$$
\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{3,1}^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{3,1}} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 6 & 6 & 15 \\ 4 & 6 & 11 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{2,1}(3)^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{2,1}(3)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 6 & 6 & 15 \\ 4 & 6 & 11 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 11 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{3,1}(2)^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{3,1}(2)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 11 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{4,1}(1)^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{4,1}(1)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{4,2}(-1)^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{4,2}(-1)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{3,2}(-1)^{-1}} \right) \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach streichen der beiden rechten/unteren Spalten/Zeilen erhalten wir die Rangfaktorisierung mit Rang(A)=2

$$
\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 6 & 6 & 15 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}
$$