

### Exercice1 : 5points

- I) Le tableau ci- dessous donne la répartition des notes sur 20 de 10 élèves de terminale D, à la fin de la 5<sup>e</sup> séquence. X désigne la note en chimie et Y la note en SVT.

Notes en chimie ( $x_i$ )	12	13	08	11	13	12	13	08	08	12
Notes en SVT ( $y_i$ )	06	11	12	06	11	06	12	06	11	06

- 1) Construire le nuage de points de cette série. 1pt
- 2) Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série. 0,25pt
- 3) Démontrer qu'une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  est :  $y = -\frac{1}{42}x + \frac{941}{105}$  0,5pt
- 4) Quelle serait la note en SVT d'un élève qui a eu 13 en chimie (on prendra l'arrondi d'ordre zéro du résultat) 0,25pt
- 5) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Peut-on se fier à la prévision faite à la question 4) ? 0,5pt

II) Une urne contient 8 boules indiscernables au touché dont 3 bleues numérotées de 1 à 3 et 5 noires numérotées de 1 à 5. on tire au hasard successivement et avec remise 3 boules de cette urne.

NB : Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis au dixième près.

- 1) Calculer la probabilité de l'évènement A : « obtenir trois boules de même couleur » 0,5pt
- 2) On appelle X la variable aléatoire associant le nombre de boules bleues tirées
  - a) Déterminer la loi de probabilité de X 1pt
  - b) Définir et représenter la fonction de répartition de X 1

### Exercice2 : 4 points

On considère le polynôme complexe P défini par  $p(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 54$

- 1) Montrer que si  $z_0$  est une racine de P, alors  $\bar{z}_0$  est aussi une racine de P. 0,25pt
- 2) Vérifier que  $2i$  est une racine de P puis en déduire une autre racine de P. 0,25pt
- 3) Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$  0,5pt
- 4) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $p(z) = 0$  0,75pt
- 5) Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal  $(0; \vec{u}; \vec{v})$ . On désigne par A, B et C d'affixes respectives  $z_A = 2i$ ,  $z_B = -2i$ ;  $z_C = 3 - 2i$ . I est le milieu du segment [AC]
  - a) Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  et en déduire la nature du triangle ABC 0,5pt
  - b) Déterminer l'affixe du point I puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M d'affixes  $z$  vérifiant  $|2z - 3| = 5$  0,5pt
- 6)  $f$  est l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{4}{3}iz - (\frac{8}{3} + 2i)$ . On pose  $(\Gamma') = f(\Gamma)$  et  $E = f(I)$ 
  - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$  0,75pt
  - b) Déterminer l'affixe du point E et en déduire une équation cartésienne de  $(\Gamma')$ . 0,5pt

## Problème : 11points

### Partie A

On considère les équations différentielles  $(E): y'' - y' - 2y = 2x + 3$  et  $(E'): y'' - y' - 2y = 0$  et  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $f(x) = ax + b$

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f$  soit solution de l'équation  $(E)$ . 0,5pt
- 2) Déterminer les solutions générales de  $(E')$ . 0,5pt
- 3) Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g = \varphi - f$  est solution de  $(E')$  0,5pt
- 4) En déduire toutes les solutions de  $(E)$ . 0,25pt
- 5) Déterminer alors la solution  $\varphi$  de  $(E)$  vérifiant  $\varphi'(0) = 1$  et  $\varphi(0) = 0$ . 0,5pt

### Partie B

Soit la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $\begin{cases} e^{2x} - x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(1 + 2x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; I; J)$  du plan.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  puis calculer les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ . 0,75pt
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  en 0. 0,75pt
- 3) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation sur  $D_g$ . 1pt
- 4) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$  et interpréter géométriquement le résultat. 0,5pt
- b) Construire  $(C)$  dans le repère  $(O; I; J)$ . 1pt
- 5) soit la fonction  $h$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(1 + 2x) - \frac{1}{2} - x$ 
  - a) Montrer que  $h$  est une primitive de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ . 0,25pt
  - b) En déduire l'aire  $A$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . 0,5pt
- 6) On considère la fonction  $f$  définie sur  $K = [1; +\infty[$  par  $f(x) = g(x) - x$ 
  - a) Etudier les variations de  $f$  sur  $K$ . 0,75pt
  - b) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $I = [1; 2]$ . 0,25pt
  - c) Montrer que  $\forall x \in I, g(x) \in I$ . 0,25pt
- 7) Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N}$ 
  - a) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ . 0,5pt
  - b) Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. 0,5pt
  - c) Montrer que  $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ . 0,5pt
  - d) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$ . 0,5pt
  - e) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . 0,5pt
  - f) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ? 0,25pt