

MODELISATION ET EVALUATION D'UN SYSTEME DE TRANSPORT PAR L'ALGEBRE MAX-PLUS

A.NAIT-SIDI-MOH, M-A.MANIER, A.ELMOUDNI

Laboratoire Systèmes et Transport
UTBM, site de Belfort 90010 Belfort cedex
Tel : (33) 3 84 58 33 97 Fax : (33) 3 84 58 33 42
Mél : (Ahmed.Nait-Sidi-Moh, Marie-ange.Manier, Abdellah.Elmoudni)@utbm.fr

RÉSUMÉ : Cet article porte sur la modélisation d'un réseau de transport en commun (bus). L'objectif est l'étude de l'évolution des temps d'attente dans les stations de correspondance. La modélisation est faite par les réseaux de Petri (RdP) et en particulier sa partie graphe d'événement temporisé. Une équation d'état est déduite par l'utilisation de l'algèbre des diodes permettant ainsi d'évaluer les performances de notre réseau de transport.

MOTS-CLÉS: Transport, graphe d'événement temporisé, algèbre des diodes.

1. INTRODUCTION

Les systèmes de transports sont des systèmes fortement conditionnés par leur environnement. Ils sont conçus à partir de plusieurs ressources. Ils doivent répondre aux différents services tels que les déplacements des passagers d'un endroit à un autre dans les meilleures conditions, en minimisant les temps d'attente dans les stations de correspondance, etc...

Face à ces problèmes, il est nécessaire de disposer d'un outil de modélisation et d'analyse qui permet d'évaluer les performances de ces systèmes et de leur élaborer des politiques de régulation pour l'amélioration de la qualité de service. Comme les systèmes de production et les systèmes informatique, les systèmes de transport que nous étudions sont de type à événements discrets. Pour les modéliser, nous utilisons, en l'adaptant, une sous classe de l'outil réseaux de Petri: les graphes d'événement temporisés (GET). Le but tout d'abord est d'élaborer un modèle linéaire déduit de ces GET en utilisant l'algèbre des diodes. Ensuite, nous évaluons les performances de ces systèmes par l'évaluation des temps d'attente dans les points de correspondances. Et enfin nous proposons des politiques de régulation qui permettent de minimiser les temps d'attente des passagers sur une période de travail, en agissant sur les horaires initiaux de départ des bus ou en rajoutant des ressources supplémentaires sur les lignes du réseau de transport.

2. LE SYSTEME DE TRANSPORT ETUDIÉ

Nous nous intéressons ici à la gestion des correspondances sur un réseau de transport urbain constitué de lignes de bus. Sur chaque ligne, un bus réalise un circuit et passe au même endroit avec une fréquence que nous considérons constante. Les bus de deux lignes différentes fonctionnent de manières indépendantes. Les lignes comportent des arrêts communs que nous appelons stations de correspondance.

Ces arrêts permettent aux passagers de changer de ligne en fonction de leur destination.

Dans la suite, nous considérons un système simplifié constitué de deux lignes de bus (Figure 1). Sur chacune d'elle, un seul bus est initialement en circulation. Nous étudions le phénomène d'attente des passagers à la station de correspondance Sc. Nous considérons les passagers descendant d'un bus de la ligne 1 venant de Sd1, et souhaitant prendre un bus de la ligne 2 vers la station Sa2 (Figure 1).

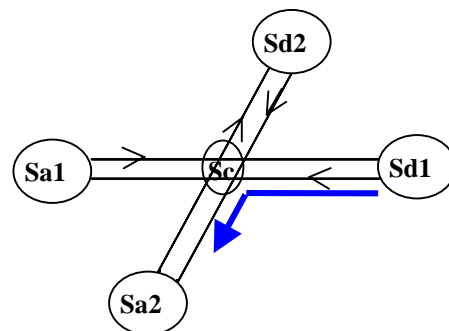


Figure 1. Réseau de transport : 2 lignes de bus.

Sdi : station de départ de la ligne i

Sai : station d'arrivée de la ligne i

Sc : station de correspondance

Circuit d'un bus de la ligne i : **Sdi – Sc – Sai – Sdi**

Trajet des passagers étudié : **Sd1 – Sc – Sa2**

3. MODÉLISATION

3.1. Modélisation par réseau de Petri (RdP)

Notre objectif porte sur l'utilisation de l'algèbre des diodes pour la modélisation et ensuite la commande des systèmes de transport. Plusieurs études montrent les possibilités de cet outil pour les systèmes de production pouvant être représentés par des graphes d'événements (GE) (Spacek et al, 1999).

Un GE est un réseau de Petri pour lequel chaque place a exactement une transition en amont et une transition en aval (David et al; 1992).

Nous modélisons donc tout d'abord un réseau de bus par un GE temporisé (GET). Sur ce graphe, les transitions représentent certains arrêts de bus. Le franchissement d'une transition correspond à l'arrivée d'un bus à un arrêt. Les places du réseau sont associées:

soit à l'attente d'un groupe de passagers à une station de correspondance; à ces places sont associées des temporisations nulles (cas idéal où un passager n'attend pas, les temps de montée et descente de bus étant négligés ici).

soit au déplacement d'un bus entre deux arrêts non obligatoirement successifs (agrégation d'une suite d'arrêts successifs d'une ligne). Ces places sont temporisées par le temps de déplacement de bus entre les arrêts considérés.

Les jetons circulant sur le réseau sont associés soit à des passagers attendant aux stations de correspondance, soit à des bus.

Le problème simplifié évoqué au § 2 est modélisé par le GET de la figure Figure 2 :

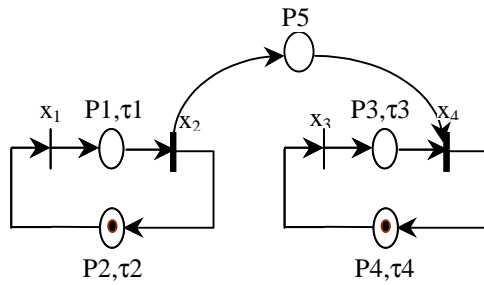


Figure 2. Graphe d'événement temporisé (GET)

- : P1 à P4 déplacement des bus
- P5: attente de passager en Sc
- | : stations de départ Sdi de chaque ligne i
- : station de correspondance
- : Bus et/ou passager

Les circuits $(x_1, P1, x_2, P2)$ et $(x_3, P3, x_4, P4)$ représentent respectivement les lignes 1 et 2.

x_1 et x_3 modélisent les stations de départ Sd1 et Sd2 des deux lignes. x_2 et x_4 représentent la même station de correspondance Sc commune aux deux lignes. La place P_5 modélise l'attente des passagers en Sc venant d'un bus B1 et prenant un bus B2.

Le fonctionnement du modèle est le suivant : les deux bus B1 et B2 sont au départ aux stations Sd1 et Sd2 respectivement, ce qui valide les transitions x_1 et x_3 . Après le tir de ces transitions, les places P1 et P3 contiennent chacune un jeton (bus). Au bout de τ_1 unités de temps la transition x_2 est validée (passage du bus en Sc), son franchissement met un jeton dans P2 (déplacement jusqu'à Sa1, puis retour du bus B1 vers Sd1) et un autre jeton dans la place P5 (lot de passagers descendus de B1 en Sc et attendant un bus B2). Une fois

x_2 franchie, la transition x_4 est validée aussi. Son tir enlève les deux jetons de P3 et P5 et met un seul jeton dans la place P4 (le bus B2 est passé en Sc en récupérant les passagers) et ainsi de suite.

Les périodes de passage de deux lignes sont $\lambda_1 = \tau_1 + \tau_2$ pour la ligne 1 et $\lambda_2 = \tau_3 + \tau_4$ pour la ligne 2.

Si les deux bus B1 et B2 partent initialement de Sd1 et Sd2 à t_1 et t_2 respectivement, et afin d'assurer le fonctionnement du modèle, on pose les hypothèses suivantes:

- $t_1 + \tau_1 \leq t_2 + \tau_3$ cette hypothèse signifie que le premier bus qui arrive en Sc est un bus B1.
- Pour éviter le phénomène d'attente des bus B2 à la station Sc on considère une séquence de bus B1- B2- B1- B2- B1

3.2. Modélisation par équation d'état

Équation d'état dans l'algèbre usuelle

A chaque transition x_i du modèle on associe un dateur $x_i(k)$ qui correspond à la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de x_i . Le système d'équations linéaires dans l'algèbre usuelle est donné par:

$$(S1) \begin{cases} x_1(k) = \tau_2 + x_2(k-1) \\ x_2(k) = \tau_1 + x_1(k) \\ x_3(k) = \tau_4 + x_4(k-1) \\ x_4(k) = \max[\tau_3 + x_3(k), x_2(k)] \end{cases}$$

Avant de passer à la représentation du système (S1) dans l'algèbre $(\max, +)$ (Bacc et al, 1992), nous donnons un bref rappel des notions élémentaires relatives à cette algèbre.

Rappel sur la théorie de l'algèbre $(\max, +)$

Un dioïde D est un ensemble muni de deux lois de compositions internes \oplus (addition) et \otimes (multiplication). Les éléments neutres pour ces deux lois sont respectivement ε et e .

Les deux lois vérifient les propriétés suivantes :

- la loi \oplus est associative, commutative et idempotent ($a \oplus a = a$).
- la loi \otimes est associative, distributive par rapport à \oplus .
- ε est absorbant pour la loi \otimes : $\forall a \in D$
 $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.
- la relation \geq est une relation d'ordre dans le dioïde D : $\forall a, b \in D$, $a \geq b$
 $\Leftrightarrow a \oplus b = a$.
- un dioïde est dit complet s'il est fermé pour toutes sommes infinies de ces éléments, et si la loi \otimes est distributive par rapport à ces sommes infinies.
- La solution de l'équation $ax \oplus b = x$ est donnée par
 $x = a^* b$
avec $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n \oplus \dots$

et dans le cas d'un dioïde $D^{n \times n}$ (dont les éléments sont des matrices à coefficients dans D),

l'équation $AX \oplus B = X$ a pour solution :

$$X = A^* B$$

avec $A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n \oplus \dots$

où E est la matrice identité dans le dioïde D .

Exemple d'un dioïde: \bar{IR}_{\max} est l'ensemble $IR \cup \{+\infty, -\infty\}$ muni de \oplus et \otimes définies par :

$a \oplus b = \max(a, b)$, $a \otimes b = a + b$, $\varepsilon = -\infty$,
 $T = +\infty$ et $e = 0$.

Équation d'état dans l'algèbre des dioïdes

Le système d'équations linéaires (S1) est traduit dans l'algèbre (max, +) par (S2) :

$$(S2) \begin{cases} x_1(k) = \tau 2 \otimes x_2(k-1) \\ x_2(k) = \tau 1 \otimes x_1(k) \\ x_3(k) = \tau 4 \otimes x_4(k-1) \\ x_4(k) = \tau 3 \otimes x_3(k) \oplus x_2(k) \end{cases}$$

Soit le vecteur d'état $X(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)]$.
 La forme matricielle du système (S2) est alors :

$$X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_1 \otimes X(k-1) \quad (1)$$

Où A_0 et A_1 sont deux matrices dans le dioïde \bar{IR}_{\max} telles que :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau 3 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \tau 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

La solution de l'équation (1) est donnée sous forme d'une équation récurrente d'ordre 1 par :

$$X(k) = A_0^* \otimes A_1 \otimes X(k-1) = A \otimes X(k-1) \quad (2)$$

Avec

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau 1 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau 1 & e & \tau 3 & e \end{pmatrix}$$

et

$$A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \tau 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau 1 + \tau 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau 4 \\ \varepsilon & \tau 1 + \tau 2 & \varepsilon & \tau 3 + \tau 4 \end{pmatrix}$$

4. ÉVALUATION DES PERFORMANCES

4.1. Evaluation des temps de correspondance

Les composantes du vecteur d'état $X(k)$ sont calculées à partir de l'équation (2) par :

Pour $i = 1, \dots, 4$

$$x_i(k) = \max_{j=1, \dots, 4} (A_{ij} + x_j(k-1)) = \bigoplus_{j=1}^4 (A_{ij} \otimes x_j(k-1))$$

Le temps de correspondance ou le temps d'attente des passagers au niveau de la station Sc est donné par la différence des dates d'arrivée des bus. Puisqu'on s'intéresse à une seule correspondance ($B1$ vers $B2$), les dates à considérer pour n'importe quel tour des bus sont $x_2(k)$ (l'arrivée du bus $B1$ en Sc) et $x_4(k)$ (l'arrivée du bus $B2$ en Sc).

Le temps de correspondance pour le $k^{\text{ème}}$ passage des bus est donné par :

$$T(k) = \left\lfloor \frac{x_4(k)}{x_2(k)} \right\rfloor$$

($T(k)$ est la différence $x_4(k) - x_2(k)$ traduit dans l'algèbre (max, +)).

Si on suppose que le nombre de tours effectués par les bus est N , alors le temps de correspondance total pendant la période du travail est la somme des $T(k)$, soit :

$$T_{\text{corr}} = \bigotimes_{k=1}^N T(k) = \bigotimes_{k=1}^N \left\lfloor \frac{x_4(k)}{x_2(k)} \right\rfloor$$

Le problème qui se pose alors est la minimisation de T_{corr} . Plusieurs possibilités peuvent être envisagées. L'une d'elles consiste à modifier les dates des premiers départs des bus. Ceci est compatible avec une approche de planification a priori dans laquelle on souhaite établir de nouveaux horaires. Au niveau de notre modèle, cela revient à imposer à $B1$ et $B2$ d'arriver en même temps en Sc pour leur 1^{er} tour, soit $x_4(1) = x_2(1)$, autrement dit : $t1 + \tau 1 = t2 + \tau 3$. Pour le cas traité ici T_{corr} est minimal si $T(1)$ égale zéro.

D'autres facteurs peuvent être modifiés dans le but de minimiser T_{corr} . On peut ainsi augmenter soit la vitesse

des bus, soit leur nombre. C'est ce dernier cas que nous détaillons dans la suite.

4.2. Détermination du circuit critique et des valeurs propres de la matrice A

Nous nous inspirons des travaux de (Olsder et al, 1998). Notons qu'un problème similaire a été étudié. Le système modélisé est un réseau de lignes ferroviaires. La différence essentielle entre ces types de systèmes est que les trains « s'attendent » pour permettre aux passagers d'effectuer la correspondance, tandis que les bus fonctionnent indépendamment des bus des autres lignes, compte tenu de fréquences de passage plus importantes. Dans notre cas nous essayons d'ajouter un ou plusieurs bus sur une ligne ou plusieurs lignes du réseau. Pour identifier la ligne nécessitant de nouveaux bus nous analysons la matrice associée au système (S2). Nous cherchons alors ses valeurs propres à partir de son graphe de précedence. La plus grande valeur propre de la matrice A est la longueur du circuit critique dans son graphe. Cette valeur représente la période du circuit critique dans le réseau. L'ajout de bus sur ce circuit permet d'augmenter la fréquence de passage des bus à la station Sc .

Dans notre cas la matrice A est une matrice 4x4 a

valeurs dans le diode \bar{IR}_{max} Le graphe de précedence qui correspond à cette matrice, dont les nœuds sont les composantes du vecteur d'état X(k), est donné par Figure 3. où un nœud x_i est lié au nœud x_j ssi $a_{ji} > \epsilon$.

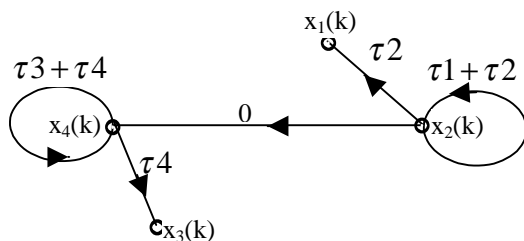


Figure 3. : Graphe de précedence G(A) associé à la matrice A

La matrice A n'est pas une matrice irréductible puisque son graphe de précedence n'est pas fortement connexe. En effet ce graphe contient deux circuits : $x_4(k) \rightarrow x_4(k)$ et $x_2(k) \rightarrow x_2(k)$ dont les temps de cycle moyen sont respectivement $(\tau_3 + \tau_4)/1$ et $(\tau_1 + \tau_2)/1$.

On montre que le circuit critique dans le graphe G(A) est le circuit dont le temps de cycle moyen est maximum. La valeur propre de la matrice A sera égale à ce temps moyen max.

4.3. GET avec ajout/retrait dynamique de jetons

Après avoir trouvé le circuit critique, donc identifié la ligne à laquelle il faut ajouter les bus, nous utilisons un outil capable de modifier de manière statique ou dynamique le nombre de jetons sur notre réseau: il s'agit

de graphe d'événements temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons (Lahaye et al , 1999). Si la ligne 2 est la ligne critique, nous ajoutons une transition source à la place P4 du modèle GET de la figure Figure 2.

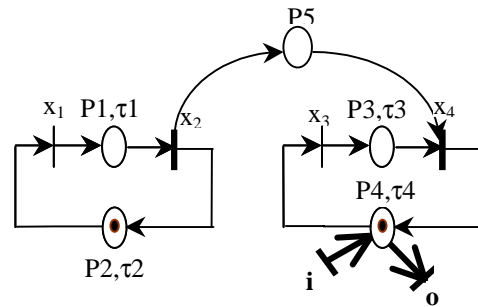


Figure.4. GET avec ajout/retrait dynamique de jetons

La transition « i » associée à la place P4 modélise l'ajout d'un bus B2 à la deuxième ligne. La transition « o » modélise le retrait d'un bus de la même ligne. Le choix de la place P4 est dû au fait que cet ajout (resp. retrait) se fait au niveau de la station de départ Sd2.

Aux transitions i et o, on associe les dateurs $i(k)$ et $o(k)$ qui représentent la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de i et de o ($k^{\text{ème}}$ ajout(resp. retrait) d'un bus de type B2).

La représentation d'état de ce modèle reste la même que celle du modèle de la figure Figurr.2, avec un ajout de deux équations liées aux transitions i et o. Les dates associées à ces transitions seront calculées à partir des composantes de X(k).

Pour réaliser notre objectif, nous cherchons le moment où il faut ajouter ou retirer un bus. Pour cela on fixe un temps de correspondance maximum qu'on note d et qu'il ne faut pas dépasser pour chaque passage des bus. Dès qu'un tour est effectué on détermine le temps T(k). Si l'inégalité $T(k) < d$ est vérifiée on continue le calcul ($k = k+1$), sinon l'ajout d'un bus aura lieu pour réduire le temps T(k). On réinitialise le système par le dernier vecteur X(k) calculé par (2), en modifiant ses deux dernières composantes $x_3(k)$ et $x_4(k)$ de telle sorte à avoir $x_4(k) = x_2(k)$. On franchit pour cela la transition source i pour la première fois à la date $i(1) = x_2(k) - \tau_3$. o sera franchie dès que le premier bus B2 arrive en Sd2 pour le $k^{\text{ème}}$ tour, la date de ce franchissement est $o(1) = x_3(k)$. Cela équivaut à accélérer ou ralentir certains bus B2.

Pour la nouvelle condition initiale X(k), on calcule les dates suivantes de franchissement de différents transitions (les arrivées suivantes des bus aux différents arrêts du réseau), en vérifiant chaque fois la condition « $T(k) < d$ » et ainsi on obtient les différentes dates de franchissement de i et de o .

5. EXEMPLE D'APPLICATION

Nous considérons un réseau de deux lignes dont les données sont :

La ligne 1 est caractérisée par un temps de cycle : $\lambda_1 = \tau_1 + \tau_2 = 60\text{min}$, avec $\tau_1 = \tau_2 = 30\text{ min}$. Le temps de cycle de la ligne 2 est: $\lambda_2 = \tau_3 + \tau_4 = 67\text{ min}$ avec

$$\tau_3 = 33 \text{ min} \quad \text{et} \quad \tau_4 = 34 \text{ min.}$$

Nous initialisons le système par un vecteur arbitraire $X(1)$. Si les bus B1 et B2 font leurs premiers départs respectivement à $t_1 = 0$ et $t_2 = 0$, le vecteur $X(1)$ sera : $X(1) = [0, 30, 0, 33]$. La matrice du système

$X(k) = A \otimes X(k-1)$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 34 \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & 67 \end{pmatrix}$$

Le circuit critique dans le graphe $G(A)$ associé à cette matrice est $x_4(k) \rightarrow x_4(k)$ dont le poids moyen est $\lambda_2 = 67$ qui représente la valeur propre de la matrice A .

Les dates successives de passage des bus trouvées par l'équation de récurrence sont :

X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)
$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 67 \\ 100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 134 \\ 167 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 201 \\ 234 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 240 \\ 270 \\ 268 \\ 301 \end{pmatrix}$
X(6)	X(7)	X(8)	X(9)	
$\begin{pmatrix} 300 \\ 330 \\ 335 \\ 368 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 360 \\ 390 \\ 402 \\ 435 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 420 \\ 450 \\ 469 \\ 502 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 480 \\ 510 \\ 536 \\ 569 \end{pmatrix}$...

Compte tenu du cas traité et des hypothèses, on constate que :

$$T(k) = (\lambda_2 - \lambda_1) + T(k-1) = (k-1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) + T(1).$$

Si on veut minimiser la somme T_{corr} des temps d'attente des passagers, il suffit ici de minimiser la 1^{ère} attente de la journée, la valeur minimale étant zéro. Pour que les bus B1 et B2 arrivent en même temps à la station Sc pour le 1^{er} tour, il faut donc : $t_1 + \tau_1 = t_2 + \tau_3$.

La meilleure condition initiale correspond alors à $t_1 = 3$ et $t_2 = 0$, et permet de diminuer le temps de correspondance de 3 min.

Le modèle GET avec ajout/retrait dynamique de jetons nous permet de modéliser le phénomène d'ajout d'un bus B2 à la deuxième ligne dès que le temps de correspondance arrive à une limite qu'on fixe au départ, et de retrait d'un bus B2 si nécessaire.

Si par exemple on fixe le temps de correspondance qu'il ne faut pas dépasser à $d = 15$, alors le temps de correspondance calculé pour le 4^{ème} tour des bus dépasse la limite d , en effet: $T(4) = x_4(4) - x_2(4) = 21$ qui est supérieur à 15.

On réinitialise donc le système par ce dernier vecteur $X(4)$ calculé par (2) en modifiant ses deux dernières composantes $x_3(4)$ et $x_4(4)$ de telle sorte à avoir $x_4(4) = x_2(4) = 213$. On franchit donc la transition source i pour la première fois à la date $i(1) = x_2(4) - 33 = 180$ et la transition o est franchie pour la première fois à la date $o(1) = x_3(4) = 201$. Pour le nouveau vecteur $X(4)$ le temps de correspondance est nul.

En utilisant ce type de GET avec ajout/retrait dynamique de jetons on arrive à limiter le temps de correspondance, dès qu'on arrive à un temps $T(k) \geq d$ on recommence par $T(k) = 0$, contraire au modèle GET initial dont le temps $T(k)$ augmente pour chaque tour des bus .

6. CONCLUSION

En utilisant les graphes d'événements temporisés, nous arrivons à modéliser un réseau de transport en commun et ensuite évaluer ses performances en utilisant l'algèbre $(\max, +)$.

Le GET avec ajout /retrait de jetons nous permet de minimiser le temps de correspondance au niveau de la station Sc en ajoutant un bus à la ligne qui représente le circuit critique du réseau. La valeur propre maximale de la matrice du système d'équations linéaires nous permet d'obtenir ce circuit critique.

Un ajout d'un bus sur une ligne conduit à augmenter la fréquence de cette ligne, puis réduire la différence entre les dates d'arrivées des bus à la station Sc.

Parmi les objectifs des études qui seront envisagées et qui feront suite à cet article l'étude d'un réseau dont les périodes des circuits sont variables, et les lignes sont desservies par plusieurs bus.

RÉFÉRENCES

- BACCELLI F., COHEN G., OLSDER G.-J. et QUADRAT J-P., 1992. *Synchronisation and linearity, Algebra for discrete Event Systems*. John Wiley and sons Ltd.
- COTTENCEAU B., 1999. *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets: synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse de Doctorat, université d'Angers, Ecole doctorale: Sciences pour l'ingénieur de Nantes.
- DAVID R. et ALLA H. , 1992. *Du grafcet aux réseaux de pétri*. Paris: Hermes.
- LAHAYE S. , 2000. *Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse de Doctorat, université d'Angers, Ecole doctorale: Sciences pour l'ingénieur de Nantes.
- LAHAYE S. , BOIMOND J-L. et HARDUIN L., 1999. *GET avec ajout/retrait dynamique de jetons: comportement asymptotique représentation dans l'algèbre (min, +)*. 2^{ème} congrès sur la modélisation des systèmes à événement discrets réactifs, cachan, mars.

- MENGUY E. , 1997. *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de Doctorat, université d'Angers, Ecole doctorale: Sciences pour l'ingénieur de Nantes.
- OLSDER G-J. , 1998. 26^{ème} école de printemps d'informatique, Algèbre Max-Plus et applications en informatique: *Cours Notes: Max algebra approach to discrete event systems*, 4-7 mai 1998 , p. 149-176, Ile de Noirmoutier, Vendée, France.
- OLSDER G-J. , SUBIONO et GETTRICK M-M. ,1998. 26^{ème} école de printemps d'informatique, Algèbre Max-Plus et applications en informatique: *On large scale max-plus algebra model in railway systems*, 4-7 mai 1998, p. 177-192, Ile de Noirmoutier, Vendée, France.
- SPACEK P. , M.-A.MANIER et A.ELMOUDNI, 1999. *Control of electrolating line in the max and min algebras*. International Journal of Systems Science, july 1999, Vol. 30, No. 7, p. 759-778.