

Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose des Edward Lorenz

Die Mathematik zum Computerprogramm «Simulator»

Erstellt 1.9.2025

Das vorliegende Dokument beschreibt seltsame Attraktoren, welche im Rahmen einer Wettersimulation von Edward Lorenz entdeckt wurden. Dabei gehen wir von elementar zugänglicher Mathematik aus und erweitern das Konzept der linearen Approximation im Eindimensionalen auf den \mathbb{R}^3 . Unterstützt werden die mathematischen Untersuchungen durch Experimente mit dem Computerprogramm «Simulator», welches das Verhalten des Lorenz-Systems sehr schön zeigt.

Das Dokument soll eine Anregung sein für den erweiterten Mathematikunterricht auf der Mittelstufe, sei es für Angebote ausserhalb des obligatorischen Lehrplanes oder für individuelle Arbeiten von interessierten Schülern. Es ist insbesondere geeignet als Einführung in die Methoden der linearen Algebra und der mehrdimensionalen Differentialrechnung.

Die gesamte Themenreihe in Zusammenhang mit dem «Simulator» umfasst:

- Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums
- Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen
- Newton Iteration und die komplexen Einheitswurzeln
- Iteration quadratischer Funktionen in der komplexen Ebene
- Numerische Methoden und gekoppelte Pendel
- Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem
- **Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose von Edward Lorenz**
- Fraktale Mengen und Lindenmayer-Systeme
- Zur Geschichte der Chaostheorie
- Programmierung eigener dynamischer Systeme im «Simulator»

Jedes Thema wird in einem separaten Dokument behandelt.

Das Computerprogramm «Simulator» ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, ebenso eine Microsoft Installer Version. Der entsprechende Link ist: <https://github.com/HermannBiner/Simulator>. Im «Simulator» sind folgende Dokumentationen auf Deutsch und Englisch integriert:

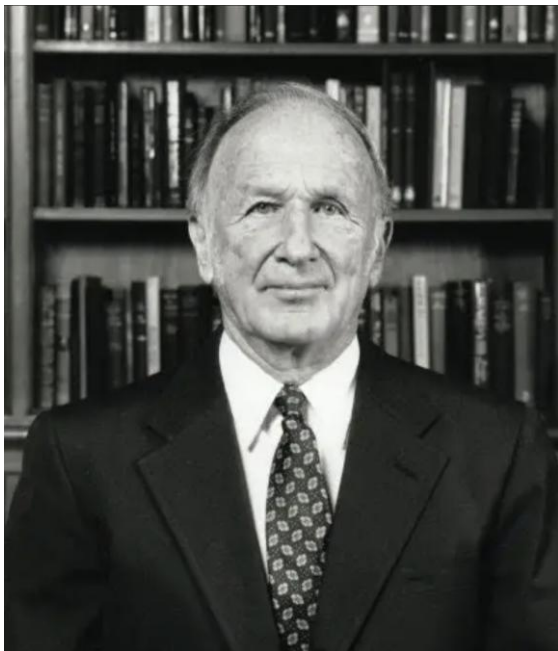
- Mathematische Dokumentation mit Beispielen und Übungsaufgaben
- Technische Dokumentation mit detaillierter Beschreibung der Funktionalität
- Benutzerhandbuch mit Beispielen
- Versionshistorie

Inhalt

1. Die Wetterprognose des Edward Lorenz.....	2
2. Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	7
3. Gleichgewichtslagen	11
4. Stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	18
5. Gleichgewichtslagen des Lorenz Systems.....	21
6. Ausblick: Seltsame Attraktoren	35
7. Übungsbeispiele	37
Weiterführende Literatur.....	38

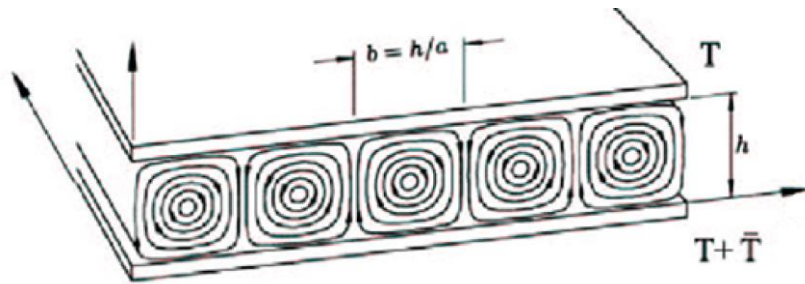
1. Die Wetterprognose des Edward Lorenz

In einem Gewitter kann es ganz schön turbulent zugehen, vor allem in den Bergen oder auf dem Meer. Zudem ist es schwierig vorherzusagen, wo und wann genau diese stattfinden. Die Erdatmosphäre ist ein komplexes System und die langfristige Wetterprognose scheint erst recht unmöglich. Man denkt, dass dies vor allem damit zu tun hat, dass sehr viele Parameter eine Rolle spielen und dass eine genaue physikalische Beschreibung dessen, was in der Atmosphäre geschieht, deswegen unerreichbar ist. Wenn die Vorgänge in extremen Wettersituationen chaotisch erscheinen, dann scheint dies also der Tatsache geschuldet, dass man nicht alle Faktoren im Griff hat, welche Einfluss auf das Wetter haben.



Edward Lorenz (1917 - 2008), Mathematiker und Meteorologe, hat ein stark vereinfachtes Wettermodell untersucht, bei welchem sämtliche Parameter bekannt sind und welches durch ein einfaches System von Differentialgleichungen beschrieben wird. Sein Ziel war, eine langfristige Wetterprognose erstellen zu können. Zu seiner eigenen Überraschung hat er festgestellt, dass bereits dieses einfache Modell unprognostizierbar ist: Er ist auf ein chaotisches dynamisches System gestossen. Seine Resultate hat er 1963 in einem meteorologischen Journal veröffentlicht [2]. Deshalb blieb seine Arbeit in der Mathematik lange Zeit unbeachtet. Heute gilt er als einer der Vorläufer der Chaostheorie.

Edward Lorenz griff für seine Untersuchungen auf ein Modell zurück, welches bereits 1916 durch den britischen Nobelpreisträger Lord Rayleigh (1842 – 1919) theoretisch beschrieben wurde.



Das Konvektionsmodell von Lord Rayleigh (Quelle: [1])

Zwischen zwei Platten im Abstand h befindet sich eine viskose (d.h. deformierbare) und inkompressible Flüssigkeit. Zwischen Unter- und Oberseite besteht eine Temperaturdifferenz \bar{T} , welche ab einem kritischen Wert zur Bildung von Konvektionsrollen führt, die oben skizziert sind. Dabei steigen von unten erwärmte Flüssigkeitselemente wegen ihrer geringeren Dichte auf und kältere Flüssigkeitsvolumina sinken von oben ab. Entlang der Längsachse (also in der Skizze nach hinten) ist das System homogen.

Dieses Modell für atmosphärische Strömungen ist so vereinfacht, dass es die Realität kaum mehr wiedergibt. Dennoch birgt bereits dieses einfache Modell Überraschungen, wie wir bald sehen werden.

Bei seinen Untersuchungen verwendete Edward Lorenz folgendes System von Differentialgleichungen, welches heute als Lorenz-System bekannt ist:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \varrho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

Dieses System ist «fast» linear. Die nichtlinearen Anteile sind oben rot hervorgehoben.

Wir schreiben für das Lorenz-System auch:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{L}(\vec{x})$$

Mit

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ \varrho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}$$

Wir wollen das System aus rein mathematischer Sicht betrachten, ohne dessen physikalische Bedeutung zu interpretieren. Wir betrachten drei reelle Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t . Im Simulator haben die Funktionen den Wertebereich $x, y \in [-20, 20], z \in [0, 50]$.

σ, β, ϱ sind reelle Konstante. Lorenz arbeitete mit den Werten $\sigma = 10, \beta = 8/3$ und ϱ kann im Intervall $[0, 30]$ variiert werden.

Wenn man einen Startpunkt $x(0), y(0), z(0)$ vorgibt, ist der weitere zeitliche Verlauf des Systems

eindeutig bestimmt. Dieser Verlauf wird durch eine «Bahn» oder auch «Trajektorie» $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

beschrieben.

Das Lorenz-System hat keine analytische geschlossene Lösung, das heisst, eine «Formel», welche für jeden Startpunkt die zugehörige Trajektorie beschreibt. Deshalb hat Lorenz das System mit

numerischen Methoden untersucht. Man kann zu Beispiel statt der infinitesimalen Grösse dt einen sehr kleinen «Zeitschritt» Δt betrachten und das System umschreiben:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} = \varrho x - y - xz \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} = -\beta z + xy \end{cases}$$

Dann erhält man ausgehend von einem Startpunkt x_1, y_1, z_1 den jeweils nächsten Punkt der so angenäherten Trajektorie durch die Rekursionsformel:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (-\sigma x_n + \sigma y_n)\Delta t \\ y_{n+1} = y_n + (\varrho x_n - y_n - x_n z_n)\Delta t \\ z_{n+1} = z_n + (-\beta z_n + x_n y_n)\Delta t \end{cases}$$

Dieses auch als Euler-Verfahren bekannte Näherungsverfahren (nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler 1707 – 1783) ist aber zu ungenau. Lorenz arbeitete mit einem verfeinerten Verfahren, der sogenannten impliziten Mittelpunktsregel, wobei er auf die damalige Rechenleistung von Computern Rücksicht nehmen musste. Der Simulator arbeitet mit einem noch besseren Verfahren, nämlich dem vierstufigen Runge-Kutta Verfahren. Diese numerischen Verfahren werden im Rahmen des Schulprojektes *Numerische Methoden und gekoppelte Pendel* behandelt und werden hier nicht weiter erläutert.

Im Rahmen seiner Untersuchung kam Lorenz zum überraschenden Ergebnis, dass das Verhalten dieses einfachen Systems langfristig *unprognostizierbar* ist, und dass kleinste Änderungen im Startwert qualitativ grosse Änderungen in den zugehörigen Trajektorien bewirken. Lorenz wird zugeschrieben, den Begriff «Schmetterlingseffekt» geprägt zu haben. Er sagt, dass das Flattern eines Schmetterlings in Brasilien einen Wirbelsturm in Texas auslösen kann.

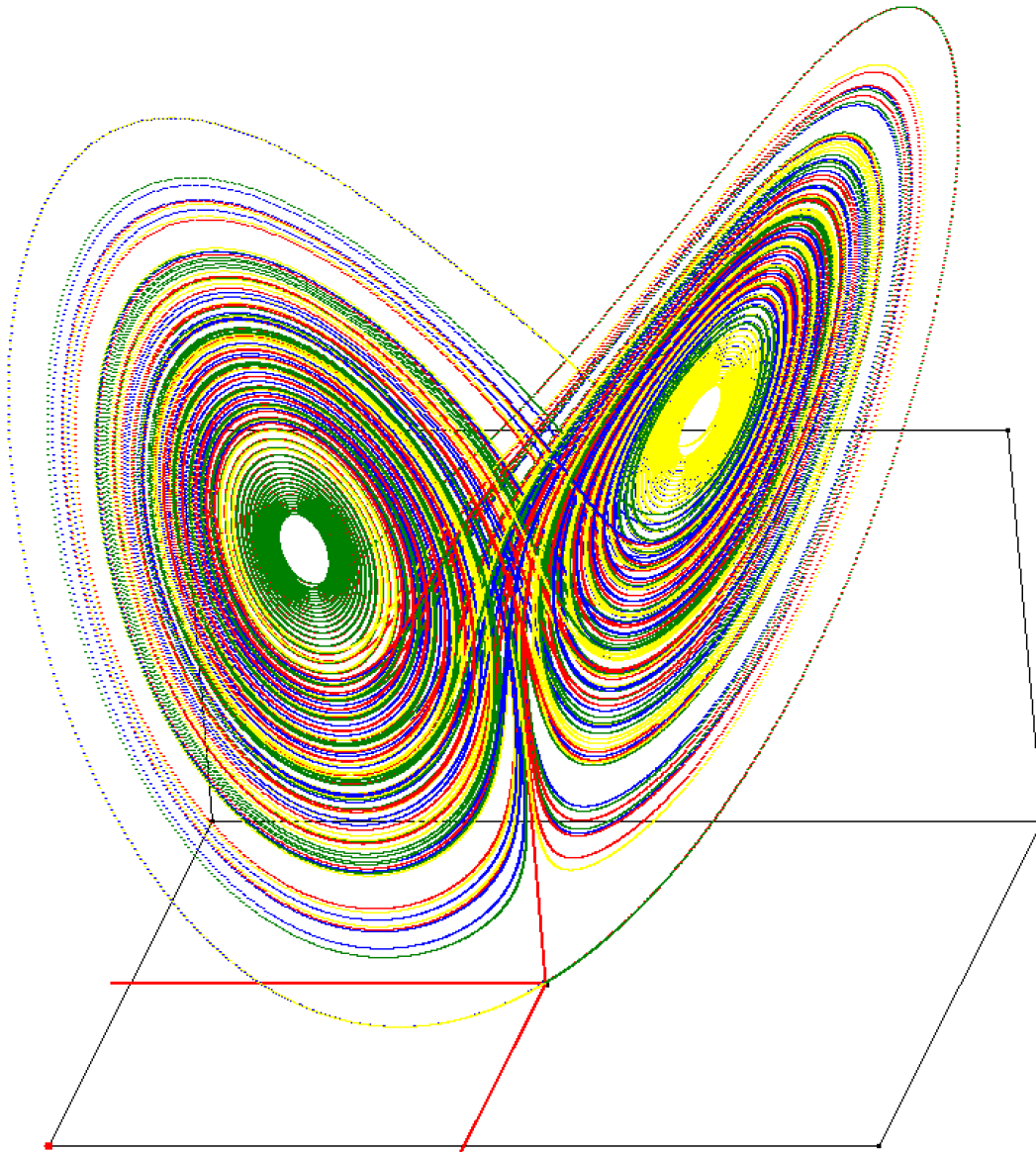
Lorenz hält in [2] fest:

«When our results concerning the instability of non-periodic flow are applied to the atmosphere, which is ostensibly non-periodic, they indicate that prediction of the sufficiently distant future is impossible by any method, unless the present conditions are known exactly».

Hier können wir mit dem Simulator experimentieren, um die Resultate von Lorenz nachzuvollziehen. Wir wählen zum Beispiel $\varrho = 28$ und vier nahe beieinander liegende Startpunkte mit verschiedenen Farben:

$$\begin{cases} (0.01, 0.01, 0.1) \text{ blau} \\ (-0.01, -0.01, 0.1) \text{ rot} \\ (-0.01, 0.01, 0.1) \text{ grün} \\ (0.01, -0.01, 0.1) \text{ gelb} \end{cases}$$

und lassen die Simulation laufen. Dabei werden die zu den Startpunkten gehörenden Trajektorien in denselben Farben gezeichnet. Dabei führen wir in kürzester Zeit und mit einer Rechengenauigkeit von 29 Dezimalstellen im Simulator etwa 200'000 Schritte durch. Das sind Zahlen, von denen Lorenz mit der damaligen Rechenkapazität nur träumen konnte. Das Resultat ist als Lorenz-Attraktor bekannt:



Der Lorenz-Attraktor in unserem Experiment

Die Startpunkte liegen alle nahe beim Nullpunkt. Deren Trajektorien kippen dann auf die rechte oder linke Seite des Attraktors weg. Offenbar hat man je im grünen und gelben Zentrum einen Punkt, der einer instabilen Gleichgewichtslage entspricht: Die Trajektorien in der Nähe dieser Punkte bewegen sich von diesen weg. Mit der Zeit durchmischen sich die Trajektorien auf der linken und rechten Seite des Attraktors. Obwohl die Startpunkte nahe beieinander waren, ist die langfristige Entwicklung des Systems unvorhersagbar.

Dieses Resultat wollen wir in den folgenden Abschnitten mit Hilfe von elementaren Methoden untersuchen. Vorerst aber noch eine Bemerkung zur Physik, welche hinter dem System steckt.

Die Parameter haben folgende physikalische Bedeutung:

σ ist die sogenannte «Prandtl-Zahl», benannt nach dem Ingenieur Ludwig Prandtl (1875 – 1953). Sie beschreibt die Eigenschaften der betrachteten Flüssigkeit hinsichtlich Viskosität und Temperaturleitfähigkeit. Für seine Untersuchungen von atmosphärischen Strömungen arbeitete Lorenz mit dem fixen Wert $\sigma = 10$.

$\beta = \frac{4}{1+a^2}$ ist ein Mass für die Zellgeometrie. Lorenz arbeitete mit dem fixen Wert $a = \frac{h}{b} = \sqrt{2}$, d.h. $\beta = \frac{8}{3}$.

ρ ist die sogenannte Rayleigh-Zahl, welche die aufreibenden und bremsenden Kräfte ins Verhältnis setzt. Diese Zahl ist positiv und von ihr hängt ab, wie sich die Konvektionsströmung verhält. Im «Simulator» kann diese Zahl im Intervall $[0, 30]$ variiert werden.

x ist proportional zur Intensität der Konvektionsströmung. y ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und fallender Strömung. z ist proportional zur Abweichung vom linearen Temperaturprofil entlang der vertikalen Achse.

Die Differentialgleichungen ergeben sich aus drei Erhaltungssätzen:

- Massenerhaltung (hier wird die Kontinuitätsgleichung und der Begriff der Divergenz gebraucht)
- Impulserhaltung (hier braucht man die Navier-Stokes Differentialgleichungen)
- Energieerhaltung (hier braucht man die Wärmetransportgleichung)

Eine genaue Herleitung findet man in [1]. Sie übersteigt aber die mathematischen Werkzeuge, welche uns zur Verfügung stehen.

Wie werden wir vorgehen, um das Lorenz System zu untersuchen? Hier sei die Methode skizziert:

Im Projekt *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums* untersucht man das Verhalten einer Iteration in der Umgebung eines Fixpunktes. Beim Lorenz System scheint je das gelbe und grüne Zentrum im vorherigen Bild ein Fixpunkt zu sein, allerdings ein instabiler. Im eindimensionalen Fall und beim logistischen Wachstum hat man für eine stetig differenzierbare Funktion f nachgewiesen, dass ein Fixpunkt ξ genau dann attraktiv ist, wenn $|f'(\xi)| < 1$. Bei der Herleitung hat man benützt, dass gilt:

$$f(\xi + h) \approx f(\xi) + f'(\xi) \cdot h \text{ wenn } h \approx 0$$

Um das Lorenz System zu untersuchen, verwenden wir denselben Ansatz. Allerdings spielt sich jetzt alles im \mathbb{R}^3 ab. Die Funktion f ist nicht mehr eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sondern $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die Funktion $f(\xi) + f'(\xi) \cdot h$ ist für ein festes ξ eine lineare Funktion in h . Die erste zu klärende Frage ist also,

- wie sehen lineare Funktionen im \mathbb{R}^3 aus?

Dieser Frage gehen wir in Abschnitt 2 nach.

Im eindimensionalen Fall hat der Wert von $|f'(\xi)|$ den Charakter des Fixpunktes bestimmt. Im dreidimensionalen Fall reden wir statt von Fixpunkten oft von Gleichgewichtslagen. Die Frage, welcher wir nachgehen müssen, ist dann

- welche Typen von Gleichgewichtslagen gibt es im \mathbb{R}^3 ?

Dieser Frage gehen wir im Abschnitt 3 nach.

Schliesslich haben wir im eindimensionalen Fall die Ableitung der Funktion f verwendet, um zur Näherung $f(\xi + h) \approx f(\xi) + f'(\xi) \cdot h$ zu kommen. Die Frage ist also

- was tritt im dreidimensionalen Fall an Stelle der Ableitung f' ?

Dieser Frage gehen wir in Abschnitt 4 nach.

Die Klärung dieser Fragen mag aufwendig erscheinen, ist aber mit elementaren Methoden machbar. Wenn wir sie erreicht haben, sind wir in Abschnitt 5 bereit für die Untersuchung des Lorenz Systems.

2. Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wie die linearen Funktionen im eindimensionalen Fall auf lineare Abbildungen in \mathbb{R}^3 übertragen werden. Sämtliche Überlegungen könnte man auch auf den allgemeinen Fall des \mathbb{R}^n anwenden.

Definition 1

Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch eine Abbildungsvorschrift

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{cases}$$

Wobei alle Koeffizienten $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$. \square

Wir führen für diese Abbildungen die Matrixschreibweise ein. Die Abbildungsmatrix A sei gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Das Bild eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist dann definiert als:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 \end{pmatrix}$$

Jede Zeile des Bildvektors ist das Skalarprodukt der entsprechenden Matrixzeile mit dem Vektor \vec{x} .

Man identifiziert oft die Abbildungsmatrix A mit der zugehörigen linearen Abbildung $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wie man leicht prüft, gilt für eine lineare Abbildung:

Satz 2

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: Für beliebige Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y}$$

\square

Der Beweis folgt durch direktes Nachrechnen.

Definition 3

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann nennt man $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ eine *Linearkombination* von \vec{x}, \vec{y} . \square

Bemerkung: Für Satz 2 gilt auch die Umkehrung: Eine Abbildung f (irgendwie definiert, vielleicht nicht durch eine Abbildungsmatrix) ist dann linear, wenn für beliebige Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $f(\lambda\vec{r} + \mu\vec{s}) = \lambda f(\vec{r}) + \mu f(\vec{s})$.

Die Linearität von A hat eine erste wichtige Konsequenz: *Man kann mit den Basisvektoren arbeiten.* Wenn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ Basisvektoren von \mathbb{R}^3 sind (meist gegeben durch ein orthonormiertes System von Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenachsen), dann lässt sich jeder Vektor als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Wegen der Linearität von A gilt dann:

$$A\vec{x} = x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + x_3A\vec{e}_3$$

Das Bild eines Vektors \vec{x} ist also eindeutig bestimmt, wenn man die Bilder der Basisvektoren $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3$ kennt.

Wenn wir nun z.B. den ersten Basisvektor $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachten dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Analoges gilt für die beiden anderen Basisvektoren und man hat den

Satz 4

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: Die zugehörige Abbildungsmatrix A ist gegeben durch die Bilder der Basisvektoren in ihren Kolonnen.

□

Beispiel

Wir betrachten im Raum eine Drehung D von 120° (im Uhrzeigersinn) um die Achse, welche durch den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Diese Abbildung ist linear, weil es keine Rolle spielt, ob ich Vektoren zuerst drehe und dann linear kombiniere, oder zuerst linear kombiniere und dann drehe:
 $D(\lambda\vec{r} + \mu\vec{s}) = \lambda D\vec{r} + \mu D\vec{s}$. D vertauscht die Basisvektoren zyklisch: $D\vec{e}_1 = \vec{e}_3, D\vec{e}_3 = \vec{e}_2, D\vec{e}_2 = \vec{e}_1$.
 Somit ist die Abbildungsmatrix von D gegeben durch:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man sieht bei diesem Beispiel auch, dass die Drehachse «stehen» bleibt bzw. invariant ist:

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit eine lineare Abbildung definiert ist, genügt es also, die Bilder der Basisvektoren zu kennen!

Die Frage, welche Vektoren bei einer linearen Abbildung nach $\vec{0}$ überführt werden, wird sich als hilfreich erweisen. Die Menge dieser Vektoren heisst *Kern* der linearen Abbildung A .

Definition 5

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann ist: $\text{Kern } A := \{\vec{x}: A\vec{x} = \vec{0}\}$. \square

Es ist $\vec{0} \in \text{Kern } A$. Falls es im Kern von A einen weiteren Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ gibt, dann ist wegen der Linearität auch $\lambda\vec{x} \in \text{Kern } A$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, denn $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \vec{0}$. Somit liegt die ganze Gerade, welche von \vec{x} aufgespannt wird, im Kern. Wenn es einen weiteren Vektor $\vec{y} \neq \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ im Kern von A gibt, dann ist wegen der Linearität auch jede Linearkombination von \vec{x}, \vec{y} im Kern, denn für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} = \vec{0}$. Somit liegt die ganze Ebene, welche von \vec{x}, \vec{y} aufgespannt wird, im Kern. Wenn es einen dritten Vektor im Kern gibt, welcher nicht in dieser Ebene liegt, dann ist der Kern sogar der ganze Raum und A ist die Nullmatrix.

Satz 6

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: Der Kern von A ist entweder der Nullpunkt, eine Gerade durch den Nullpunkt, eine Ebene durch den Nullpunkt oder der ganze Raum (wenn A die Nullmatrix ist). \square

Beispiel

Wir betrachten die Orthogonal Projektion des Raumes auf die Ebene α gegeben durch die Gleichung

$$x + y + z = 0$$

Dann ist die Projektionsrichtung gegeben durch den Normalvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zuerst die Abbildungsmatrix. Dazu genügt es, die Bilder der Basisvektoren zu kennen.

Für den ersten Basisvektor ist dies der Schnittpunkt der Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Ebene

α . Das liefert die Lösung $t = -\frac{1}{3}$ und als Bild $A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ebenso erhält man $A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und

$A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Somit ist die Abbildungsmatrix gegeben durch: $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Bei dieser Projektion wird die Normale auf die Ebene in den Nullpunkt abgebildet. Es ist also (und man kann das auch nachrechnen): $\text{Kern } A = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

\square

Wie kann man einfach prüfen, ob der Kern vom Nullpunkt verschieden ist? Wenn $\text{Kern } A \neq \vec{0}$, dann gibt es mindestens einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$. Wenn $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, dann ist $A\vec{x} = x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + x_3A\vec{e}_3 = \vec{0}$. Die Bilder der Basisvektoren, bzw. die Kolonnen der Abbildungsmatrix sind also linear abhängig und liegen in einer Ebene. Wenn zum Beispiel $x_3 \neq 0$, lässt sich der dritte Kolonnenvektor als Linearkombination der ersten beiden darstellen: $A\vec{e}_3 = -\frac{1}{x_3}(x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2)$.

Das Spatprodukt der Kolonnenvektoren $[A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3]$ ist gleich dem Volumen des Spates, der von den drei Vektoren aufgespannt wird, wie man aus der Vektorgeometrie weiss. Wenn diese drei Vektoren linear abhängig sind, also in einer Ebene liegen, dann ist dieses Spatprodukt gleich null. Das liefert das gewünschte Kriterium. Bei einer linearen Abbildung spricht man nun nicht vom Spatprodukt, sondern von der Determinante, da diese Definition auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Für uns genügt folgende Definition:

Definition 7

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann ist die *Determinante* von A definiert durch:

$$\det A := [A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3] = (A\vec{e}_1 \times A\vec{e}_2) \cdot A\vec{e}_3$$

□

Satz 8

Sei A eine lineare Abbildung.

Behauptung: $\text{Kern } A \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det A = 0$

□

Beweis:

« \Rightarrow » Siehe oben.

« \Leftarrow » Die Bilder der Basisvektoren sind linear abhängig, z.B. $A\vec{e}_3 = x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2$. Dann ist $\vec{z} := x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \in \text{Kern } A$ und $\vec{z} \neq \vec{0}$.

□

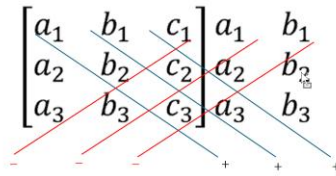
Beispiel

Bei der Normalprojektion im vorherigen Beispiel ist

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0$$

□

Für die Berechnung der Determinante können wir auch folgende Methode verwenden. Man notiert die ersten beiden Kolonnen der Matrix nochmals rechts davon und bildet dann die Produkte der Diagonalen. Am Ende summiert man alles. Die Produkte der Hauptdiagonalen mit positivem und die anderen Produkte mit negativem Vorzeichen. Man kann leicht nachrechnen, dass das Resultat mit der Definition 7 übereinstimmt.



Berechnung der Determinante

$$\det A = a_1 b_2 c_3 + b_1 b_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

3. Gleichgewichtslagen

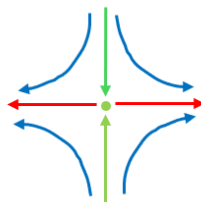
Nun sind wir bereit, die verschiedenen Typen von Fixpunkten oder Gleichgewichtslagen im \mathbb{R}^3 zu untersuchen.

Im Schulprojekt *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums* haben wir gesehen, wann ein Fixpunkt im eindimensionalen Fall attraktiv respektive repulsiv ist. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall kann es bei höheren Dimensionen vorkommen, dass ein Fixpunkt in gewissen Richtungen repulsiv und in anderen Richtungen attraktiv ist. In zwei Dimensionen können zum Beispiel folgende Fälle vorliegen:



Links ein attraktiver Fixpunkt (Senke) und rechts ein repulsiver Fixpunkt (Quelle)

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall kann es hier eine «Mischung» geben, nämlich dann, wenn der Fixpunkt in gewissen Richtungen attraktiv und in anderen repulsiv ist. Man spricht dann von einem *homoklinen Fixpunkt*.



Homokliner Fixpunkt (Sattelpunkt)

Entsprechend komplizierter kann es in drei Dimensionen werden.

Der Nullpunkt ist immer Fixpunkt einer linearen Abbildung. Wenn es bei der Abbildung gewisse Richtungen gibt, welche invariant sind, können wir untersuchen, ob die Abbildung in diesen Richtungen kontrahierend oder dilatierend ist. Eine Richtung ist invariant, wenn ein Vektor in dieser Richtung lediglich gedehnt oder gestaucht wird. Wenn A eine lineare Abbildung ist, suchen wir also Lösungen der Gleichung:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Definition 9

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Wenn die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung hat, dann heisst λ *Eigenwert* von A und \vec{x} der zugehörige *Eigenvektor*. \square

Wenn $\lambda = 1$, dann ist jeder Punkt auf der von \vec{x} aufgespannten Geraden ein Fixpunkt. Für $\lambda > 1$ ist die Abbildung in Richtung des Eigenvektors dilatierend, denn der entsprechende Eigenvektor wird gestreckt. Für $\lambda < 1$ ist sie kontrahierend.

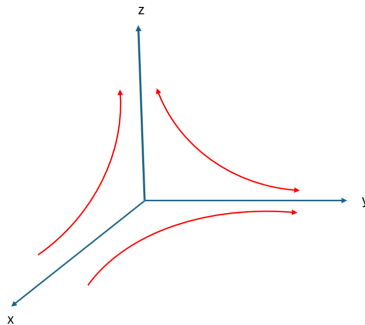
Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fixpunkt dieser Abbildung sind der Nullpunkt. Die Eigenvektoren sind gerade die Basisvektoren, wie man leicht prüft. Diese Abbildung ist in Richtung des ersten Basisvektors kontrahierend, in Richtung des zweiten und dritten dilatierend. Weitere Fixpunkte gibt es nicht, denn die Bedingung $A\vec{x} = \vec{x}$

führt auf $(A - \mathbb{E})\vec{x} = \vec{0}$, wobei $\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ die Einheitsmatrix ist. Also $\vec{x} \in \text{Kern}(A - \mathbb{E})$, aber

$\det(A - \mathbb{E}) = \det \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -0.25 \neq 0$, somit ist $\text{Kern}(A - \mathbb{E}) = \vec{0}$ nach Satz 8.



Das Verhalten obiger Abbildung in der Nähe des Nullpunktes

\square

Wie findet man Eigenwerte und Eigenvektoren? Es ist:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{E})\vec{x} = \vec{0}$$

Es gibt nach Satz 8 nur eine Lösung, wenn

$$\text{Kern}(A - \lambda\mathbb{E}) \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

Damit die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ eine Lösung mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt, suchen wir ein λ so, dass mit den früheren Bezeichnungen für A gilt:

$$\det(A - \lambda\mathbb{E}) = \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Definition 10

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Das Polynom

$$p(\lambda) := \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Heisst *charakteristisches Polynom* von A . \square

In unserem Fall hat es den Grad 3. Daraus folgt:

Satz 11

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: Diese Abbildung hat entweder drei reelle Eigenwerte oder einen reellen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte. \square

Da es immer einen reellen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor gibt, gibt es immer *mindestens eine Richtung*, die bei der Abbildung *invariant* ist.

Beispiel

Wenn man einen Kreis um den Mittelpunkt dreht, dann bleibt im Allgemeinen kein Punkt auf der Kreislinie fix. Gilt das auch für eine Kugel im \mathbb{R}^3 ? Eine Drehung einer Kugel um den Nullpunkt ist eine lineare Abbildung. Egal wie trickreich man diese Drehung durchführt, gibt es nach Satz 11 immer eine Richtung, welche invariant bleibt und somit gibt es auf der Kugel immer zwei Punkte, welche fix bleiben.

Beispiel

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wir untersuchen das Verhalten der Abbildung in der Nähe des Nullpunktes. Dabei suchen wir invariante Richtungen, bzw. die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom und setzen dieses gleich Null:

$$p(\lambda) := \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_{1,2,3} = 1, 2, -1$. Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist im Kern von

$$(A - 1 \cdot E) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wenn wir z.B. die erste und dritte Zeile betrachten, muss für den Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ gelten:

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{y_1}{2} - \frac{3z_1}{2} = 0 \\ -x_1 + \frac{y_1}{2} - \frac{z_1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = -y_1 \end{cases}$$

Da nur die Richtung von \vec{x}_1 gesucht ist, kann man einen Parameter frei wählen, z.B. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Man kontrolliert: $A\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1$. Analog erhält man die beiden weiteren Eigenvektoren. Für den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ hat man als Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und für den Eigenwert $\lambda_3 = -1$ den

Eigenvektor $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bezüglich diesen Eigenvektoren als Basis hat die Matrix die Form:

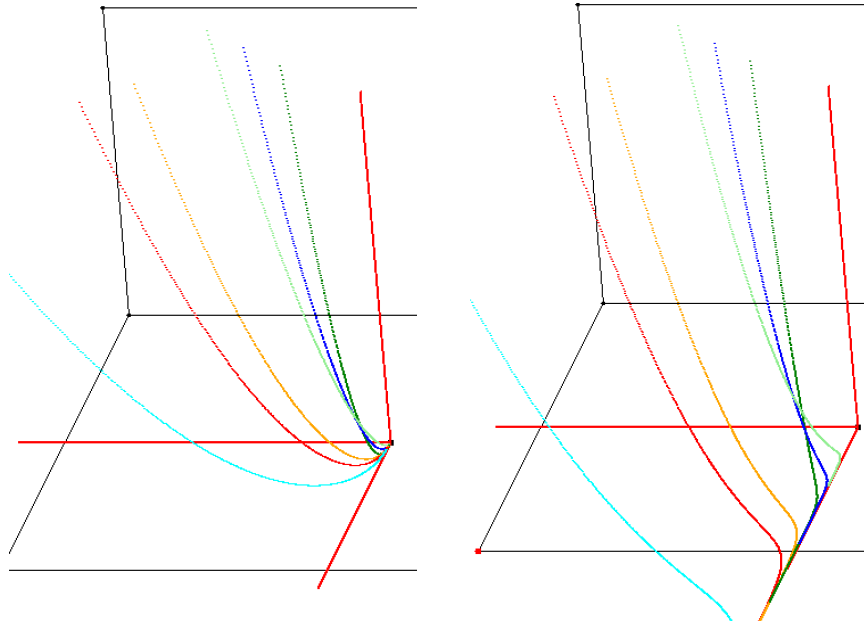
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Jeder Punkt auf der von \vec{x}_1 aufgespannten Geraden ist ein Fixpunkt. Jeder Punkt auf der von \vec{x}_3 aufgespannten Geraden ist zyklisch der Ordnung zwei: Er wird bei der Abbildung am Nullpunkt gespiegelt. In Richtung \vec{x}_2 ist die Abbildung dilatierend.

Beachte, dass die Eigenvektoren im Allgemeinen keine orthonormierte Basis bilden.

□

Im Simulator können wir entsprechende Experimente machen. Die genauen Parameter sind im Handbuch beschrieben. Unten ist ein Beispiel dargestellt. Man wählt bei diesem Experiment 6 Startpunkte links oben im Bild und betrachtet dann deren Trajektorien unter einer linearen Abbildung, welche drei reelle Eigenwerte hat. Die x-Achse zeigt nach links, die y-Achse nach vorne und die z-Achse nach oben.



Links: Der Nullpunkt ist attraktiv in x,y,z-Richtung. Rechts: Der Nullpunkt ist repulsiv in y-Richtung.

□

Nun untersuchen wir noch den Fall, dass eine Abbildung einen reellen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte hat. Seien die Eigenwerte $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$. Der zu λ_3 gehörende Eigenvektor sei $\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Die zu $\lambda_{1,2}$ gehörenden Eigenvektoren sind konjugiert komplex.

Angenommen, sie haben die Form: $\vec{e}_{1,2} = \vec{u} \pm i\vec{v}$ mit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Wenn wir $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ als Basis wählen, und mit komplexen Zahlen rechnen, hat die Matrix Diagonalform:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Wir können aber auch $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3$ als Basis wählen, denn $\vec{e}_{1,2}$ lassen sich als (komplexe) Linearkombination von \vec{u}, \vec{v} darstellen. Welche Form hat dann die Matrix A bezüglich dieser Basis?

Da $\vec{e}_1 = \vec{u} + i\vec{v}$ ein Eigenvektor ist, gilt:

$$A\vec{u} + iA\vec{v} = A\vec{e}_1 = (\alpha + i\beta)\vec{e}_1 = (\alpha + i\beta)(\vec{u} + i\vec{v}) = (\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) + i(\beta\vec{u} + \alpha\vec{v})$$

Wenn man die Realteile und Imaginärteile vergleicht, sieht man:

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}, A\vec{v} = \beta\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

Das Bild des ersten Basisvektors \vec{u} unter der Abbildung A ist also $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ und das Bild von \vec{v} ist $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit hat die Matrix bezüglich der Basis $\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3$ die Form

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Die Teilmatrix $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ ist eine Drehstreckung in der \vec{u}, \vec{v} -Ebene.

Begründung:

Jeder Basisvektor wird um denselben Betrag gestreckt, nämlich um $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Somit wird auch jede Linearkombination derselben, also jeder Vektor, um diesen Betrag gestreckt. Die Basisvektoren sind i.a. kein orthonormiertes System. Wir wollen aber zeigen, dass der Winkel zwischen \vec{u}, \vec{v} und $\tilde{A}\vec{u}, \tilde{A}\vec{v}$ erhalten bleibt. Dazu führen wir ein orthogonales System ein.

Wenn z.B. \vec{u}, \vec{v} ein Rechtssystem bilden, können wir \vec{u} auf die Länge 1 normieren und als ersten Basisvektor \vec{e}_1 diesen normierten Vektor in Richtung \vec{u} wählen. Dann wählen wir den zweiten Basisvektor in der \vec{u}, \vec{v} -Ebene senkrecht zu \vec{e}_1 , so dass er mit diesem ein Rechtssystem bildet. In diesem orthogonalen System haben dann \vec{u}, \vec{v} die Komponenten:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für ein geeignetes $v \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Winkel φ zwischen \vec{u} und \vec{v} gegeben durch:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Der Winkel φ' zwischen $\tilde{A}\vec{u}$ und $\tilde{A}\vec{v}$ ist gegeben durch:

$$\cos \varphi' = \frac{\tilde{A}\vec{u} \cdot \tilde{A}\vec{v}}{|\tilde{A}\vec{u}| |\tilde{A}\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha v + \beta \\ -\beta v + \alpha \end{pmatrix}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(1+v^2)}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Schliesslich ist das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} > 0$, der Drehsinn bleibt also bei der Abbildung erhalten.

Zusammenfassend:

- 1) Bei der Abbildung wird jeder Vektor um denselben Faktor gestreckt.
- 2) Die Abbildung ist winkeltreu.
- 3) Der Drehsinn bleibt bei der Abbildung erhalten.

Somit ist die Abbildung eine Drehstreckung.

Wenn $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$ ist, dann ist der Nullpunkt in der \vec{u}, \vec{v} Ebene attraktiv und die Drehung bewirkt, dass sich der Orbit eines Punktes in dieser Ebene auf einer Spirale um den Nullpunkt aufwickelt.

Wenn $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 1$, dann bewegt sich ein solcher Punkt auf einer Spirale vom Nullpunkt weg.

Die Überlegungen in diesem Abschnitt fassen wir zusammen in

Satz 12

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung.

Behauptung: Dann gibt es für das Verhalten in der Nähe des Nullpunktes folgende zwei Fälle:

- 1) Die Abbildung hat drei reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Bezüglich den zugehörigen Eigenvektoren als (nicht unbedingt orthogonale) Basis hat die Abbildung die Form

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

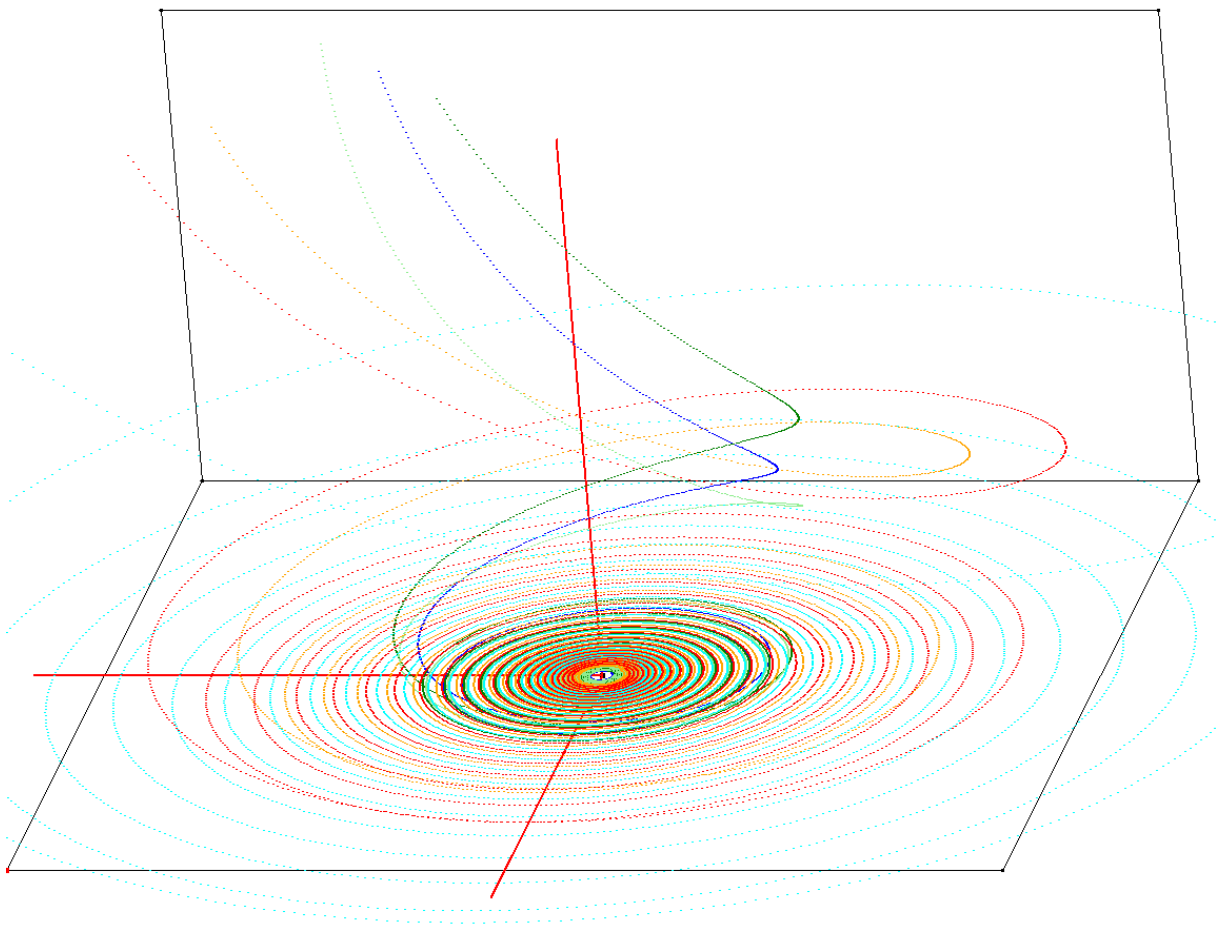
- Die Abbildung ist in Richtung eines Eigenvektors \vec{x}_i genau dann kontrahierend, wenn $|\lambda_i| < 1$
- 2) Die Abbildung hat zwei komplexe Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit Eigenvektoren $\vec{u} \pm i\vec{v}$ und einen reellen Eigenwert λ_3 mit Eigenvektor \vec{x}_3 . Bezüglich $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}_3$ als (nicht unbedingt orthogonale) Basis hat die Abbildung die Form:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

In der Nähe des Nullpunktes ist die Abbildung in der \vec{u}, \vec{v} -Ebene eine Drehstreckung und kontrahierend genau dann, wenn $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$.

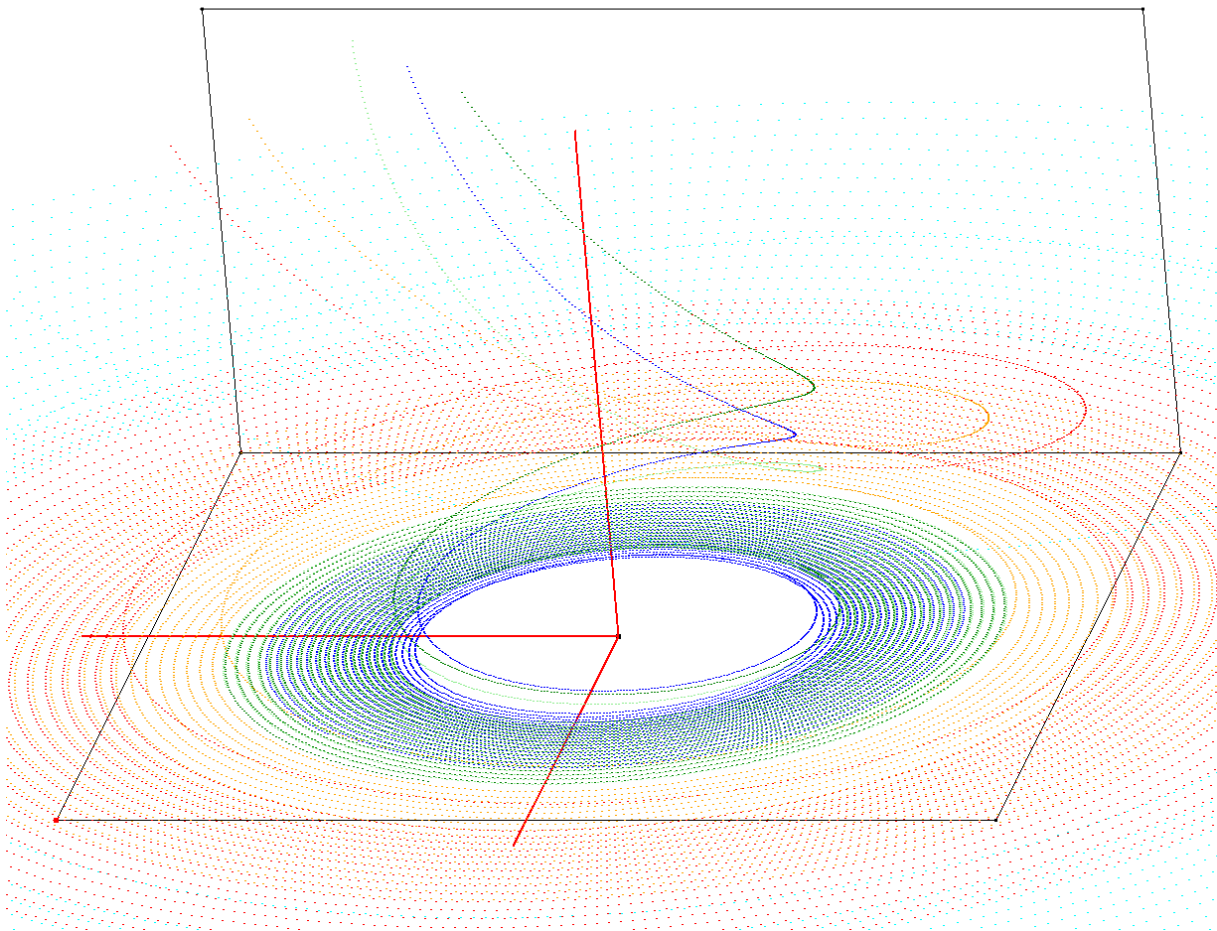
□

Im Simulator können wir entsprechende Experimente machen. Details sind im Handbuch beschrieben. Hier zwei Beispiele, bei denen die Abbildung zwei komplexe Eigenwerte hat:



Bahnkurven für $\varrho = 17.4$.

Der Nullpunkt ist attraktiv und die Bahnkurven bewegen sich spiralförmig auf ihn zu.



Bahnkurven für $\rho = 17.6$.

Der Nullpunkt ist nur in z-Richtung attraktiv und in der y-x Ebene repulsiv. Die Bahnkurven bewegen sich spiralförmig vom Nullpunkt weg.

4. Stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Um das Verhalten einer reellen und stetig differenzierbaren Funktion f , welche iteriert wird, in der Nähe eines Fixpunktes ξ zu untersuchen, haben wir im eindimensionalen Fall diese Funktion mit Hilfe der Ableitung dieser Funktion durch eine lineare Funktion angenähert:

$$f(\xi + h) \approx f(\xi) + f'(\xi) \cdot h, h \approx 0$$

Das Resultat war relativ einfach: Der Fixpunkt ist genau dann attraktiv, wenn $|f'(\xi)| < 1$.

Im mehrdimensionalen Fall versuchen wir dasselbe. Wir betrachten eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Welche in jeder Komponente und jeder Variablen differenzierbar ist. Man nennt f dann auch *partiell differenzierbar*. Ferner sollen die Ableitungen stetig sein. Falls f einen Fixpunkt $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ hat, also einen Punkt mit $f(\vec{\xi}) = \vec{\xi}$, dann wollen wir das Verhalten von f in der Nähe von $\vec{\xi}$ untersuchen. Wie

im eindimensionalen Fall machen wir das, indem wir f in der Umgebung von $\vec{\xi}$ durch eine lineare Funktion ersetzen.

Als Vorbereitung dazu haben wir im vorhergehenden Abschnitt die Eigenschaften einer linearen Abbildung in der Umgebung eines Fixpunktes (dem Nullpunkt) untersucht.

Um die passende lineare Näherung im Fixpunkt $\vec{\xi}$ zu finden, müssen wir zuerst abschätzen, wie sich kleine Änderungen der Variablen auf den Funktionswert auswirken. Das führt uns zum Begriff des *totalen Differentials*.

Wir betrachten das komponentenweise. Wir setzen $\vec{\xi} = (x, y, z)$ und schätzen die Änderung der Funktion $f_1(x, y, z)$ ab, wenn sich die Variablen (x, y, z) ein klein wenig ändern. Wenn (dx, dy, dz) diese (beliebig kleine) Änderung der entsprechenden Variablen und df_1 die sich daraus ergebende Änderung des Funktionswertes bezeichnen, dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} df_1 &:= f_1(x + dx, y + dy, z + dz) - f_1(x, y, z) \\ &= f_1(x + dx, y + dy, z + dz) - f_1(x, y + dy, z + dz) \\ &\quad + f_1(x, y + dy, z + dz) - f_1(x, y, z + dy) \\ &\quad + f_1(x, y, z + dz) - f_1(x, y, z) \end{aligned}$$

Bei den Differenzen ändert sich jeweils nur eine Variable und wir können die Annäherung für den eindimensionalen Fall: $f_1(x + dx) - f_1(x) = f_1'(x) \cdot dx$ verwenden. Das ergibt dann:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y + dy, z + dz) \cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z + dz) \cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist: $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y + dy, z + dz) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z + dz) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z)$. Dann haben wir als Resultat das sogenannte *totale Differential*:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz$$

Die analoge Gleichung gilt auch für die anderen Komponenten f_2, f_3 . Im Fixpunkt $\vec{\xi}$ gilt dann:

$$\begin{cases} df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi})dz \\ df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi})dz \\ df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi})dz \end{cases}$$

Wir können das auch in Matrixform schreiben:

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Damit haben wir unsere lineare Annäherungsfunktion gefunden:

$$df = \mathfrak{I}_f(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathfrak{I}_f(\vec{\xi}) d\vec{x}$$

Definition 13

Sei

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

partiell differenzierbar. Dann ist die *Jacobi Matrix* in einem Punkt $\vec{\xi}$ definiert als:

$$\mathfrak{I}_f(\vec{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi}) \end{bmatrix}$$

□

Die Jacobi Matrix ist benannt nach Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851).

Wenn die partiellen Ableitungen von f stetig sind, gilt (ohne dass wir das hier beweisen):

$$\lim_{|d\vec{x}| \rightarrow 0} |df - \mathfrak{I}_f(\vec{\xi}) d\vec{x}| = 0$$

Man nennt f dann auch *total differenzierbar*.

Wir fassen das zusammen:

Satz 14

Sei

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Eine total differenzierbare Funktion (alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig).

Behauptung:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) \approx f(\vec{x}) + \mathfrak{I}_f(\vec{x}) \vec{h} \text{ wenn } \vec{h} \approx \vec{0}$$

□

Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x^2y + z + \frac{1}{3} \\ xy - yz - 1 \\ x + y^2z - 1 \end{pmatrix}$$

Man kann leicht nachrechnen: $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Fixpunkt von f .

Die Jacobi Matrix ist:

$$\mathfrak{J}_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}xy & \frac{1}{3}x^2 & 1 \\ y & x-z & -y \\ 1 & 2yz & y^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{J}_f(\vec{\xi}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Um das Verhalten der Abbildung in der Umgebung des Fixpunktes zu untersuchen, analysieren wir die lineare Abbildung $\mathfrak{J}_f(\vec{\xi})$ und suchen deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom ist dann:

$$p(\lambda) = \text{Det} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{4}{3}$$

Und wir suchen dessen Nullstellen.

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle. Wenn wir $p(\lambda)$ durch $\lambda - 1$ dividieren, bleibt als Bedingung für die übrigen beiden Nullstellen:

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

Das liefert die beiden weiteren Nullstellen:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

f ist also in Richtung des ersten Eigenvektors indifferent (weder attraktiv noch repulsiv). In Richtung des zweiten Eigenvektors ist f attraktiv, da $|\lambda_2| \approx 0.609 < 1$ und in Richtung des dritten Eigenvektors repulsiv, da $|\lambda_3| \approx 1.276 > 1$.

5. Gleichgewichtslagen des Lorenz Systems

Nach den Vorbereitungen in den letzten drei Abschnitten sind wir jetzt bereit, um das Lorenz System näher zu untersuchen.

Das Lorenz-System war gegeben durch:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{L}(\vec{x})$$

Mit

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}$$

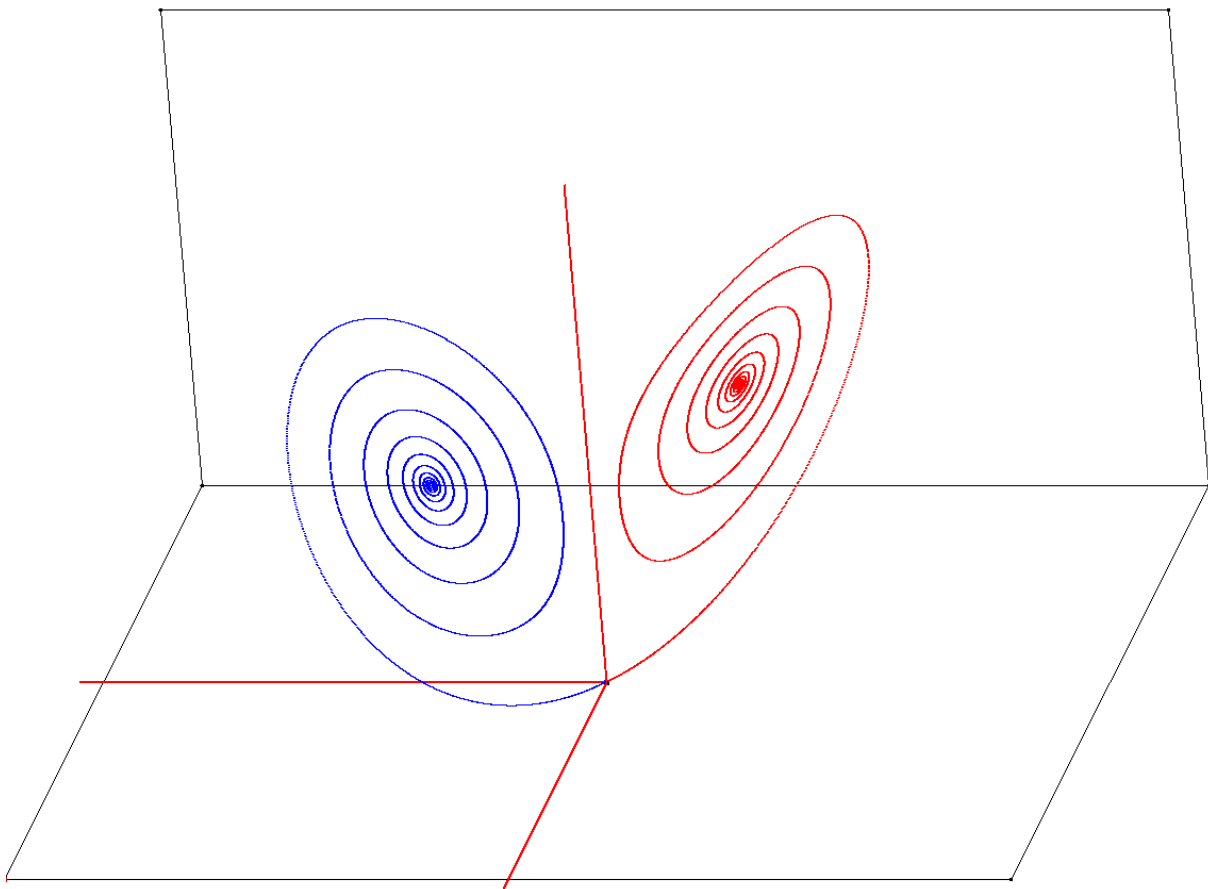
Spiegelsymmetrie relativ zur z-Achse

Wenn man im Gleichungssystem

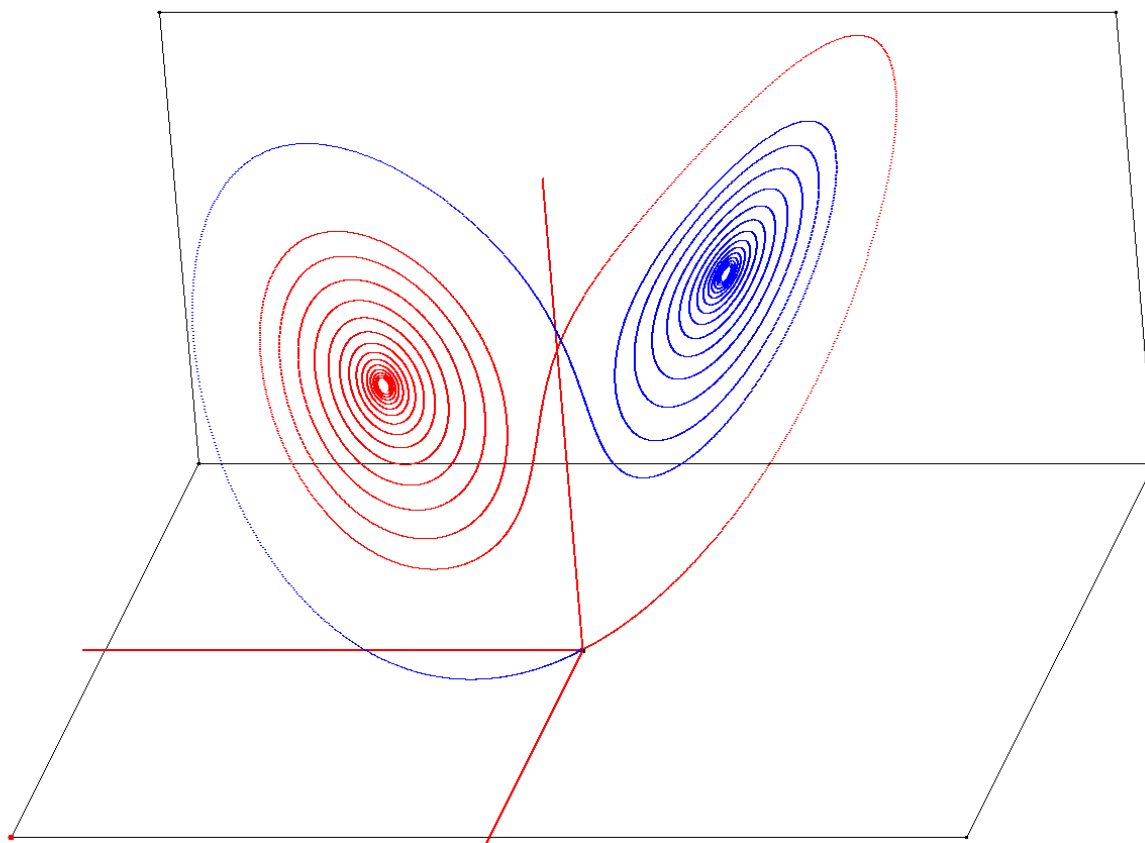
$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzt, ändert es sich nicht. Das heisst, dass an der z -Achse gespiegelte Startpunkte einen ebenfalls spiegelsymmetrischen Orbit erzeugen.

Wir betrachten zwei Startpunkte, die sehr nahe beieinander liegen: $(0.01, 0.01, 0.1)$ (blau) und $(-0.01, -0.01, 0.1)$ (rot). Diese sind symmetrisch zur z -Achse und liefern symmetrische Orbits. Wir setzen $\rho = 12.03$. Wegen der Symmetrie liefern diese Startpunkte symmetrische Orbits und konvergieren gegen unterschiedliche, symmetrisch liegende Fixpunkte.



Symmetrische Orbits für zwei nahe beieinander liegende Startpunkte



Für $q = 16.08$ werden die Orbits derselben Startpunkte «vertauscht»

Das deutet schon darauf hin, dass das System empfindlich auf Änderungen reagiert: Wenn sich der Startpunkt minim ändert, kann je nach Situation ein deutlich unterschiedlicher Orbit erzeugt werden.

Invarianz der z-Achse

Ein Startpunkt auf der z-Achse $(0, 0, z)$ bleibt auf der z-Achse, denn

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -\beta z \end{cases}$$

Die z-Achse ist invariant. Ferner ergibt sich – wenn mit t die Zeit bezeichnet wird: $z = Ce^{-\beta t}$, $C \in \mathbb{R}$. Für $t \rightarrow \infty$ laufen also Orbits auf der z-Achse gegen den Nullpunkt, da $\beta > 0$.

Damit hat man:

Satz 15

Behauptung: Beim Lorenz System sind sämtliche Trajektorien spiegelsymmetrisch zur z-Achse. Die z-Achse selbst ist invariant.

□

Gleichgewichtslagen

Gleichgewichtslagen sind Punkte, bei denen das System sich nicht mehr ändert. Sie entsprechen den Fixpunkten im eindimensionalen Fall. Das heisst hier, dass alle Ableitungen nach den drei Variablen verschwinden. Es sind Lösungen des Gleichungssystems:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{0} = \mathcal{L}(\vec{x})$$

oder

$$\begin{cases} 0 = -\sigma x + \sigma y \\ 0 = \rho x - y - xz \\ 0 = -\beta z + xy \end{cases}$$

Offenbar ist der Nullpunkt $(0, 0, 0)$ eine Lösung dieses Gleichungssystems und damit eine Gleichgewichtslage.

Nun schliessen wir den Nullpunkt aus. Die erste Gleichung führt auf $x = y$. Wenn $x \neq 0$ führt die zweite Gleichung auf $z = \rho - 1$ und die dritte Gleichung auf $x = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$ für $\rho > 1$. Somit haben wir zwei weitere Gleichgewichtslagen (bzw. Fixpunkte):

$$C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

Diese beiden sind nur definiert für $\rho > 1$. Man sieht hier wieder die Symmetrie bezüglich der z-Achse.

Wenn ein Startpunkt in der Nähe eines Fixpunktes zu diesem strebt, dann ist diese Gleichgewichtslage *stabil*. Das entspricht einem *attraktiven Fixpunkt*.

Wenn ein Startpunkt in der Nähe eines Fixpunktes zu einem Orbit führt, der sich vom Fixpunkt entfernt, dann ist diese Gleichgewichtslage *instabil*. Das entspricht einem *repulsiven Fixpunkt*.

Satz 16

Behauptung:

- 1) Das Lorenz System hat die Gleichgewichtslagen $\vec{0}$, und falls $\rho > 1$ zusätzlich $C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$.
- 2) Es gilt: $\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$ und $\mathcal{L}(C^\pm) = \vec{0}$

□

Der Nullpunkt

Nun untersuchen wir damit das Verhalten des Lorenz Systems in der Nähe des Nullpunktes, also für die Funktion $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \begin{cases} -\sigma x + \sigma y \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{cases}$$

Für welche $\vec{0}$ ein Fixpunkt ist.

Die Jacobi Matrix aus dem vorhergehenden Abschnitt lautet dann

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Und im Fixpunkt:

$$\mathfrak{L}(\vec{0}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \varrho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

In der Nähe des Nullpunktes, also für $\vec{x} \approx \vec{0}$ gilt nach Satz 14:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{L}(\vec{x}) = \mathcal{L}(\vec{0} + \vec{x}) \approx \mathcal{L}(\vec{0}) + \mathfrak{L}(\vec{0})\vec{x}$$

Und weil $\mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$ lautet die Gleichung für das Lorenz-System in der Nähe des Nullpunktes:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \varrho x - y \\ \dot{z} = -\beta z \end{cases}$$

In der dritten Komponente haben wir die Gleichung $\dot{z} = -\beta z$ mit der Lösung $z = Ce^{-\beta t}$, $C \in \mathbb{R}$. Für $t \rightarrow \infty$ laufen also Orbits auf der z-Achse gegen den Nullpunkt da $\beta > 0$.

Nun betrachten wir die x-y Ebene in der Nähe des Nullpunktes. Diese ist unabhängig von z und invariant. In der Nähe des Nullpunktes wird das System in dieser Ebene bestimmt durch die (lineare) Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ \varrho & -1 \end{bmatrix}$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda - \varrho\sigma$$

Mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 + \sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(\varrho - 1)} = -\frac{1 + \sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\varrho}$$

Da $\varrho > 0$ ist der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv. Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\vec{e}_{1,2} = \left(\frac{\sigma - 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\varrho} \right)$$

Die Frage ist nun, für welche $\lambda_{1,2}$ das Gleichungssystem in der Umgebung des Nullpunktes zu einer Kontraktion führt. In diesem Fall wäre der Nullpunkt eine Senke bzw. attraktiv.

Wir wählen die Eigenvektoren $\vec{e}_{1,2}$ als Basis für unser Koordinatensystem. Das ist möglich, da $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$. Dann bewegen wir uns entlang \vec{e}_1 . Wir wählen also einen Startpunkt, der bezüglich des neuen Koordinatensystems die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ hat mit $x \approx 0$. Dann lautet die Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = xA\vec{e}_1 = x\lambda_1\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oder $\dot{x} = \lambda_1 x$. Diese Differentialgleichung hat die Lösung $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Somit ist die Abbildung in dieser Richtung genau dann kontrahierend, wenn $\lambda_1 < 0$ ist, und für $\lambda_1 > 0$ dilatierend.

Für einen Punkt, der sich entlang \vec{e}_2 bewegt, also $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y \cdot \vec{e}_2$, erhält man ebenso: $\dot{y} = \lambda_2 y$ mit der Lösung: $y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung ist in dieser Richtung genau dann kontrahierend, wenn $\lambda_2 < 0$ ist und für $\lambda_2 > 0$ dilatierend.

Nun gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$\lambda_1 = -\frac{1+\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\varrho} < 0 \Leftrightarrow \varrho < 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1+\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\varrho} < 0, \forall \varrho$$

Damit haben wir als Endresultat:

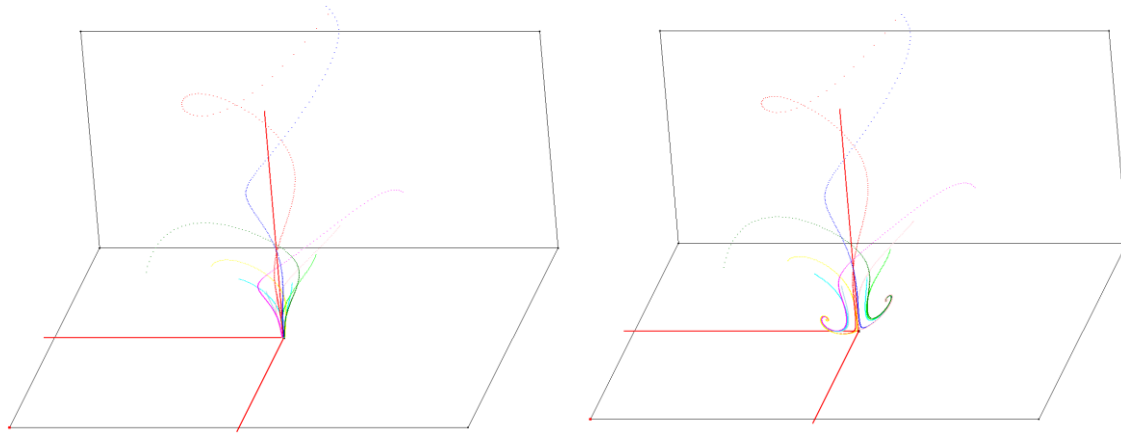
Satz 17

Wir betrachten das Lorenz System und die Gleichgewichtslage im Nullpunkt.

Behauptung:

- 1) Der Nullpunkt ist in z-Richtung immer kontrahierend.
- 2) In der x-y Ebene ist er eine Senke für $\varrho < 1$ und ein Sattelpunkt für $\varrho > 1$.

□



Links Orbits einer Punktwolke für $\varrho = 0.93$ und attraktivem Nullpunkt. Rechts die entsprechenden Orbits für $\varrho = 3.12$. Hier ist der Nullpunkt nur attraktiv in z-Richtung. In der x-y Ebene bewegen sich die Orbits zuerst auf den Nullpunkt zu, aber dann in der x-y Ebene von ihm weg und verharren dann bei den Gleichgewichtslagen C^\pm gemäss Satz 16.

Die Gleichgewichtslagen C^\pm

Für $\varrho > 1$ hat man neben dem Nullpunkt zwei weitere Gleichgewichtslagen gemäss Satz 16:

$$C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}, \varrho-1)$$

Im Folgenden betrachten wir immer $\varrho > 1$ und untersuchen das Lorenz System in der Nähe dieser Gleichgewichtslagen. Dazu verwenden wir die Resultate von Abschnitt 4.

Das ursprüngliche Gleichungssystem hatte die zugehörige Jacobi Matrix

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \varrho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Und an den Stellen $C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)}, \varrho-1)$ wird diese Matrix:

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{L}}(C^{\pm}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\varrho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

Wir schreiben kürzer: $\mathfrak{S}^{\pm} := \mathfrak{S}_{\mathcal{L}}(C^{\pm})$.

Nach Satz 14 gilt in einer Umgebung eines Fixpunktes C^{\pm} , also für $\vec{x} \approx \vec{0}$:

$$\mathcal{L}(\vec{c}^{\pm} + \vec{x}) \approx \mathcal{L}(\vec{c}^{\pm}) + \mathfrak{S}^{\pm}\vec{x} = \vec{0} + \mathfrak{S}^{\pm}\vec{x}$$

Für das Lorenz-System gilt also in der Umgebung der Gleichgewichtslagen C^{\pm} , d.h. für $\vec{x} \approx \vec{0}$:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{L}(\vec{c}^{\pm} + \vec{x}) \approx \mathfrak{S}^{\pm}\vec{x}$$

Um die Wirkung der Abbildung \mathfrak{S}^{\pm} zu untersuchen, suchen wir wieder die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix \mathfrak{S}^{\pm} . In einer Übung wird gezeigt, dass das zugehörige charakteristische Polynom für beide Gleichgewichtslagen C^{\pm} lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \varrho)\lambda + 2\sigma\beta(\varrho - 1)$$

Die gesuchten Werte von λ sind die Nullstellen dieses Polynoms.

Um das charakteristische Polynom weiter zu untersuchen, setzen wir

$$\begin{cases} a = \sigma + \beta + 1 = \frac{41}{3} \\ b = \beta(\sigma + \varrho) = \frac{8}{3}(\varrho + 10) \\ c = 2\sigma\beta(\varrho - 1) = \frac{160}{3}(\varrho - 1) \end{cases}$$

Und haben:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Da der Grad des Polynoms ungerade ist, gibt es mindestens eine reelle Nullstelle. Da sämtliche Koeffizienten des Polynoms positiv sind ($\varrho > 1$), muss *diese reelle Nullstelle negativ sein*.

Wenn diese Nullstelle λ_1 gibt es je nach Vorzeichen von \vec{c}^{\pm} die zu λ_1 gehörenden Eigenvektoren \vec{e}_1^{\pm} . Damit können wir das Verhalten von \mathfrak{S}^{\pm} untersuchen, wenn ein Startpunkt von der Gleichgewichtslage aus sich z.B. in Richtung \vec{e}_1^{+} bewegt, also z.B. einen Punkt $\vec{x} = \vec{c}^{+} + h \vec{e}_1^{+}$ mit einem kleinen $h \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung für das Lorenz-System lautet dann:

$$\dot{\vec{x}} = h\vec{e}_1^{+} = \mathfrak{S}^{+}(\vec{c}^{+} + h \vec{e}_1^{+}) = \mathfrak{S}^{+}\vec{c}^{+} + h\mathfrak{S}^{+}\vec{e}_1^{+} = \vec{0} + h\lambda_1\vec{e}_1^{+}$$

Und wir haben als Lösung: $h(t) = hCe^{\lambda_1 t}$, $C \in \mathbb{R}$ bzw. $\vec{x}(t) = \vec{c}^{+} + \vec{e}_1^{+}Ce^{\lambda_1 t}$.

Für $\lambda_1 < 0$ und wachsendes t konvergiert der Startpunkt in der Richtung von \vec{e}_1^{+} gegen C^{+} .

Das heisst, in Richtung von \vec{e}_1^{+} ist *die Abbildung kontrahierend*. Es gibt immer eine solche Richtung, da es immer *mindestens einen negativen reellen* Eigenwert gibt, und das erklärt, warum die Orbits in eine Ebene senkrecht zum zugehörigen Eigenvektor «flachgedrückt» werden.

Es gilt:

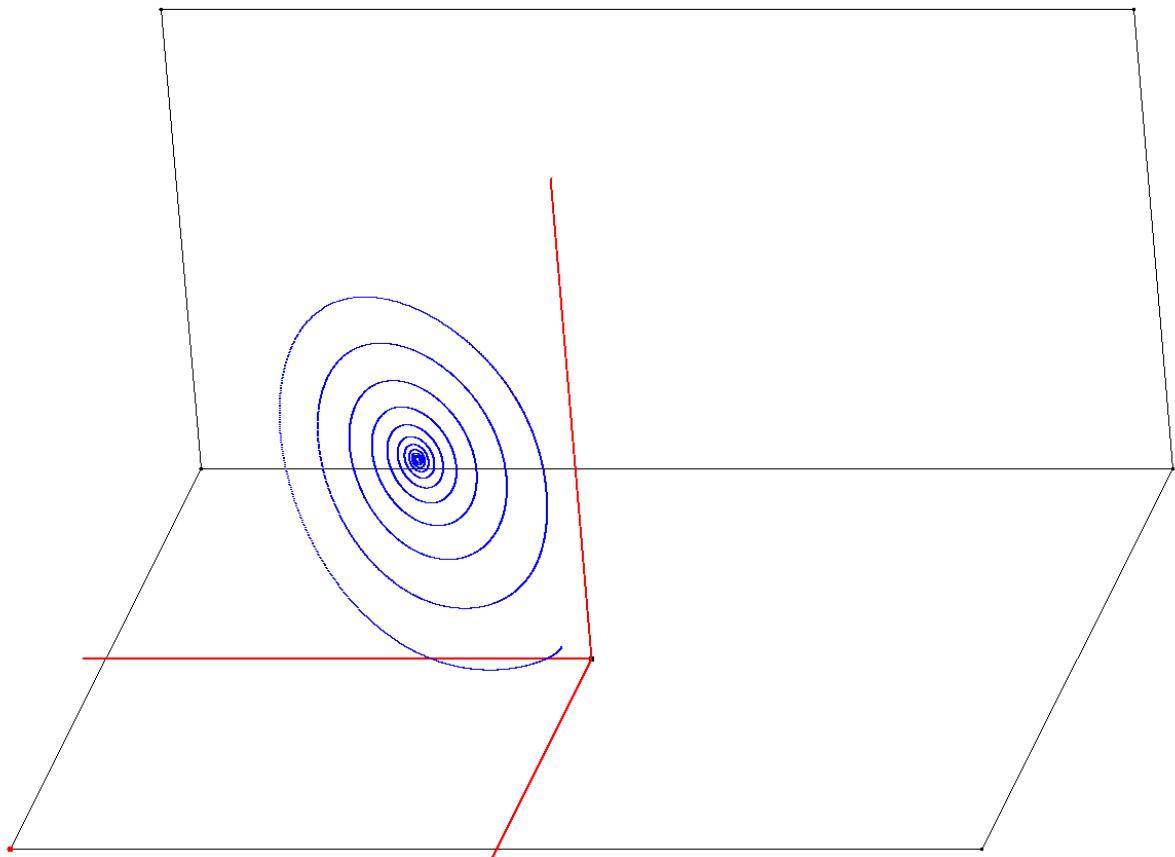
Satz 18

Wir betrachten das Lorenz System mit $\varrho > 1$.

Behauptung:

- Es gibt einen reellen Eigenwert $\lambda_1 < 0$ und zu jedem Fixpunkt C^\pm einen zugehörigen Eigenvektor \vec{e}_1^\pm , in dessen Richtung die Abbildung kontrahierend ist.
- Jede Trajektorie pendelt sich in eine Ebene $\perp \vec{e}_1^\pm$ ein, welche durch C^+ bzw. C^- geht.

□



«Flachgedrückter» Orbit für $\varrho = 12.51$ der sich in eine Ebene einpendelt

Nun betrachten wir das Verhalten des Systems in der Ebene $\perp \vec{e}_1^+$ gemäss Satz 18 und betrachten stellvertretend nur den Fixpunkt C^+ . Um das charakteristische Polynom zu vereinfachen, wenden wir die übliche Transformation $\mu := \lambda + \frac{a}{3}$ an. Das Polynom lautet dann:

$$\left(\mu - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(\mu - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\mu - \frac{a}{3}\right) + c =: \mu^3 + p\mu + q$$

wobei

$$\begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} = \frac{8}{3}\varrho - \frac{961}{27} \approx \frac{8}{3}\varrho - 35.5926 \\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{1112}{27}\varrho + \frac{10402}{27^2} \approx 41.1852\varrho + 14.2689 \end{cases}$$

wie eine Nachrechnung zeigt.

Und es gilt:

$$p_\lambda(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Leftrightarrow p_\mu(\mu) = \mu^3 + p\mu + q = 0$$

Für die Nullstellen des transformierten Polynoms gibt es die Formeln von Gerolamo Cardano (1501 – 1576). Wir wollen diese Nullstellen nicht explizit berechnen, sondern lediglich deren Charakter untersuchen. Gemäss den Cardanischen Formeln bestimmt man die sogenannte Determinante:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \approx 0.7023q^3 + 395.9327q^2 + 669.1938q - 1619.0954$$

Und es gilt die folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{cases} D > 0: \text{Es gibt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen} \\ D = 0 \text{ und } p = 0: \text{Dieser Fall tritt hier nicht auf} \\ D = 0 \text{ und } p \neq 0: \text{Es gibt zwei reelle Lösungen} \\ D < 0: \text{Es gibt drei reelle Lösungen} \end{cases}$$

Der Fall $D < 0$

Für $q = 1$ ist $D < 0$. $D(q)$ ist monoton wachsend. Wie man nachprüfen kann, ist $D = 0$ für $q = 1.346 \dots$. Also gibt es im Intervall $q \in [1, 1.346 \dots]$ drei verschiedene reelle Nullstellen bzw. Eigenwerte, welche alle negativ sind. Somit sind C^\pm für q in diesem Bereich attraktive Gleichgewichtslagen. Diese liegen aber so nahe bei Null, dass sie im «Simulator» nicht sichtbar sind.

Den Fall $D = 0$ und $p \neq 0$ untersuchen wir nicht weiter. Wir haben dann zwei reelle Nullstellen und eine davon ist eine doppelte Nullstelle.

Der Fall $D > 0$

Wenn q weiter wächst, wird $D > 0$. Dann gibt es eine reelle Nullstelle von p_μ , nennen wir sie μ_1 . Diese ist nicht zwingend negativ, denn nur das zugehörige $\lambda_1 = \mu_1 + a/3$ ist zwingend negativ. Ferner gibt es für $D > 0$ zwei konjugiert komplexe Nullstellen.

Nun untersuchen wir den Fall $D > 0$ weiter und definieren:

$$\begin{cases} u := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \\ v := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \end{cases}$$

Die Formeln von Cardano für die gesuchten Nullstellen $\mu_{1,2,3}$ von p_μ lauten in diesem Fall:

$$\begin{cases} \mu_1 = u + v \\ \mu_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \end{cases}$$

Die zugehörigen Eigenwerte des ursprünglichen charakteristischen Polynoms p_λ sind:

$$\begin{cases} \lambda_1 = u + v - \frac{a}{3} \\ \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) - \frac{a}{3} \end{cases}$$

$\lambda_{2,3}$ hat also die Form $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$. Wir betrachten wieder die Näherung nach Satz 14:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{L}(\vec{c}^+ + \vec{x}) \approx \mathfrak{I}^+ \vec{x}$$

Wobei \vec{x} klein und in der Ebene $\perp \vec{e}_1^+$ ist. Dann ist \vec{x} eine Linearkombination der komplexen Eigenvektoren in dieser Ebene. Diese haben die Form:

$$\vec{e}_{2,3} = \vec{w} \pm i\vec{z}$$

Für geeignete $\vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Wenn wir \vec{e}_1 und $\vec{e}_{2,3}$ als Basis nehmen, hat \mathfrak{I}^+ Diagonalform:

$$\mathfrak{I}^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix}$$

Wenn man statt $\vec{e}_{2,3}$ die Vektoren \vec{w}, \vec{z} als Basis wählt, dann erhält man bezüglich dieser Basis mit einer analogen Rechnung wie bei Satz 12 für \mathfrak{I}^+ die Form:

$$\mathfrak{I}^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Und somit erhält man bezüglich dieser Basis für ein kleines $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ klein in der Ebene $\perp \vec{e}_1^+$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x_2 + \beta x_3 \\ -\beta x_2 + \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

Und wir haben das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \alpha x_2 + \beta x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

Der Ansatz: $x_2(t) = Ce^{at}\sin\beta t$ und $x_3(t) = Ce^{at}\cos\beta t$ mit $C \in \mathbb{R}$ liefert eine Lösung, denn:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \alpha Ce^{at}\sin\beta t + \beta Ce^{at}\cos\beta t = \alpha x_2(t) + \beta x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -\beta Ce^{at}\sin\beta t + \alpha Ce^{at}\cos\beta t = -\beta x_2(t) + \alpha x_3(t) \end{cases}$$

Man sieht jetzt, dass sich die Trajektorie rund um den Fixpunkt C^+ bewegt und β lediglich einen Einfluss auf die Drehgeschwindigkeit hat. Hingegen wird $x_2(t)$ und $x_3(t)$ kleiner, wenn $\alpha < 0$. Wir haben also das Resultat: Für $\alpha < 0$ ist C^+ attraktiv und für $\alpha > 0$ repulsiv.

Die Frage ist jetzt, wo dieser «Kippunkt» ist, für den C^+ instabil wird. Das ist beim Übergang, wenn der Realteil der komplexen Nullstelle von negativ zu positiv übergeht. Am kritischen Punkt ist der Realteil Null, das heisst, die komplexen Nullstellen sind rein imaginär.

Wir müssten also folgende Gleichung nach ϱ auflösen:

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{a}{3} = 0$$

Das scheint aufwendig, da in diesem Ausdruck kubische und quadratische Wurzeln stecken und die Variable ϱ in der Determinante D in der Form eines Polynoms dritten Grades steckt. Wir versuchen es lieber mit einem Ansatz $\lambda_2 = i\eta$ und machen einen Koeffizientenvergleich. Es ist:

$$p_\lambda(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Also

$$\begin{aligned}
p_\lambda(\lambda_2) &= -i\eta^3 - a\eta^2 + b i\eta + c = 0 \\
\Rightarrow i\eta(-\eta^2 + b) &= 0 \text{ und } -a\eta^2 + c = 0 \\
\Rightarrow \eta^2 &= b \text{ und } \eta^2 = \frac{c}{a} \\
\Rightarrow ab &= c \\
\Rightarrow \frac{41}{3} \cdot \frac{8}{3}(\varrho + 10) &= \frac{160}{3}(\varrho - 1)
\end{aligned}$$

Das liefert die Lösung $\varrho \approx 24.7368$.

Somit haben wir folgenden Satz hergeleitet:

Satz 19

Wir betrachten das Lorenz-System mit den bisherigen Bezeichnungen.

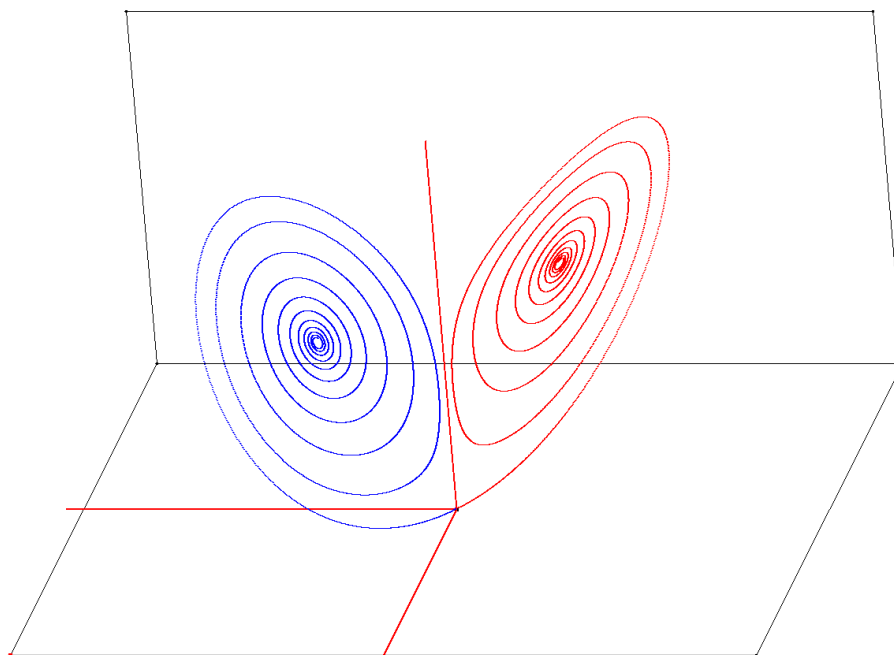
Behauptung:

- 1) Für $\varrho \in [1, 1.346 \dots]$ sind C^\pm attraktive Gleichgewichtslagen. Eine Trajektorie, welche einer der Gleichgewichtslagen nahek ommt, strebt direkt auf diese zu.
- 2) Für $\varrho \in]1.346 \dots, 24.7368 \dots[$ sind C^\pm attraktive Gleichgewichtslagen. Die Trajektorien, welche ihnen nahek ommen, bewegen sich kreisförmig auf diese zu.
- 3) Für $\varrho > 24.7368 \dots$ werden C^\pm repulsive Gleichgewichtslagen. Trajektorien, welche ihnen nahek ommen, bewegen sich kreisförmig wieder von ihnen weg.

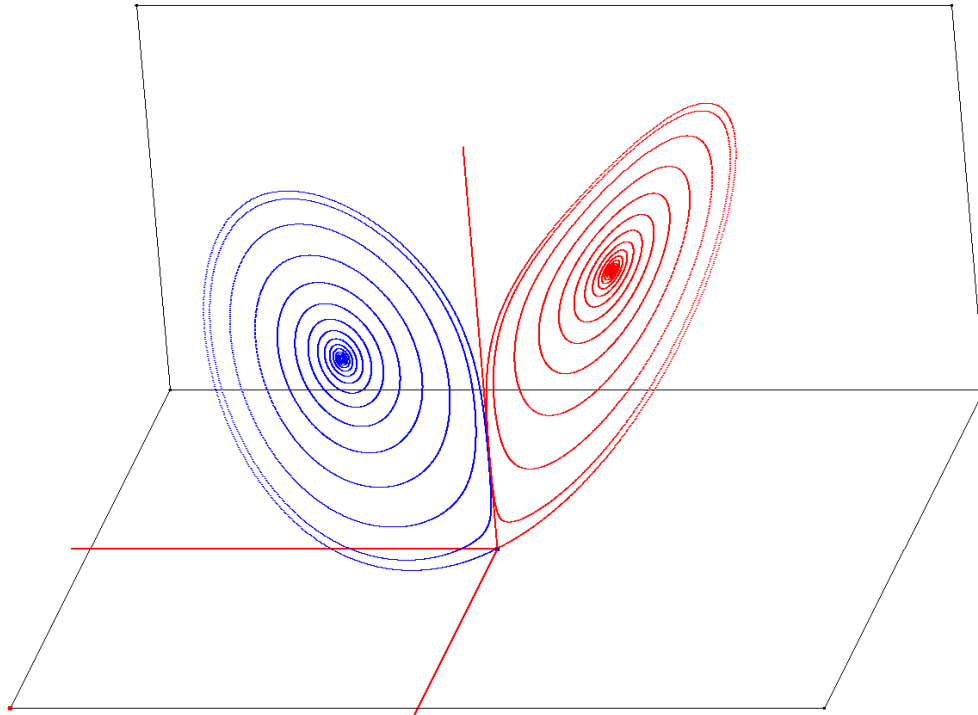
□

Man kann mit höheren Methoden zeigen, dass sich das System immer in einem endlichen Ausschnitt des \mathbb{R}^3 bewegt (siehe [1]).

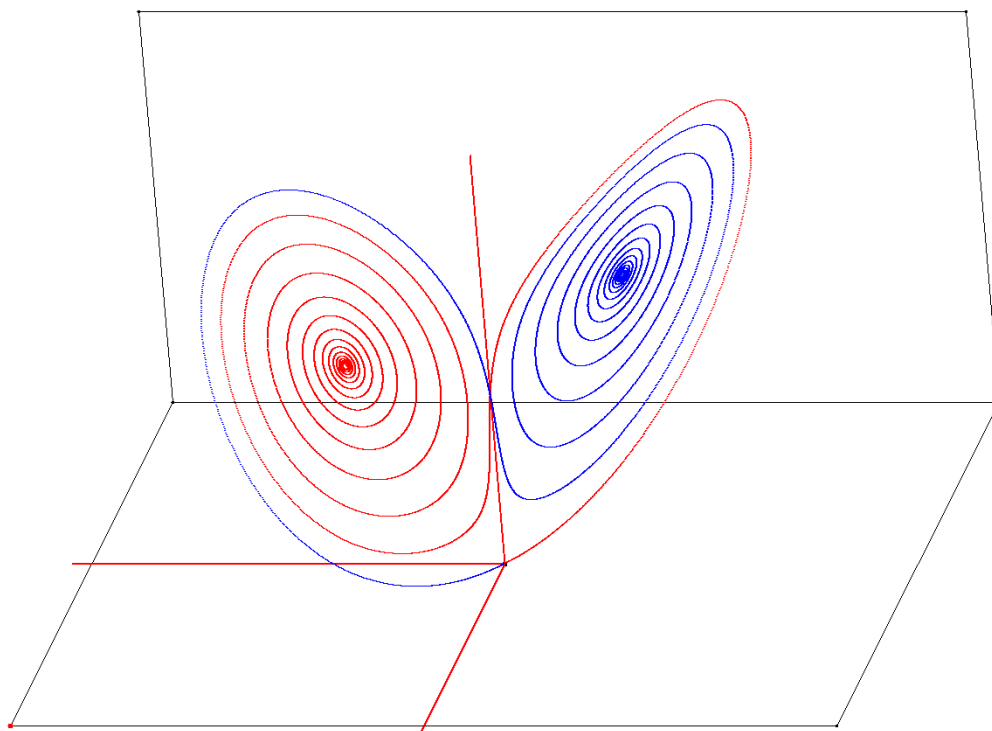
Wir zeigen noch einige Beispiele mit dem Simulator.



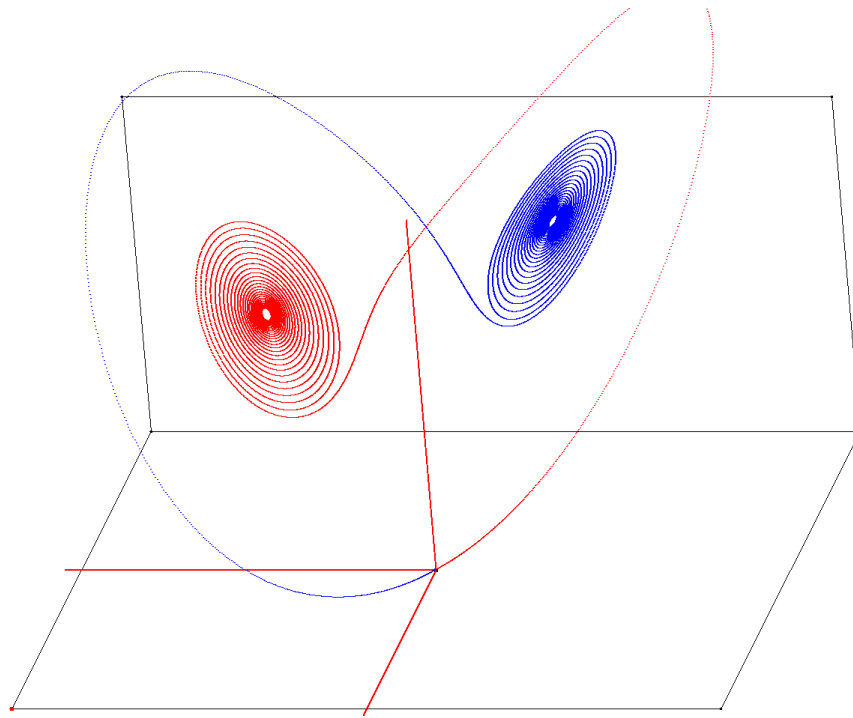
Attraktive Gleichgewichtslagen für $\varrho = 13.44$



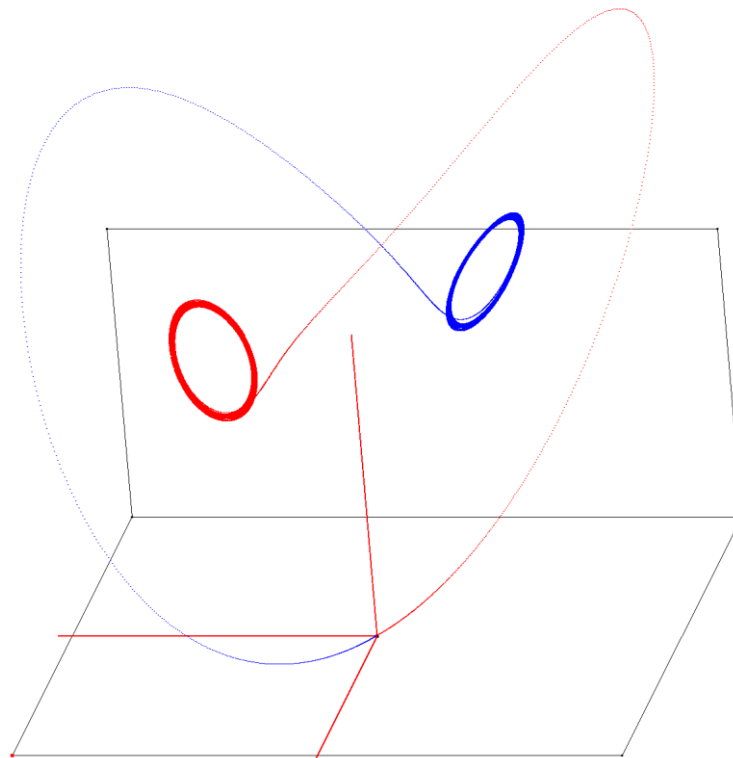
Wenn sich q dem Wert 13.926 nähert, berühren sich die Orbits fast



Für $q > 13.926$ laufen dieselben Startpunkte zum jeweils anderen Fixpunkt

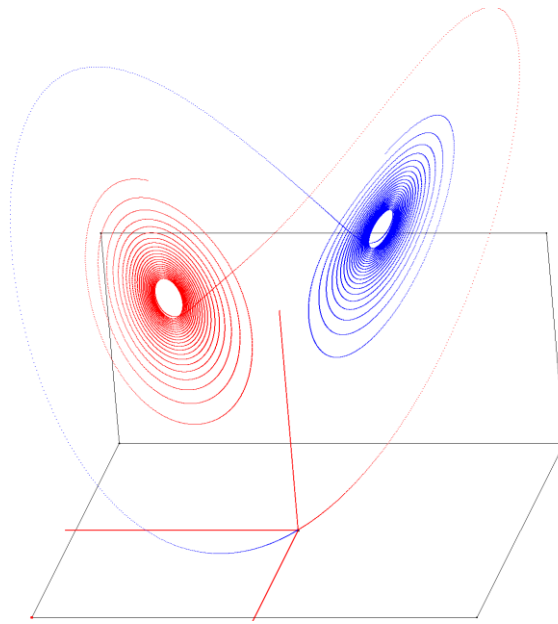


$q = 20.016$: C^\pm sind noch attraktiv



$q = 24.69$: Die Orbits verharren je fast auf einem stabilen Kreis um C^\pm

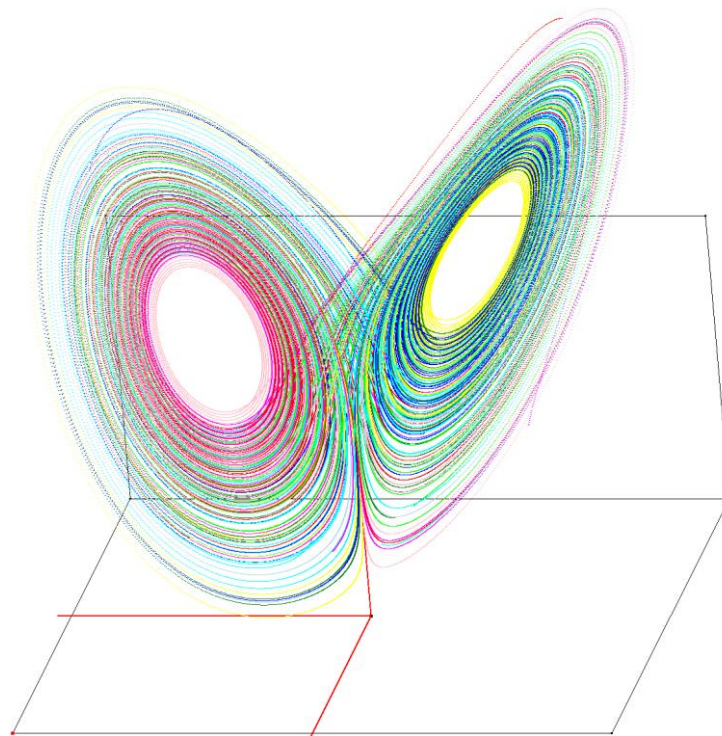
An dieser Stelle werden die Gleichgewichtslagen C^\pm in der Ebene senkrecht zum Eigenvektor, welcher zum (negativen) reellen Eigenwert gehört, indifferent. Die Iteration bewegt sich auf einem Kreis rund um die jeweilige Gleichgewichtslage.



$q = 27.96$: Die Orbits bewegen sich von C^\pm weg

Wenn q weiter wächst, werden die Gleichgewichtslagen in dieser Ebene repulsiv. Es entstehen aber keine anderen neuen attraktiven Gleichgewichtslagen, sondern die Orbits nähern sich einer kompliziert aussehenden Menge, dem Lorenz-Attraktor, welchen man einen *seltsamen Attraktor* nennt.

Wenn wir als Startmenge eine «Punktwolke» wählen, sieht man etwa, wie der Attraktor aussieht. Alle Trajektorien werden flachgedrückt und winden sich für $q > 24.7368 \dots$ abwechselungsweise um die instabilen Gleichgewichtslagen C^\pm , ohne diese zu erreichen.



Der «seltsame» Lorenz-Attraktor

6. Ausblick: Seltsame Attraktoren

Im Schulprojekt *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums* hatte man als Attraktoren entweder Fixpunkte oder Zyklen, d.h. immer endlich viele Punkte. Beim Lorenz-System scheint aber eine Punktmenge im Phasenraum attraktiv zu sein. Diese Punktmenge erscheint als Endzustand des Lorenz-Systems: Ein beliebiger Startpunkt innerhalb des definierten Bereichs des Phasenraumes füllt mit seinem Orbit allmählich die ganze Punktmenge des Attraktors auf, falls das Verhalten chaotisch ist, also wenn $\rho > 24.7368$.

Man muss hier also die Definition eines Attraktors aus dem eindimensionalen Fall verallgemeinern. Eine präzise mathematische Definition eines seltsamen Attraktors findet man in [1]. Hier wollen wir die Idee der Definition am Beispiel des Lorenz-Attraktors skizzieren.

Zuerst muss die Punktmenge, die zum Attraktor gehört, invariant sein. Das heisst, Punkte, welche einmal in dieser Menge gelandet sind, sollen sich nicht mehr aus der Menge herausbewegen. Dann sollen Punktmenge, welche in der Nähe des Attraktors liegen, von diesem «angezogen» werden. Damit können wir die Definition für eine attraktive Punktmenge so ausdrücken:

Definition

Sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, und A eine abgeschlossene Teilmenge von X , die unter f invariant ist. Also: $f(A) \subseteq A$. A heisst *attraktiv*, falls eine Umgebung U von A existiert mit der Eigenschaft: Für jede (noch so kleine) Umgebung V von A gilt: $f^n(U) \subset V$ für hinreichend grosses $n \in \mathbb{N}$. \square

Alle Punkte aus U kommen also im Laufe der Iteration der Menge A beliebig nahe.

Nun heisst das noch nicht, dass eine attraktive Punktmenge chaotisches Verhalten oder so etwas wie Sensitivität und Transitivität hat. Für die Transitivität sollten die Punkte in der Umgebung von A oder A selbst beliebig «durchmischt» werden. Wir definieren deshalb:

Definition

Sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, und A eine f -invariante Teilmenge von X . f heisst *topologisch transitiv* auf A , wenn es für jedes Paar offener Mengen $\emptyset \neq U, V \subset A$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

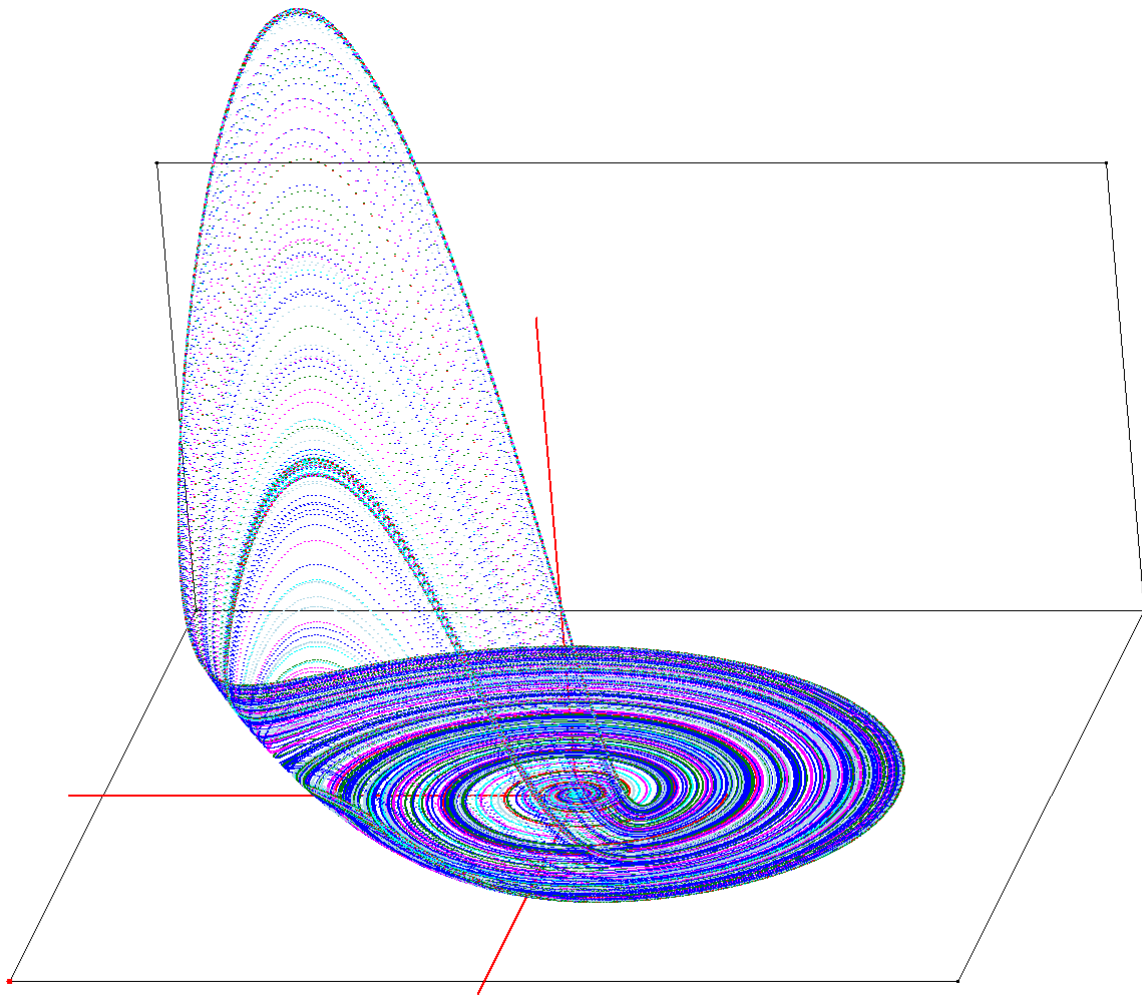
Im eindimensionalen Fall haben wir für die Transitivität verlangt, dass man im Laufe der Iteration aus der Nähe jedes Startpunktes in die Nähe von jedem beliebigen Zielpunkt kommt. Hier ersetzt U die Rolle des Startpunktes und V die Rolle des Zielpunktes. Wenn ich also U beliebig wähle und genügend lange iteriere, dann wird sich $f^n(U)$ mit jeder beliebig vorgegebenen Zielmenge V schneiden.

Wenn nun eine f -invariante Teilmenge $A \subset X$ attraktiv und gleichzeitig topologisch transitiv ist, dann verhält sie sich auch sensitiv gegenüber Anfangsbedingungen. In diesem Fall nennt man A einen *seltsamen Attraktor*.

Im «Simulator» sind neben dem Lorenz-Attraktor zwei weitere seltsame Attraktoren implementiert. Der erste ist der sogenannte *Roessler-Attraktor*, benannt nach dem Biochemiker und Chaosforscher Otto Rössler (1940 -) benannt. Das Roessler-System wird definiert durch das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + xz - cz \end{cases}$$

Wobei $a = b = 0.2$ gewählt wird und $c \in [1, 10]$. Für $c > 2$ hat man chaotisches Verhalten.

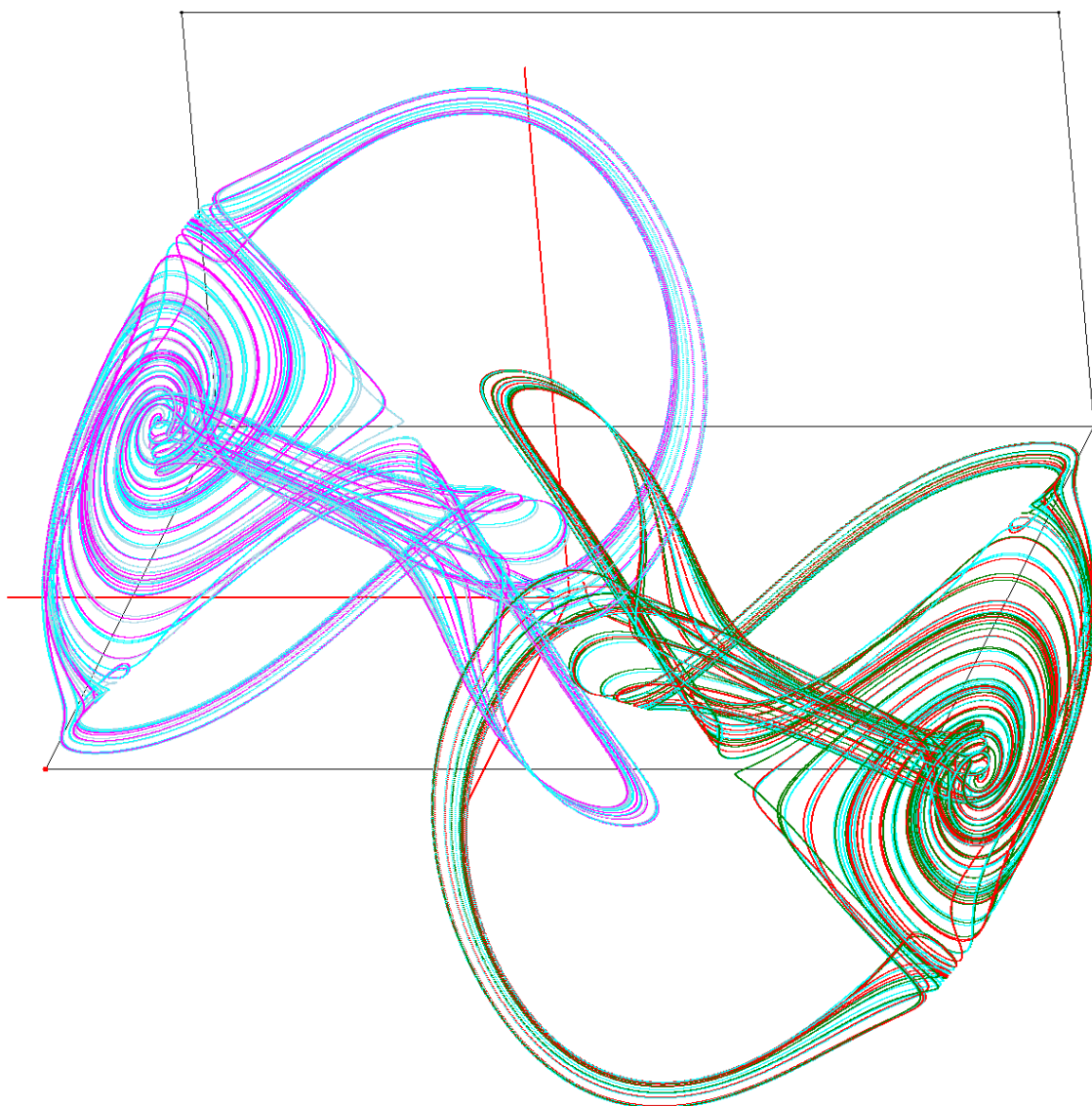


Der Roessler-Attraktor für $c = 6$

Ein weiterer implementierter Attraktor ist der *Thomas-Attraktor*. Er ist benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker René Thomas (1928 – 2017). Das System wurde von ihm für die Modellierung von Rückkopplungsmechanismen in biologischen Netzwerken vorgeschlagen. Das System ist definiert durch das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y - bx \\ \dot{y} = \sin z - by \\ \dot{z} = \sin x - bz \end{cases}$$

Dabei ist der Parameter $b \in]0,1]$ und zeigt für $b < 0.215$ chaotisches Verhalten.



Der Thomas Attraktor für $b = 0.1998$

7. Übungsbeispiele

1. Gegeben ist im Raum \mathbb{R}^3 eine Punktspiegelung am Nullpunkt. Zeige, dass diese Abbildung linear ist und bestimme die zugehörige Abbildungsmatrix.
2. Gegeben ist im Raum \mathbb{R}^3 eine Drehung um die z-Achse und den Winkel φ . Zeige, dass diese Abbildung linear ist und bestimme die zugehörige Abbildungsmatrix.
3. Bestimme den Kern der Abbildung $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass der *Kern* A mit $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ von $\vec{0}$ verschieden ist.

5. Gegeben ist die Abbildung $A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$. Bestimme deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Diskutiere das Verhalten der Abbildung in der Nähe des Nullpunktes.

6. Betrachte das Lorenz-System mit dem Nullpunkt als Fixpunkt. Untersuche verschiedene Wege zum Nullpunkt und unter welchen Bedingungen der Nullpunkt attraktiv ist.

7. Gegeben ist die Abbildung

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{\beta(\varrho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\varrho - 1)} & \pm \sqrt{\beta(\varrho - 1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

an der Stelle der Gleichgewichtslagen C^\pm für das Lorenz-System. Wir suchen Eigenwerte λ und Eigenvektoren \vec{e} , so dass gilt: $A\vec{e} = \lambda\vec{e}$. Zeige, dass die Bedingung für deren Existenz gegeben ist durch: $p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \varrho)\lambda + 2\sigma\beta(\varrho - 1) = 0$.

8. Untersuche die Nullstellen des transformierten charakteristischen Polynoms des Lorenz-Systems $p(\mu) = \mu^3 + p\mu + q$ für $\varrho > 1$ mit Hilfe der Formeln von Cardano. Erstelle dazu eine Excel Tabelle für die Berechnungen der Nullstellen, wenn verschiedene Werte von ϱ eingegeben werden. Berechne dann die ursprünglichen Eigenwerte $\lambda = \mu + a/3$ und diskutiere die Stabilität.
9. Überprüfe, dass beim Lorenz-System für $\varrho = 24.7368$ der Realteil der komplexen Nullstelle von $p_\lambda(\lambda)$, also der Ausdruck $-\frac{1}{2}(u + v) + \frac{a}{3} \approx 0$ wird.
10. Untersuche den Roessler-Attraktor hinsichtlich Fixpunkte und deren Eigenschaften.
11. Untersuche den Thomas-Attraktor hinsichtlich Fixpunkte und deren Eigenschaften.

Weiterführende Literatur

[1] Das Lorenz-System, Seminar über gewöhnliche Differentialgleichungen, Uni Hamburg, Uwe Jönck und Florian Prill, Februar 2003

[2] Deterministic Nonperiodic Flow, Edward N. Lorenz, Journal of the Atmospheric Sciences, MIT, 1963