Вступ

Темпи розвитку економіки, розв'язання багатьох соціальних проблем залежать від інтенсивності впровадження досягнень науково-технічного прогресу в галузях народного господарства. В свою чергу, цю проблему неможливо розв'язати без швидкого розвитку і впровадження в усі сфери людської діяльності сучасних засобів обчислювальної техніки і прикладної математики.

Одним з розділів прикладної математики, до якого інженерно-технічні працівники і економісти проявляюсь підвищений інтерес, це мінімізація функцій і функціоналів. Велика кількість різноманітних задач і методів їх розв'язання обумовлює мати посібники, в яких в стислій формі було б викладено алгоритми самих відомих методів і методику їх застосування. До цього спонукають також нові форми навчання студентів.

Основне завдання посібника – це допомога студентам в опануванні основних алгоритмів розв'язування задач мінімізації функцій багатьох змінних, задач варіаційного числення і оптимального керування.

Частина I

Мінімізація функцій

1 Мінімізація функцій однієї змінної

Нехай на числовій прямій E^1 задана скалярна функція $\varphi(x)$. Розглянемо задачу пошуку точок, в яких функція досягає свого мінімального або максимального значення. Точка мінімуму або максимуму функції будемо називати максимальними точками.

Сформулюємо означення, що відносяться до теорії мінімізації функції.

Означення 1 *Якщо для всіх $x \in E^1$ виконується умова $\varphi(x^*) \leq \varphi(x)$, то точка x^* називається точкою глобального (абсолютного) мінімуму функції $\varphi(x)$.*

Означення 2 *Якщо для достатньо малого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $\varphi(x^*) \leq \varphi(x)$ для всіх $x \in E^1$ таких, що $|x - x^*| \leq \varepsilon$, то точка x^* називається точкою локального (відносного) мінімуму функції $\varphi(x)$.*

Означення 3 *Точка x^* називається точкою строгого мінімуму (в локальному або глобальному сенсі), якщо відповідні нерівності в означеннях точок локального і глобального мінімумів виконуються як строгі (при $x \neq x^*$).*

Аналогічним чином вводиться означення точок локального і глобального максимумів.

Зазначимо, що точки глобального мінімуму є точками локального мінімуму. І тому далі розглядатимемо тільки точки локального мінімуму.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму першого порядку) *Нехай функція $\varphi(x)$ визначена і диференційована на E^1. Якщо x^* - точка локального мінімуму (максимуму), то в ній перша похідна функції дорівнює нулю:*

$$\frac{d\varphi(x^*)}{dx} = 0. \tag{1}$$

Означення 4 *Точки, що задовольняють умові (1) називаються стаціонарними.*

Приклад 1 *Знайти стаціонарні точки функції* $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + 6$. *Знайдемо нулі першої похідної:* $\frac{d\varphi(x)}{dx} = x^2 - 10x + 24$. *Маємо* $x^1 = 4, x^2 = 6$. *Отже, в точках* x^1 *і* x^2 *функція може досягати екстремальних значень.*

Теорема 2 (необхідна умова екстремуму другого порядку) *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена і двічі диференційована на* E^1. *Тоді в точці локального мінімуму (максимуму) друга похідна функції невід'ємна (недодатна):* $\frac{d^2\varphi(x^*)}{dx^2} \geq 0 \ \ (\leq 0)$.

Приклад 2 *Розглянемо ту ж саму функцію* $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + 6$. *Друга похідна має вигляд* $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 2x - 10$. *У стаціонарній точці* $x^1 = 4$ *друга похідна дорівнює* -2, *тобто від'ємна. У цій точці може досягатися максимум функції. У точці* $x^2 = 6$ *друга похідна додатна, тобто в ній може досягатися мінімум функції.*

Теорема 3 (достатня умова екстремуму) *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена, двічі диференційована на* E^1. *Якщо у стаціонарній точці* x^* *виконується умова* $\frac{d^2\varphi(x^*)}{dx^2} > 0 \ \ (< 0)$, *то точка* x^* *- точка локального мінімуму (максимуму) функції* $\varphi(x)$.

Приклад 3 *Розглядається відома нам функція* $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 24x + 6$. *У стаціонарній точці* $x^1 = 4$ *друга похідна дорівнює* -2. *Отже, в цій точці досягається максимум функції, а в точці* $x^2 = 6$ *друга похідна дорівнює* 2, *тобто в ній досягається мінімум.*

Якщо в стаціонарній точці x^* друга похідна дорівнює нулю, то питання про мінімум чи максимум у цій точці залишається відкритим.

Теорема 4 (загальна достатня умова екстремуму) *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена на* E^1 *і має неперервні похідні до k-го порядку включно. Якщо в точці* x^* *похідні до (k-1)-го порядку дорівнюють нулю:*

$$\frac{d\varphi(x^*)}{dx} = 0, \ldots, \frac{d^{k-1}\varphi(x^*)}{dx^{k-1}} = 0, \frac{d^k\varphi(x^*)}{dx^k} \neq 0, \text{ то:}$$

1. x^* *є точкою локального мінімуму, якщо k-парне число і* $\frac{d^k\varphi(x^*)}{dx^k} > 0$*;*

2. x^* *є точкою локального максимуму, якщо k-парне число і* $\frac{d^k\varphi(x^*)}{dx^k} < 0$*;*

3. x^* *не є ні точкою мінімуму, ні точкою максимуму, якщо k – непарне число.*

Далі сформулюємо необхідну умову мінімуму функції на відрізку $[a; b]$.

Теорема 5 *Якщо точка $x^* = a$ є точкою мінімуму функції $\varphi(x)$ на відрізку $[a; b]$, то $\frac{d\varphi(x^*)}{dx} \geq 0$, а якщо $x^* = b$ – точка мінімуму, то $\frac{d\varphi(x^*)}{dx} \leq 0$.*