\delta)\mathbf{S}$ ,  $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{R}$ , и рассматривается линейный по  $\delta$  член ошибки восстановления, называемый первым порядком ошибки восстановления.

Рассмотрим возмущение ряда  $\mathbf{R}$  с  $\delta = 1$ , его траекторная матрица  $\mathbf{E}$ . Первый порядок ошибки восстановления обозначим как  $\mathbf{F}^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)})$ .

На основе результатов из [11, стр.12] и теоремы 2.1 из [10] была получена следующая формула для  $\mathbf{H}^{(1)}$  в случае достаточно маленького возмущения.

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} \mathbf{Q}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{P}_0$  — проектор на пространство столбцов  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{Q}_0$  — проектор на пространство строк  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

#### 3.1.1. Сравнение CSSA и SSA в случае совпадающих пространств сигналов

Обозначим за:

$\mathbf{F}^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}))$  первый порядок ошибки восстановления  $\mathbf{S}$  с возмущением  $\mathbf{R}$  метода CSSA,

$\mathbf{F}_{\text{Re}}^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{R}), \text{Re}(\mathbf{S})))$  первый порядок ошибки восстановления  $\text{Re}(\mathbf{S})$  с возмущением  $\text{Re}(\mathbf{R})$  метода SSA,

$\mathbf{F}_{\text{Im}}^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{R}), \text{Im}(\mathbf{S})))$  первый порядок ошибки восстановления  $\text{Im}(\mathbf{S})$  с возмущением  $\text{Im}(\mathbf{R})$  метода SSA.

**Теорема 1.** Пусть пространства столбцов траекторных матриц рядов  $\mathbf{S}$ ,  $\text{Re}(\mathbf{S})$  и  $\text{Im}(\mathbf{S})$  совпадают и то же самое верно для пространств строк. Тогда при любом достаточно малым возмущении  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}_{\text{Re}}^{(1)} + i\mathbf{F}_{\text{Im}}^{(1)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу возмущения  $\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}) + i \text{Im}(\mathbf{E})$ .

Заметим, что в (3.1)  $\mathbf{E}$  входит линейно, это означает, что

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{R}), \mathbf{S}) + i \mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{R}), \mathbf{S}). \quad (3.2)$$

Тогда, из (3.2), линейности диагонального усреднения и совпадения траекторных пространств, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S})) = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{R}), \mathbf{S})) + i \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{R}), \mathbf{S})) = \\ &= \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{R}), \text{Re}(\mathbf{S}))) + i \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{R}), \text{Im}(\mathbf{S}))) = \mathbf{F}_{\text{Re}}^{(1)} + i \mathbf{F}_{\text{Im}}^{(1)} \end{aligned}$$

□

Заметим, что хотя в утверждении теоремы возмущение  $\mathbf{R}$  может быть любым по форме, однако теорема имеет практическое применение только если первый порядок ошибки адекватно описывает полную ошибку.

### Случайное возмущение

Рассмотрим случайное возмущение  $\mathbf{R}$ .

Для дальнейших рассуждений приведём известный результат.

**Лемма 1.** Пусть  $\zeta = \xi + i\eta$ . Тогда  $\mathbb{D}\zeta = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\zeta &= \mathbb{E}(|\zeta - \mathbb{E}\zeta|^2) = \mathbb{E}(|(\xi - \mathbb{E}\xi) + i(\eta - \mathbb{E}\eta)|^2) = \\ &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + (\eta - \mathbb{E}\eta)^2) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим первые порядки ошибок восстановления:

$$\mathbf{F}^{(1)} = (f_1^{(1)}, \dots, f_N^{(1)}), \mathbf{F}_{\text{Re}}^{(1)} = (f_{\text{Re},1}^{(1)}, \dots, f_{\text{Re},N}^{(1)}), \mathbf{F}_{\text{Im}}^{(1)} = (f_{\text{Im},1}^{(1)}, \dots, f_{\text{Im},N}^{(1)}).$$

**Следствие 1** (из теоремы 1). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого  $l$ ,  $1 \leq l \leq N$ ,

$$\mathbb{D}f_l^{(1)} = \mathbb{D}f_{\text{Re},l}^{(1)} + \mathbb{D}f_{\text{Im},l}^{(1)}. \quad (3.3)$$

Утверждение получается автоматически из теоремы 1 и леммы 1.



### Возмущение в виде выброса

Рассмотрим возмущение выбросом  $a_1 + ia_2$  на позиции  $k$ , т.е. ряд  $R$  состоит из нулей кроме значения  $a_1 + ia_2$  на  $k$ -м месте.

Обозначим  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (|f_l^{(1)}|)^2}$  для ряда  $X = S + R$ .

Возмущение для выброса  $a_1 + ia_2$  можно записать как  $R = (a_1 + ia_2)G$ , где  $\frac{1}{a_1} \operatorname{Re}(R) = \frac{1}{a_2} \operatorname{Im}(R) = \frac{1}{a_1 + ia_2} R = G$ .

**Утверждение 2.** Пусть возмущение для выброса  $a_1 + ia_2$  на позиции  $k$  достаточно мало. Тогда  $RMSE$  для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a_1 + ia_2$  на позиции  $k$ , и ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $b_1 + ib_2$  на позиции  $k$ , т.ч.  $|b_1 + ib_2| = |a_1 + ia_2|$ , совпадают.

*Доказательство.* Используем представление  $R = (a_1 + ia_2)G$ .

По формуле (3.1)

$$f_l^{(1)} = (a_1 + ia_2)\mathcal{H}(G, S) = (a_1 + ia_2)c_l.$$

Для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a_1 + ia_2$  на позиции  $k$

$$RMSE = |a_1 + ia_2| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |c_l|^2}$$

Рассмотрим выброс  $b_1 + ib_2$ , такой что  $|b_1 + ib_2| = |a_1 + ia_2|$ .

Для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $b_1 + ib_2$  на позиции  $k$

$$RMSE = |b_1 + ib_2| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |c_l|^2} = |a_1 + ia_2| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |c_l|^2}.$$

□

#### 3.1.2. Случай двух зашумленных синусоид

Пусть сигнал  $S = (s_1, \dots, s_N)$  имеет вид

$$s_l = A \cos(2\pi\omega l + \phi_1) + iB \cos(2\pi\omega l + \phi_2), \quad (3.4)$$

где  $0 < \omega \leq 0.5$  и  $0 \leq \phi_i < 2\pi$ . Заметим, что случай  $|\phi_1 - \phi_2| = \pi/2 \pmod{\pi}$  и  $A = B$  соответствует комплексной экспоненте.

Пусть возмущение  $R$  — шум, т.е. случайный вектор с нулевым матожиданием и достаточно малой дисперсией.

**Следствие 2** (из теоремы 1). *Для комплексного ряда вида (3.4), кроме случая  $|\phi_1 - \phi_2| = \pi/2 \pmod{\pi}$  и  $A = B$ , выполняется формула (3.3).*

Выполнение условий теоремы 1 (совпадение столбцовых и строковых траекторных пространств сигналов) для ряда вида (3.4) следует из результатов [5] (утверждение 1).

**Замечание 2.** *Численные эксперименты, проведённые в [12], показывают, что для сигнала в виде комплексной экспоненты суммарная MSE CSSA-оценки сигнала равна полусумме суммарных MSE SSA-оценок сигнала его вещественной и мнимой частей. Следствие 2 является теоретическим обоснованием данного результата.*

Наиболее распространённым видом сигналов в случае реальных комплексных временных рядов, является комплексная экспонента. Однако, по утверждению 1 условия теоремы 1 для такого сигнала не выполняются. А, соответственно, и формула (3.3) неприменима.

**Предположение.** *Для случая комплексной экспоненты, с возмущением  $R$  выполняется*

$$\mathbb{D}(f_l^{(1)}) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} [\mathbb{D}(f_{\text{Re},l}^{(1)}) + \mathbb{D}(f_{\text{Im},l}^{(1)})]. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) была проверена численно. Приведём пример подобной проверки, рассмотрим сигнал

$$s_l = e^{i2\pi l/10},$$

параметры  $\sigma^2 = 0.01$ ,  $N = 5$ ,  $L = 3$ .

Результаты представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Оценки дисперсий при  $10^3$  повторях.

$l$	1	2	3	4	5
$\hat{\mathbb{D}}(f_l^{(1)})$	0.013	0.008	0.005	0.008	0.014
$\hat{\mathbb{D}}(f_{\text{Re},l}^{(1)})$	0.010	0.008	0.006	0.008	0.010
$\hat{\mathbb{D}}(f_{\text{Im},l}^{(1)})$	0.010	0.007	0.006	0.008	0.010

Из таблицы можно заметить приближённое численное выполнение (3.5).

### 3.1.3. Случай константных сигналов с выбросом

Рассматриваем сигнал  $\mathbf{S} = (c_1 + ic_2, \dots, c_1 + ic_2)$ , возмущённый выбросом  $a_1 + ia_2$  на позиции  $k$ , т.е. ряд  $\mathbf{R}$  состоит из нулей кроме значения  $a_1 + ia_2$  на  $k$ -м месте. Исходя из теоремы 1, достаточно уметь вычислять первый порядок ошибки восстановления сигнала  $\mathbf{S} = (c, \dots, c)$ , возмущённого выбросом  $a$  на позиции  $k$ .

В работе [2] была получен частный случай формулы (3.1) для вещественных сигналов единичного ранга:

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = -U^T \mathbf{E} V U V^T + U U^T \mathbf{E} + \mathbf{E} V V^T, \quad (3.6)$$

где  $U, V$  — сингулярные вектора матрицы  $\mathbf{H}$ .

Матрица возмущения для выброса  $a$

$$\mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times L}.$$

Для сигнала  $\mathbf{S} = (c, \dots, c)$

$$U = \{1/\sqrt{L}\}_{i=1}^L, \quad V = \{1/\sqrt{K}\}_{i=1}^K, \quad K = N - L + 1,$$

Не умаляя общности, будем считать, что  $L \leq K$ .

**Случай**  $1 \leq k < L$

Рассмотрим члены суммы из формулы (3.6) покомпонентно.

Часть первого слагаемого

$$U^T \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a/\sqrt{L} & \dots & a/\sqrt{L} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Часть первого слагаемого

$$U^T \mathbf{E} V = ka/\sqrt{LK}$$

Часть первого слагаемого

$$UV^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{LK} & \dots & 1/\sqrt{LK} \\ \vdots & & \vdots \\ 1/\sqrt{LK} & \dots & 1/\sqrt{LK} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times K}$$

Теперь первое слагаемое целиком

$$U^T \mathbf{E} V U V^T = \begin{pmatrix} ka/LK & \dots & ka/LK \\ \vdots & & \vdots \\ ka/LK & \dots & ka/LK \end{pmatrix}$$

Часть второго слагаемого

$$U U^T = \begin{pmatrix} 1/L & \dots & 1/L \\ \vdots & & \vdots \\ 1/L & \dots & 1/L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

Теперь второе слагаемое целиком

$$U U^T \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Часть третьего слагаемого

$$V V^T = \begin{pmatrix} 1/K & \dots & 1/K \\ \vdots & & \vdots \\ 1/K & \dots & 1/K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K}$$

Теперь третье слагаемое целиком

$$\mathbf{E} V V^T = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \frac{a}{LK} \begin{pmatrix} (L+K-k) & \dots & (L+K-k) & \dots & (L-k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (L+K-k) & \dots & (L+K-k) & \dots & (L-k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (K-k) & \dots & (K-k) & \dots & -k \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}))$$

$$k \leq L/2$$

$$k \leq K - L$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l \leq L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L < l < L + k \\ 0, & L + k \leq l \leq K \\ \frac{1}{N-l+1}(K - l)(L - k), & K < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k \leq L/2$$

$$k > K - L$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l \leq L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L < l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(K - l)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > L/2$$

$$k \leq K - L$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < L + k \\ 0, & L + k \leq l \leq K \\ \frac{1}{N-l+1}(L - K)(L - k), & K < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > \max(L/2, K - L)$$

$$k \leq K/2$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(L - K)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > K/2$$

$$f_l^{(1)} = \frac{1}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(K - l)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

**Случай**  $L \leq k \leq K$

Первое слагаемое

$$U^T \mathbf{E} V U V^T = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \end{pmatrix}$$

Второе слагаемое

$$U U^T \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Третье слагаемое

$$\mathbf{E}V V^T = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \frac{a}{L} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{L} \begin{cases} \frac{1}{\min(L, l)}(l - k + L), & k - L \leq l \leq k \\ \frac{1}{\min(L, N-l+1)}(L + k - l), & k < l < L + k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Случай**  $K < k \leq N$

Данный случай полностью аналогичен инвертированному первому случаю, то есть строим ряд для  $N - k + 1$  и разворачиваем его.

Полученные формулы были численно проверены для частного случая.

**Замечание 3.** Из полученных формул видно, что при фиксированном  $L$  первый порядок ошибки не стремится к 0 с ростом  $N$ , тогда как численные эксперименты показывают, что полная ошибка восстановления стремится к 0 с ростом  $N$ . Как показано в разделе 3.2, это следствие того, что полная ошибка не описывается ее первым порядком. Если же  $L$  и  $K$  пропорциональны  $N$ , то первый порядок ошибки стремится к нулю.

## 3.2. Численное сравнение первого порядка ошибки и полной ошибки оценивания сигнала

### 3.2.1. Случай зашумленных гармоник

Сигнал

$$s_l = \cos(2\pi l/10) + i \cos(2\pi l/10 + \phi),$$

параметры  $\sigma^2 = 0.01$ ,  $N = 9$ ,  $L = 5$ .

Результаты для одной из реализаций шума представлены на рис. 3.1, рис. 3.2.

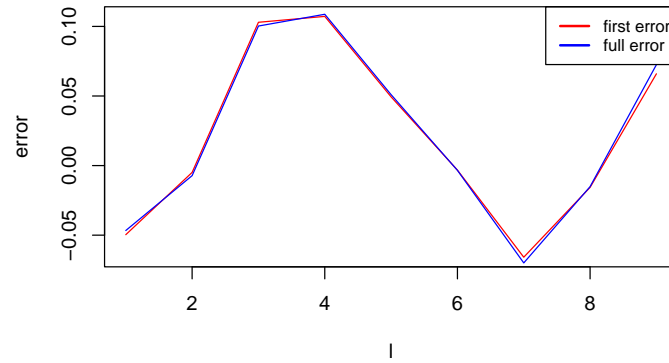


Рис. 3.1. Вещественные части первого порядка и полной ошибок для  $\phi = \pi/4$ .

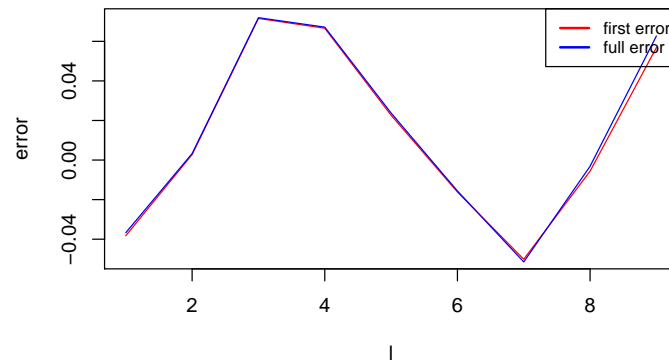


Рис. 3.2. Вещественные части первого порядка и полной ошибок для  $\phi = \pi/2$ .

Из графиков видно, что ошибки практически совпадают даже при маленьких  $L$  и  $N$ .

Показанное совпадение и теорема 1 объясняют эффект, наблюдаемый нами в разделе 2.4.3.

### 3.2.2. Случай константных сигналов с выбросом

Был рассмотрен пример с сигналом  $s_l = 1 + i1$  и возмущением в виде выброса  $a_1 + ia_2 = 10 + i10$  на позиции  $k$ .



Результаты представлены в таблице 3.2, таблице 3.3.

Таблица 3.2. Максимальное различие первого порядка и полной ошибок при  $k = L - 1$ .

$N$	50	100	400	1600
$L = N/2$	0.1313	0.0419	0.0033	0.0002
$L = 20$	0.3074	0.1965	0.5655	0.6720

Таблица 3.3. Максимальное различие первого порядка и полной ошибок при  $k = N/2$ .

$N$	50	100	400	1600
$L = N/2$	7.5e-15	5.5e-15	3.9e-14	4.9e-14
$L = 20$	0.5657	0.2828	0.6364	0.6894

Численные результаты показывают, что для случая зашумленных гармоник первый порядок адекватно оценивает полную ошибку восстановления сигнала в каждой точке при любых рассматриваемых параметрах сигналов.

Однако для случая возмущения в виде выброса это верно, только когда  $L$  и  $K$  пропорциональны  $N$ .

Все численные результаты были получены при помощи пакета [13].

## Заключение

В работе были приведены и исследованы два обобщения робастных вариантов метода SSA на комплексно-значный случай.

Был проведён обзор двух известных подходов к построению робастных версий SSA: замена проекции по норме  $\mathbb{L}_2$  на проекцию по норме  $\mathbb{L}_1$  и на взвешенную проекцию по норме  $\mathbb{L}_2$  и их имплементация на комплексный случай.

Работа методов была показана на нескольких примерах, подтверждающих эффективность робастных модификаций, в сравнении с Complex SSA для рядов с выбросами. Все рассматриваемые модификации были реализованы на R.

В работе удалось подвести теоретическую базу под имеющиеся ранее численные результаты ([12]) по сравнению CSSA и SSA для двух зашумленных гармоник с одинаковой частотой и сдвигом, не кратным  $\pi/2$ . Для зашумленной комплексной экспоненты был получен более общий, нежели имеющиеся ранее, численный результат. Результаты показывают, что только в случае сигнала в виде комплексной экспоненты применение CSSA имеет смысл с точки зрения уменьшения ошибки восстановления сигнала.

Для константного ряда с выбросами был получен явный вид первого порядка ошибок оценки сигнала в каждой точке.

Для обоих случаев было численно исследовано соотношение между первым порядком ошибки и полной ошибкой. В случае случайного возмущения оказалось, что первый порядок ошибки практически совпадает с полной ошибкой. Однако в случае неслучайного возмущения выбросом это не так и требуются дополнительные условия на пропорциональность длины окна  $L$  длине ряда  $N$ .

## Список литературы

1. А. Третьякова. Робастные варианты метода анализа сингулярного спектра : магистерская работа ; Санкт-Петербургский Государственный Университет. — Санкт-Петербург, 2020.
2. V. Nekrutkin. Perturbations in SSA. — 2008. — Manuscript.
3. Е. Власьева. Исследование ошибок восстановления в методе «Гусеница» с помощью теории возмущений : дипломная работа ; Санкт-Петербургский Государственный Университет. — Санкт-Петербург, 2008.
4. N. Golyandina, V. Nekrutkin, A. Zhigljavsky. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques // Chapman&Hall/CRC. — 2011. — P. 1–78.
5. Д. Степанов, Н. Голяндина. Варианты метода "Гусеница"-SSA для прогноза многомерных временных рядов. // Труды IV Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'05. — Москва. — 2005. — С. 1831–1848.
6. K. Qifa, K. Takeo. Robust L1 Norm Factorization in the Presence of Outliers and Missing Data by Alternative Convex Programming // Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2005). — 2005. — June.
7. Solving Weighted Least Squares (WLS) problems on ARM-based architectures / J. Belloch, B. Bank, F. Igual, E. Quintana-Ortí, and A. Vidal // The Journal of Supercomputing. — 2017. — 01. — Vol. 71. — P. 530–542.
8. K. Chen, M. Sacchi. Robust reduced-rank filtering for erratic seismic noise attenuation // GEOPHYSICS. — 2015. — 01. — Vol. 80. — P. V1–V11.
9. T. Kato. Perturbation theory for linear operators. — Springer-Verlag, 1966.
10. V. Nekrutkin. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals // Statistics and Its Interface. — 2010. — Vol. 3. — P. 297–319.
11. А. Константинов. Некоторые задачи анализа временных рядов (теория методов "Singal Subspace") : курсовая работа ; Санкт-Петербургский Государственный Университет. — Санкт-Петербург, 2018.
12. Multivariate and 2D extensions of singular spectrum analysis with the Rssa package / N. Golyandina, A. Korobeynikov, A. Shlemov, and K. Usevich // Journal of Statistical Software. — 2015. — Vol. 67(2). — P. 1–78.

13. Rssa: A collection of methods for singular spectrum analysis. — <http://CRAN.R-project.org/package=Rssa>. — 2021. — R package version 1.04.
14. Н. Голяндина. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. — Санкт-Петербург : ВММ, 2004.
15. J. P. Brooks, S. Jot. pcaL1: An Implementation in R of Three Methods for L1-Norm Principal Component Analysis. — 2012. — unpublished.
16. L1-Norm Principal-Component Analysis of Complex Data / N. Tsagkarakis, P. Markopoulos, G. Sklivanitis, and D. Pados // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2018. — 06.
17. N. Golyandina, A. Korobeynikov, A. Zhigljavsky. Singular spectrum analysis with R. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2018.