

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

## Отчет о научно-исследовательской работе

Сенов Михаил Андреевич

РОБАСТНЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА SSA ДЛЯ АНАЛИЗА  
КОМПЛЕКСНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Н. Э. Голяндина

Санкт-Петербург

2022

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Алгоритм SSA</b> . . . . .	4
1.1. Описание алгоритма . . . . .	4
1.1.1. Вложение . . . . .	4
1.1.2. Сингулярное разложение . . . . .	4
1.1.3. Группировка . . . . .	4
1.1.4. Диагональное усреднение . . . . .	5
<b>Глава 2. Робастные варианты SSA.</b> . . . . .	6
2.1. Проекция по норме $\mathbb{L}_1$ . . . . .	7
2.2. Проекция по взвешенной норме $\mathbb{L}_2$ с итеративным обновлением весов . . . . .	8
2.3. Модификация метода с итеративным обновлением весов . . . . .	11
<b>Глава 3. Примеры работы алгоритмов</b> . . . . .	13
3.1. Синтетический пример №1 . . . . .	14
3.2. Синтетический пример №2 . . . . .	16
<b>Глава 4. Ошибка восстановления</b> . . . . .	19
4.1. Шум . . . . .	20
4.1.1. Частный случай . . . . .	21
4.2. Выброс . . . . .	22
4.2.1. $0 < k < L$ . . . . .	23
4.2.2. $L \leq k \leq K$ . . . . .	26
4.2.3. $K < k \leq N$ . . . . .	27
4.2.4. Инвариант по RMSE . . . . .	27
<b>Глава 5. Ошибки восстановления для комплексной экспоненты</b> . . . . .	28
5.1. Вещественные выбросы . . . . .	28
<b>Заключение</b> . . . . .	30
<b>Список литературы</b> . . . . .	31

## Введение

Временным рядом называется набор значений некоторой функции от времени, собранных в разные моменты времени.

Предположим, что временной ряд является суммой нескольких временных рядов, к примеру, тренда (медленно меняющейся составляющей), сезонной составляющей и шума. Для работы с таким рядом полезно выделить эти составляющие, поскольку работать с ними по отдельности может быть проще чем с исходным рядом, сделать это позволяет метод «Гусеница»-SSA (в дальнейшем просто SSA).

При подобном анализе возникает следующее затруднение. В данных часто возникают выделяющиеся ошибки, значительно большие, чем размер шума. Эти ошибки называются выбросами. Соответственно, возникает задача построения изначально устойчивых к выбросам модификаций SSA.

Решению данной задачи была посвящена работа [1]. Результаты были получены для вещественнозначных рядов. В реальности данные с многих приборов снимаются изначально в комплексном виде и, поэтому, задача анализа комплекснозначных временных рядов так же важна. Поэтому, целью данной работы является рассмотрение возможности переноса полученных ранее результатов на комплексный случай и их обобщение в случае неудачи.

Отчёт о работе в седьмом семестре представлен в главах 4 и 5.

Важной задачей является рассмотрение аналитических формул ошибки восстановления, они позволяют увидеть ошибку метода, более точную, чем её ошибка и без дополнительного проведения экспериментов, так же по формулам возможно явно увидеть, от чего данная ошибка зависит.

В данной работе использовался подход к аналитическому вычислению ошибки восстановления и её дисперсии, описанный в работах [2], [3]. Главной задачей являлось обобщение результатов для SSA на случай CSSA и получение аналитического вида ошибки восстановления для комплексного выброса.

## Глава 1

# Алгоритм SSA

В этом разделе рассмотрим базовый алгоритм SSA.

### 1.1. Описание алгоритма

Рассмотрим ненулевой ряд  $\mathbf{X}_N = (x_1, \dots, x_N)$ , где  $N > 2$ . Базовый алгоритм SSA выполняет разложение исходного ряда на сумму из нескольких новых рядов и осуществляется в четыре этапа.

#### 1.1.1. Вложение

Первым этапом алгоритма является построение траекторной матрицы.

Пусть  $L$  — некоторое целое число (*длина окна*),  $1 < L < N$

*Траекторная матрица* — это матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}, K = N - L + 1.$$

#### 1.1.2. Сингулярное разложение

Вторым этапом является сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы ряда, оно может быть записано как:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d$$

где  $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ ,  $\lambda_i$  —  $i$ -ое собственное число по убыванию матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ ,  $U_i$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , соответствующий  $\lambda_i$ ,  $V_i$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ , соответствующий  $\lambda_i$ ,  $d$  — ранг матрицы  $\mathbf{X}$ .

#### 1.1.3. Группировка

Третьим этапом является объединение в группы полученных матриц  $\mathbf{X}_i$ .

Матрица, соответствующая группе  $I$ :

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_r}.$$

И результат группировки:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_l}.$$

#### 1.1.4. Диагональное усреднение

Последним этапом является перевод каждой матрицы, соответствующей группе, в новый ряд длины  $N$ .

Пусть  $\mathbf{Y}$  — некоторая матрица  $L \times K$  с элементами  $y_{ij}$ . Положим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$ ,  $N = L + K - 1$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , если  $L < K$ , и  $y_{ij}^* = y_{ji}$  иначе.

Диагональное усреднение переводит матрицу  $\mathbf{Y}$  в ряд  $(y_0, \dots, y_{N-1})$  по формуле:

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } 0 \leq i \leq L^* - 1 \\ \frac{1}{L^*} \sum_{i=1}^{L^*} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq i \leq K^* . \\ \frac{1}{N-k} \sum_{i=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{i,k-i+2}^* & \text{для } K^* \leq i \leq N-1 \end{cases}$$

Таким образом, мы разложили исходный ряд в сумму  $l$  новых рядов:

$$\mathbf{X}_N = \sum_{i=1}^l \mathbf{X}_{N_i}.$$

## Глава 2

### Робастные варианты SSA.

В данном разделе мы рассмотрим устойчивые к выбросам (робастные) комплекснозначные модификации SSA. Особенности методов (кроме замены транспонирования  $T$  на эрмитово сопряжение  $H$ ) будем отмечать отдельно.

Будем рассматривать вариант метода SSA для выделения сигнала, когда группировка заключается в выборе первых  $r$  компонент. Для стандартного метода SSA это эквивалентно проекции по норме Фробениуса траекторной матрицы ряда на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$ .

Пусть имеется временной ряд  $X_N = (x_1, \dots, x_N)$ .

$\mathcal{M}_H$  — пространство ганкелевых матриц  $L \times K$ ,

$\mathcal{M}_r$  — пространство матриц ранга, не превосходящего  $r$ , размера  $L \times K$ .

Оператор вложения  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N) \rightarrow \mathcal{M}_H : \mathcal{T}(X_N) = X$ ,

$\Pi_r : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_r$  — проектор на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$ , по некоторой норме в пространстве матриц,

$\Pi_H : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_H$  — проектор на пространство ганкелевых матриц по некоторой норме в пространстве матриц.

В результате применения данных операторов получаем оценку сигнала:

$$\tilde{S} = \mathcal{T}^{-1} \Pi_H \Pi_r \mathcal{T}(X_N).$$

В случае, когда проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_H$  берутся по норме в пространстве  $\mathbb{L}_2$ , оценка сигнала соответствует алгоритму SSA, для случая, когда восстановление производится по одной группе, состоящей из первых  $r$  компонент.

Существует два известных подхода к построению устойчивых к выбросам модификаций SSA:

- Проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_H$  строятся по норме в пространстве  $\mathbb{L}_1$ ,
- Проекторы  $\Pi_r$  и  $\Pi_H$  строятся по взвешенной норме в пространстве  $\mathbb{L}_2$ .

В работе [1] были предложены реализации обоих подходов, приведём адаптированные на комплексный случай алгоритмы ниже.

## 2.1. Проекция по норме $\mathbb{L}_1$

Пусть  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда. Необходимо решить задачу

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H\|_1 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}, \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}.$$

---

**Алгоритм 1:** Последовательный метод построения  $\mathbb{L}_1$ -проектора на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала; параметры критерия останова:  $\varepsilon = 10^{-4}$ , максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — проекция траекторной матрицы на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

Инициализация  $\mathbf{V}(0) \in \mathbb{C}^{L \times r}$ , нормировка столбцов  $\mathbf{V}(0)$ ;

$t := 0$ ;

**до тех пор, пока**  $\max_{\substack{i=1, \dots, L \\ j=1, \dots, r}} |u_{ij}(t) - u_{ij}(t-1)| > \varepsilon$  **и**  $t < N_{iter}$  **выполнять**

$t := t + 1$ ;

$\mathbf{U}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1$ ;

$\mathbf{V}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}(t)\mathbf{V}^H\|_1$ ;

Нормировка столбцов  $\mathbf{V}(t)$ ;

**конец**

$\mathbf{U} := \mathbf{U}(t); \mathbf{V} := \mathbf{V}(t)$ ;

---

В приведённой реализации  $\mathbf{V}(0)$  инициализируется при помощи сингулярного разложения, но, согласно [4], инициализация может быть произведена при помощи любой матрицы требуемого размера с сохранением сходимости.

Рассмотрим подробнее решение задачи

$$\mathbf{U}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{K \times r}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1. \quad (2.1)$$

Целевую функцию можно представить в виде

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H(t-1)\|_1 = \sum_{i=1}^L \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{V}(t-1)\mathbf{u}_i^H\|_1,$$

где  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^K$  — строки  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^r$  — строки  $\mathbf{U}$ . Согласно [4], задача (2.1) может быть

разбита на  $L$  независимых подзадач

$$\mathbf{u}_i(t) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{V}(t-1)\mathbf{u}^H\|_1. \quad (2.2)$$

Подзадача (2.3) в свою очередь может быть разбита на  $r$  подзадач

$$\mathbf{u}_{ic}(t) = \underset{u_c}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}_i^H - \mathbf{v}_c(t-1)\mathbf{u}_c^H\|_1. \quad (2.3)$$

Решение каждой из которых является взвешенной медианой вектора  $\frac{\mathbf{y}_i}{\mathbf{v}_c(t-1)}$  с вектором весов  $|\mathbf{v}_c(t-1)|$ .

## 2.2. Проекция по взвешенной норме $\mathbb{L}_2$ с итеративным обновлением весов

Пусть  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда. Необходимо решить задачу

$$\|\mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}, \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}.$$

Для начала рассмотрим алгоритм с фиксированной матрицей весов.



---

**Алгоритм 2:** Алгоритм решения задачи взвешенной аппроксимации для фиксированной матрицы весов  $\mathbf{W}$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг

сигнала,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L \times K}$  — матрица весов;

параметры критерия остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,

максимальное число итераций  $N_\alpha = 5$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — решение задачи взвешенной

аппроксимации при фиксированной матрице весов

$\mathbf{W}$

1.  $t := 0$ ;

2. **до тех пор, пока**  $\|\mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 > \varepsilon$  **и**  $t < N_\alpha$  **выполнять**

а. Вычисление матрицы  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  с помощью решения задачи

$$(y_i^H - \mathbf{V}u_i^H)^H \mathbf{W}_i (y_i^H - \mathbf{V}u_i^H) \rightarrow \min_{u_i}, \quad i = 1, \dots, L, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{W}_i = \text{diag}(w_i) \in \mathbb{R}^{K \times K}$  — матрица, составленная из  $i$ -ой строки  $\mathbf{W}$ ;

б. Вычисление матрицы  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}$  с помощью решения задачи

$$(y_j - \mathbf{U}v_j^H)^H \mathbf{W}^j (y_j - \mathbf{U}v_j^H) \rightarrow \min_{v_j}, \quad j = 1, \dots, K, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{W}^j = \text{diag}(W_j) \in \mathbb{R}^{L \times L}$  — матрица, составленная из  $j$ -го столбца

$\mathbf{W}$ ;

в.  $t := t + 1$ .

**конец**

---

Задачи (2.4), (2.5) решаются при помощи QR-разложения матриц  $\mathbf{V}^H \mathbf{W}_i \mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}^H \mathbf{W}^j \mathbf{U}$  соответственно, алгоритм решения представлен в [5].

У авторов этого алгоритма в [6] допущена ошибка в его описании. Дело в том, что в задаче 2.4 решение линейного уравнения ищется по эрмитово-сопряжённой системе, а не изначальной, а в задаче 2.5 находится сразу  $\mathbf{V}^H$ , а не  $\mathbf{V}$ . Эта ошибка была несущественной в случае вещественной реализации в [1], так как вещественный аналог эрмитового сопряжения — транспонирование, не меняет элементы, но оказалась существенной в комплексном случае.

Теперь рассмотрим алгоритм с итеративным обновлением весов.

---

**Алгоритм 3:** Метод с итеративным обновлением весов для нахождения проекции на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала; параметр весовой функции  $\alpha = 4.685$ ;  
параметры критерия остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  
максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$  — проекция траекторной матрицы на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

Инициализация  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  и  $\mathbf{V}(0) \in \mathbb{C}^{K \times r}$  (например, с помощью сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{Y}$ );

$t := 0$ ;

**до тех пор, пока  $\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 > \varepsilon$  и  $t < N_{iter}$  выполнять**

Вычисление матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n,p} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H$ ;

Обновление матрицы  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ ;

Вычисление матрицы весов  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \{w(\frac{r_{ij}}{\sigma_{ij}})\}_{i,j=1}^{L,K}$ , используя

$$w(x) = \begin{cases} (1 - (\frac{|x|}{\alpha})^2)^2 & |x| \leq \alpha \\ 0 & |x| > \alpha \end{cases};$$

Решение задачи взвешенной аппроксимации (обновление матриц  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ )

$$\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H)\|_F^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}},$$

при помощи алгоритма 2;

**конец**

---

Данный алгоритм был предложен в [6], авторы предложили взять  $\alpha = 4.685$ ,  $N_\alpha = 5$  и  $N_{iter} = 10$ , ссылаясь на численные эксперименты.

Параметр сигма предлагается взять равным  $\sigma_{ij} = \sigma = 1.4826 \text{ med } |\mathbf{R} - \text{med } |\mathbf{R}||$ , где  $\mathbf{R}$  — это вектор, составленный из всех элементов матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ , то есть

$$\mathbf{R} = (r_{11}, \dots, r_{1K}; r_{21}, \dots, r_{2K}; \dots; r_{L1}, \dots, r_{LK}).$$

Данная оценка предлагается авторами ввиду её робастности.

### 2.3. Модификация метода с итеративным обновлением весов

У представленного выше алгоритма есть одна важная проблема, а именно, выбор параметра  $\sigma_{ij}$  не зависящим от  $i$  и  $j$ . В случае не стационарных рядов выявление выбросов может происходить неверно. Например, если шум растёт к концу ряда, то выбросы в начале ряда могут получить больший вес, чем не выбросы в конце ряда. В [1] была приведена модификация алгоритма, призванная решить эту проблему. Здесь же мы рассмотрим её комплексную адаптацию.

Ключевая задача параметра  $\sigma_{ij}$  — приписывание определённого веса определённому элементу ряда, чем элемент больше похож на выброс, тем больше сигма и наоборот. Ввиду такой интерпретации логично рассматривать сигмы как ряд, идущий дополнением к данному  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ , а после, ганкелизацией привести этот ряд к матричному виду  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K}$ . Сам же ряд  $\sigma$  автор [1] предлагает взять равным тренду (математическому ожиданию) ряда из модулей остатков. Это предложение справедливо и для комплексного случая, так как в комплексном случае выброс характеризуется величиной модуля.

Теперь рассмотрим сам алгоритм.

---

**Алгоритм 4:** Модификация метода с итеративным обновлением весов для нахождения проекции на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

---

**Входные данные:**  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{L \times K}$  — траекторная матрица ряда,  $r$  — ранг сигнала;

параметр весовой функции  $\alpha = 4.685$ ; параметры критерия

остановки:  $\varepsilon = 10^{-4}$ , максимальное число итераций  $N_{iter} = 10$

**Выходные данные:**  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$  — проекция траекторной матрицы на множество матриц ранга, не превосходящего  $r$

1. Инициализация  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r}$  и  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times r}$  (например, с помощью сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{Y}$ );

2.  $t := 0$ ;

3. **повторять**

a. Вычисление матрицы остатков  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n,p} = \mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H$ ;

b. Ганкелизация матрицы  $\mathbf{R}$  и получение ряда длины  $N$  из остатков:

$$\mathbf{R} = \mathcal{T}^{-1}\Pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{R}) = (r_1, \dots, r_N);$$

c. Пусть  $\mathbf{R}_+ = (|r_1|, \dots, |r_N|)$  — ряд из модулей остатков. Вычисление

$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  как оценки мат. ожидания  $\mathbb{E}(\mathbf{R}_+)$  некоторым методом;

d. Получение матрицы  $\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \mathcal{T}(\boldsymbol{\sigma})$ ;

e. Вычисление матрицы весов  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{L,K} = \{w(\frac{r_{ij}}{\sigma_{ij}})\}_{i,j=1}^{L,K}$ , используя

$$w(x) = \begin{cases} (1 - (\frac{|x|}{\alpha})^2)^2, & |x| \leq \alpha \\ 0, & |x| > \alpha \end{cases}$$

f. Решение задачи взвешенной аппроксимации (обновление матриц  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ )

$$\left\| \mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H) \right\|_F^2 \rightarrow \min_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}$$

g.  $t := t + 1$ .

**до тех пор, пока**  $\left\| \mathbf{W}^{1/2} \odot (\mathbf{Y} - \mathbf{U}\mathbf{V}^H) \right\|_F^2 > \varepsilon$  и  $t < N_{IRLS}$ ;

---

Преимуществом данного алгоритма, является то, что пользователь сам может выбрать, каким методом он хочет вычислять матожидание ряда. В приведённой реализации представлены три метода: локальная регрессия loess, скользящая медиана и взвешенная локальная регрессия lowess.

## Глава 3

### Примеры работы алгоритмов

В данном разделе мы приведём несколько примеров комплексных временных рядов и сравним результаты работы методов.

Сравнение будет проводиться по величине среднеквадратичной ошибки, согласованной с  $\mathbb{L}_2$ , которая вычисляется по формуле

$$\text{MSE} = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - \hat{s}_i)^2 \right), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_N)^T$  — сигнал,  $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_N)^T$  — его оценка. Будем вычислять

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}.$$

Так же будем проверять значимость сравнения, для этого будем использовать гипотезу, что MSE для некоторых методов равны между собой.

$H_0 : \mathbb{E}(\xi_1 - \xi_2) = 0$ . Имеем две выборки  $X = (x_1, \dots, x_M)$  и  $Y = (y_1, \dots, y_M)$  объема  $M$ . Обозначим  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  — их выборочные средние,  $s_x^2$  и  $s_y^2$  — выборочные дисперсии,  $\hat{\rho}$  — коэффициент корреляции. Статистика критерия

$$t = \frac{\sqrt{M}(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 - 2s_x s_y \hat{\rho}}}$$

имеет асимптотически нормальное распределение.

Шум в примерах будет иметь стандартное комплексное нормальное распределение. Определим, что это значит.

**Определение.** *Комплексная случайная величина  $Z$  имеет стандартное комплексное нормальное распределение, если*

1.  $\text{Re}(Z)$  и  $\text{Im}(Z)$  независимы,
2.  $\text{Re}(Z), \text{Im}(Z) \sim N(0, 1/2)$ .

И обозначается  $Z \sim CN(0, 1)$ .

### 3.1. Синтетический пример №1

Рассмотрим ряд с постоянной амплитудой и шумом постоянной дисперсии. Длину ряда возьмём  $N = 240$

$$x_n = e^{2n\pi/30i} + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim CN(0, 1).$$

Рассмотрим результаты работы методов для такого ряда (3.1). В таблице 3.2 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Ранг ряда равен 1.

Таблица 3.1. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда без выбросов.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	<b>0.1016</b>	0.125	0.1017	0.103	0.105	0.104

Таблица 3.2. p-value для сравнения различных методов с наилучшим без выбросов.

Method	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
CSSA	1.5e-06	<b>0.91</b>	<b>0.69</b>	<b>0.24</b>	<b>0.43</b>

В случае отсутствия выбросов лучший результат показывают метод Complex SSA, но сравнение значимо только с методом проекции на  $\mathbb{L}_1$ .

Теперь добавим к ряду 5% выбросов с величиной выброса  $5x_i$ . Графики ряда представлены на Рис. 3.1, 3.2.

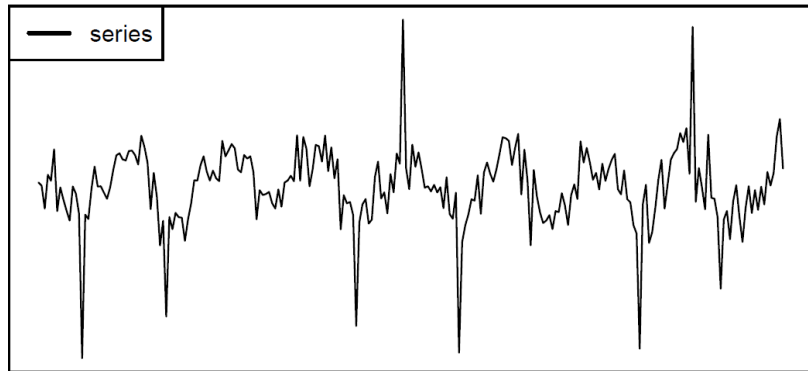


Рис. 3.1. График вещественной части ряда.

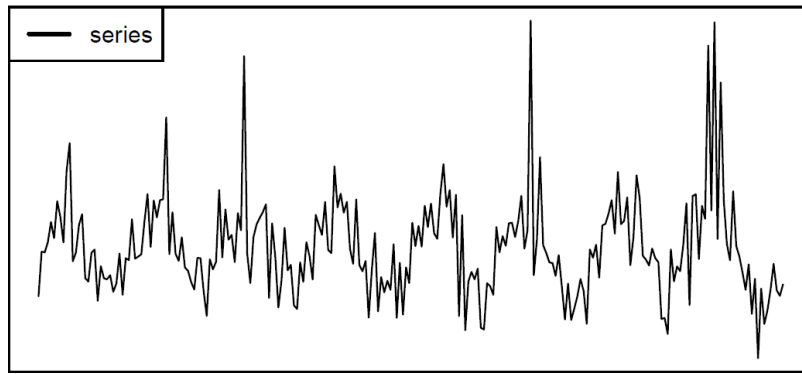


Рис. 3.2. График мнимой части ряда.

Графики результатов анализа представлены в Рис. 3.3, 3.4. В таблице 3.3 представлены сравнения ошибок для различных методов. В таблице 3.4 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Длина окна взята  $L = 120$ .

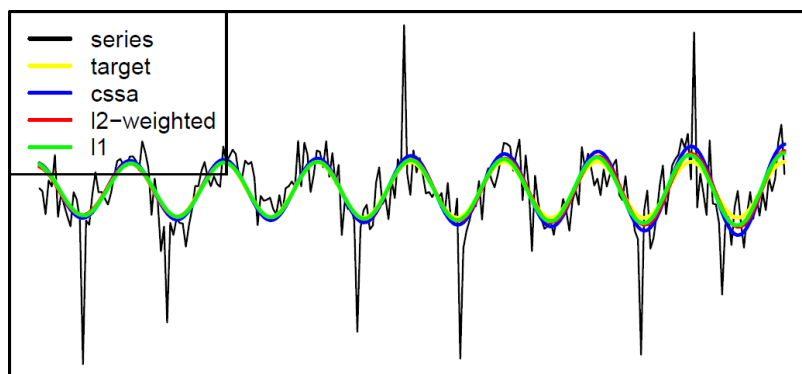


Рис. 3.3. Вещественная часть выделения тренда несколькими способами.

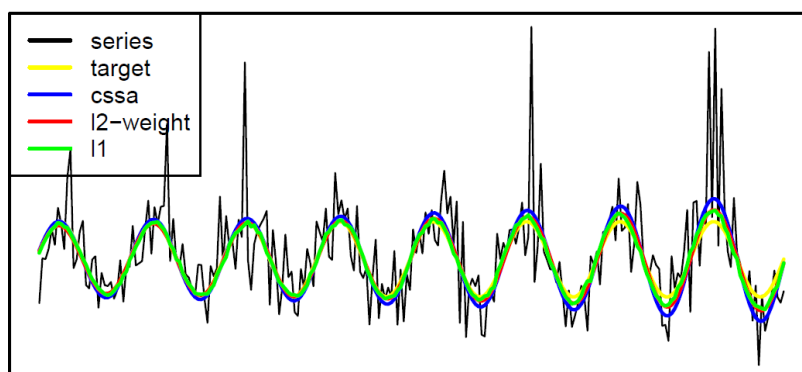


Рис. 3.4. Мнимая часть выделения тренда несколькими способами.

Таблица 3.3. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	0.285	0.147	0.158	<b>0.112</b>	0.114	0.114

Таблица 3.4. p-value для сравнения различных методов с наилучшим с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	median L2	lowess L2
loess L2	0	7.7e-13	4.1e-10	<b>0.134</b>	<b>0.262</b>

В случае наличия выбросов метод loess проекции на  $\mathbb{L}_2$  показал наилучший результат, за исключением того, что сравнения с другими вариациями модифицированной взвешенной проекции незначимы.

### 3.2. Синтетический пример №2

Рассмотрим ряд с растущей амплитудой и шумом непостоянной дисперсии. Длину ряда возьмём  $N = 240$

$$x_n = e^{4n/N} e^{2n\pi/30i} + \frac{1}{2} e^{4n/N} \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \sim CN(0, 1).$$

Рассмотрим результаты работы методов для такого ряда (3.5). В таблице 3.6 представлены p-value для сравнения методов с лучшим. Ранг ряда равен 1.

Таблица 3.5. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда без выбросов.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	<b>1.28</b>	1.52	1.90	1.36	1.43	1.37

Таблица 3.6. p-value для сравнения различных методов с наилучшим без выбросов.

Method	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
CSSA	0.005	0.0001	0.001	7.6e-5	0.0007



В случае отсутствия выбросов лучший результат показывает Complex SSA. Здесь же видно, что модифицированный метод взвешенной проекции справляется с не стационарным рядом куда лучше чем классический, к примеру, сравнивая классический и loess, сравнение является значимым с  $p\text{-value} = 0.0005$ .

Теперь добавим к ряду 5% выбросов с величиной выброса  $5x_i$ . Графики ряда представлены на Рис. 3.5, 3.6.

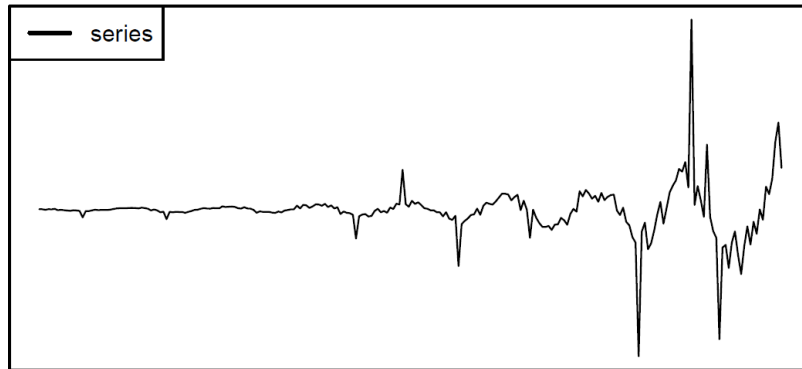


Рис. 3.5. График вещественной части ряда.

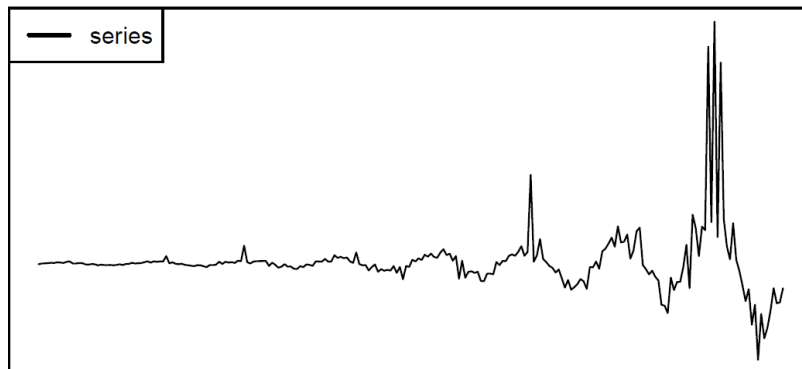


Рис. 3.6. График мнимой части ряда.

Графики результатов анализа представлены на Рис. 3.7, 3.8. В таблице 3.7 представлены сравнения ошибок для различных методов. В таблице 3.8 представлены  $p\text{-value}$  для сравнения методов с лучшим. Длина окна взята  $L = 120$ .

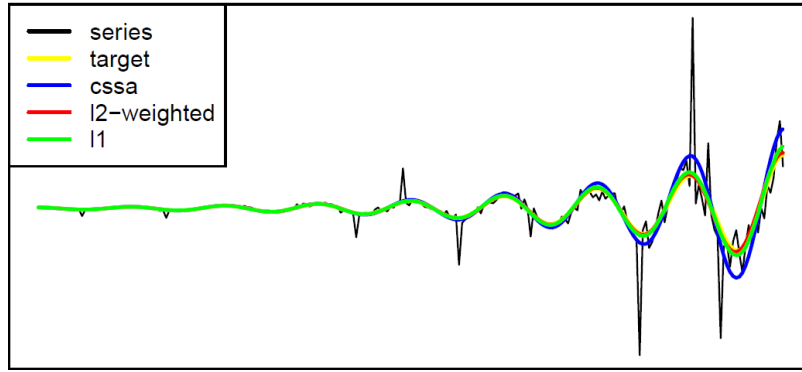


Рис. 3.7. Вещественная часть выделения тренда несколькими способами.

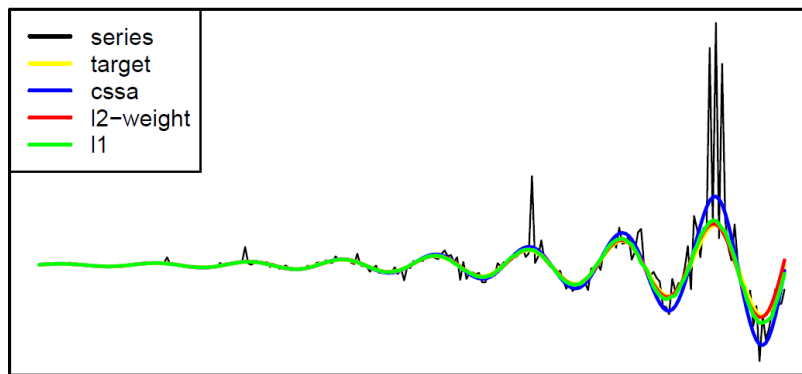


Рис. 3.8. Мнимая часть выделения тренда несколькими способами.

Таблица 3.7. Оценки RMSE различных методов для  $M = 30$  реализаций ряда с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	loess L2	median L2	lowess L2
RMSE	6.14	1.78	1.66	<b>1.48</b>	1.50	1.49

Таблица 3.8. p-value для сравнения различных методов с наилучшим с выбросами.

Method	CSSA	L1	weighted L2	median L2	lowess L2
loess L2	3.5e-16	0.005	<b>0.13</b>	<b>0.387</b>	<b>0.28</b>

В случае присутствия выбросов метод loess проекции на  $\mathbb{L}_2$  показывает себя наилучшим образом на данном примере, однако сравнения с взвешенным  $\mathbb{L}_2$ , median  $\mathbb{L}_2$  и lowess  $\mathbb{L}_2$  не являются значимыми.

## Глава 4

## Ошибка восстановления

Наблюдаем комплексный временной ряд  $F$  длины  $N$  и длиной окна  $L$ , данный ряд представляется как  $F = S + R$ , где  $S$  — сигнал с траекторной матрицей  $\mathbf{H} = \mathcal{T}(S)$ ,  $R$  — возмущение.

В работе [2] вводится разложение восстановления сигнала в модели  $S(\delta) = S + \delta R$ , что соответствует  $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{H}(\delta)$  — траекторная матрица  $S(\delta)$ ,  $\mathbf{H}$  — траекторная матрица  $S$ ,  $\delta \mathbf{E}$  — траекторная матрица возмущения  $\delta R$  и рассматривается линейный по  $\delta$  член ошибки восстановления, называемый первым.

Рассмотрим возмущение ряда  $R$  с  $\delta = 1$  и его траекторная матрица  $\mathbf{E}$ . Первый член ошибки восстановления обозначим как  $f^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)})$ .

В [2] были получены формулы для  $\mathbf{H}^{(1)}$  для вещественных рядов рангов 1 и 2. Ниже приведём их комплексное обобщение.

Для  $\text{rk } S = 2$  и сингулярных векторов  $U_1, U_2, V_1, V_2$  матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S) = & U_1 U_1^H \mathbf{E} + U_2 U_2^H \mathbf{E} + \mathbf{E} V_1 V_1^H + \mathbf{E} V_2 V_2^H - \\ & - (\alpha_{11} U_1 V_1^H + \alpha_{12} U_1 V_2^H + \alpha_{21} U_2 V_1^H + \alpha_{22} U_2 V_2^H) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\alpha_{ij} = U_i \mathbf{E} V_j^H$ .

Для  $\text{rk } S = 1$  и сингулярных векторов  $U_1, V_1$

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S) = -U_1^H \mathbf{E} V_1 U_1 V_1^H + U_1 U_1^H \mathbf{E} + \mathbf{E} V_1 V_1^H \quad (4.2)$$

Применительно к рассматриваемым методам, приведённые формулы ищут первый член ошибки восстановления для CSSA, тогда как их вещественные аналоги ищут то же для SSA.

Обозначим за:

$f^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S))$  первый член ошибки восстановления  $S$  метода CSSA,

$f_{\text{Re}}^{(1)*} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{E}), \text{Re}(S)))$  первый член ошибки восстановления  $\text{Re}(S)$  метода SSA,

$f_{\text{Im}}^{(1)*} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{E}), \text{Im}(S)))$  первый член ошибки восстановления  $\text{Im}(S)$  метода SSA.

**Теорема 1.** Пусть сингулярные вектора  $S$ ,  $\text{Re}(S)$  и  $\text{Im}(S)$  совпадают и  $\text{rk } S \leq 2$ .

Тогда

$$f^{(1)} = f_{\text{Re}(S)}^{(1)*} + i f_{\text{Im}(S)}^{(1)*}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим матрицу возмущения  $\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}) + i \text{Im}(\mathbf{E})$ .

Заметим, что в (4.1)  $\mathbf{E}$  входит линейно, это означает, что

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S) = \mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{E}), S) + i \mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{E}), S). \quad (4.3)$$

Тогда, из (4.3), линейности диагонального усреднения и равенства сингулярных векторов, получаем

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S)) = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{E}), S)) + i \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{E}), S)) = \\ &= \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Re}(\mathbf{E}), \text{Re}(S))) + i \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)}(\text{Im}(\mathbf{E}), \text{Im}(S))) = f_{\text{Re}}^{(1)*} + i f_{\text{Im}}^{(1)*} \end{aligned}$$

□

**Замечание.** В случае  $\text{rk } S = 1$ , достаточно требовать совпадающие траекторные пространства вещественной и мнимой части размерности 1.

**Замечание.** В случае  $\text{rk } S = 2$  условию удовлетворяет сигнал  $S$  с  $\text{Re}(S) = \text{Im}(S)$ .

**Замечание.** Примером сигнала, для которого в общем случае очевидно не выполняются требования теоремы, является комплексная экспонента  $s_n = e^{\phi(n) + i\psi(n)}$ , поскольку  $\text{rk } S = 1$ , а  $\text{rk } \text{Re}(S) = \text{rk } \text{Im}(S) = 2$ .

## 4.1. Шум

Рассмотрим случай, когда сигнал возмущён шумом  $R$  с независимыми вещественной и мнимой частями.

Тогда  $\mathbf{E}$  — траекторная матрица шума  $R$ .

**Замечание.** Из независимости вещественной и мнимой частей шума и теоремы 1,  $f_{\text{Re}(S)}^{(1)*}$  и  $f_{\text{Im}(S)}^{(1)*}$  независимы между собой, как две линейные комбинации независимых наборов.

**Лемма 1.** Дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий вещественной и мнимой частей данной случайной величины, если они независимы.

*Доказательство.*  $z = x + iy$  — с.в.,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}z &= \mathbb{E}(|z - \mathbb{E}z|^2) = \mathbb{E}(|(x - \mathbb{E}x) + i(y - \mathbb{E}y)|^2) = \\ &= \mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 + \mathbb{E}(y - \mathbb{E}y)^2 = \mathbb{D}x + \mathbb{D}y\end{aligned}$$

□

**Утверждение 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1.

Тогда

$$\mathbb{D}f_l^{(1)} = \mathbb{D}f_{\text{Re},l}^{(1)*} + \mathbb{D}f_{\text{Im},l}^{(1)*}. \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Получается автоматически из теоремы 1 и леммы 1. □

**Замечание.** В случае  $\text{rk } S = 2$  численными экспериментами, приведёнными в [7, раздел 4.3.3.3] показано, что равенство (4.4) приближённо выполнено для синусоидальных сигналов со сдвигом, не равным  $\pi/2$ .

#### 4.1.1. Частный случай

Рассматриваем ряд с  $s_n = c_1 + ic_2$  и матрицу шума  $\mathbf{E}$  с дисперсиями вещественной и мнимой частей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Сингулярные вектора такого ряда являются нормированными векторами с одинаковыми компонентами, они также сингулярные для вещественной и мнимой части.

Тогда выполняются условия теоремы 1 и

$$f^{(1)} = f_{\text{Re}(S)}^{(1)*} + i f_{\text{Im}(S)}^{(1)*}.$$

В данном случае  $\text{Re}(S)$  и  $\text{Im}(S)$  являются вещественными константами.

В работе [3] была получена аналитическая формула для дисперсии каждого элемента вещественных констант, в нашем случае  $f_{\text{Re}}^{(1)*}$  и  $f_{\text{Im}}^{(1)*}$ .

Обозначим  $L = \alpha N$ ,  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} 2l/N$ , воспользовавшись утверждением 1, получаем

$$\mathbb{D}f_l^{(1)} = \mathbb{D}f_{\text{Re},l}^{(1)*} + \mathbb{D}f_{\text{Im},l}^{(1)*} \sim \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{N} \begin{cases} D_1(\alpha, \lambda), & 0 \leq \lambda \leq 2(1 - 2\alpha) \\ D_2(\alpha, \lambda), & 2(1 - 2\alpha) < \lambda < 2\alpha, \\ D_3(\alpha, \lambda), & 2\alpha \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
D_1(\alpha, \lambda) &= \frac{1}{12\alpha^2(1-\alpha)^2}(\lambda^2(\alpha+1) - 2\lambda\alpha(1+\alpha)^2 + 4\alpha(-3\alpha+3+2\alpha^2)) \\
D_3(\alpha, \lambda) &= \frac{1}{6\alpha^2\lambda^2(\alpha-1)}(\lambda^4 + 2\lambda^3(3\alpha-2-3\alpha^2) + \\
&+ 2\lambda^2(3-9\alpha+12\alpha^2-4\alpha^3) + 4\lambda(4\alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-1) + \\
&+ 8\alpha - 56\alpha^2 + 144\alpha^3 - 160\alpha^4 + 64\alpha^5) \\
D_3(\alpha, \lambda) &= \frac{2}{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Формулы выписаны только до середины ряда из симметричности дисперсии первого порядка ошибки относительно середины ряда.

## 4.2. Выброс

Рассматриваем временной ряд с константным комплексным сигналом и выбросом  $a+ib$ , добавленным к  $k$ -ому элементу сигнала. Матрицу возмущения для выброса  $a+ib$  можно записать как  $\mathbf{E} = a\mathbf{G} + ib\mathbf{G}$ , где  $\frac{1}{a} \operatorname{Re} \mathbf{E} = \frac{1}{b} \operatorname{Im} \mathbf{E} = \mathbf{G}$ . Из теоремы 1 получаем, что достаточно найти вид ошибки для вещественного выброса, общий случай будет выглядеть как эта ошибка для выброса  $a$  в вещественной части и эта же ошибка для выброса  $b$  в мнимой.

Рассмотрим временной ряд с константным комплексным сигналом и выбросом  $a$ , добавленным к  $k$ -ому элементу сигнала.

Матрица возмущения для выброса  $a$

$$\mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{K \times L}.$$

$$U_1 = \{1/\sqrt{L}\}_{i=1}^L, V_1 = \{1/\sqrt{K}\}_{i=1}^K, K = N - L + 1,$$

Не умаляя общности, будем считать, что  $L \leq K$ .

#### 4.2.1. $0 < k < L$

Рассматриваем формулу (4.2)

$$\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{E}, S) = -U_1^H \mathbf{E} V_1 U_1 V_1^H + U_1 U_1^H \mathbf{E} + \mathbf{E} V_1 V_1^H$$

Рассмотрим члены суммы покомпонентно.

Часть первого слагаемого

$$U_1^H \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a/\sqrt{L} & \dots & a/\sqrt{L} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Часть первого слагаемого

$$U_1^H \mathbf{E} V_1 = ka/\sqrt{LK}$$

Часть первого слагаемого

$$U_1 V_1^H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{LK} & \dots & 1/\sqrt{LK} \\ \vdots & & \vdots \\ 1/\sqrt{LK} & \dots & 1/\sqrt{LK} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{L \times K}$$

Теперь первое слагаемое целиком

$$U_1^H \mathbf{E} V_1 U_1 V_1^H = \begin{pmatrix} ka/LK & \dots & ka/LK \\ \vdots & & \vdots \\ ka/LK & \dots & ka/LK \end{pmatrix}$$

Часть второго слагаемого

$$U_1 U_1^H = \begin{pmatrix} 1/L & \dots & 1/L \\ \vdots & & \vdots \\ 1/L & \dots & 1/L \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{L \times L}$$

Теперь второе слагаемое целиком

$$U_1 U_1^H \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Часть третьего слагаемого

$$V_1 V_1^H = \begin{pmatrix} 1/K & \dots & 1/K \\ \vdots & & \vdots \\ 1/K & \dots & 1/K \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{K \times K}$$

Теперь третье слагаемое целиком

$$\mathbf{E}V_1V_1^{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{pmatrix} (L+K-k) & \dots & (L+K-k) & \dots & (L-k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (L+K-k) & \dots & (L+K-k) & \dots & (L-k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (K-k) & \dots & (K-k) & \dots & -k \end{pmatrix}$$

$$f^{(1)} = \mathcal{H}(\mathbf{H}^{(1)})$$

$$k \leq L/2$$

$$k \leq K-L$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L+K-k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L+K-l)k, & k < l \leq L \\ \frac{1}{L}K(L+k-l), & L < l < L+k \\ 0, & L+k \leq l \leq K \\ \frac{1}{N-l+1}(K-l)(L-k), & K < l < K+k \\ -k, & K+k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k \leq L/2$$

$$k > K-L$$



$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l \leq L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L < l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(K - l)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > L/2$$

$$k \leq K - L$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < L + k \\ 0, & L + k \leq l \leq K \\ \frac{1}{N-l+1}(L - K)(L - k), & K < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > L/2$$

$$k > K - L$$

$$k \leq K/2$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(L - K)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

$$k > K/2$$

$$f_l^{(1)} = \frac{1}{LK} \begin{cases} (L + K - k), & 1 \leq l \leq k \\ \frac{1}{l}(L + K - l)k, & k < l < L \\ \frac{1}{L}K(L + k - l), & L \leq l < K \\ \frac{1}{N-l+1}(2KL - l(L + K - k)), & K \leq l \leq L + k \\ \frac{1}{N-l+1}(K - l)(L - k), & L + k < l < K + k \\ -k, & K + k \leq l \leq N \end{cases}.$$

#### 4.2.2. $L \leq k \leq K$

Первое слагаемое

$$U_1^H \mathbf{E} V_1 U_1 V_1^H = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \end{pmatrix}$$

Второе слагаемое

$$U_1 U_1^H \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a/L & \dots & a/L & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Третье слагаемое

$$\mathbf{E} V_1 V_1^H = \begin{pmatrix} a/K & \dots & a/K \\ \vdots & & \vdots \\ a/K & \dots & a/K \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{a}{L} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_l^{(1)} = \frac{a}{L} \begin{cases} \frac{1}{\min(L, l)}(l - k + L), & k - L \leq l \leq k \\ \frac{1}{\min(L, N-l+1)}(L + k - l), & k < l < L + k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

### 4.2.3. $K < k \leq N$

Данный случай полностью аналогичен инвертированному первому случаю, то есть строим ряд для  $N - k + 1$  и разворачиваем его.

Полученные формулы были численно проверены для частного случая.

### 4.2.4. Инвариант по RMSE

Обозначим  $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (f_l^{(1)})^2}$  для ряда  $F = S + R$ .

Матрицу возмущения для выброса  $a + ib$  можно записать как  $\mathbf{E} = a\mathbf{G} + ib\mathbf{G}$ , где  $\frac{1}{a} \operatorname{Re} \mathbf{E} = \frac{1}{b} \operatorname{Im} \mathbf{E} = \mathbf{G}$

**Утверждение 2.** Пусть сигнал  $S$  удовлетворяет условиям теоремы 1.

Тогда  $RMSE$  для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a + ib$ , и ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a^* + ib^*$ , т.ч.  $|a^* + ib^*| = |a + ib|$ , совпадают.

*Доказательство.*  $\mathbf{E} = a\mathbf{G} + ib\mathbf{G}$

По теореме 1 и формулам (4.1), (4.2)

$$f_l^{(1)} = a\mathcal{H}(\mathbf{H}(\mathbf{G}), \operatorname{Re}(S)) + ib\mathcal{H}(\mathbf{H}(\mathbf{G}), \operatorname{Im}(S)) = c_l(a + bi).$$

Для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a + ib$

$$RMSE = |a + ib| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N c_l^2}$$

Рассмотрим  $a^* + ib^*$ , такое что  $|a^* + ib^*| = |a + ib|$ .

Для ряда с сигналом  $S$  и выбросом  $a^* + ib^*$

$$RMSE = |a^* + ib^*| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N c_l^2} = |a + ib| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N c_l^2}$$

□

## Глава 5

## Ошибки восстановления для комплексной экспоненты

Наиболее распространенным примером сигнала временных рядов для анализа, является сумма комплексных экспонент. Однако, как замечалось ранее, комплексная экспонента, в общем случае, не удовлетворяет условию теоремы 1, а потому полученные результаты для такого ряда неприменимы.

В связи с этим, в данном разделе рассматриваются примеры комплексной экспоненты и на них проверяется применимость полученных результатов.

### 5.1. Вещественные выбросы

Рассмотрим случай вещественных выбросов для комплексной экспоненты. Попробуем проверить результат теоремы 1 для этого случая на примере.

Будем рассматривать экспоненту без шума, длины  $N = 240$

$$x_n = e^{4n/N} e^{2n\pi/30i}.$$

с 5% выбросов вида  $5 \operatorname{Re}(x_i)$ .

Графики ряда представлены на Рис. 5.1, 5.2.

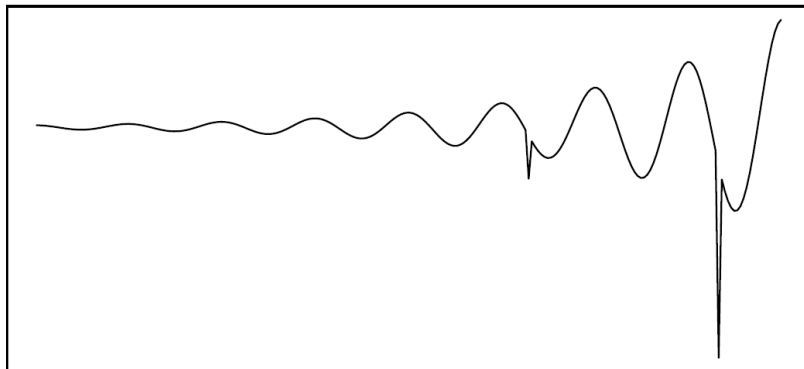


Рис. 5.1. График вещественной части ряда.

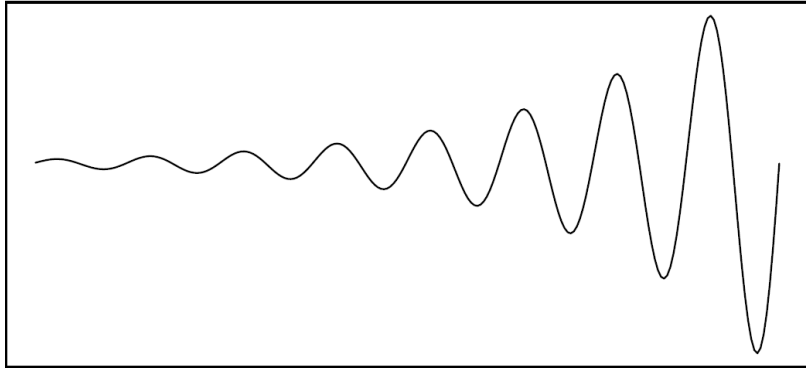
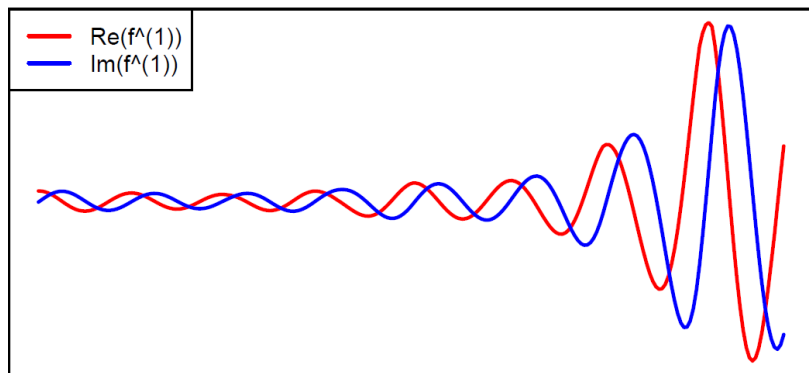


Рис. 5.2. График мнимой части ряда.

Для данного ряда рассмотрим  $\operatorname{Re}(f^{(1)})$  и  $\operatorname{Im}(f^{(1)})$ , проверим, ведут ли они себя так же, как  $f_{\operatorname{Re}}^{(1)*}$  и  $f_{\operatorname{Im}}^{(1)*}$ .

Графики  $\operatorname{Re}(f^{(1)})$  и  $\operatorname{Im}(f^{(1)})$  приведены на Рис. 5.3.

Рис. 5.3. Графики  $\operatorname{Re}(f^{(1)})$  и  $\operatorname{Im}(f^{(1)})$ .

По представленным графикам видно, что вещественная и мнимая части ошибки восстановления ведут себя одинаково, тогда как  $f_{\operatorname{Im}}^{(1)*} = 0$ , а  $f_{\operatorname{Re}}^{(1)*} \neq 0$  из-за того, что все выбросы в вещественной части. Получаем, что результат теоремы 1 не выполняется для общего случая комплексной экспоненты.

## Заключение

В работе были приведены и исследованы два обобщения робастных вариантов метода SSA на комплексно-значный случай.

Был проведён обзор двух известных подходов к построению робастных версий SSA: замена проекции по норме  $\mathbb{L}_2$  на проекцию по норме  $\mathbb{L}_1$  и на взвешенную проекцию по норме  $\mathbb{L}_2$  и их имплементация на комплексный случай.

Работа методов была показана на нескольких примерах, подтверждающих эффективность робастных модификаций, в сравнении с Complex SSA для рядов с выбросами. Все рассматриваемые модификации были реализованы на R.

В подотчётном семестре формула первого ошибки восстановления для рядов методом CSSA, ранга не больше двух, была рассмотрена и обобщена на комплексный случай. Была сформулирована и доказана теорема о выражении первого порядка ошибки метода CSSA через ошибку метода SSA.

Был разобран случай возмущения ряда шумом. Для него было сформулировано и доказано утверждение о выражении дисперсии ошибки метода CSSA через ошибку метода SSA. Для случая константного комплексного ряда была получена явная формула дисперсии первого порядка ошибки восстановления для каждого элемента ряда.

Был разобран случай возмущения ряда единичным выбросом. Для случая константного ряда была получена явная формула первого порядка ошибки восстановления для каждого элемента. Для более общего случая было найдено инвариантное по RMSE преобразование, переводящее комплексный выброс в вещественный, с сохранением RMSE.

Помимо этого был рассмотрен пример комплексной экспоненты, на которую не распространяются полученные теоретические результаты, с вещественными выбросами. Было показано, что теорема о выражении первого порядка ошибки для CSSA через ошибку для SSA неприменима в этом случае. Так же было показано, что найденное преобразование не является инвариантом для CSSA в этом случае, но для остальных методов, на конкретном примере, это инвариант.

## Список литературы

1. А. Л. Третьякова. Робастные варианты метода анализа сингулярного спектра : магистерская работа ; Санкт-Петербургский Государственный Университет. — Санкт-Петербург, 2020.
2. V.V. Nekrutkin. Perturbations in SSA. — 2008. — Manuscript.
3. Е. М. Власьева. Исследование ошибок восстановления в методе «Гусеница» с помощью теории возмущений : дипломная работа ; Санкт-Петербургский Государственный Университет. — Санкт-Петербург, 2008.
4. K. Qifa, K. Takeo. Robust L1 Norm Factorization in the Presence of Outliers and Missing Data by Alternative Convex Programming // Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2005). — 2005. — June.
5. Solving Weighted Least Squares (WLS) problems on ARM-based architectures / J. A. Belloch, B. Bank, F. D. Igual, E. S. Quintana-Ortí, and A. M. Vidal // The Journal of Supercomputing. — 2017. — 01. — Vol. 71. — P. 530–542.
6. K. Chen, M. Sacchi. Robust reduced-rank filtering for erratic seismic noise attenuation // GEOPHYSICS. — 2015. — 01. — Vol. 80. — P. V1–V11.
7. N. Golyandina, A. Korobeynikov, A. Zhigljavsky. Singular spectrum analysis with R. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2018.
8. Н. Э. Голяндина. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. — Санкт-Петербург : БММ, 2004.
9. J. P. Brooks, S. Jot. pcaL1: An Implementation in R of Three Methods for L1-Norm Principal Component Analysis. — 2012. — unpublished.
10. L1-Norm Principal-Component Analysis of Complex Data / N. Tsagkarakis, P. P. Markopoulos, G. Sklivanitis, and D. A. Pados // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2018. — 06.