

Numerische Methoden und gekoppelte Pendel

Die Mathematik zum Computerprogramm Simulator

Erstellt 1.12.2025

Das vorliegende Dokument befasst sich mit verschiedenen Versionen gekoppelter Pendel. Als Vorbereitung dient eine elementare Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen zur Beschreibung der gekoppelten Pendel werden mit Hilfe der Lagrange Methodik erstellt. Falls diese nicht analytisch lösbar sind, werden einige numerische Verfahren vorgestellt und verglichen. Unterstützt werden die mathematischen Untersuchungen durch Experimente mit dem Computerprogramm Simulator, welches die Simulation aller besprochenen Pendel ermöglicht.

Das Dokument soll eine Anregung sein für den erweiterten Mathematikunterricht auf der Mittelstufe, sei es für Angebote ausserhalb des obligatorischen Lehrplanes oder für individuelle Arbeiten von interessierten Schülern. Es ist insbesondere geeignet als Einführung in das Thema gewöhnlicher Differentialgleichungen und von numerischen Methoden zu deren approximativen Lösung.

Die gesamte Themenreihe in Zusammenhang mit dem Simulator umfasst:

- *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums*
- *Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen*
- *Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose von Edward Lorenz*
- **Numerische Methoden und gekoppelte Pendel**
- *Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem*
- *Fraktale Mengen und Lindenmayer-Systeme*
- *Newton Iteration und die komplexen Einheitswurzeln*
- *Iteration quadratischer Funktionen in der komplexen Ebene*
- *Zur Geschichte der Chaostheorie*
- *Programmierung eigener dynamischer Systeme im Simulator*

Jedes Thema wird in einem separaten Dokument behandelt.

Das Computerprogramm Simulator ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, ebenso eine Microsoft Installer Version. Der entsprechende Link ist: <https://github.com/HermannBiner/Simulator>. Im Simulator sind folgende Dokumentationen auf Deutsch und Englisch integriert:

- *Mathematische Dokumentation mit Beispielen und Übungsaufgaben*
- *Technische Dokumentation mit detaillierter Beschreibung der Funktionalität*
- *Benutzerhandbuch mit Beispielen*
- *Versionshistorie*

Inhalt

1. Der Fahrradfahrer	2
2. Das Federpendel	4
3. Gewöhnliche Differentialgleichungen	6
4. Euler Verfahren	10
5. Runge Kutta Verfahren	17
6. Partielle Ableitung und totales Differential	19
7. Der Lagrange Formalismus	23
8. Gekoppelte Pendel	31
9. Das schwingende Federpendel	36
10. Das Rüttelpendel	40
11. Schattenpendel	42
12. Übungsbeispiele	45
Weiterführende Literatur	45

1. Der Fahrradfahrer

Wenn wir ein grösseres Gewicht heben, brauchen wir dazu ziemlich viel Kraft. Damit dieses Gewicht nicht wieder hinunterfällt, müssen wir diese Kraft aufrechterhalten. Wenn wir mit einem Fahrrad fahren, müssen wir je nach Steigung ebenfalls intensiv in die Pedale treten, damit das Fahrrad Fahrt aufnimmt. Wenn die Strasse aber absolut flach ist, dann können wir uns etwas entspannen, wenn das Fahrrad einmal in Bewegung ist. Auch wenn wir nicht mehr weiter pedalen, wird das Fahrrad dennoch mit fast konstanter Geschwindigkeit weiterfahren, vor allem, wenn es gut geölt und der Reifendruck optimal ist.

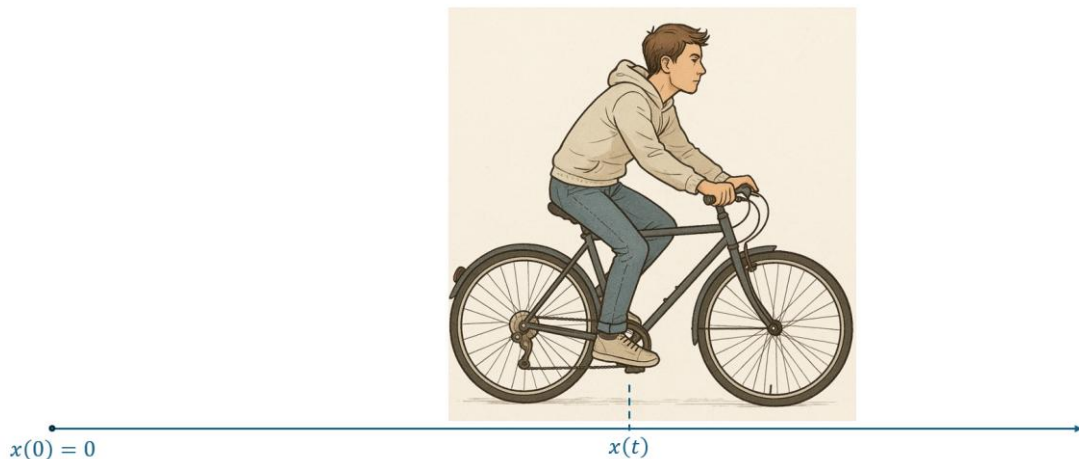
Dass war lange Zeit nicht so klar. Der griechische Philosoph Aristoteles (384 – 322 v.Chr.) glaubte, dass eine kontinuierliche Kraft nötig sei, um einen Körper in Bewegung zu halten. Diese Meinung hielt sich über Jahrhunderte. Wenn man sich damals schneller als zu Fuss fortbewegen wollte, dann war wohl das Pferd das häufigste Mittel. Und da ist klar: Um den Reiter (und sich selbst) zu befördern, muss das Pferd dauernd Kraft ausüben. Wenn es schnell unterwegs war, musste es oft nach 20 km ausgewechselt werden. Erst im Mittelalter begann man darüber nachzudenken, ob Bewegung ohne kontinuierliche Kraft möglich sei.

Die definitive Antwort auf diese Frage lieferte der englische Universalgelehrte und Begründer der Mechanik, Sir Isaac Newton (1643 – 1727), ohne Fahrradfahrer zu sein. In seinem ersten Bewegungsgesetz formulierte er:

- Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Das heisst, um einen Körper in Bewegung zu halten, ist *keine* kontinuierliche Kraft nötig. Damit ist auch bestätigt, dass das Fahrrad – wenn es reibungsfrei wäre – mit konstanter Geschwindigkeit weiterrollt, auch wenn wir die Pedale nicht mehr betätigen.

Wir betrachten die Strecke, die der Fahrradfahrer zurücklegt. Wenn er zur Zeit $t = 0$ and der Stelle $x = 0$ startet, dann bezeichnen wir die in der Zeit t zurückgelegte Distanz mit $x(t)$.



Der Fahrradfahrer

Seine Geschwindigkeit wird variieren. Sie ist gleich der zurückgelegten Strecke pro Zeiteinheit, also im Grenzfall zum Zeitpunkt t :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} =: \dot{x}(t)$$

Das ist nichts anderes als die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit t und in Anlehnung an Newton schreiben wir dafür in diesem Papier den Punkt: $\dot{x}(t)$.

Wenn die Geschwindigkeit ohne Krafteinwirkung konstant bleibt, was also bewirkt die Kraft? Wenn der Radfahrer wieder beginnt, kräftig in die Pedale zu treten und damit eine Kraft auszuüben, *ändert sich die Geschwindigkeit*. Das Fahrrad wird *beschleunigt*. Dabei ist die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t gleich der Änderung der Geschwindigkeit und im Grenzfall:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h} =: \ddot{x}(t)$$

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Funktion $x(t)$ nach der Zeit t .

Wie hängen nun Kraft und Beschleunigung zusammen? Newton gibt die Antwort darauf in seinem zweiten Bewegungsgesetz:

- Kraft = Masse x Beschleunigung oder: $\vec{F} = m\vec{a}$

Zuerst fällt auf, dass in diesem Gesetz im Gegensatz zum vorhergehenden die bewegte Masse m auftaucht. Damit das Fahrrad mit konstanter Geschwindigkeit weiterfährt, spielt es keine Rolle, ob der Fahrradfahrer leer oder beladen mit einem schweren Rucksack auf dem Fahrrad sitzt. Wenn er aber das Fahrrad beschleunigen will, dann muss er mit einem schweren Rucksack mehr Kraft aufwenden. Das ist nicht so klar, denn egal ob mit oder ohne Rucksack: Das Fahrrad hält den Fahrer immer in konstantem Abstand zum Boden und übt dabei eine Gegenkraft auf den Fahrer aus, welche

genau seinem Gesamtgewicht entspricht. Das ist das dritte Gesetz von Newton, welches kurz gefasst so formuliert werden kann:

- Kraft = Gegenkraft

Das grössere Gewicht des Rucksacks, welche den Fahrer auf den Boden zieht, wird also durch die Gegenkraft des Fahrrades vollständig kompensiert. Dennoch braucht der Fahrer mit dem Rucksack mehr Kraft, um das Fahrrad zu beschleunigen. Die Masse ist *träge* und wirkt der Beschleunigung entgegen.

Wenn der Fahrradfahrer also mit konstanter Kraft in die Pedale stösst und die gesamte bewegte Masse m beträgt, dann bedeuten das:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow$$
$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + C$$

Wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war, ist $C = 0$. Somit legt er in der Zeit t die Strecke

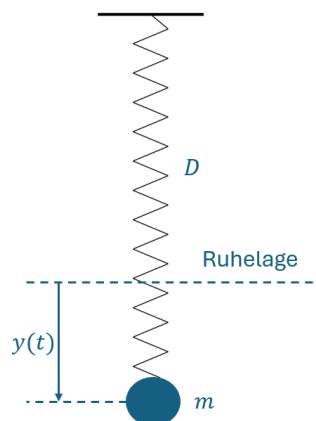
$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

Zurück, da $x(0) = 0$ war. Die Frage ist, wie lange der Fahrradfahrer das durchhalten kann. Dabei muss er beachten, dass auch auf dem Fahrrad Geschwindigkeitsübertretungen strafbar sind!

Die Frage ist jetzt: Wie weiss man, wie gross die Kraft ist? Ohne sie explizit zu kennen, kann man die Beschleunigung und damit die Bewegung eines Körpers nicht rekonstruieren. Newton hat unter anderem die Planetenbewegung untersucht und dabei die Formel für die Gravitationskraft gefunden. Das wird im Schulprojekt *Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem* eingehender behandelt. Hier betrachten wir im folgenden Abschnitt einen einfacheren Fall.

2. Das Federpendel

Wir untersuchen hier das Federpendel, wie wir es aus der Physik kennen.



Federpendel an der Position $y(t)$ zum Zeitpunkt t

Die Schwerkraft zieht die Masse nach unten, die Federkraft der ausgelenkten Feder zieht diese hinauf. Gemäss dem dritten Bewegungsgesetz von Newton heben sich in Ruhelage die nach unten ziehende Schwerkraft und die nach oben wirkende Federkraft auf.

Wird die Masse um die Strecke $y(t)$ aus der Ruhelage ausgelenkt, wächst die (rückziehende) Federkraft proportional zu dieser Auslenkung. Dieses Gesetz hat Robert Hooke (1635 – 1703) entdeckt und es kann experimentell einfach nachgewiesen werden, indem man verschiedene Gewichte an die Feder hängt und misst, wie stark sie ausgelenkt wird. Der Proportionalitätsfaktor hängt dabei von der Beschaffenheit der Feder ab. Wir bezeichnen ihn mit D . Somit wirkt an der Position $y(t)$ auf die Masse die Federkraft

$$F = -Dy(t)$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass die y -Achse nach unten gerichtet ist, die Federkraft aber nach oben zeigt.

Unsere Erfahrung mit Federpendeln sagt nun: Wenn wir die Masse an der ausgelenkten Position loslassen, beginnt das Federpendel gleichmässig zu schwingen. Wenn $y(t)$ die Position des Pendels zum Zeitpunkt t bezeichnet, dann ist seine *Geschwindigkeit* die Änderung der Position pro Zeiteinheit, also $\dot{y}(t)$, wie wir beim Radfahrer gesehen haben.

Diese Geschwindigkeit ist offensichtlich an der maximalen Auslenkung gleich Null und ändert sich dazwischen laufend. Sie ist maximal beim Durchlaufen der Ruhelage. Die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ist die *Beschleunigung*, also $\ddot{y}(t)$, wie wir ebenfalls beim Radfahrer gesehen haben. Diese Änderung der Geschwindigkeit kann man auch als *momentane Tendenz* des Systems verstehen: Wir wissen, wie sich das System in einem unendlich kleinen Zeitpunkt verhält. Wie gelingt es jetzt, aus dieser «*mikroskopischen*» Information über das System sein *globales* Verhalten zu rekonstruieren?

Wenn wir wieder das zweite Bewegungsgesetz von Newton verwenden, gilt:

$$-Dy(t) = m\ddot{y}(t)$$

Die momentane Tendenz des Systems bzw. $\ddot{y}(t)$ hängt von der Kraft ab, welche an der Position $y(t)$ wirkt.

In dieser Gleichung ist die Unbekannte Grösse nicht eine Zahl, sondern *die Funktion* $y(t)$. Man nennt sie eine *Differentialgleichung*. Um die Lösung dieser Gleichung zu finden, müssen wir quasi für jeden Wert von t den Funktionswert $y(t)$ bestimmen, indem wir die mikroskopischen Effekte der beschleunigenden Kraft «aufsummieren». Oder eben, wir suchen die Funktion $y(t)$ als Ganzes. Das scheint anspruchsvoll.

Das Schwingungsverhalten des Systems bzw. die Bewegungsgleichung von Newton hängt nur vom Quotienten $\frac{D}{m}$ ab. Setzt man: $\omega^2 := \frac{D}{m}$, erhält man:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Ohne dass wir jetzt begründen, wie wir auf diese Idee kommen, sehen wir, dass zum Beispiel die Funktion

$$y(t) = A \cos(\omega t), A \in \mathbb{R}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wir lassen momentan offen, ob dies die einzige Lösung ist und ob für jede Differentialgleichung eine Lösung existiert.

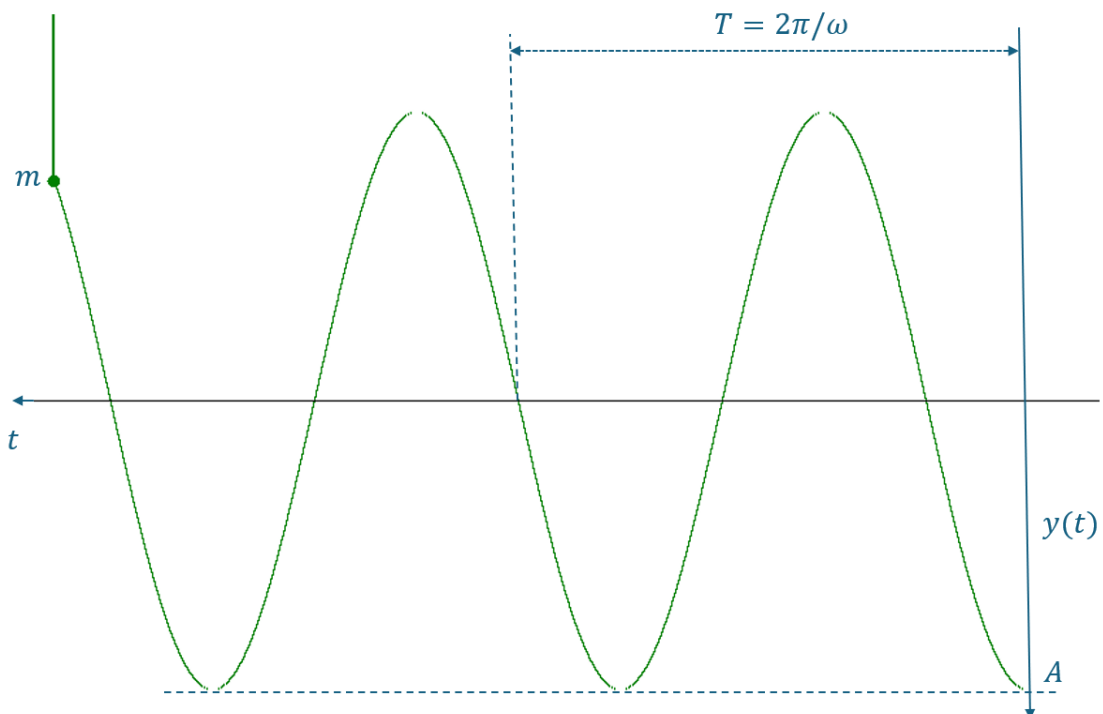
A heisst *Amplitude* der Schwingung und ω ist die *Kreisfrequenz*. Wenn das Pendel die Zeit T braucht, um eine Schwingung durchzuführen, dann ist das Pendel nach dieser Zeit wieder an derselben Position. Es gilt also wegen der Periodizität des Cosinus:

$$\omega T = 2\pi$$

Offenbar ist die Gleichung für beliebige Werte von A erfüllt. Diese Konstante könnte noch beliebig gewählt werden. Wenn wir aber eine *Anfangsbedingung* vorgeben, z.B. wie gross die maximale Auslenkung $y(0)$ ist, an welcher wir das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ loslassen, dann ist A bestimmt, nämlich:

$$A = y(0)$$

Die Pendelschwingung kann im Simulator betrachtet werden. Dort schwingt das Pendel auf und ab und gleichzeitig wird die Bewegung geplottet, wobei der Plot nach rechts bewegt wird. Die Zeitachse ist dann nach links gerichtet:



Schwingendes Federpendel im Simulator

Bei den gekoppelten Pendeln werden wir ebenfalls auf Differentialgleichungen stossen, welche diese Systeme beschreiben. Deshalb beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt mit einigen Grundlagen dazu.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

In einer Differentialgleichung kommen neben einer gesuchten Funktion auch Ableitungen dieser Funktion vor. Wenn die gesuchte Funktion nur von *einer* Variablen abhängt, dann heisst die Differentialgleichung *gewöhnlich*. Für die Untersuchung gekoppelter Pendel wird diese Variable jeweils die Zeit t sein.

Beim Federpendel hatten wir die Differentialgleichung

$$\omega^2 y(t) + \ddot{y}(t) = 0$$

Es handelt sich also um eine gewöhnliche Differentialgleichung und wir können sie auch in der Form schreiben:

$$f(y, \ddot{y}) = 0$$

$$\text{wobei } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \omega^2 u + v.$$

In einer Differentialgleichung können weitere Ableitungen von $y(t)$ stecken, oder der Parameter t selbst. Damit haben wir im allgemeinen Fall eine Gleichung:

$$f\left(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

f hängt von $n + 1$ Parametern ab und hat einen gewissen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Das führt zur Definition:

Definition 2.1

Sei f eine Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heisst

$$f\left(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

Gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n . \square

Gesucht ist in dieser Gleichung eine Funktion $y(t)$, welche für t in einem gewissen Bereich die Gleichung erfüllt. Bei uns wird $t \in \mathbb{R}^+$ die Zeit darstellen, welche jeweils bei $t = 0$ startet. \square

Beispiel

$$f(t, \dot{y}(t)) = \dot{y}(t) - g(t)$$

Wobei g eine reelle Funktion ist. Wenn g nicht integrierbar ist, hat diese Differentialgleichung *keine Lösung*. Im andern Fall ist die Lösung der Differentialgleichung das Integral

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau + C, C \in \mathbb{R}$$

Das heisst, die Lösung ist nur bis auf eine beliebig wählbare Konstante $C \in \mathbb{R}$ bestimmt.

\square

Welche Bedingungen muss man für die gesuchte Lösungsfunktion $y(t)$ einer Differentialgleichung der Ordnung n formulieren? Damit alle vorkommenden Ableitungen existieren, muss $y(t)$ n -mal differenzierbar sein. Dann muss $y(t)$ die Differentialgleichung erfüllen. Dazu muss aber das Tupel $(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t))$ im Definitionsbereich von f liegen. Vielleicht ist all das nur erfüllt, für t in einem gewissen Bereich $I \subseteq \mathbb{R}$. Das führt zur

Definition 2.2

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n .

Wenn es eine Funktion $y: I \subseteq \mathbb{R}, t \mapsto y(t)$ gibt, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- 1) y ist auf I n -mal differenzierbar
- 2) Für alle $t \in I$ ist $(t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in D_f$, also im Definitionsbereich von f
- 3) Für alle $t \in I$ erfüllt $y(t)$ die Differentialgleichung

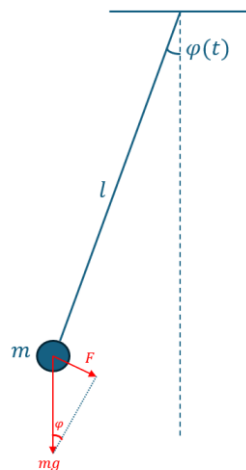
Dann heisst diese Funktion *Lösung der Differentialgleichung*. \square

Bemerkung

Ohne dass wir dies mit den uns verfügbaren Mitteln begründen können, halten wir fest:

- 1) Eine Differentialgleichung braucht keine Lösung zu haben.
- 2) Die Lösung einer Differentialgleichung ist i.a. nicht eindeutig bestimmt. Beim Federpendel war dies erst der Fall, wenn eine *Anfangsbedingung* für das Pendel definiert wurde.
- 3) Ob eine existierende Lösung bis auf die Vorgabe von Anfangsbedingungen eindeutig ist, ist im Allgemeinen eine schwierige Frage. Bei den gekoppelten Pendeln, wie wir untersuchen werden, wird dies der Fall sein.
- 4) Auch wenn eine Lösung existiert, kann diese nur in wenigen Fällen *analytisch* durch eine Formel beschrieben werden. In diesem Fall kann sie durch numerische Methoden mehr oder weniger genau approximiert werden. Einige davon besprechen wir im nächsten Abschnitt.

Beispiel Fadenpendel



An einem Faden der Länge l schwingt eine Masse m

Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft mg , wobei g die Erdbeschleunigung ist. Wenn das Pendel um den Winkel φ ausgelenkt ist, dann ist die rücktreibende Kraft $F = -mg \cdot \sin\varphi$, wie aus der obigen Skizze ersichtlich ist. Die Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn im Abstand l zum Aufhängepunkt. Die Bewegung verläuft nur in tangentialer Richtung zur Kreisbahn. Die Geschwindigkeit ist $l\dot{\varphi}$ und die Beschleunigung $l\ddot{\varphi}$. Somit lautet das Bewegungsgesetz von Newton:

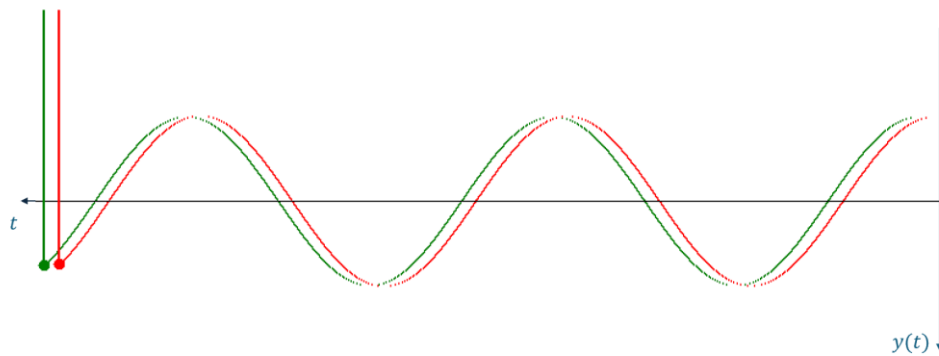
$$-mg\sin\varphi = ml\ddot{\varphi}$$

Die Masse kürzt sich weg. Die Schwingung ist also unabhängig von m . Wenn wir wieder eine Kreisfrequenz $\omega^2 := \frac{g}{l}$ einführen, haben wir:

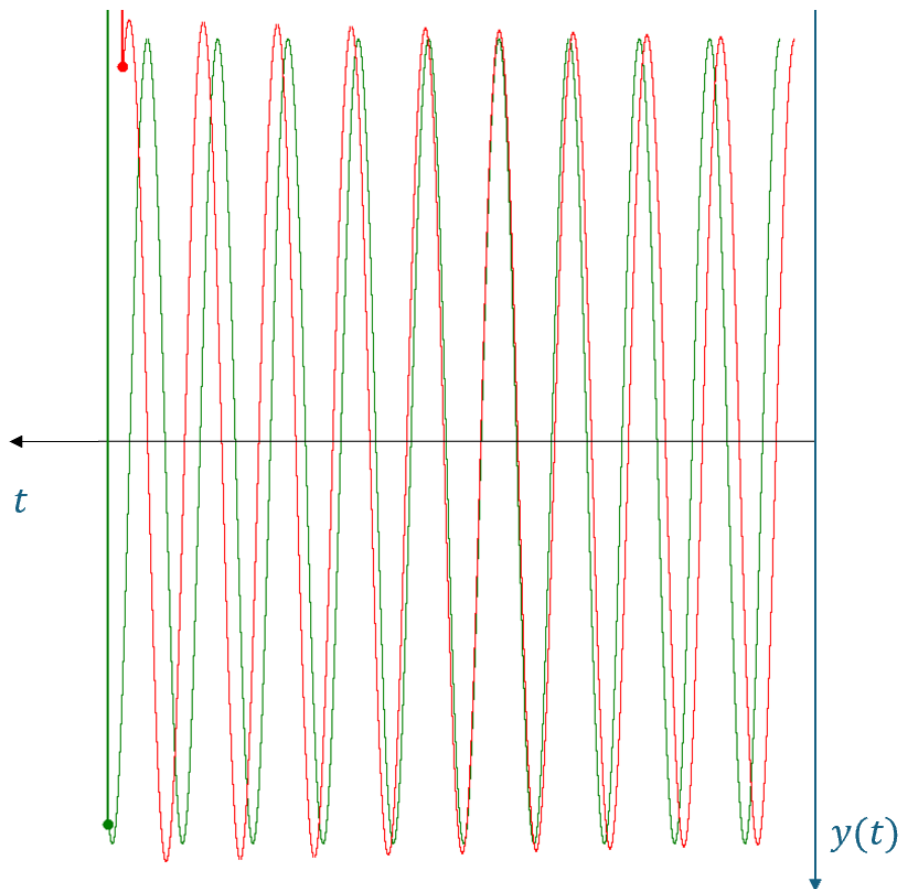
$$\omega^2 \sin\varphi + \ddot{\varphi} = 0$$

Diese Gleichung hat *keine* analytische Lösung. Für $\varphi \approx 0$ gilt $\sin\varphi \approx \varphi$ und man hat wieder dieselbe Differentialgleichung wie für das Federpendel mit der allgemeinen Lösung $\varphi(t) = A\cos(\omega t)$ und A ist durch den Startpunkt $A = \varphi(0)$ bestimmt.

Der Simulator approximiert die Lösung für die Differentialgleichung mit numerischen Methoden und man kann die Schwingung des Fadenpendels mit jener des Federpendels vergleichen. Das Federpendel ist grün dargestellt und das (echte und approximierte) Fadenpendel rot:



Federpendel und (reales) Fadenpendel bei kleiner Amplitude



Wenn die Auslenkung grösser wird, beginnt das Fadenpendel hinter dem Federpendel herzulaufen.
Seine Schwingungsdauer ist in der Simulation etwas grösser als jene des Federpendels.

Bei der Untersuchung von Pendeln werden wir mit gewöhnlichen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung zu tun haben. Ferner werden wir die Gleichung immer so umwandeln können, dass $\ddot{y}(t)$ explizit auf der linken Seite der Gleichung steht. Die Gleichung hat dann die Form:

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$$

Wir wollen nun zeigen, dass sich eine solche Gleichung in ein System von zwei Differentialgleichungen *erster* Ordnung umwandeln lässt.

Gegeben sei eine explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$. Wir führen nun zwei neue Funktion ein: $u(t) = y(t)$ und $v(t) = \dot{y}(t)$. Als Resultat haben wir unmittelbar

Satz 2.3

Behauptung: Die explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ lässt sich durch die Transformation $u(t) = y(t)$ und $v(t) = \dot{y}(t)$ in das System von zwei expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung überführen:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = f(t, u, v) \end{cases}$$

□

Beispiel

Beim Federpendel ist die Differentialgleichung $\ddot{y} = -\omega^2 y$ durch die Transformation $u = y$ und $v = \dot{y}$ äquivalent zum System

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases}$$

Diese Transformation wird im nächsten Abschnitt wichtig sein, wenn es darum geht, Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe von numerischen Verfahren approximativ zu lösen.

4. Euler Verfahren

Wegen Satz 2.3 genügt es, in diesem Abschnitt gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten, also Gleichungen der Form

$$\dot{y} = f(t, y)$$

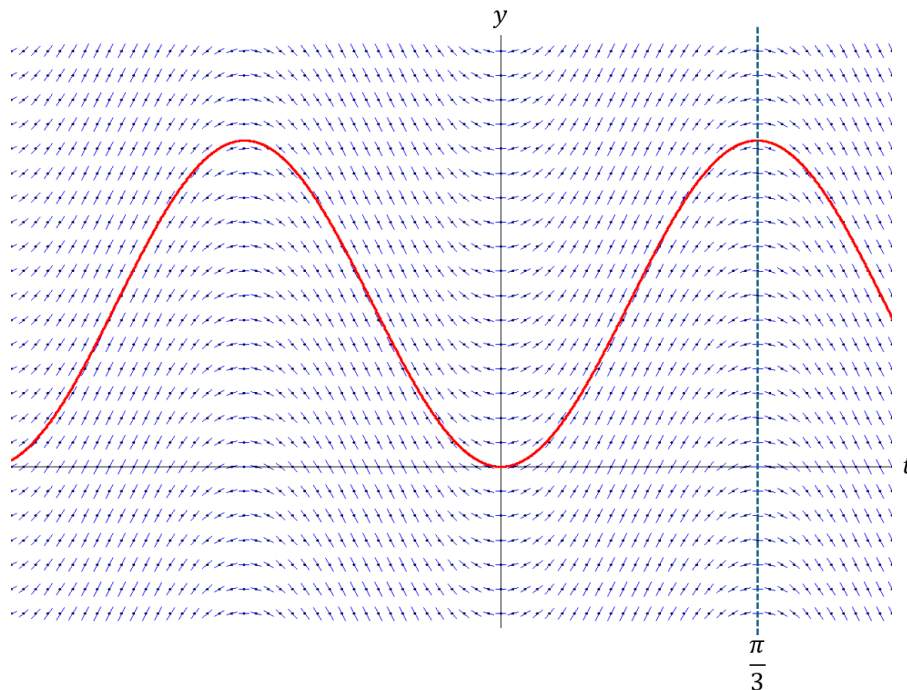
Man kann diese auch so deuten, dass jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ die *Steigung einer Tangente* zugeordnet ist, welche in diesem Punkt an der gesuchten Funktion liegt. Man spricht auch von einem *Richtungsfeld* $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, y) \rightarrow \dot{y} \in \mathbb{R}$.

Beispiel

Gegeben ist die Differentialgleichung

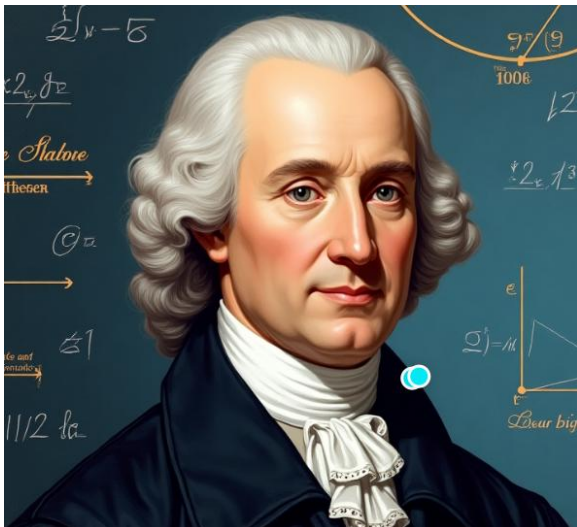
$$\dot{y} = \sin(3t)$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $y(t) = C - \frac{\cos(3t)}{3}$, $C \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Das zugehörige Richtungsfeld hängt nur von t ab. In folgendem Bild ist dieses Richtungsfeld dargestellt mit der speziellen Lösung $y(t) = (1 - \cos(3t))/3$.



Richtungsfeld $\dot{y} = \sin(3t)$ und Funktion $y(t) = (1 - \cos(3t))/3$

□



Leonhard Euler 1707 – 1783 war einer der grössten Mathematiker seiner Zeit. Er beschäftigte sich mit allen Gebieten der Mathematik und lieferte überall wichtige und bahnbrechende Beiträge. Von ihm stammt das in diesem Abschnitt besprochene Euler Verfahren zur numerischen Approximation von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Euler hatte weder Taschenrechner noch Computer zur Verfügung, und musste alle Berechnungen «von Hand» durchführen.

Gegeben sei eine Differentialgleichung $\dot{y} = f(t, y)$. Es gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \dot{y}(t) = f(t, y)$$

Euler benutzte deshalb die Näherung:

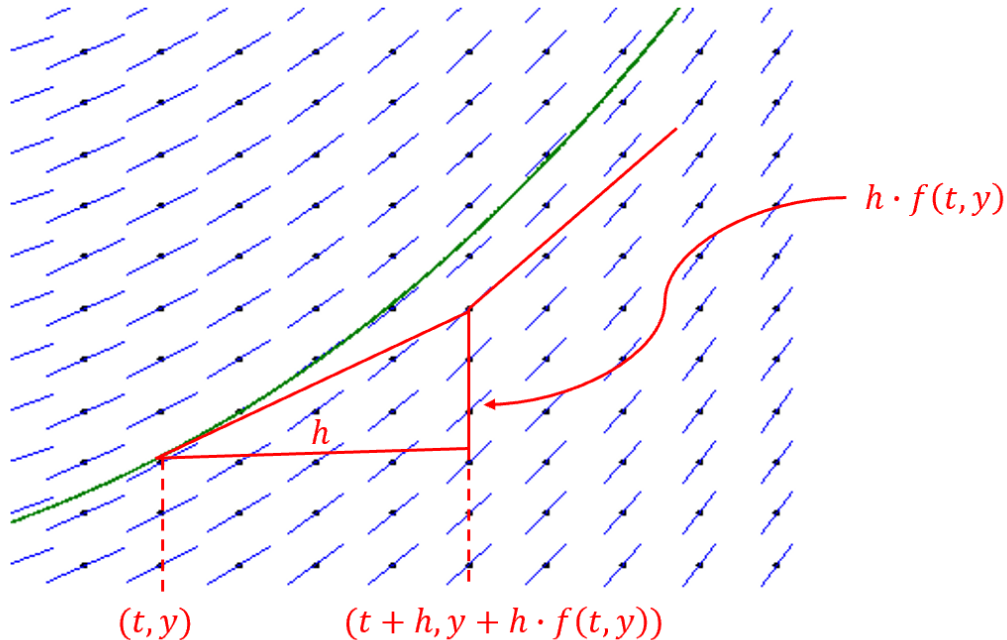
$$y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f(t, y)$$

um ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) den nächsten Funktionswert $y(t+h)$ zu bestimmen. Je kleiner die «Schrittweite» h gewählt wird, umso genauer ist diese Approximation.

Sie erzeugt eine Folge von Funktionswerten (t_n, y_n) gemäss der Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \end{cases}$$

Man beachte, dass $f(t, y)$ die Tangentensteigung an der gesuchten Funktion $y(t)$ im Punkt (t, y) darstellt. Folgende Grafik zeigt einen Iterationsschritt:



Grün: Tatsächliche Lösungskurve. Rot: Iterationsschritt des Euler Verfahrens

Da das nächste Punktepaar (t_{n+1}, y_{n+1}) in der Iterationsformel auf ihrer linken Seite steht, heisst dieses Verfahren *explizites* Euler Verfahren.

Definition 3.1

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Man nähert die gesuchte Funktion $y(t)$ durch eine Punktfolge (t_n, y_n) an, ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) und einer (kleinen) Schrittweite h . Beim *expliziten* Euler Verfahren lautet die entsprechende Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \end{cases}$$

□

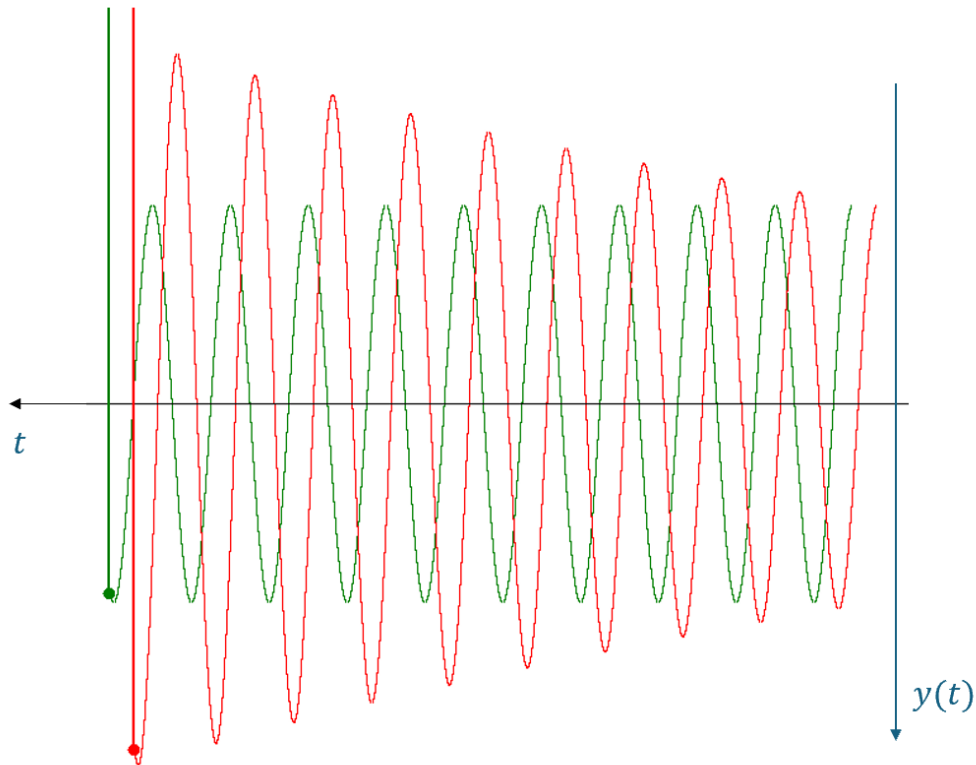
Im Simulator kann man das schwingende Federpendel durch das explizite Euler Verfahren annähern. Beim Federpendel hatte man die Differentialgleichung $\ddot{y} = -\omega^2 y$, welche durch die Transformation $u = y$ und $v = \dot{y}$ in das System

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases}$$

überführt wurde. Nun wendet man das explizite Eulerverfahren auf jede Gleichung an. Bei der ersten ist die Tangentensteigung im Punkt (t, u, v) gleich v . Bei der zweiten Gleichung ist sie in diesem Punkt $-\omega^2 u$. Damit erhält man die Iterationsformeln:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + h v_n \\ v_{n+1} = v_n - h \omega^2 u_n \end{cases}$$

Folgende Grafik zeigt den Vergleich zwischen realem Pendel und approximierten Pendel.



Grün: Tatsächliches Federpendel, rot: numerische Approximation mit Euler explizit

Wie man an diesem Beispiel sieht, ist das Verfahren nur für die ersten paar Schritte brauchbar. Anschliessend «überschwingt» die numerische Approximation.

Eine alternative Approximation wäre folgende: Man kennt den gesuchten nächsten Punkt (t_{n+1}, y_{n+1}) nicht, aber verwendet beim Iterationsschritt die Steigung im *gesuchten Punkt*. Dann lautet die Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Nun steckt die Unbekannte y_{n+1} *implizit* in der zweiten Gleichung. Das führt zur

Definition 3.2

Gegeben sie eine Differentialgleichung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Man nähert die gesuchte Funktion $y(t)$ durch eine Punktfolge (t_n, y_n) an ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) und einer (kleinen) *Schrittweite* h . Beim *impliziten* Euler Verfahren lautet die entsprechende Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

□

Um y_{n+1} zu berechnen, muss man die zweite Gleichung, wenn möglich (je nach Funktion f), nach y_{n+1} aufgelöst werden.

Betrachten wir wieder das Federpendel und die zugehörigen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases}$$

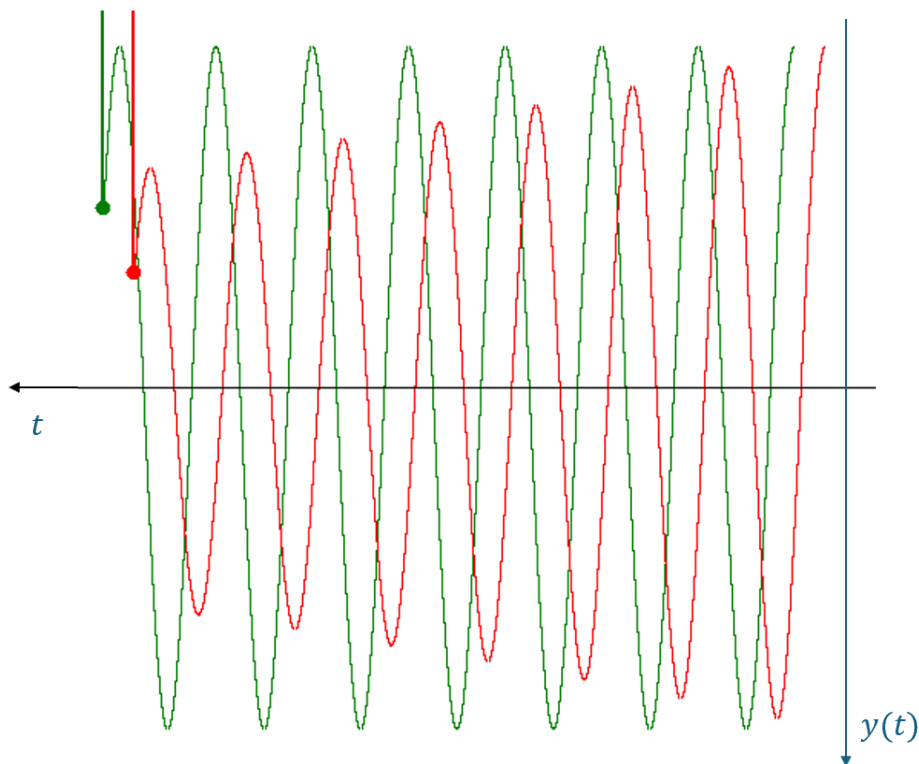
Die Rekursionsformel des expliziten Verfahrens muss nun leicht abgeändert werden:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + v_{n+1}h \\ v_{n+1} = v_n - \omega^2 u_{n+1}h \end{cases}$$

Man muss also die zweite und dritte Gleichung nach (u_{n+1}, v_{n+1}) auflösen. Wie man leicht nachrechnen kann, liefert das die Rekursionsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = (u_n + v_n h)/(1 + h^2) \\ v_{n+1} = (v_n - u_n h)/(1 + h^2) \end{cases}$$

Wir können im Simulator wieder eine Simulation durchführen und das reale Pendel mit der alternativen Approximation vergleichen:



Grün: Reales Federpendel, rot: Approximation mit Euler implizit

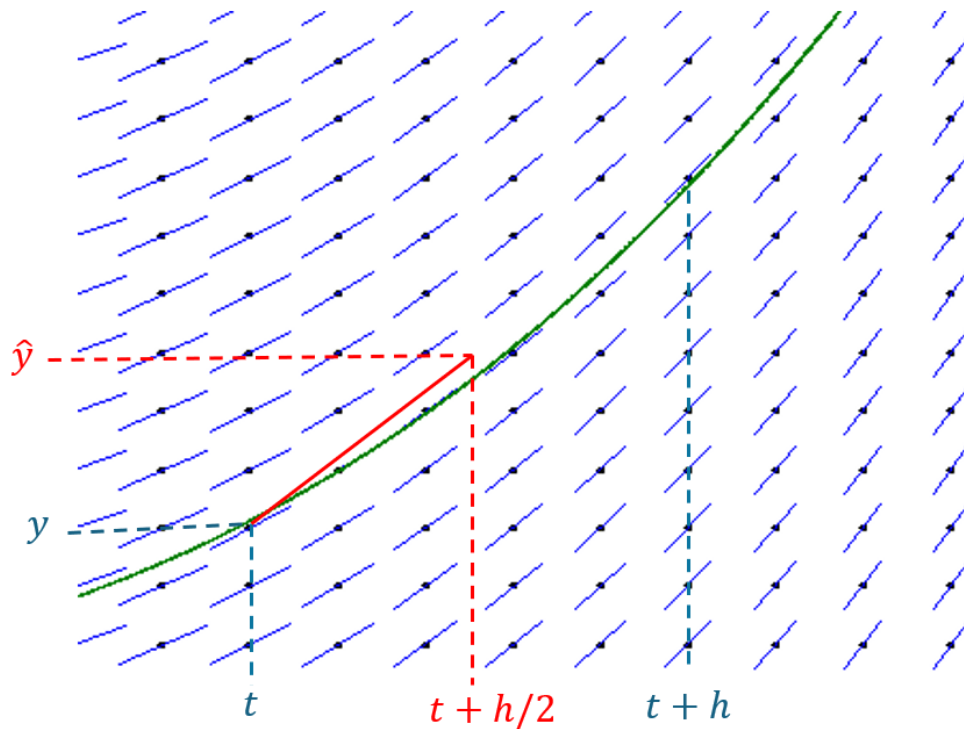
Wie man sieht, ist die Approximation gegenüber dem realen Pendel «gedämpft».

Beim expliziten Euler Verfahren ist die Amplitude der Approximation zu stark angewachsen. Beim impliziten Verfahren wurde sie zu stark gedämpft. Die Frage ist, ob man «etwas in der Mitte» beider Verfahren finden kann. Das heisst, dass man weder die Tangentensteigung im Punkt (t_n, y_n) noch im Punkt (t_{n+1}, y_{n+1}) für die Approximation verwendet, sondern die Tangentensteigung in einem

«Mittelpunkt» $(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$, wobei \hat{y}_n noch bestimmt werden muss. Um zu \hat{y}_n zu gelangen, verwendet man das *implizite* Euler Verfahren. Dann lautet die Gleichung für \hat{y}_n :

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$$

Nachfolgende Skizze zeigt das Vorgehen.



Man sucht zuerst die Steigung im Punkt $(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$

Nachdem man \hat{y}_n mit der impliziten Formel berechnet hat, erhält man die Tangentensteigung im Punkt $(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$, nämlich $f(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$. Diese verwendet man, um zum nächsten Punkt zu gelangen:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$$

Definition 3.3

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Man nähert die gesuchte Funktion $y(t)$ durch eine Punktfolge (t_n, y_n) an ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) und einer (kleinen) Schrittweite h . Bei der *impliziten Mittelpunkregel* berechnet man zuerst einen Punkt \hat{y} mit Hilfe der impliziten Gleichung:

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$$

Anschließend ergibt sich der nächste Punkt aus der Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n) \end{cases}$$

□

Nun wenden wir dieses Verfahren auf das Federpendel an. Ausgangspunkt ist wieder das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases}$$

Zuerst bestimmen wir \hat{u}_n und \hat{v}_n . Die entsprechenden impliziten Gleichungen lauten:

$$\begin{cases} \hat{u}_n = u_n + \frac{h}{2} \hat{v}_n \\ \hat{v}_n = v_n - \omega^2 \frac{h}{2} \hat{u}_n \end{cases}$$

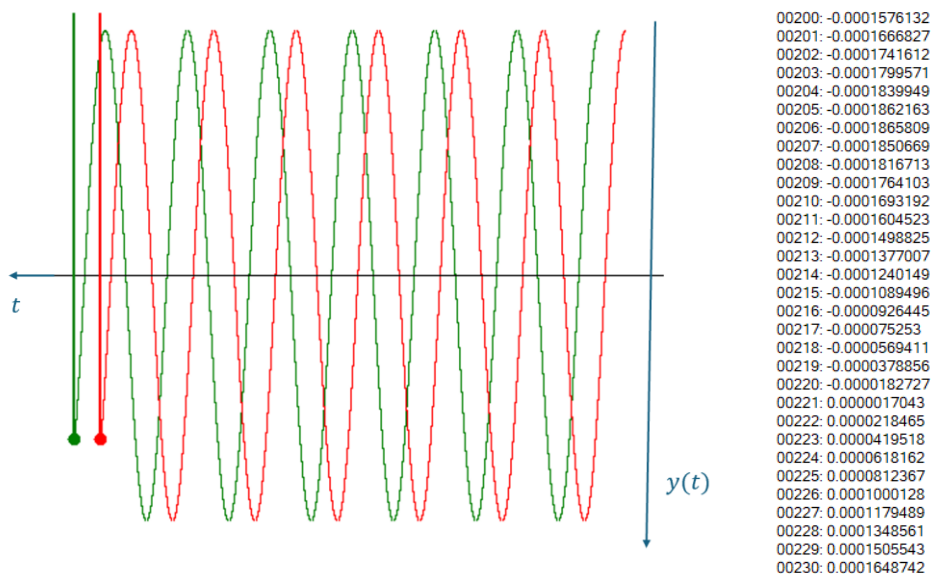
Löst man das Gleichungssystem nach (\hat{u}_n, \hat{v}_n) auf, erhält man:

$$\begin{cases} \hat{u}_n = (u_n + \frac{h}{2} v_n) / (1 + h^2/4) \\ \hat{v}_n = (v_n - \frac{h}{2} u_n) / (1 + h^2/4) \end{cases}$$

Mit diesen Werten berechnen wir den nächsten Iterationswert:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + h \hat{v}_n = u_n + h(v_n - \frac{h}{2} u_n) / (1 + h^2/4) \\ v_{n+1} = v_n - h \hat{u}_n = v_n - h(u_n + \frac{h}{2} v_n) / (1 + h^2/4) \end{cases}$$

Im Simulator ist dieses Verfahren implementiert und wir vergleichen das Resultat mit dem realen Federpendel. Rechts von der Grafik sind die Differenzen zwischen realem Pendel und approximierten Pendel bei jedem Iterationsschritt protokolliert. In der Liste sieht man die Iterationsschritte 200 bis 230. Die Differenzen bleiben klein.



Grün: Reales Pendel, rot: Approximation durch die implizite Mittelpunkregel

Wie das Bild zeigt, sieht das schon ganz ordentlich aus. Das hat aber nicht damit zu tun, dass die implizite Mittelpunkregel besonders gut und für praktische Anwendungen geeignet ist. Es ist einfach so, dass diese Regel im Falle des Federpendels oder ähnlichen Problemen eine gute Approximation liefert. Wie man rechts in der Liste der Differenzen zwischen realem (grün) und approximierten (rot) Pendel bei jedem Iterationsschritt sieht, sind diese klein aber nicht Null.

5. Runge Kutta Verfahren

Wir betrachten wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

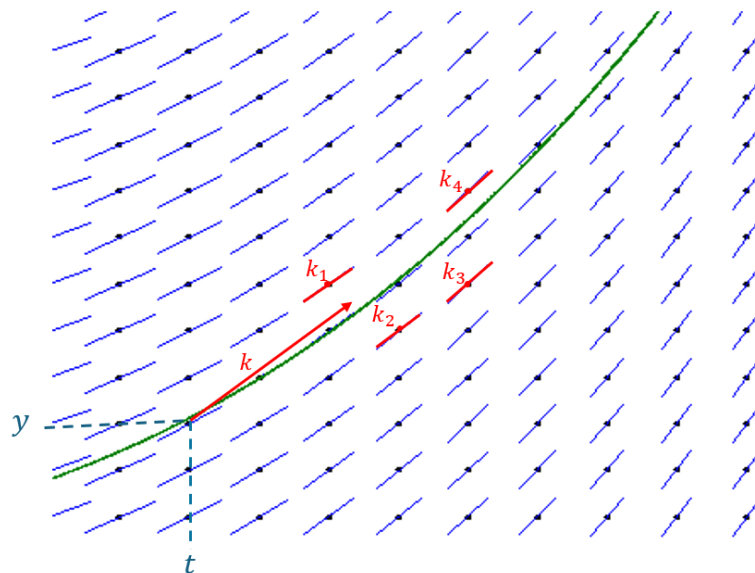
$$\dot{y} = f(t, y)$$

und approximieren die gesuchte Lösung schrittweise durch eine Punktfolge (t_n, y_n) an ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) . Um von einem Punkt zum nächsten zu gelangen, verwenden wir wieder eine Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot k \end{cases}$$

Darin ist k eine noch zu bestimmende «Steigung». Die Idee dabei ist, dass man im Richtungsfeld der Differentialgleichung mehrere Punkte rechts von (t_n, y_n) untersucht und deren Steigung k_j notiert. Die effektive Steigung, welche man für den Iterationsschritt verwendet, ist dann ein gewichtetes Mittel dieser Steigungen, nämlich $k = \sum_{j=1}^n b_j k_j$ mit $\sum_{j=1}^n b_j = 1$.

Nachfolgende Grafik skizziert das Verfahren:



Runge Kutta Verfahren

Dieses Verfahren geht auf die Mathematiker Carl Runge (1865 – 1927) und Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944) zurück, welche es Anfang des 20. Jahrhundert entwickelt haben. Man muss sich vor Augen halten, dass damals jede Berechnung mühselige Handarbeit war.

Für unsere Zwecke werden wir vier Punkte untersuchen. Dann ist $n = 4$ und man spricht vom Runge Kutta Verfahren *vierter Ordnung*.

Die Frage ist jetzt, wie man die zu untersuchenden Punkte wählt, um zu den Steigungen k_1, k_2, k_3, k_4 zu gelangen.

Definition 4.1

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $\dot{y} = f(t, y)$. Man nähert die gesuchte Funktion $y(t)$ durch eine Punktfolge (t_n, y_n) an ausgehend von einem Startpunkt (t_1, y_1) und einer (kleinen) *Schrittweite* h . Beim *Runge Kutta Verfahren vierter Ordnung* berechnet man dazu zuerst die Tangentensteigung in vier Punkten:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

Für den Iterationsschritt verwendet man dann die gemittelte Steigung

$$k = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Und man hat die Iterationsformel:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hk \end{cases}$$

□

Nun wenden wir das wieder auf das Federpendel an. Das entsprechende Differentialgleichungssystem war gegeben durch:

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 u \end{cases}$$

Da wir zwei Komponenten haben, brauchen wir zwei Gruppen von Koeffizienten für die Tangentensteigungen. Wir bezeichnen sie mit k_j für die erste Komponente und l_j für die zweite.

Damit haben wir zuerst:

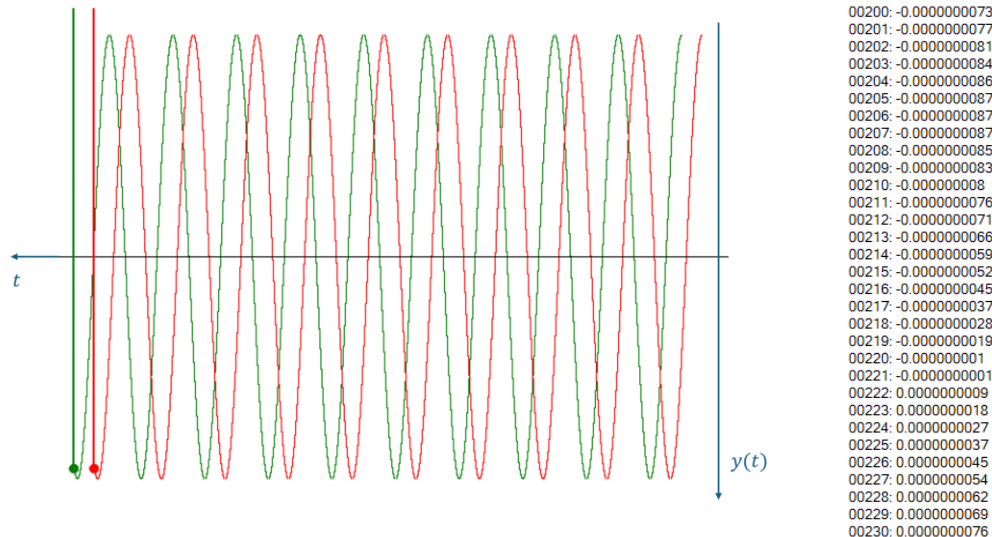
$$\begin{aligned} &\begin{cases} k_1 = f_1(t_n, u_n, v_n) = v_n \\ l_1 = f_2(t_n, u_n, v_n) = -\omega^2 u_n \end{cases} \\ &\begin{cases} k_2 = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}l_1\right) = v_n + \frac{h}{2}l_1 \\ l_2 = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}l_1\right) = -\omega^2\left(u_n + \frac{h}{2}k_1\right) \end{cases} \\ &\begin{cases} k_3 = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}l_2\right) = v_n + \frac{h}{2}l_2 \\ l_3 = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}l_2\right) = -\omega^2\left(u_n + \frac{h}{2}k_2\right) \end{cases} \\ &\begin{cases} k_4 = f_1(t_n + h, u_n + hk_3, v_n + hl_3) = v_n + hl_3 \\ l_4 = f_2(t_n + h, u_n + hk_3, v_n + hl_3) = -\omega^2(u_n + hk_3) \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ v_{n+1} = v_n + h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6 \end{cases}$$

Wie man sieht, ist dies ein explizites Verfahren.

Im Simulator ist es implementiert. Man erhält damit folgendes Resultat:



Das rote Pendel wird durch das Runge Kutta Verfahren der Ordnung vier approximiert

Auch diese Approximation ist optisch recht gut. Auf der rechten Seite sieht man in der Liste der Differenzen zwischen realem und approximiertem Pendel bei jedem Schritt, dass diese deutlich kleiner geworden sind. Dargestellt sind in der Liste wieder die Iterationsschritte 200 bis 230.

Wir werden im nächsten Kapitel für die Simulation von verschiedenen Arten von Pendeln dieses Runge Kutta Verfahren für die Approximation verwenden, weil es einfach zu implementieren und mindestens von der Idee her elementar verständlich ist. Es hat eine gute Balance zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand. Es benötigt keine höheren Ableitungen der Funktion als die erste. Zudem ist der Fehler ist proportional zur fünften Potenz der Schrittweite, was für unsere Zwecke genügt.

In der Praxis gibt es je nach Art der Differentialgleichung effizientere Verfahren, teils Mehrschrittverfahren oder adaptive Verfahren mit angepasster Schrittweite pro Schritt. Wer sich dafür interessiert, sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen. Eine ganze Palette von praxistauglichen Verfahren, welche oft von Ingenieuren genutzt werden, bietet auch MATLAB mit seiner ODE (= Ordinary Differential Equation) Suite.

6. Partielle Ableitung und totales Differential

Bei mechanischen Systemen, an denen mehrere Massen beteiligt sind, wie zum Beispiel bei gekoppelten Pendeln, werden wir Bewegungsgleichungen mit Funktionen antreffen, welche von mehreren Parametern abhängen. Dabei treten die Begriffe der partiellen Ableitung und des totalen Differentials auf. Wer mit diesen Begriffen vertraut ist, kann diesen Abschnitt überspringen. Für die anderen bieten wir eine kurze Einführung als Vorbereitung für den Lagrange Formalismus in nächsten Abschnitt.

Definition 5.1

Gegeben sei eine Funktion in mehreren Variablen:

$$f: (q_1, q_2, \dots, q_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}$$

Dann ist die *partielle Ableitung* nach einer Variablen q_i definiert als:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_i + h, \dots, q_n) - f(q_1, q_2, \dots, q_n)}{h}$$

falls dieses Limes existiert. Wenn das für alle i der Fall ist, dann heisst f partiell differenzierbar. \square

In der Praxis betrachtet man nur q_i als Variable und leitet nach q_i wie gewohnt ab, während alle anderen Variablen $q_k, k \neq i$ als konstant betrachtet werden.

Beispiel

Gegeben sei: $f(x, y, z) := 2xy + xz^2$. Dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + z^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz$$

\square

Um das Verhalten einer reellen und stetig differenzierbaren Funktion f zu untersuchen, haben wir im eindimensionalen Fall diese Funktion mit Hilfe der Ableitung dieser Funktion durch eine lineare Funktion angenähert:

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h, h \approx 0$$

Nun versuchen wir dasselbe für eine Funktion

$$f: (q_1, q_2, \dots, q_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}$$

Welche partiell stetig differenzierbar ist. Das heisst, die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen existieren und sind stetig in jeder Variablen.

Wir wollen also eine Differenz abschätzen:

$$df := f(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) - f(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Wobei $dq_i \approx 0, \forall i$. Es gilt:

$$\begin{aligned} df &:= f(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) - f(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) \\ &\quad + f(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) - f(q_1, q_2, q_3 + dq_3, \dots, q_n + dq_n) \\ &\quad + f(q_1, q_2, q_3 + dq_3, \dots, q_n + dq_n) - \dots \\ &\quad + f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}, q_n + dq_n) - f(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) \end{aligned}$$

Wenn wir jede dieser Differenzen wie im eindimensionalen Fall abschätzen, gilt:

$$\begin{aligned} &f(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) - f(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) \\ &\quad \approx \frac{\partial f}{\partial q_1}(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) dq_1 \end{aligned}$$

und so weiter für alle i . Da die partiellen Ableitungen stetig sind, gilt ferner:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}(q_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n) \approx \frac{\partial f}{\partial q_1}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Damit erhalten wir das sogenannte totale Differential:

Definition 5.2

Sei $f: (q_1, q_2, \dots, q_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}$ partiell stetig differenzierbar.

Dann heisst:

$$df := \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n$$

Totales Differential von f . \square

Das totale Differential beschreibt die infinitesimale Änderung einer Funktion $f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ wenn sich jede ihrer Variablen q_i um einen infinitesimalen Wert dq_i ändert.

Beispiel

Gegeben sei: $f(x, y, z) := 2xy + xz^2$. Dann ist:

$$df = (2y + z^2)dx + 2xdy + 2zxdz$$

\square

Es kann sein, dass die Parameter q_i wieder Funktionen in Abhängigkeit von einem weiteren Parameter sind, insbesondere abhängig von der Zeit t . Also: $q_i = q_i(t)$, wobei alle q_i stetig differenzierbar sind. Das ändert nichts an der partiellen Ableitung von f . Hingegen kann man beim totalen Differential in Definition 5.2 ersetzen:

$$dq_i(t) = \frac{dq_i}{dt} dt = \dot{q}_i dt$$

wobei der Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet. In diesem Fall hat man in Definition 5.2:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 dt + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 dt + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n dt$$

Oder:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

Für das nächste Kapitel wird folgendes Lemma nützlich sein.

Lemma 5.3

Sei $f: (q_1, q_2, \dots, q_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow f(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}$ partiell stetig differenzierbar.

Behauptung:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

und

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

□

Beweis:

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

In der zweiten Gleichung hat man:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n$$

Nun gibt es den Satz von Schwarz-Clairaut, den wir hier nicht weiter erläutern können. Er sagt, dass man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen kann, wenn diese stetig sind, also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i}$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

□

Beispiel

Gegeben sei: $f(x, y, z) := 2xy + xz^2$

Ferner seien x, y, z abhängig von der Zeit, nämlich:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \\ z(t) = e^{-rt} \end{cases}$$

Dann ist $f(t) = 2r^2 \cos t \cdot \sin t + r e^{-2rt} \cos t$ und

$$\dot{f}(t) = -2r^2 \sin^2 t + 2r^2 \cos^2 t - 2r^2 e^{-2rt} \cos t - r e^{-2rt} \sin t$$

Wenn wir das totale Differential verwenden, ist:

$$\dot{f}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = (2y + z^2) \dot{x} + 2x \dot{y} + 2xz \dot{z}$$

Mit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -r \sin t \\ \dot{y}(t) = r \cos t \\ \dot{z}(t) = -r e^{-rt} \end{cases}$$

Haben wir:

$$\dot{f}(t) = -(2r \sin t + e^{-2rt}) r \sin t + 2r^2 \cos^2 t - 2r \cos t \cdot r e^{-2rt}$$

Damit erhalten wir wie in Lemma 5.3:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}} = 2y + z^2 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

und:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = 2\dot{y} + 2z\dot{z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}$$

7. Der Lagrange Formalismus

In den folgenden Abschnitten werden wir Beispiele von gekoppelten Pendeln betrachten und deren Dynamik im Simulator simulieren. Die Herleitung der entsprechenden Bewegungsgleichungen kann auf Basis der Newton'schen Kraftgesetze schwierig und aufwendig sein. Wir werden für solche Fälle den sogenannten Lagrange Formalismus einsetzen. Dazu brauchen wir den Begriff der partiellen Ableitung und des totalen Differentials vom vorherigen Abschnitt.



Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) war ein französischer Mathematiker, welcher in allen Bereichen der Mathematik und vor allem auch in der theoretischen Physik tiefgreifende Arbeiten geliefert hat. In diesem Abschnitt lernen wir die nach ihm benannte Lagrange Funktion kennen. Sie beruht auf der sogenannten Variationsrechnung, welche hauptsächlich durch Leonhard Euler und Lagrange entwickelt wurde.

Wir nehmen an, dass die Erhaltungssätze und damit Begriffe wie Impuls, Drehimpuls, kinetische und potenzielle Energie aus der Physik bekannt sind. Ferner beschränken wir uns auf Kraftfelder, welche von einem *Potenzialfeld* herrühren. Man nennt solche Kraftfelder *konservativ*. Wir definieren das jetzt genauer.

Definition 6.1

Ein *Potenzialfeld* oder kurz «*Potenzial*» im \mathbb{R}^3 ist eine (in jeder Variablen) stetig differenzierbare Abbildung

$$V: \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow V(\vec{x}) \in \mathbb{R}$$

□

Der Begriff «*Feld*» heisst, dass der Definitionsbereich dieser Abbildung im Raum (oder allgemein im \mathbb{R}^n) liegt. Wenn das Bild ein Skalar ist, also in \mathbb{R} liegt, nennt man die Abbildung auch ein *Skalarfeld*.

Wir wollen zwischen Potenzial und potenzieller Energie unterscheiden. Ein Potenzial ist *unabhängig* von einer Masse, welche in seinem Definitionsbereich liegt.

Beispiel

Das *Potenzial* des Erdgravitationsfeldes in einem Punkt \vec{x} relativ zum Erdmittelpunkt ist:

$$V(\vec{x}) = -MG \frac{1}{|\vec{x}|}$$

wobei $M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ die Masse der Erde und $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ die Gravitationskonstante ist.

Die *potenzielle Energie* einer Masse m , welche sich in diesem Potenzialfeld befindet, ist dann:

$$E_{\text{pot}} = mV(\vec{x}) = -mMG \frac{1}{|\vec{x}|}$$

□

Definition 6.2

Wenn wir in der Mechanik sagen, dass eine Kraft $\vec{F}(\vec{x})$, welche in einem Punkt \vec{x} auf eine Masse m wirkt, *von einem Potenzial herrührt*, dann heisst das, dass ein Potenzial

$$V: \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow V(\vec{x}) \in \mathbb{R}$$

existiert, so dass gilt:

$$\vec{F} = -m \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix} =: -m \nabla V$$

In diesem Fall nennen wir die Kraft *konservativ*.

□

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{ wird auch als } \textit{Gradient von } V \text{ bezeichnet.}$$

Beispiel

Das Potenzial im Gravitationsfeld der Erde war:

$$V(\vec{x}) = -MG \frac{1}{|\vec{x}|}$$

Es ist nun

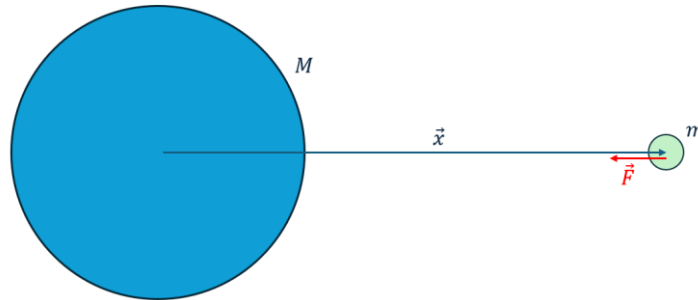
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -MG \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = MG \frac{x_1}{|\vec{x}|^3}$$

Somit ist die zugehörige Kraft

$$\vec{F} = -m\nabla V = -mMG \frac{1}{|\vec{x}|^2} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Das ist nichts anderes als das *Gravitationsgesetz von Newton*.

$-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung Erdmittelpunkt. Die Kraft zeigt in diese Richtung und nimmt mit dem Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt ab.



Eine Masse m an der Position \vec{x} relativ zum Erdmittelpunkt

Wenn V um eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ verändert wird, liefert das offensichtlich dieselbe Kraft, da diese Konstante bei der Ableitung ∇V verschwindet. In der Praxis «normiert» man diese Konstante so, dass Rechnungen mit dem Potenzial «handlicher» werden.

Beispiel

Wir betrachten eine Masse m in Erdnähe im Abstand h von der Erdoberfläche. Wenn $R \approx 6.37 \text{ km}$ der Erdradius ist, ist $|\vec{x}| = R + h$. Das zugehörige Potenzial ist dann

$$V(h) = -MG \frac{1}{R + h} + C$$

Nun normieren wir $C \in \mathbb{R}$ so, dass $V(0) = 0$ ist, dass also die potenzielle Energie auf der Erdoberfläche verschwindet. Dann ist $C = MG \frac{1}{R}$ und da h sehr klein gegenüber dem Erdradius ist, gilt:

$$V(h) = MG \frac{1}{R} - MG \frac{1}{R + h} = MG \frac{h}{R(R + h)} \approx \frac{MG}{R^2} \cdot h$$

Wenn man $g = \frac{MG}{R^2} \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ setzt, hat man die bekannte Formel für die potenzielle Energie einer Masse m in Erdnähe:

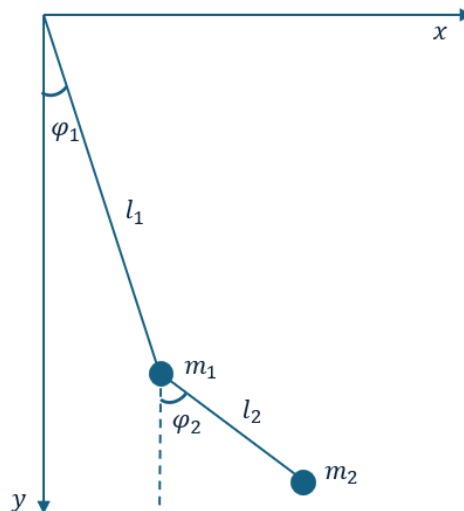
$$E_{\text{pot}}(h) = mgh$$

Die Gravitationskraft ist dann konstant:

$$F = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dh} = -mg$$

□

Nun betrachten wir ein System von N Massen m_1, m_2, \dots, m_N . Die aktuellen Positionen der Massen im System sind bestimmt durch ihre kartesischen Ortskoordinaten $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$. Oft geben diese Koordinaten das System aber nicht in geeigneter Form wieder, nämlich dann, wenn die Massen so «gekoppelt» sind, dass die Ortskoordinaten nicht unabhängig voneinander sind. Betrachten wir ein Beispiel:



Doppelpendel

Beim obigen Doppelpendel ist die Lage der Massen durch die Parameter φ_1, φ_2 eindeutig bestimmt. Man sagt, dass der *Freiheitsgrad* des Systems zwei ist. Wenn man an Stelle dieser Parameter vier kartesische Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) für die Position der Massen verwendet, braucht man zwei weitere Gleichungen, um wieder den Freiheitsgrad des Systems zu erhalten, nämlich:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = l_2^2 \end{cases}$$

Man nennt diese Gleichungen auch *Zwangsbedingungen*. Wir fassen zusammen:

Definition 6.3

Die minimale Anzahl der Parameter, die nötig sind um die Positionen der Massen in einem System eindeutig zu beschreiben, heisst *Freiheitsgrad* des Systems. Wenn die Anzahl der gewählten Parameter grösser ist als der Freiheitsgrad, dann sind weitere einschränkende Gleichungen nötig. Diese werden *Zwangsbedingungen* genannt. Die Parameter, welche das System beschreiben und die nicht kartesisch zu sein brauchen, nennt man *generalisierte Koordinaten*. □

Beim Newton'schen Kraftgesetz arbeitet man mit kartesischen Koordinaten und es lautet für eine Masse m mit (kartesischem) Ortsvektor \vec{x} :

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

Die Frage ist jetzt, wie man mit Hilfe von generalisierten Koordinaten ein entsprechendes Bewegungsgesetz formulieren kann. Hier kommt die Lagrange Funktion ins Spiel. Dabei genügt es für unsere Zwecke, wenn wir nur folgenden Situation betrachten:

Voraussetzung *

- Wir betrachten Massen $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_K$ im Raum oder in der Ebene
- Der Freiheitsgrad des Systems sei N und der Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt t wird durch generalisierte Koordinaten $q_1(t), q_2(t), \dots, q_i(t), \dots, q_N(t)$ beschrieben.
- Die zugehörigen kartesischen Koordinaten der Massen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_K$ hängen nur von diesen generalisierten Koordinaten ab (und nicht auch noch von der Zeit t).

- Man hat also Formeln: $\vec{x}_j = \vec{x}_j(q_1, q_2, \dots, q_N), j = 1..K$ und in diesen tritt die Zeit t nicht explizit auf.
- Beachte, dass $\dot{\vec{x}}_j = \dot{\vec{x}}_j(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N), j = 1..K$ wegen der Kettenregel und den inneren Ableitungen auch von $\dot{\vec{q}}$ abhängt.
- Die Koordinatentransformationen $\vec{x}_j = \vec{x}_j(q_1, q_2, \dots, q_N), j = 1..K$ sollen *regulär* sein, das heisst, dass gilt: Die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_i}, i = 1 \dots N$ sind für jedes j definiert und sind linear unabhängig. Sie spannen den ganzen Tangentialraum auf.
- Die Massen bewegen sich in einem konservativen Kraftfeld welches auf die Masse m_j an der Position \vec{x}_j die Kraft $\vec{F}_j = -m_j \nabla V(\vec{x}_j)$ ausübt. Dabei ist $V: \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow V(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ das zugehörige Potenzial.

□

Da das Kraftfeld konservativ ist, ist neben der kinetischen Energie E_{kin} auch die potenzielle Energie E_{pot} aller Massen definiert. Damit können wir jetzt die Lagrange Funktion für dieses Szenario definieren:

Definition 6.4

Annahme: Voraussetzung *. Dann ist die Lagrange Funktion definiert als:

$$L: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}: L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) := E_{kin} - E_{pot}$$

Wobei

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K m_j |\dot{\vec{x}}_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}})|^2$$

die gesamte kinetische Energie des Systems ist und

$$E_{pot} = \sum_{j=1}^K m_j V(\vec{x}_j(\vec{q}))$$

die gesamte potenzielle Energie.

□

Satz 6.5

Annahmen: Voraussetzung *. L sei die Lagrange Funktion.

Behauptung: Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}; i = 1, \dots, N$$

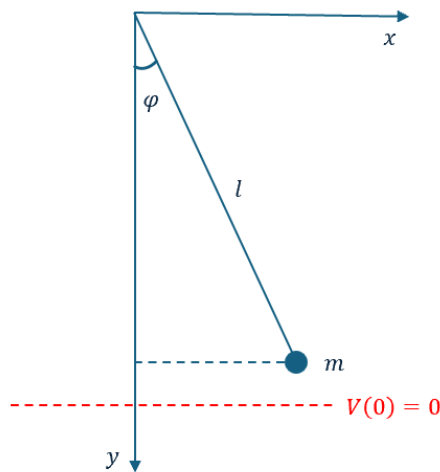
sind äquivalent zum Newton'schen Kraftgesetz

□

Bevor wir den Satz mit Hilfe des Newton'schen Kraftgesetzes beweisen, betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel: Fadenpendel

Beim Fadenpendel ist die Lage der Masse m durch den Winkel φ bestimmt und der Freiheitsgrad ist eins.



Fadenpendel mit generalisierter Koordinate φ

Die kartesischen Koordinaten hängen dann wie folgt von φ ab:

$$\vec{x}(\varphi) = l \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Das Potenzial ist das Gravitationsfeld in Erdnähe und damit gegeben durch

$$V(\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi)$$

wenn wir $V(0) = 0$ normieren. Beachte: Die y-Achse zeigt nach unten, deshalb das Minuszeichen beim Cosinus.

Somit lautet die Lagrange-Funktion (der erste Term ist die kinetische Energie):

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos\varphi)$$

Die linke Seite der Lagrange-Gleichung ist:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} ml^2 \dot{\varphi} = ml^2 \ddot{\varphi}$$

Die rechte Seite der Lagrange-Gleichung ist:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \cdot \sin\varphi$$

Wenn wir beide Seiten gleichsetzen, erhalten wir:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi$$

und damit wieder die bekannte Gleichung von Kapitel 2:

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

□

Beweis des Satzes 6.5.

Wir treffen zuerst einige Vorbereitungen. Wir betrachten eine Masse m in einem konservativen Kraftfeld im dreidimensionalen Raum. Deren räumliche Position in kartesischen Koordinaten sei

$$\vec{x} = \vec{x}(q_1, q_2, \dots, q_N) = \begin{pmatrix} x(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ y(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ z(q_1, q_2, \dots, q_N) \end{pmatrix}$$

Und es gelte Voraussetzung*.

Mit der Schreibweise

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_i} \\ \frac{\partial y}{\partial q_i} \\ \frac{\partial z}{\partial q_i} \end{pmatrix}$$

meinen wir, dass jede der drei Komponenten von \vec{x} partiell nach q_i abgeleitet wird.

Wir treffen jetzt einige Vorbereitungen. Es gilt nach Lemma 5.3:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}, i = 1 \dots N$$

und:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$

Ferner gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial V(\vec{x}(\vec{q}))}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial q_i} = \nabla V \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$

Die Lagrange Funktion ist:

$$L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})|^2 - mV(\vec{q}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \cdot \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - mV(\vec{q})$$

Wir vergleichen beide Seiten der Bewegungsgleichung von Lagrange. Zuerst berechnen wir die linke Seite und verwenden Lemma 5.3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} \right) = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} + m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite haben wir unter Verwendung von Lemma 5.3 und der Kettenregel:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_i} - m \frac{\partial V}{\partial q_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} - m \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial q_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} - m \nabla V \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$

Somit ist $\forall i$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Leftrightarrow m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = -m \nabla V \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \Leftrightarrow m \ddot{\vec{x}} = -m \nabla V = \vec{F}$$

Die rechte Gleichung ist aber gerade das Newton'sche Kraftgesetz.

" \Leftarrow " ist klar.

" \Rightarrow ": Die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig und spannen den ganzen Tangentialraum auf.

Wir haben auch gesehen, dass der Satz unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten gilt, solange deren Anzahl dem Freiheitsgrad des Systems entsprechen.

□

Beispiel: Impulssatz

Wir betrachten eine Masse, auf die keine Kraft wirkt. Dann ist V konstant und bei entsprechender Normierung $V \equiv 0$.

Die Lagrange-Funktion besteht dann nur aus der kinetischen Energie:

$$L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})|^2$$

Dann gilt (man verwende die Formeln im Beweis des Satzes):

$$m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} + m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$$

Somit ist $m \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = 0, \forall i$. Die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ sind aber nach Voraussetzung linear unabhängig und spannen den ganzen Tangentialraum auf.

Daraus folgt: $m \ddot{\vec{x}} = \vec{0}$ und $m \dot{\vec{x}} = \text{konstant}$.

□

Beispiel: Energiesatz

Wir betrachten eine Masse m an der Position $\vec{x}(\vec{q})$ in einem konservativen Kraftfeld mit Potenzial $V(\vec{x})$. Die Lagrangefunktion ist:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - m V(\vec{x})$$

Als Vorbereitung berechnen wir:

$$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} \right) = m \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_i}$$

Das ist nach Lemma 5.3:

$$= m \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_i} = m \dot{\vec{x}} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_i} \dot{q}_i = m \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d \dot{\vec{x}}}{dt} = m \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}$$

Die Gesamtenergie ist, wobei wir das obige Resultat verwenden:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} + mV(\vec{x}) = m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Damit haben wir unter Anwendung der Produkt- und Kettenregel und da L sowohl von q_i wie auch von \dot{q}_i abhängt:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

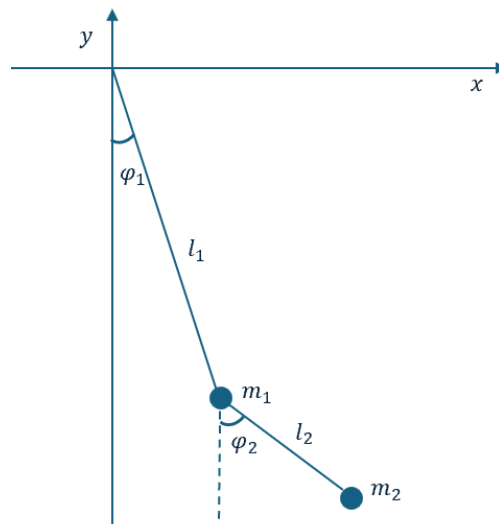
gemäss den Bewegungsgleichungen von Lagrange.

Bemerkung

Da wir den Lagrange Formalismus lediglich als Hilfsmittel für die gekoppelten Pendel brauchen, haben wir ihn auf das Kraftgesetz von Newton zurückgeführt. Die Herleitung des Lagrange Formalismus aus dem Hamilton'schen Prinzip der stationären Wirkung ist auf Basis der Mathematik am Gymnasium mit Zusatzaufwand theoretisch möglich. Dabei kann es reizvoll sein, mit einfachen Beispielen in die Variationsrechnung einzutauchen. Eine gute Einführung findet man z.B. in [2].

8. Gekoppelte Pendel

Als erstes Beispiel eines gekoppelten Pendels betrachten wir das Doppelpendel.



Doppelpendel

Die generalisierten Koordinaten sind $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$. Sie beschreiben den Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt t vollständig. $l_1 > 0, l_2 > 0$ bleiben während der Bewegung konstant.

Nun werden wir einen gewissen Rechenaufwand auf uns nehmen müssen, um die Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Lagrange herzuleiten.

Der Ortsvektor der Masse m_1 ist:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \dot{\vec{r}}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Und der Ortsvektor der Masse m_2 :

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} \sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} + l_2 \dot{\varphi}_2 \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \}$$

Und die potenzielle Energie:

$$E_{pot} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Damit hat man als Lagrange-Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$+ g(m_1 + m_2) l_1 \cos\varphi_1 + g m_2 l_2 \cos\varphi_2$$

Die Lagrange-Gleichung für die erste generalisierte Koordinate lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{d}{dt} \{ l_1^2 (m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \}$$

$$= l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - g(m_1 + m_2) l_1 \sin\varphi_1$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Lagrange-Gleichung ein und bringen alles nach links. Ferner kann durch l_1 gekürzt werden. Das liefert:

$$l_1 (m_1 + m_2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2$$

$$- m_2 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + m_2 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + g(m_1 + m_2) \sin\varphi_1 = 0$$

Multipliziert man den dritten Summanden aus, hebt sich ein Teil mit dem vierten Summanden auf und es bleibt:

$$l_1 (m_1 + m_2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 \} + g(m_1 + m_2) \sin\varphi_1 = 0$$

Wir setzen:

$$\Delta\varphi := \varphi_1 - \varphi_2, \mu := \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Wenn $m_1 > 0$ ist $\mu < 1$.

Damit erhalten wir:

$$(1) \quad l_1 \ddot{\varphi}_1 + \mu l_2 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_2 + \mu l_2 \sin \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_2^2 + g \sin \varphi_1 = 0$$

Die Lagrange-Gleichung für die zweite generalisierte Koordinate lautet analog:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2}$$

Eine entsprechende Rechnung, welche wir gerne dem Leser als Übung überlassen, liefert die Gleichung:

$$(2) \quad l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_1 - l_1 \sin \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_1^2 + g \sin \varphi_2 = 0$$

Beide Gleichungen haben eine hohe Symmetrie: Vertauscht man die Indices $1 \leftrightarrow 2$, dann geht die eine fast in die andere über. Sie unterscheiden sich dann nur um den Faktor μ und $\Delta \varphi$ geht über in $-\Delta \varphi$.

Wenn wir die zweite Gleichung (2) mit $\mu \cos \Delta \varphi$ multiplizieren, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{cases} l_1 \ddot{\varphi}_1 + \mu l_2 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_2 + \mu l_2 \sin \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_2^2 + g \sin \varphi_1 = 0 \\ l_1 \mu \cos^2 \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_1 + \mu l_2 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_2 - \mu l_1 \sin \Delta \varphi \cos \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \mu \cos \Delta \varphi \cdot g \sin \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Nun subtrahieren wir die untere Gleichung von der oberen und erhalten, wenn wir nach $\ddot{\varphi}_1$ auflösen:

$$(3) \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{-\mu \sin \Delta \varphi \cdot (l_2 \dot{\varphi}_2^2 + l_1 \cos \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_1^2) + g(\mu \cos \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{l_1(1 - \mu \cos^2 \Delta \varphi)}$$

Wenn wir die erste Gleichung (1) mit $\cos \Delta \varphi$ multiplizieren, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{cases} l_1 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_1 + \mu l_2 \cos^2 \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_2 + \mu l_2 \sin \Delta \varphi \cdot \cos \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_2^2 + g \cos \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_1 = 0 \\ l_1 \cos \Delta \varphi \cdot \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_1^2 + g \sin \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Wieder subtrahieren wir die untere Gleichung von der oberen:

$$l_2(\mu \cos^2 \Delta \varphi - 1) \ddot{\varphi}_2 + \mu l_2 \sin \Delta \varphi \cdot \cos \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_2^2 + g \cos \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_1 + l_1 \sin \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_1^2 - g \sin \varphi_2 = 0$$

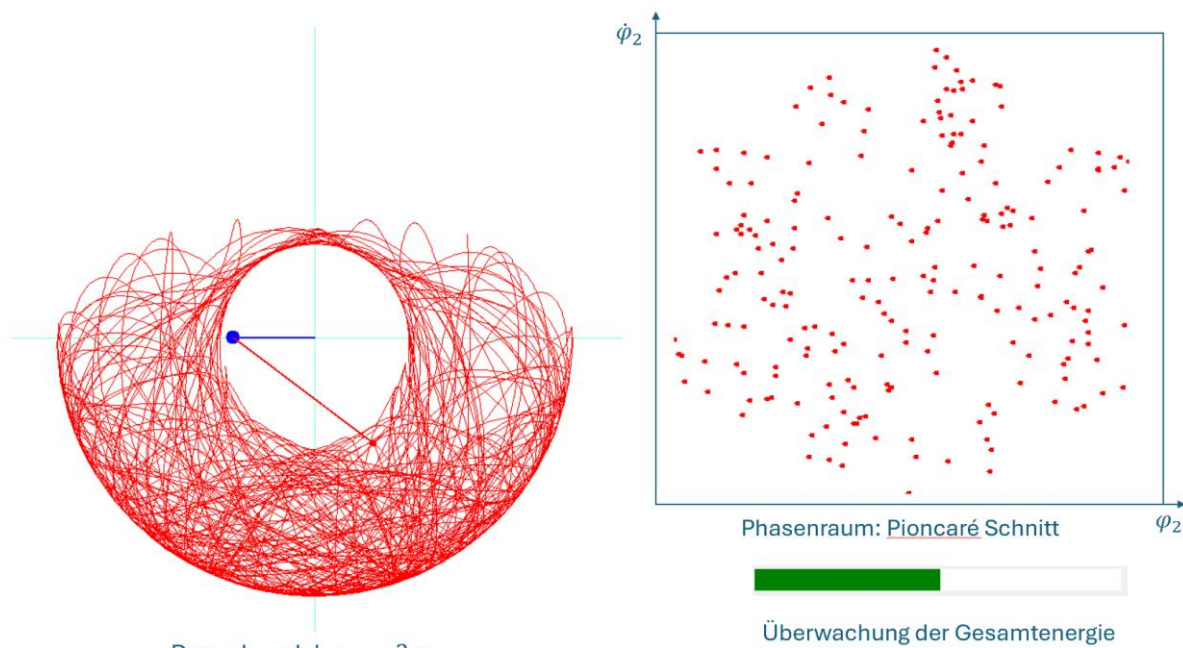
Aufgelöst nach $\ddot{\varphi}_2$ liefert das:

$$(4) \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{\sin \Delta \varphi \cdot (l_1 \dot{\varphi}_1^2 + \mu l_2 \cos \Delta \varphi \cdot \dot{\varphi}_2^2) + g(\cos \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)}{l_2(1 - \mu \cos^2 \Delta \varphi)}$$

Wenn $m_1 > 0$ ist $\mu < 1$ und damit der Nenner in beiden Fällen grösser als 0.

Die Gleichungen (3) und (4) beschreiben das Doppelpendel, haben aber keine analytische Lösung. Im Simulator sind diese Gleichungen Ausgangspunkt für die numerische Approximation der gesuchten Bewegung mit Hilfe des Runge Kutta Verfahrens vierter Ordnung. Details zu dieser Implementation findet man in der mathematischen Dokumentation zum Simulator.

Jetzt zeigen wir einige Experimente mit dem Simulator.



Doppelpendel

Im Simulator kann man die Länge der Pendelarme, das Verhältnis der Massen und die Startpunkte der einzelnen Pendel vorgeben. Ebenfalls weitere Parameter, wie die Schrittlänge des Runge Kutta Verfahrens.

Während der Bewegung der Pendel wird die laufend die Gesamtenergie des Systems berechnet, überwacht und als Balken dargestellt. Er ist grün, solange die Gesamtenergie bei diesem Schritt weniger als 1% von der Startenergie abweicht. Falls das Null-Niveau der potenziellen Energie auf $y = -1$ normiert wird, beträgt diese

$$E_{tot} = E_{pot} = g\{(1 - l_1 \cos \varphi_1)(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos \varphi_2\}$$

$$\varphi_i = u_i, \dot{\varphi}_i = v_i, i \in \{1, 2\}$$

Die Gesamtenergie für jede Position der Pendel ist:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \{l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2\} + g\{(1 - l_1 \cos \varphi_1)(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos \varphi_2\}$$

Im Schulprojekt *Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen* lernt man den Phasenraum kennen. Wir verzichten deshalb hier auf eine detaillierte Erklärung. Im Phasenraum gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten:

- Die Zustände der Pendel $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ und $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ können in der jeweiligen Pendelfarbe getrennt dargestellt werden.
- Man trägt (φ_1, φ_2) als Punkt auf dem Torus $[-\pi, \pi[\times [-\pi, \pi[$ ein und $(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ als Tangente in diesem Punkt
- Man macht einen Poincaré-Schnitt (nach Henri Poincaré 1854 – 1912). Das erläutern wird im Folgenden.

Beim Doppelpendel ist der Phasenraum vierdimensional und die Koordinaten eines Punktes haben wir mit $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ bezeichnet. Während der Bewegung des Doppelpendels wandert dieser Punkt im Phasenraum auf einer Trajektorie, also einer Kurve im Phasenraum.

Wenn man nun eine Hyperebene (das ist ein $(n-1)$ - dimensionaler Unterraum) in den Phasenraum legt, kann man die Punkte untersuchen, in denen die Trajektorie der Bahn diese Hyperebene schneidet.

In unserem Fall wollen wir die Hyperebene definieren durch die Bedingung $\varphi_1 = 0$. Wir betrachten also die Punkte im Phasenraum zum Zeitpunkt, wenn das obere Pendel gerade durch die y -Achse geht. Dadurch erhalten wir ein *diskretes* dynamisches System für das Doppelpendel. Ein Schnittpunkt mit der Hyperebene wird abgebildet auf den Punkt, in welchem die Trajektorie die Hyperebene beim nächsten Durchgang schneidet:

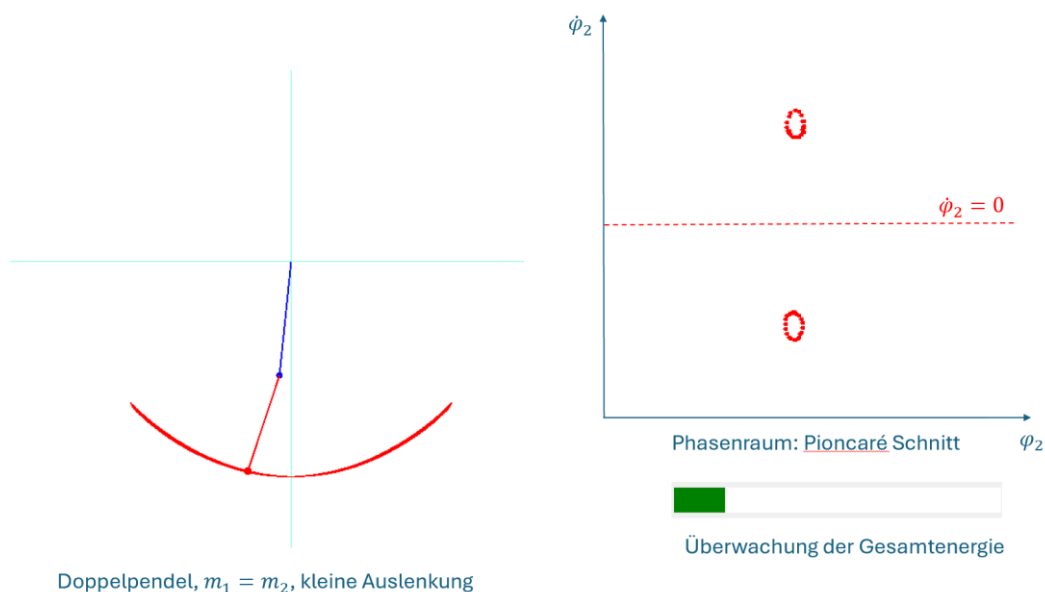
$$(0, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)_n \mapsto (0, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)_{n+1}$$

Die Gesamtenergie entlang einer Trajektorie ist konstant. Für $\varphi_1 = 0$ ist sie gegeben durch:

$$E_{tot} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + g((1 - l_1)(m_1 + m_2) - m_2 l_2 \cos \varphi_2)$$

Nun projizieren wir die Hyperebene $(\dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ auf $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$, das heisst, wir tragen nur die Koordinaten des unteren Pendels in den Phasenraum ein. Wenn $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ gegeben sind, ist nämlich auch $\dot{\varphi}_1$ durch die obige Energiegleichung bestimmt. Das heisst, $\dot{\varphi}_1$ ist kein unabhängiger Parameter, da die Energie konstant ist.

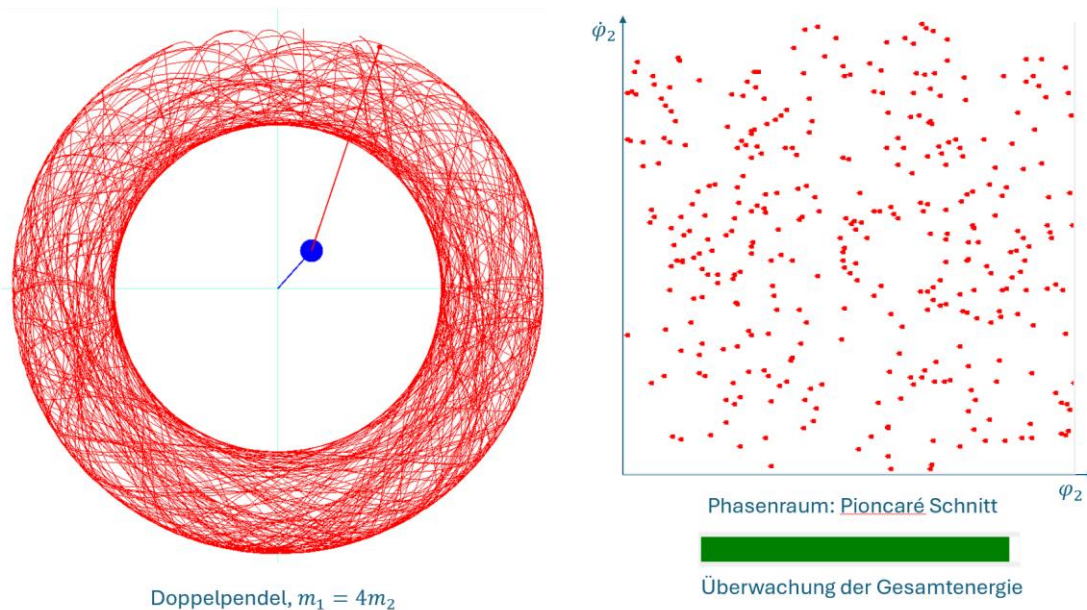
Hier ein weiteres Experiment. Die Auslenkung beim Start ist klein und $\varphi_1 \approx \varphi_2$.



Doppelpendel mit kleiner Auslenkung

Dann schwingt das Doppelpendel ungefähr wie ein normales Fadenpendel. Im Phasenraum variieren φ_2 und $\dot{\varphi}_2$ in einem kleinen Bereich. Je nachdem, ob der Nulldurchgang beim Poincaré Schnitt von rechts oder von links herkommend stattfindet, ist $\dot{\varphi}_2$ kleiner oder grösser Null, aber symmetrisch zur Null-Achse. Das ist eine Folge der Pendelsymmetrie bezüglich der y -Achse.

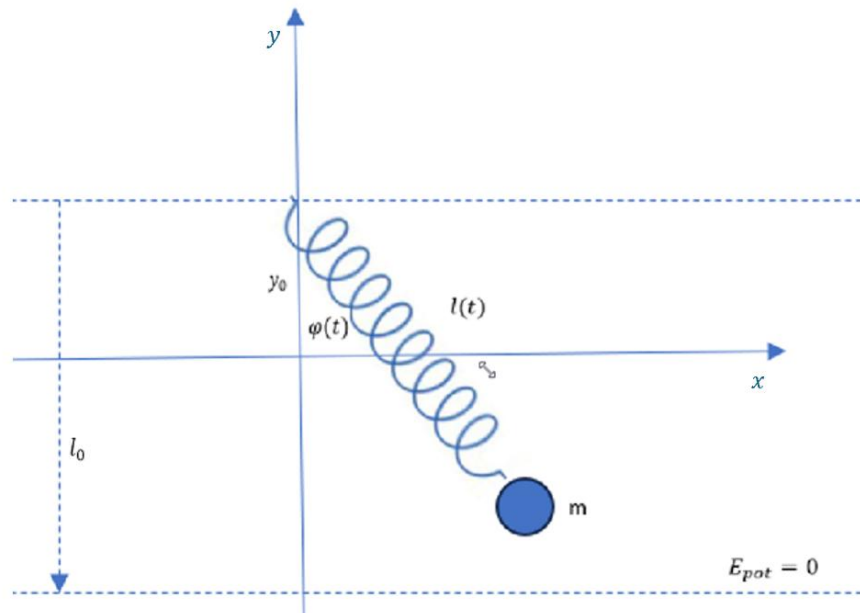
Wenn die Gesamtenergie genügend gross ist und das Pendel starke Ausschläge hat, dann scheint die Bewegung chaotisch. Der Phasenraum mit dem Poincaré-Schnitt zeigt ein zufällig aussehendes Muster, wie in weiteres Experiment mit dem Simulator zeigt.



Ein weiteres Experiment mit einer hohen Gesamtenergie

9. Das schwingende Federpendel

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Federpendel, welches zusätzlich wie ein Fadenpendel hin- und herschwingen kann.



Schwingendes Federpendel

Im Punkt $(0, y_0)$ des Koordinatensystems ist eine Feder befestigt, an deren anderem Ende eine Masse m hängt. Diese Masse schwingt zudem hin und her. Dabei ist der Ausschlagwinkel $\varphi(t)$ wie auch die Federlänge $l(t) > 0$ abhängig von der Zeit t .

Es sei l_0 die Länge der Feder, wenn sich Federkraft und Gewichtskraft der Masse m die Waage halten. Das Nullniveau der potenziellen Energie in Bezug auf die Gravitation sei auf der Höhe $y = y_0 - l_0$ bzw. bei $\varphi = 0, l = l_0$. Mit D bezeichnen wir die Federkonstante.

Der Ortsvektor der Masse m ist:

$$\vec{r}(t) = l(t) \begin{pmatrix} \sin\varphi(t) \\ -\cos\varphi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{l} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} + l\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{l}^2 + 2l\dot{l}\dot{\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi] + l^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2)$$

Dann gilt für die potenzielle Energie (Federenergie plus Gravitationsenergie):

$$E_{pot} = \frac{1}{2}D(l - l_0)^2 + mg(l_0 - l\cos\varphi)$$

Damit haben wir die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) - \frac{D}{2}(l - l_0)^2 - mg(l_0 - l\cos\varphi)$$

Für die erste Koordinate $l(t)$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = \frac{d}{dt}(m\dot{l}) = m\ddot{l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = m\dot{\varphi}^2 - D(l - l_0) + mg\cos\varphi$$

Das liefert die Lagrange-Gleichung:

$$\ddot{l} = \dot{\varphi}^2 - \frac{D}{m}(l - l_0) + g\cos\varphi$$

Für die zweite Koordinate $\varphi(t)$ hat man:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = 2ml\dot{l}\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\sin\varphi$$

Das liefert die Lagrange-Gleichung:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -2ml\dot{l}\dot{\varphi} - mg\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -(2\dot{\varphi}\dot{l} + g\sin\varphi)/l$$

Relevant für die Bewegung ist nur das Verhältnis $\omega^2 := \frac{D}{m}$. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

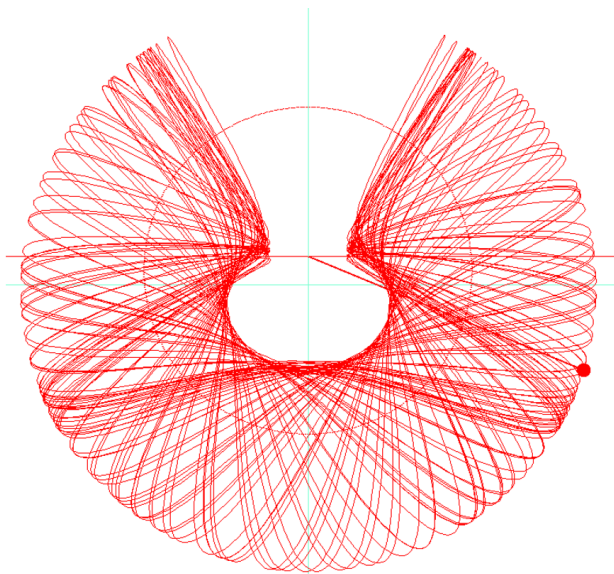
$$\begin{cases} \ddot{l} = \dot{\varphi}^2 - \omega^2(l - l_0) + g\cos\varphi \\ \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\varphi}\dot{l} + g\sin\varphi}{l} \end{cases}$$

Damit wir die Gleichungen in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführen können, führen wir folgende Variablen ein:

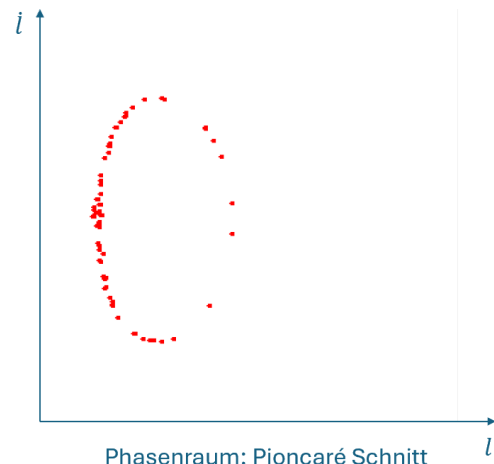
$$u_1 = l, v_1 = \dot{l}, u_2 = \varphi, v_2 = \dot{\varphi}$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem für das Runge Kutta Verfahren:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = u_1 v_2^2 - \omega^2(u_1 - l_0) + g \cos u_2 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -\frac{2v_2 v_1 + g \sin u_2}{u_1} \end{cases}$$



Schwingendes Federpendel

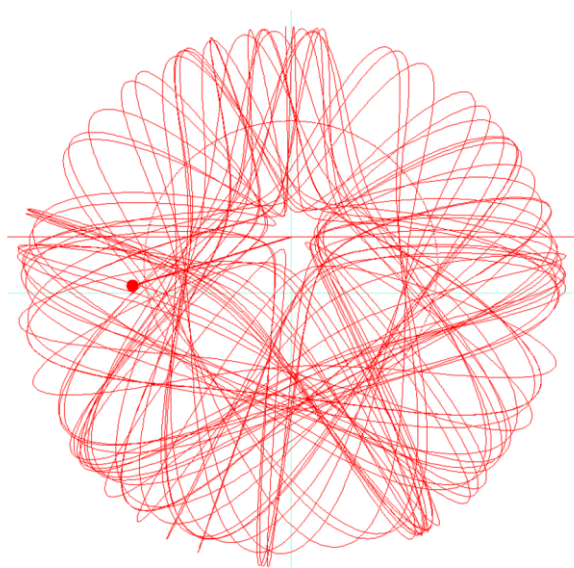


Überwachung der Gesamtenergie

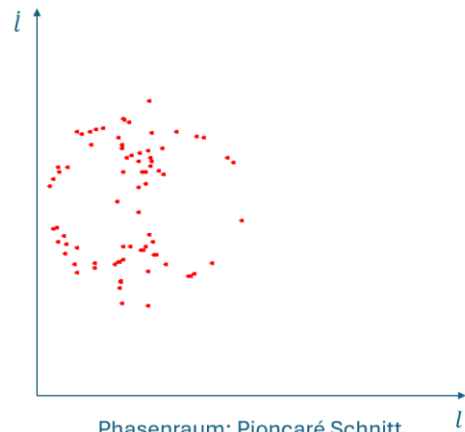
Schwingendes Federpendel

Da u_1 , also die Länge des Federpendels, im Nenner der letzten Gleichung steht, kann \dot{v}_2 sehr gross werden, wenn das Pendel in Richtung des Punktes $(0, y_0)$ schwingt und diesem sehr nahekommt. Bei einem physischen Pendel blockiert dann die Feder, deren Länge ein Mindestmass hat, diesen Effekt. Wir nehmen also bei der Implementierung an, dass die Länge des Federpendels einen Wert l_{min} nicht unterschreiten soll. Dieser Wert wird bei der Implementierung festgelegt.

Wenn nun während der Iteration $u_1 < l_{min}$ wird, dann wird das aufgefangen und an Stelle der Runge Kutta Formeln $u_1 = l_{min}, v_1 = -v_1$ gesetzt. Die Gesamtenergie ändert sich dabei höchstens unwesentlich. Optisch sieht das aus, wie wenn die Masse m an der Kugel mit Radius l_{min} und Mittelpunkt $(0, y_0)$ reflektiert wird, und zwar reibungsfrei.



Schwingendes Federpendel



Phasenraum: Poincaré Schnitt



Überwachung der Gesamtenergie

Hier kommt die Masse dem Aufhängepunkt des Pendels sehr nahe und wird dann reflektiert

Für einen beliebigen Winkel φ gibt es einen Startpunkt des Pendels, an welchem die Federkraft gerade die Gravitationskraft kompensiert. In einer Übung kann der Leser zeigen, dass dies der Fall ist, wenn

$$l(\varphi) = l_0 + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2}$$

Die entsprechende Ortslinie ist eine Kardioide und wird im Simulator rot eingezeichnet, je nach Startposition des Pendels.

Wenn wir die Gesamtenergie des Systems untersuchen, wobei das Nullniveau der gravitationsbedingten potenziellen Energie wieder auf der Höhe $y = y_0 - l_0$ ist, dann gilt für die Energie:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{Feder} + E_{pot} = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{D}{2} (l - l_0)^2 + mg(l_0 - l \cos \varphi) \geq$$

$$\frac{\omega^2}{2} (l - l_0)^2 + g(l_0 - l) =: \tilde{E}(l)$$

Für welche l ist die Gesamtenergie minimal? $\tilde{E}(l)$ ist eine nach oben offene Parabel und wir suchen deren Minimum:

$$\frac{d\tilde{E}}{dl} = \omega^2 (l - l_0) - g = 0$$

Das Minimum wird gerade im unteren Gleichgewichtszustand angenommen: $l_{min} = l_0 + \frac{g}{\omega^2}$ und damit gilt:

$$E_{tot} \geq -\frac{g^2}{2\omega^2}, \forall l, \varphi$$

10. Das Rüttelpendel

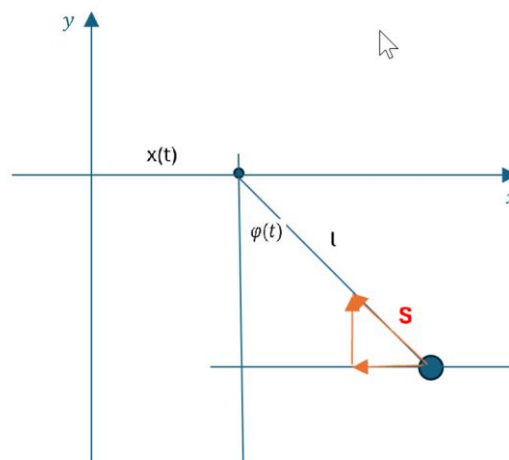
Wir betrachten einen Vibrator, der sich horizontal hin- und her bewegt, und zwar in Form einer Cosinus-Schwingung. Zum Zeitpunkt t befindet er sich an der Position

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

A ist die Amplitude seiner Schwingung und ω die Frequenz derselben.

An seinem Endpunkt ist ein Pendel mit einer starren und massenfreien Achse befestigt. Dieses Pendel kann wie ein Fadenpendel frei schwingen und wird durch den Vibrator zum Schwingen angeregt.

Da in diesem Fall eine äussere Kraft auf den Aufhängepunkt des Pendels wirkt, können wir den Lagrange-Formalismus in der bisherigen Form nicht anwenden. Wir benützen an dessen Stelle das Newton'sche Gesetz: Kraft = Masse \times Beschleunigung.



Rüttelpendel

Die Länge der Pendelachse sei l . Zum Zeitpunkt t schliesst sie mit der vertikalen y -Achse den Winkel $\varphi(t)$ ein. Dann befindet sich die Pendelmasse zum Zeitpunkt t am Ort:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} A \cos(\omega t) + l \sin \varphi(t) \\ -l \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Und deren Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -A\omega \sin(\omega t) + l\dot{\varphi} \cos \varphi \\ l\dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Die Beschleunigung der Pendelmasse ist dann

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -A\omega^2 \cos(\omega t) + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Die Kraft \vec{S} , welche auf die Pendelmasse m wirkt, ist zum Aufhängepunkt gerichtet. Wenn man sie in x - und y -Richtung zerlegt, ist sie:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -S \cdot \sin \varphi \\ S \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Wobei S deren Betrag ist. Zusammen mit der Schwerkraft $-mg$ liefert das nach Newton die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} -\frac{S}{m}\sin\varphi = -A\omega^2 \cos(\omega t) + l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \frac{S}{m}\cos\varphi - mg = l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$$

Wir multiplizieren die obere Gleichung mit $\cos\varphi$, die untere mit $\sin\varphi$ und addieren die Gleichungen. Dann fällt $\frac{S}{m}$ weg und wir erhalten nach kurzer Umformung die Gleichung:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{l}(A\omega^2 \cos(\omega t) \cos\varphi - g\sin\varphi)$$

Diese Gleichung bestimmt die Bewegung des Pendels.

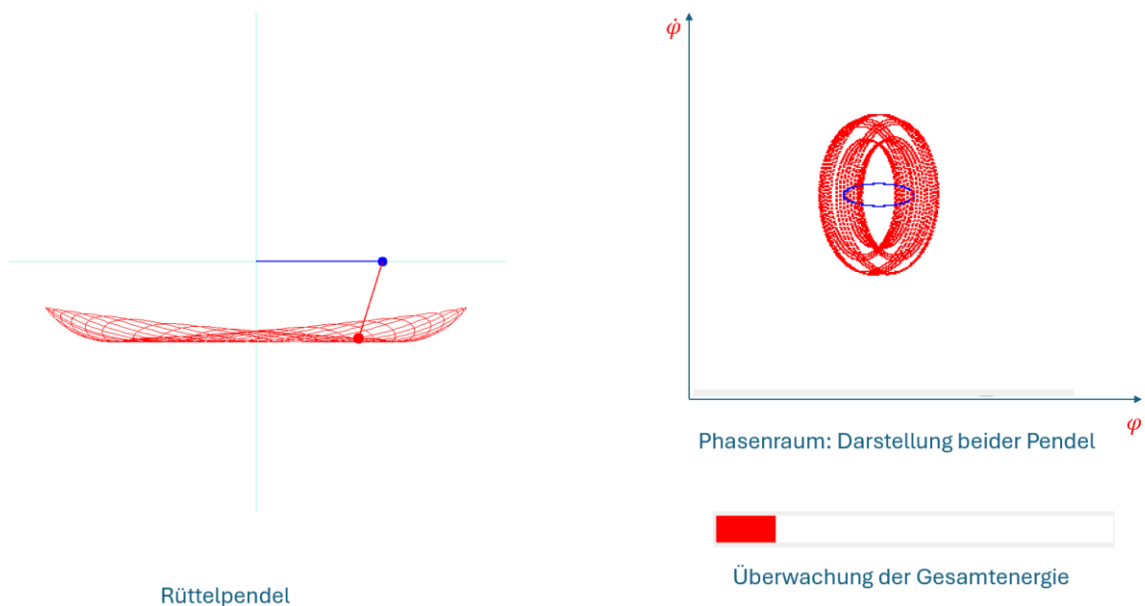
Wir führen sie über in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung, indem wir setzen:

$$u = \varphi, v = \dot{\varphi}$$

Und erhalten:

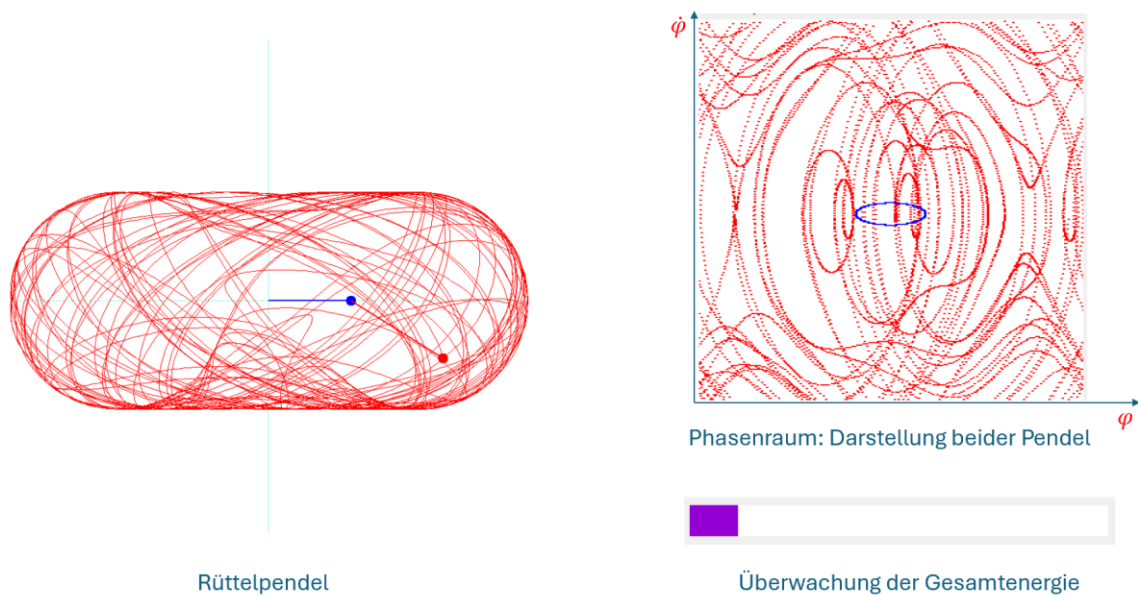
$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{l}(A\omega^2 \cos(\omega t) \cos u - g\sin u) \end{cases}$$

Die Formeln für das explizite Runge Kutta verfahren bei der Implementierung findet man in der mathematischen Dokumentation zum Simulator. Wir machen jetzt einige Experimente.



Rüttelpendel bei kleiner Rüttelfrequenz

Wenn das rüttelnde Pendel eine deutlich kleinere Frequenz hat als das angeregte Pendel, dann schwingt dieses nur mässig. Im Phasenraum zeigt die blaue Kurve des rüttelnden Pendels eine Ellipse. Das angeregte Pendel ist ähnlich einer Ellipsenschar. Die Gesamtenergie wird manchmal über- und manchmal unterschritten. Im ersten Fall ist der Balken rot, im zweiten Fall violett.

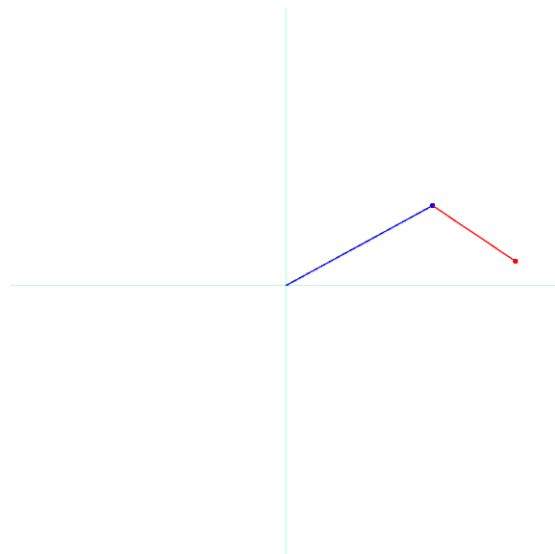


Hier ist die Frequenz des rüttelnden Pendels höher

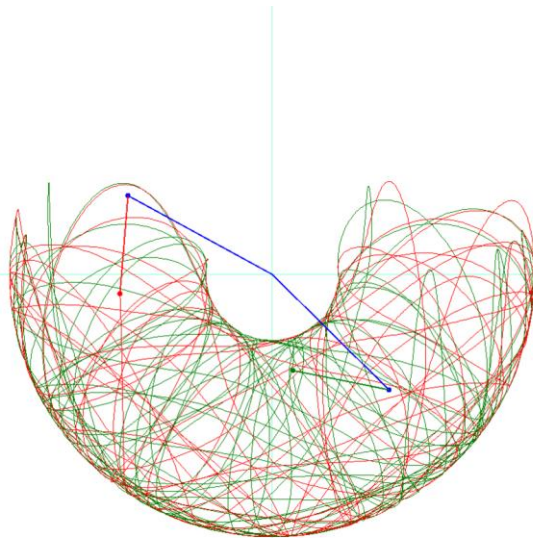
11. Schattenpendel

Um die Sensitivität zu untersuchen, besteht die Möglichkeit, ein Pendel hinzuzufügen, dessen Startposition nur minim vom ursprünglichen Pendel abweicht: so wenig, dass es im Diagramm nicht sichtbar ist. Wir nennen dieses Pendel «Schattenpendel».

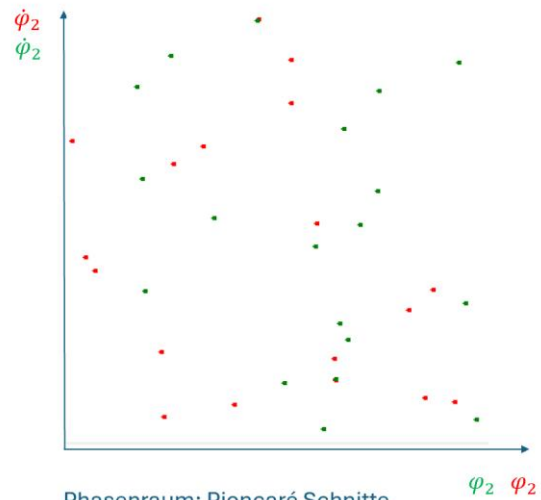
In gewissen Fällen, meist bei kleinen Auslenkungen und tiefer Energie, bleibt die Bewegung des Schattenpendels sehr nahe beim ursprünglichen Pendel. Bei grösseren Auslenkungen und grösserer Energie wird sich das Schattenpendel schon nach kurzer Zeit komplett anders verhalten als das ursprüngliche Pendel. Nachfolgend einige Beispiele.



Startposition Doppelpendel und Schattenpendel (verdeckt, da praktisch identisch)

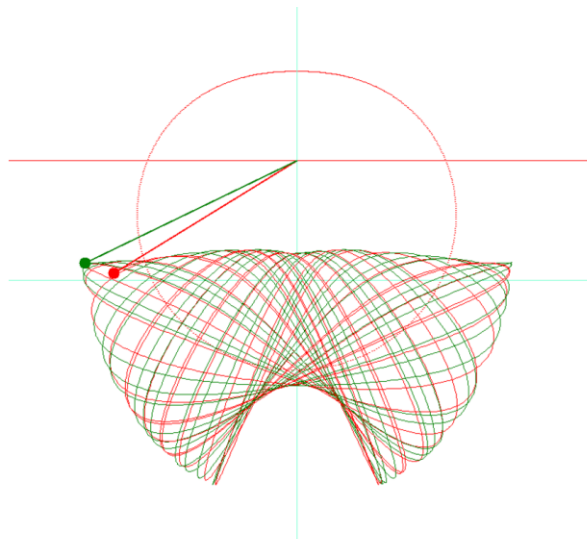


Doppelpendel mit Schattenpendel (grün)

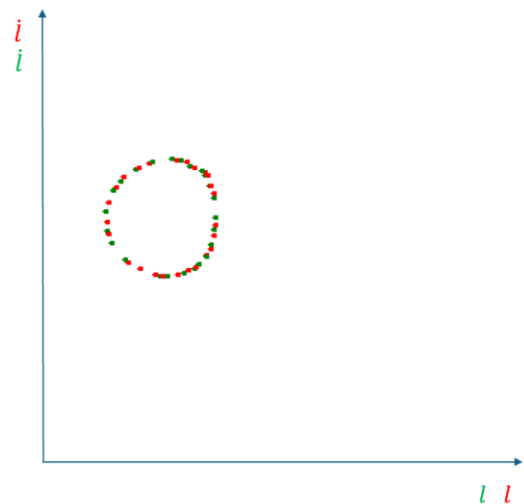


Phasenraum: Poincaré Schnitte

Nach wenigen Schwingungen laufen Pendel (rot) und Schattenpendel (grün) auseinander



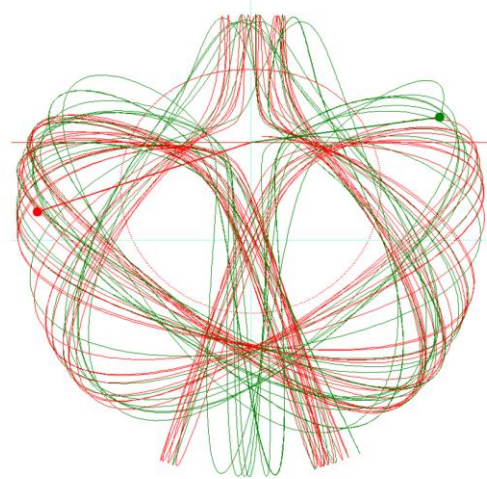
Schwingendes Federpendel mit Schattenpendel (grün)



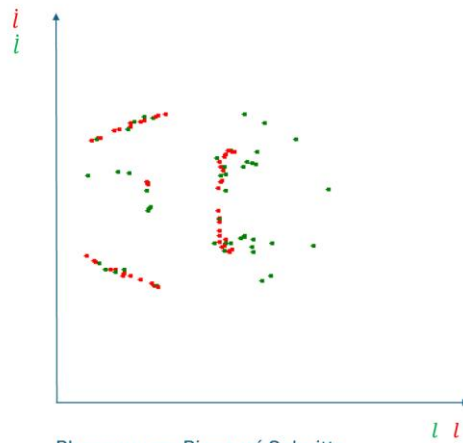
Phasenraum: Poincaré Schnitte

Schattenpendel beim schwingenden Federpendel

Wenn die Schwingungen klein genug sind, dass keine «Reflexionen» am Aufhängepunkt der Feder auftreten, bleiben Pendel und Schattenpendel nahe beieinander. Auch im Phasenraum sehen ihre Bilder ähnlich aus. Wenn aber Reflexionen auftreten, dann ändert sich dies, wie das nachfolgende Beispiel zeigt, denn bei Reflexionen können winzige Unterschiede in der Position eine entscheidende Rolle spielen.

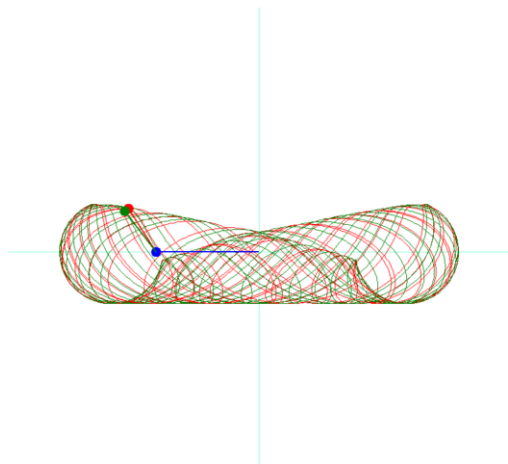


Schwingendes Federpendel mit Schattenpendel (grün)

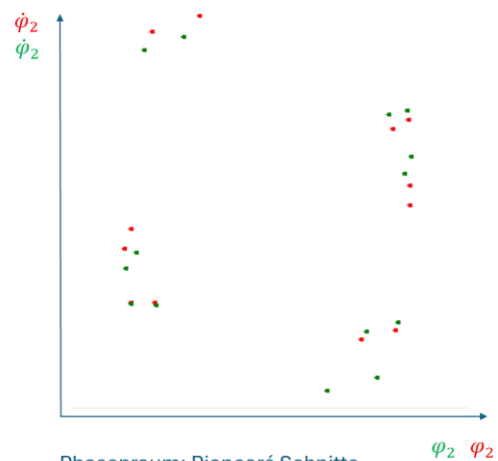


Phasenraum: Poincaré Schnitte

Schattenpendel beim schwingenden Federpendel

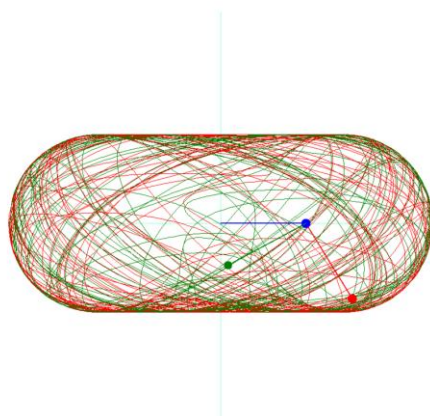


Rüttelpendel mit Schattenpendel (grün)

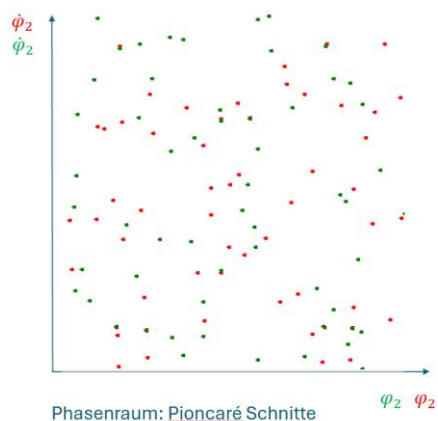


Phasenraum: Poincaré Schnitte

Rüttelpendel und Schattenpendel bei niedriger Rüttelfrequenz



Rüttelpendel mit Schattenpendel (grün)



Phasenraum: Poincaré Schnitte

Bei hoher Rüttelfrequenz geht das Schattenpendel bald seinen eigenen Weg

12. Übungsbeispiele

1. Betrachte die Differentialgleichung $y' = y$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Bestimme explizit die Rekursionsformeln für das explizite und implizite Euler-Verfahren sowie für die Mittelpunktsregel.
2. Erstelle in Excel eine Tabelle, in welcher für das Federpendel mit $\omega^2 = 1$ und der Startposition $(t_1, y_1) = (0, 1)$ eine Liste der iterierten Werte (t_n, y_n) erstellt. Dabei ist die Schrittweite h frei wählbar. Verwende die verschiedenen numerischen Verfahren für die Berechnung.
3. Ist es möglich, dass das Doppelpendel bei geeigneter Startposition wie ein einfaches Fadenpendel schwingt? Das heisst, dass mit der Anfangsbedingung $\varphi_2(0) = 0, \dot{\varphi}_2(0) = 0$ gilt: $\varphi_2(t) = 0, \forall t$.
Tip: Untersuche $\ddot{\varphi}_2$ mit dieser Anfangsbedingung.
4. Untersuche beim schwingenden Federpendel für einen beliebigen Winkel φ , für welche Werte von $l(\varphi)$ die Feder gerade die Gravitationskraft aufhebt.
5. Beim schwingenden Federpendel gibt es für einen beliebigen Winkel φ einen Startpunkt $l(\varphi)$ des Pendels, an welchem die Federkraft gerade die Gravitationskraft kompensiert. Bestimme $l(\varphi)$.
6. Untersuche, ob sich die physikalisch offensichtlichen (stabilen und instabilen) Gleichgewichtslagen des Doppelpendels und schwingenden Federpendels auch rechnerisch ergeben. Betrachte dazu das jeweilige Differentialgleichungssystem erster Ordnung, welches die Pendelbewegung beschreibt. In einer Gleichgewichtslage gilt mit den Bezeichnungen analog Abschnitt 3:
 $\dot{u}_1 = 0, \dot{u}_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$. Ferner $\dot{v}_1 = 0, \dot{v}_2 = 0$.
7. Untersuche ein Rüttelpendel, bei dem das rüttelnde Pendel in vertikaler Richtung auf und ab schwingt. An diesem Federpendel ist ein i) Fadenpendel ii) vertikales Federpendel befestigt.
 - a) Berechne die Bewegungsgleichung für das Pendel im Fall i) und ii)
 - b) Führe die jeweilige Differentialgleichung durch geeignete Substitution über in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung
 - c) Erstelle daraus die Iterationsgleichungen für das Runge Kutta Verfahren

Weiterführende Literatur

- [1] Bastian von Harrach: Numerik von Differentialgleichungen, Vorlesungsskript, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Institut für Mathematik, 2022
- [2] Robin Santra: Einführung in den Lagrange- und Hamilton-Formalismus, Springer Spektrum 2022
- [3] Stefan Frei: Numerische Mathematik, Vorlesungsskript an der Universität Konstanz, WS 2021, 2022
- [4] Urs Kirchgraber: Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen, Berichte über Mathematik und Unterricht, ETHZ, 1992