

# Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums

## Die Mathematik zum Computerprogramm «Simulator»

Überarbeitet 1.10.2025

*Das vorliegende Dokument beschreibt die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums mit elementar zugänglichen Methoden. Unterstützt werden die mathematischen Untersuchungen durch Experimente mit dem Computerprogramm «Simulator».*

*Das Dokument soll eine Anregung sein für den erweiterten Mathematikunterricht auf der Mittelstufe, sei es für Angebote ausserhalb des obligatorischen Lehrplanes oder für individuelle Arbeiten von interessierten Schülern.*

*Die gesamte Themenreihe in Zusammenhang mit dem «Simulator» umfasst:*

- **Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums**
- *Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen*
- *Newton Iteration und die komplexen Einheitswurzeln*
- *Iteration quadratischer Funktionen in der komplexen Ebene*
- *Numerische Methoden und gekoppelte Pendel*
- *Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem*
- *Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose von Edward Lorenz*
- *Fraktale Mengen und Lindenmayer-Systeme*
- *Zur Geschichte der Chaostheorie*
- *Programmierung eigener dynamischer Systeme im «Simulator»*

*Jedes Thema wird in einem separaten Dokument behandelt.*

*Das Computerprogramm «Simulator» ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, ebenso eine Microsoft Installer Version. Der entsprechende Link ist: <https://github.com/HermannBiner/Simulator>. Im «Simulator» sind folgende Dokumentationen auf Deutsch und Englisch integriert:*

- *Mathematische Dokumentation mit Beispielen und Übungsaufgaben*
- *Technische Dokumentation mit detaillierter Beschreibung der Funktionalität*
- *Benutzerhandbuch mit Beispielen*
- *Versionshistorie*

## Inhalt

1.	Das logistische Wachstum .....	2
2.	Fixpunkte .....	4
3.	Zyklen.....	6
4.	Das Bassin eines Attraktors .....	10
5.	Die Rolle des kritischen Punktes.....	13
6.	Der Fall a=4 .....	16
7.	Zyklen im Fall a=4 .....	23
8.	Chaotische dynamische Systeme.....	24
9.	Die Zeltabbildung.....	26
10.	Konjugierte der Zeltabbildung.....	28
11.	Explizite Berechnung von Zyklen.....	32
12.	Ausblick: Periodenverdoppelung .....	36
13.	Übungsbeispiele .....	40
	Weiterführende Literatur.....	42

## 1. Das logistische Wachstum

Wenn man das Wachstum einer Population untersucht, dann wird oft das exponentielle Wachstum als Modell gewählt. Dabei wächst eine Population proportional zu ihrer aktuellen Grösse. Beim diskreten Modell betrachtet man schrittweise die Grösse einer Generation und misst diese in immer gleichen Zeitabständen.

Wenn  $x_n \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$  die Grösse der n-ten Generation bezeichnet, dann gilt beim exponentiellen Wachstum für die nächste Generation:

$$x_{n+1} = ax_n, a > 1$$

Ausgehend von der ersten Generation  $x_1 > 0$  gilt dann:  $x_n = a^{n-1}x_1$ . Da die Anzahl der Generationen im *Exponenten* steckt, führt das nach wenigen Generationen zu einer sehr starken

Wachstumsrate. Solange die Ressourcen für die Population unbegrenzt sind, kann die Population so theoretisch bis ins Unendliche wachsen.



Pierre-François Verhulst

1838 hat der belgische Mathematiker Pierre Verhulst (1804 – 1849) ein alternatives Modell untersucht, bei dem angenommen wird, dass die Ressourcen für das Überleben der Population begrenzt sind. Er nannte dieses Modell das *logistische* Wachstum. «Logistisch» im Sinne des griechischen Wortes *λογοσ*, was in diesem Zusammenhang als «vernünftig» oder «logisch» übersetzt werden kann. In diesem Modell kann eine Population einen Wert zwischen 0% und 100% annehmen. 100% ist die maximal mögliche Grösse auf Grund der Ressourcen.

Somit ist die Grösse der n-ten Generation eine Zahl zwischen 0% und 100% oder:  $x_n \in [0,1]$ .

Die Formel von Verhulst lautet:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

$1 - x_n$  ist der wachstumshemmende Term.

Iteriert wird hier die Funktion

$$f(x) = ax(1 - x), [0,1] \rightarrow [0,1]$$

wobei wir darauf verzichten, die Abhängigkeit der Funktion von  $a$  durch einen Index zu markieren.

In welchem Bereich darf  $a$  liegen? Einerseits ist  $a > 0$ . Andrerseits muss das Maximum der Funktion  $\leq 1$  sein. Es ist:

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

Das Maximum wird an der Stelle  $x = \frac{1}{2}$  angenommen. Somit muss gelten:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leq 1$ .

Also ist  $a \leq 4$  und  $a \in ]0,4]$ .

### Definition 1.1

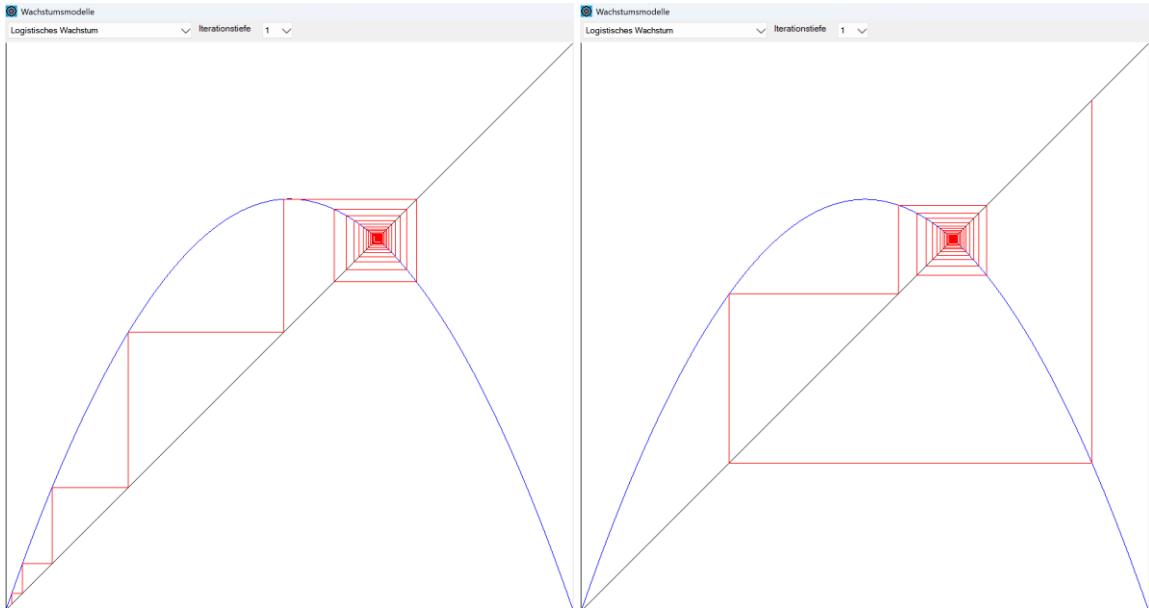
Das *logistische Wachstum* ist definiert als Iteration:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

wobei  $x_n \in [0,1]$  und  $a \in ]0,4]$ .

□

Nun machen wir einige Experimente mit dem Simulator. Durch den Menüpunkt «Wachstumsmodelle – Iteration» wird ein Fenster geöffnet, in welchem wir als iterierte Funktion das logistische Wachstum wählen und die Iterationstiefe auf eins setzen. Nun können wir verschiedene Werte von  $a$  und verschiedene Startwerte eingeben. Im linken Bereich des Fensters sehen wir den Graphen der iterierten Funktion  $f$  im Intervall  $[0,1]$ . Man kann sich überzeugen, dass die Iteration graphisch gleichbedeutend ist wie zwischen dem Funktionsgraphen und der  $45^\circ$ -Geraden hin- und herzupendeln. Die detaillierte Bedienung des Simulators in diesem Fenster ist im Handbuch zum Simulator beschrieben.



Iteration für  $a = 2.9$  und die Startwerte  $x_1 = 0.01$  (links) bzw.  $x_1 = 0.9$  (rechts)

Die Iteration pendelt sich offenbar unabhängig vom Startwert auf einer stabilen Gleichgewichtslage  $x_\infty \approx 0.655$  ein. Diese stabile Lage ist ein Fixpunkt der Funktion:

$$f(0.655) = 2.9 \cdot 0.655 \cdot (1 - 0.655) = 0.655$$

Offensichtlich ändert sich die Population nicht mehr, wenn sie auf einen Fixpunkt der iterierten Funktion fällt. Also stellt sich die Frage, welche Fixpunkte es gibt und ob es allenfalls auch periodische Zyklen gibt, bei denen die Population zwischen verschiedenen Zuständen pendelt.

## 2. Fixpunkte

$\xi$  ist ein Fixpunkt des logistischen Wachstums, falls gilt:  $f(\xi) = a\xi(1 - \xi) = \xi$ .

Man hat zwei Lösungen:  $\xi_1 = 0$  und  $\xi_2 = 1 - 1/a$

Die Frage ist, ob sich die Iteration immer auf einen dieser Fixpunkte zubewegt. Beim ersten Experiment traf das auf den Fixpunkt 0 offensichtlich nicht zu. Dieser war «abstossend» oder repulsiv. Hingegen war der andere Fixpunkt 0.655 «anziehend» oder attraktiv.

Was entscheidet, ob ein Fixpunkt attraktiv oder repulsiv ist? Offenbar ist er attraktiv, wenn ein Iterationswert in seiner Nähe nicht mehr aus seiner Umgebung entfliehen kann, sondern mit wachsendem  $n$  gegen den Fixpunkt strebt. Wenn man die Graphen im vorhergehenden Experiment betrachtet, dann scheint dies mit der Tangentensteigung im jeweiligen Fixpunkt zu tun zu haben. Insbesondere ist (immer für  $a = 2.9$ ):

$$|f'(0)| = 2.9 > 1, |f'(0.655)| \approx 0.899 < 1$$

Wir betrachten nun einen Fixpunkt  $\xi$  mit  $|f'(\xi)| < 1$ . Da  $f'$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U(\xi)$  in welcher gilt:

$$|f'(x)| \leq L < 1 \text{ wenn } x \in U(\xi)$$

Wenn ein Punkt im Laufe der Iteration in diese Umgebung fällt, also für einen Startwert  $x_0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n = f^n(x_0) \in U(\xi)$ , dann gilt nach dem Mittelwertsatz, dass es ein  $\vartheta \in U(\xi)$  gibt mit

$$|x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| = |f'(\vartheta)| |x_n - \xi| \leq L |x_n - \xi|$$

Da  $\vartheta \in U(\xi)$  gilt  $|f'(\vartheta)| \leq L$ .

Bei der weiteren Iteration gilt:

$$|x_{n+m} - \xi| \leq L^m |x_n - \xi| \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty$$

Somit gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

Man kann sich überzeugen, dass der Fixpunkt repulsiv ist, wenn  $|f'(\xi)| > 1$ .

Der Wert der Ableitung in einem Fixpunkt spielt also eine entscheidende Rolle dafür, ob der Fixpunkt ein *Attraktor* oder *Repellor* ist.

Man nennt  $\lambda := |f'(\xi)|$  auch den *Multiplikator* des Fixpunktes  $\xi$ .

Bei dieser Untersuchung haben wir nur vorausgesetzt, dass die iterierte Funktion  $f$  stetig differenzierbar ist. Somit gilt das Resultat:

### **Satz 2.1**

Sei  $f(x)$  stetig differenzierbar und  $f(\xi) = \xi$ .

Behauptung:

- 1)  $|f'(\xi)| < 1 \Rightarrow \xi$  ist ein *Attraktor*. Wenn ein Punkt der Iteration dem Fixpunkt  $\xi$  genügend nahe kommt, strebt er im Verlauf der weiteren Iteration nach  $\xi$ .
- 2)  $|f'(\xi)| > 1 \Rightarrow \xi$  ist ein *Repellor*. Wenn ein Punkt der Iteration dem Fixpunkt  $\xi$  nahe kommt, ohne ihn genau zu treffen, bewegt er sich bei den nächsten Iterationsschritten wieder von  $\xi$  weg.

□

Wenn  $|f'(\xi)| = 1$ , heisst  $\xi$  *indifferent*. Hier «kippt» bei verändertem  $a$  oft ein Attraktor in einen Repellor oder umgekehrt.

Was heisst das nun für das logistische Wachstum?

Ob die Fixpunkte attraktiv oder repulsiv sind, hängt von ihrem Multiplikator, bzw. vom Wert der Ableitung im Betrag an deren Stelle ab. Es ist:

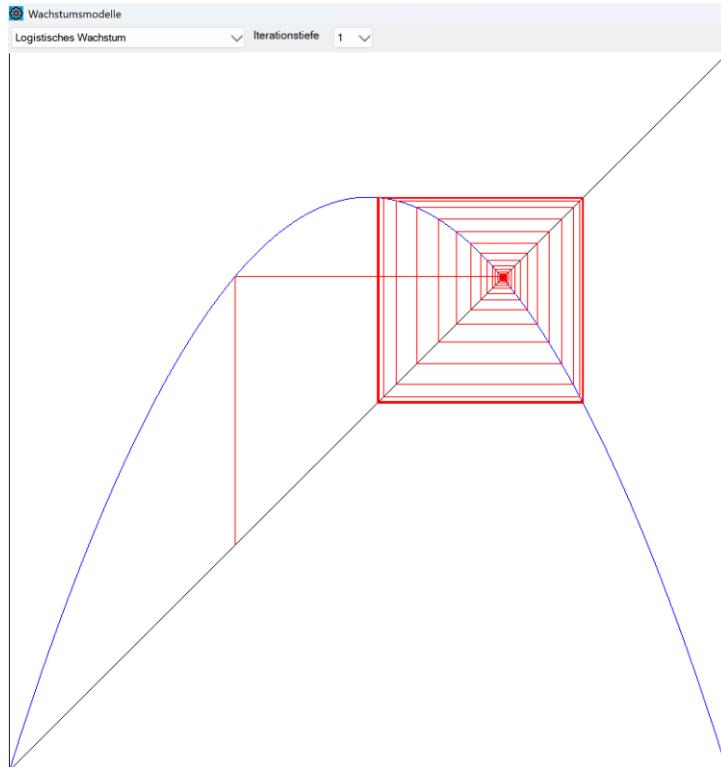
$$\lambda = |f'(x)| = |a(1 - 2x)|$$

Der erste Multiplikator ist  $\lambda_1 = |f'(0)| = a$ . Also ist der erste Fixpunkt  $\xi_1 = 0$  attraktiv für  $a < 1$  und repulsiv für  $a > 1$ . Ferner ist:

$$\lambda_2 = |f'(1 - 1/a)| = |2 - a| < 1 \text{ für } a \in ]1, 3[$$

Der Fixpunkt  $\xi_2 = 1 - 1/a$  ist attraktiv für  $a \in ]1, 3[$  und repulsiv für  $a \in ]3, 4[$ .

Was geschieht für  $a > 3$ ? Machen wir ein Experiment:



Logistisches Wachstum für  $a = 3.2$  und Startwert  $x_1 = 0.314159$

Am Anfang der Iteration «landet» diese nahe beim Fixpunkt  $\xi_2 = 1 - \frac{1}{a} \approx 0.687$ : Es ist  $f(0.314159) \approx 0.689$ . Der Multiplikator ist hier  $\lambda = |f'(0.687)| \approx 1.197 > 1$  und der Fixpunkt ist repulsiv: die Iteration bewegt sich von ihm weg.

Offenbar pendelt sich die Iteration auf einen Zyklus ein mit den Werten  $\xi_3 \approx 0.79945$  und  $\xi_4 \approx 0.51304$ . Es ist nämlich:  $f(\xi_3) = \xi_4, f(\xi_4) = \xi_3$ .

### 3. Zyklen

Für  $a = 3.2$  sind wir beim logistischen Wachstum auf einen zweier-Zyklus gestossen. Zyklen der Periode 2 sind Fixpunkte von  $f^2$ . Wir wollen diese bestimmen.

$f^2(\xi) = \xi$  liefert eine Gleichung vierten Grades, wobei wir bereits zwei Nullstellen kennen, nämlich die Fixpunkte von  $f$ :  $\xi_1 = 0$  und  $\xi_2 = 1 - \frac{1}{a}$ .

Um die anderen beiden Fixpunkte  $\xi_3$  und  $\xi_4$  zu finden verwenden wir den Ansatz:

$$\begin{cases} \xi_3 = f(\xi_4) = a\xi_4(1 - \xi_4) \\ \xi_4 = f(\xi_3) = a\xi_3(1 - \xi_3) \end{cases}$$

Wenn man die untere Gleichung von der oberen subtrahiert, erhält man:

$$\xi_3 - \xi_4 = -a(\xi_3 - \xi_4) + a(\xi_3^2 - \xi_4^2)$$

Da die gesuchten Fixpunkte echt 2-periodisch sind, gilt  $\xi_3 \neq \xi_4$  und wir erhalten:

$$1 = -a + a(\xi_3 + \xi_4)$$

Wir setzen  $\xi_4 = \frac{1+a}{a} - \xi_3$  in die zweite Gleichung ein und erhalten nach etwas Rechnung:

$$a^2\xi_3^2 - a(1+a)\xi_3 + 1 + a = 0$$

## Das liefert:

$$\xi_{3,4} = \frac{1+a \pm \sqrt{(1+a)(a-3)}}{2a}$$

Für  $a > 3$  erhalten wir also einen 2-Zyklus.

Dieser ist attraktiv, wenn

$$|f^{2'}(\xi_3)| = |f'(f(\xi_3) \cdot f'(\xi_3))| = |f'(\xi_4) \cdot f'(\xi_3)| < 1$$

Es ist:

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

$$|f'(\xi_4) \cdot f'(\xi_3)| = a^2 |1 - 2(\xi_3 + \xi_4) + 4\xi_3\xi_4|$$

Mit

$$\xi_3 + \xi_4 = \frac{1+a}{a} \text{ und } \xi_3 \xi_4 = \frac{1+a}{a^2}$$

Erhalten wir für den Multiplikator des 2-Zyklus:

$$\lambda_{3,4} = |f'(\xi_4) \cdot f'(\xi_3)| = |a^2 - 2a - 4|$$

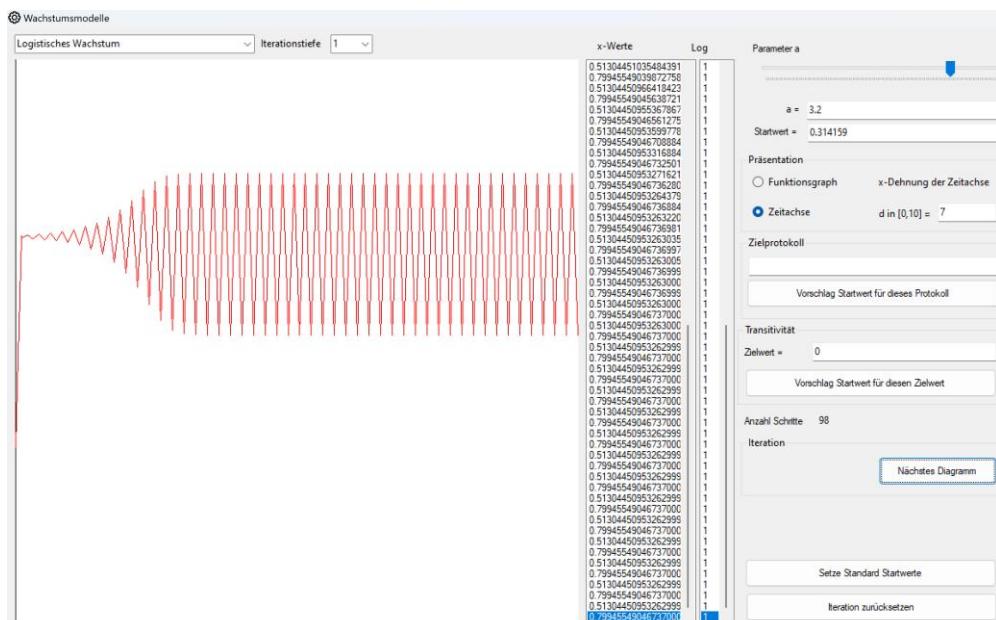
Der 2-Zyklus ist attraktiv für  $\lambda_{3,4} < 1$  und wir untersuchen die Übergangsstellen:

$$a^2 - 2a - 4 = \pm 1$$

Diese Gleichung hat die Lösungen  $a = 1 \pm \sqrt{6}$  wobei wegen  $a > 0$  nur in Frage kommt:

$$a = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449499$$

Der 2-Zyklus ist also attraktiv im Intervall  $a \in ]3, 3.449499..[$ .

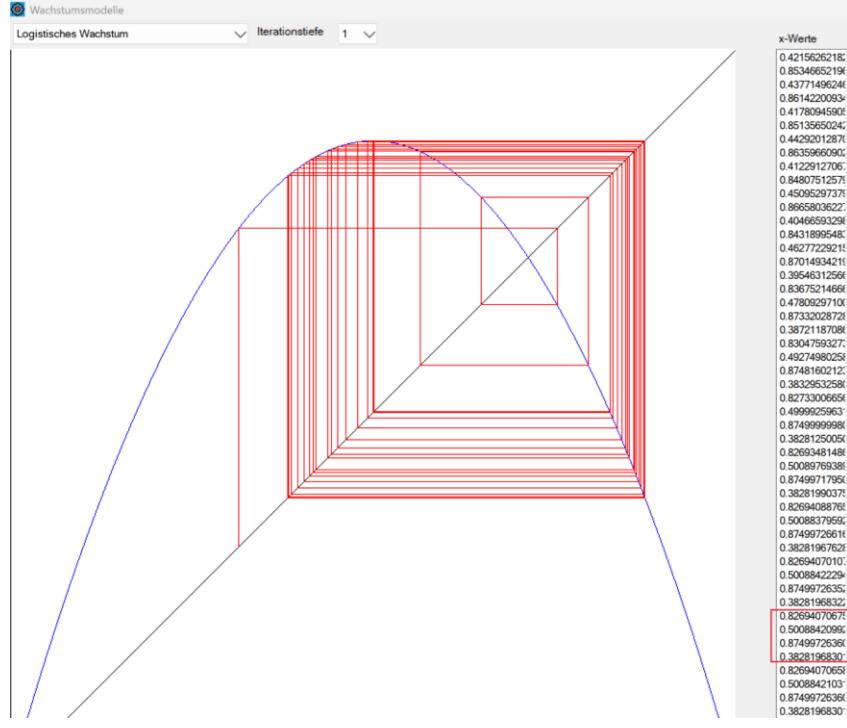


Logistisches Wachstum für  $a = 3.2$ , dargestellt auf der Zeitachse mit Dehnung 7

Im obigen Bild ist  $a = 3.2$ . Die Folge pendelt sich bald in den attraktiven 2-Zyklus ein:

$$\xi_{3,4} = \begin{cases} 0.799455 \dots \\ 0.513044 \dots \end{cases}$$

Was geschieht für  $a > 3.449499$ ? Machen wir ein Experiment:



Die Iteration für  $a = 3.5$

Offenbar pendelt sich die Iteration auf einen vierer-Zyklus ein:

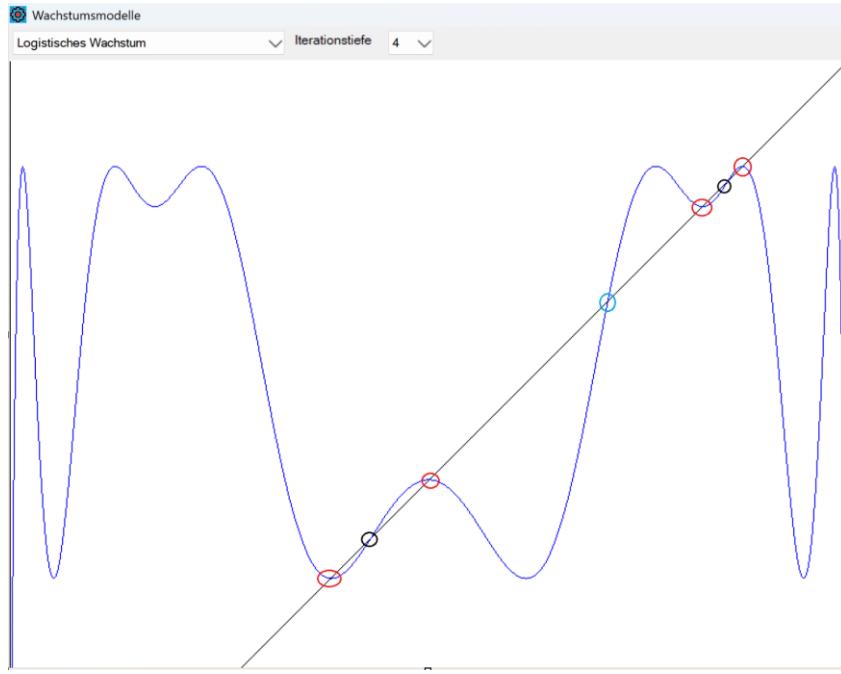
$$\{0.8269\dots, 0.5009\dots, 0.875\dots, 0.3828\dots\}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist jeder dieser Punkte ein Fixpunkt von  $f^4$ . Zudem ist der Multiplikator für  $a = 3.5$  und diesen Zyklus kleiner eins. Mit der Kettenregel hat man:

$$|f^{4'}(\xi_1)| = |f'(\xi_4)f'(\xi_3)f'(\xi_2)f'(\xi_1)| \approx 0.0217 < 1$$

Insbesondere ist der Multiplikator für alle Elemente des Zyklus derselbe.

Allfällig weitere Zyklen sind Fixpunkte von  $f^k$ , also Lösungen von Gleichungen vom Grad  $2^k$ . Die Fixpunkte von  $f^k$  sind die Schnittpunkte des Graphen von  $f^k$  mit der  $45^\circ$ -Geraden. Damit man das untersuchen kann, ermöglicht der Simulator auch Iterationen mit einer Tiefe von  $k \leq 8$ .



Graph der Funktion  $f^4$

Man erkennt den repulsiven Fixpunkt von  $f$  (grün), den repulsiven zweier Zyklus bzw. die repulsiven Fixpunkte von  $f^2$  (schwarz) sowie den attraktiven vierer Zyklus bzw. die vier Fixpunkte von  $f^4$  (rot).

### Definition 3.1

Allgemein heisst  $\xi$  ein *periodischer Punkt der Ordnung  $k$*  oder  *$k$ -periodischer Punkt von  $f$* , falls dieser Punkt nach minimal  $k$  Iterationsschritten wieder auf sich abgebildet wird. Für einen derartigen Punkt gilt:

$$f^k(\xi) = \xi \text{ und } f^i(\xi) \neq \xi \text{ für } 0 < i < k$$

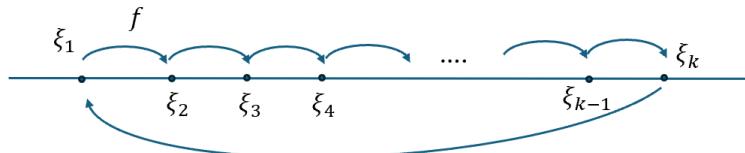
Ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f$  ist ein Fixpunkt von  $f^k$ .

Wenn  $\xi$  ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f$  ist, dann heisst die Menge

$$\{\xi, f(\xi), f^2(\xi), \dots, f^{k-1}(\xi)\} =: \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$$

$k$ -Zyklus der Iteration von  $f$ . Jeder Punkt in diesem Zyklus ist dann ein  $k$ -periodischer Punkt.

□



Bei einem Zyklus stellt sich die Frage, ob ein Zyklus sowohl aus Attraktoren wie auch Repelloren bestehen kann. Ob ein Punkt  $\xi_i := f^i(\xi_1)$ ,  $1 \leq i < k$  attraktiv ist oder nicht, hängt von der Ableitung von  $f^k$  an dieser Stelle ab. Nach der Kettenregel gilt:

$$|f^k(\xi_i)'| = |f' \left( f^{k-1}(\xi_i) \right) \cdot f' \left( f^{k-2}(\xi_i) \right) \cdots f'(\xi_i)|$$

Die Funktionsargumente auf der rechten Seite durchlaufen aber gerade den ganzen Zyklus.

Somit ist die Ableitung

$$|f^k(\xi_i)'| = |f'(\xi_k) \cdot f'(\xi_{k-1}) \cdots f'(\xi_1)| = \prod_{i=1}^k |f'(\xi_i)| = a^k \prod_{i=1}^k |1 - 2\xi_i|$$

unabhängig von  $i$  und nimmt für alle Punkte des Zyklus denselben Wert an.

### Satz 3.2

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion, welche iteriert wird und  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$  ein Zyklus von  $f$ .

Behauptung: Alle Punkte in diesem Zyklus haben *denselben* Multiplikator und sind entweder alle *attraktiv* oder alle *repulsiv*.

□

## 4. Das Bassin eines Attraktors

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion  $f$  mit einem attraktiven Fixpunkt  $\xi$ . Man interessiert sich hier für die Frage, welche Startpunkte  $x_1$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  im Laufe der Iteration nach  $\xi$  konvergieren. Diese Startpunkte bilden das *Bassin* des Attraktors.

### Definition 4.1

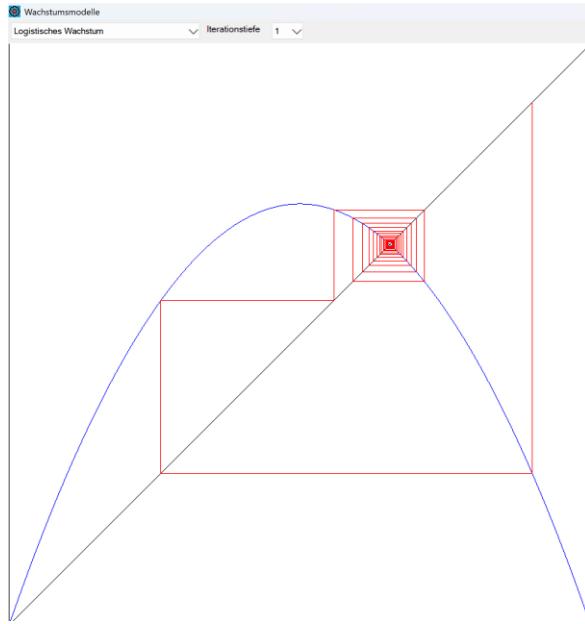
Sei  $\xi$  ein Attraktor einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$ . Dann ist das *Bassin* von  $\xi$  definiert durch:

$$B(\xi) := \{x \in \mathcal{D}_f / \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi\}$$

□

Analog kann man vom Bassin eines attraktiven Zyklus sprechen. Wenn man nämlich einen attraktiven  $k$ -Zyklus von  $f$  hat, ist jedes Element des Zyklus ein Fixpunkt von  $g := f^k$  und man betrachtet die Menge der Startpunkte, welche im Laufe der Iteration gegen einen Fixpunkt von  $g$  konvergieren. Da  $g$  bei einem  $k$ -Zyklus  $k$  Fixpunkte hat (einen pro Element des Zyklus), gibt es auch  $k$  verschiedene Bassin-Teile pro Fixpunkt von  $g$ , welche recht vertrackt und ineinander geschachtelt aussehen können. Hingegen ist deren Vereinigungsmenge das Bassin des attraktiven Zyklus von  $f$ . In diesem Sinne gehören die einzelnen Bassins der Fixpunkte von  $g$  zum selben Zyklus von  $f$  und sind gemeinsam das Bassin *eines* attraktiven Zyklus.

Kehren wir zurück zum Fall eines attraktiven Fixpunktes des logistischen Wachstums. Für  $a = 2.9$  war der Nullpunkt repulsiv und der Fixpunkt  $\xi_2 \approx 0.687$  attraktiv. Da der Punkt 1 in den Nullpunkt abgebildet wird, gehört er nicht zum Bassin von  $\xi_2$ . Alle übrigen Punkte im Intervall  $]0, 1[$  gehören offensichtlich dazu.



$$a = 2.9 \text{ und Startwert } x_1 = 0.9$$

Bei diesem Beispiel war das Bassin ein offenes Intervall. Allgemein gilt der

#### Satz 4.2

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion mit einem attraktiven Fixpunkt  $\xi$ . Das Bassin sei ganz im Innern des Definitionsbereiches von  $f$  enthalten, das heisst insbesondere  $B(\xi) \cap \partial D_f = \emptyset$ .

Behauptung: Das Bassin  $B(\xi)$  ist eine offene Menge.

□

Beweis:

Sei  $x \in B(\xi)$ , also  $|f^n(x) - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$  wenn  $n$  gross genug ist. Nun wählen wir ein  $x'$  nahe genug bei  $x$ , so dass  $|f^n(x') - f^n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wegen der Stetigkeit von  $f^n$  ist dies möglich und ein solches  $x'$  existiert, da  $x$  nicht zum Rand von  $D_f$  gehört.

Dann gilt:

$$|f^n(x') - \xi| \leq |f^n(x') - f^n(x)| + |f^n(x) - \xi| < \varepsilon$$

Für  $n$  gross genug. Somit konvergiert auch  $x'$  gegen  $\xi$  und  $x' \in B(\xi)$ .

□

Wir betrachten wieder das Bassin  $B(\xi)$  eines attraktiven Fixpunktes  $\xi$  unter der iterierten Funktion  $f$ . Wenn  $x \in B(\xi)$ , dann ist auch  $f(x) \in B(\xi)$ , denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = \xi$ . Ebenso gehört auch jedes Urbild von  $x$ :  $f^{-1}(x) \in B(\xi)$ , denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(f^{-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x) = \xi$ .

Somit gilt:

#### Satz 4.3

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion mit einem attraktiven Fixpunkt  $\xi$ .

Behauptung:

Das Bassin  $B(\xi)$  ist *vollinvariant*. Das heisst:  $f(B(\xi)) \subseteq B(\xi)$  und  $f^{-1}(B(\xi)) \subseteq B(\xi)$ .

□

$f^{-1}(B(\xi))$  hier im Sinne von «Die Menge aller Urbilder».

Eine wichtige Rolle spielt das *unmittelbare Bassin* eines attraktiven Fixpunktes.

#### Definition 4.4

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion mit einem attraktiven Fixpunkt  $\xi$ .  $B(\xi)$  sei das zugehörige Bassin. Mit  $\xi \in B(\xi)$  gehört auch eine Umgebung von  $\xi$  zu  $B(\xi)$ . Deshalb definieren wir:

Das *unmittelbare Bassin* von  $\xi$  ist der zusammenhängende Teil des Bassins, welches den Fixpunkt  $\xi$  enthält.

□

Wir nehmen an, dass das unmittelbare Bassin ganz im Innern des Definitionsbereiches von  $f$  liegt, wobei  $f$  stetig differenzierbar ist. Dann ist das unmittelbare Bassin ein offenes Intervall  $]a, b[ \subset D_f$ . Die Randpunkte gehören nicht mehr zum Bassin:  $a, b \notin B(\xi)$ .

Da  $f$  stetig ist, ist  $f([a, b])$  wieder zusammenhängend und damit ein Intervall. Da  $\xi$  ein Fixpunkt von  $f$  ist, ist  $\xi \in f([a, b])$ . Andrerseits ist  $]a, b[$  vollinvariant. Somit ist  $f(]a, b[) \subseteq ]a, b[$ . Wegen der Vollinvarianz des Bassins sind auch  $f(a), f(b) \notin ]a, b[$ . Somit bleibt nur die Möglichkeit  $f(a), f(b) \in \{a, b\}$ .

#### Satz 4.5

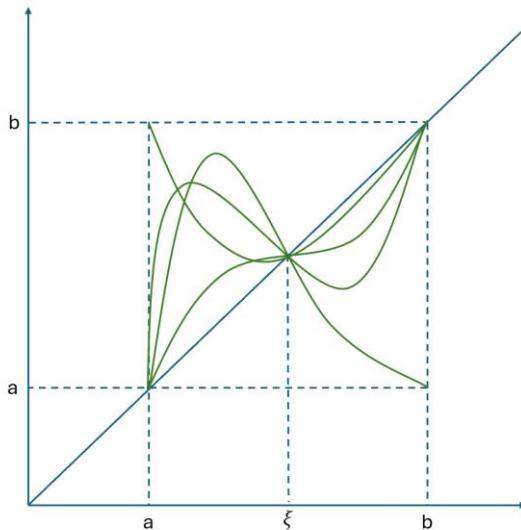
Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion mit einem attraktiven Fixpunkt  $\xi$ . Das Bassin von  $\xi$  sei ganz im Innern des Definitionsbereiches von  $f$  enthalten.

Behauptung:

Das unmittelbare Bassin ist ein offenes Intervall  $]a, b[$ . Die Randpunkte dieses Intervalls werden wieder auf Randpunkte des Intervalls abgebildet.

□

Dieser Satz wird im folgenden Abschnitt nützlich sein. Folgendes Bild zeigt, wie das unmittelbare Bassin aussehen könnte. Es ist eine Kombination der Fälle  $f(a) = a, f(a) = b, f(b) = a, f(b) = b$  und  $f(]a, b[) \subseteq ]a, b[$ .



Das unmittelbare Bassin von  $f$

Die Frage ist jetzt, ob es für das logistische Wachstum für ein festes  $a$  mehrere attraktiven Zyklen gleichzeitig geben kann, so dass man je nach Startpunkt bei der Iteration beim einen oder anderen Zyklus landet. Die Frage ist auch, welches überhaupt geeignete Startpunkte sind, um attraktive Zyklen zu finden?

Diese Frage untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

## 5. Die Rolle des kritischen Punktes

### Definition 5.1

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion. Ein *kritischer Punkt* von  $f$  ist ein Punkt, in welchem die Ableitung von  $f$  verschwindet.

□

Beim logistischen Wachstum ist der kritische Punkt  $\frac{1}{2}$ .

Folgender Satz beantwortet die Frage, wie viele attraktive Zyklen es für einen festen Wert von  $a$  beim logistischen Wachstum geben kann.

### Satz 5.2

Sei  $f$  das logistische Wachstum.

Behauptung: Wenn es bei der Iteration von  $f$  einen attraktiven Zyklus gibt, dann liegt der kritische Punkt in seinem Bassin.

□

Der Beweis ist zwar elementar zugänglich, aber etwas aufwendig.

Als Vorbereitung brauchen wir die sogenannte Schwarz'sche Ableitung (nach dem Mathematiker Hermann Schwarz 1843 – 1921). Diese ist für eine dreimal differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f'(x) \neq 0$  definiert als:

$$Sf(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Im Fall des logistischen Wachstums gilt

$$Sf(x) = -\frac{3}{2} \left( \frac{-2a}{a(1-2x)} \right)^2 = \frac{-6}{(1-2x)^2}$$

Ferner brauchen wir folgendes Lemma:

### Lemma 5.3

Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  zwei dreimal differenzierbare Funktionen mit  $f'(x), g'(x) \neq 0$  auf  $[a, b]$ .

Behauptung:

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot g'(x)^2 + Sg(x)$$

□

Beweis:

$$\begin{aligned} f(g(x))' &= f'(g(x))g'(x) \\ f(g(x))'' &= f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \\ f(g(x))''' &= f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{f(g(x))'''}{f(g(x))'} = \frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))} \cdot g'(x)^2 + \frac{3f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)}$$

Und:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \left( \frac{f(g(x))''}{f(g(x))'} \right)^2 &= -\frac{3}{2} \left( \frac{f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \right)^2 = \\ -\frac{3}{2} \cdot \frac{f''(g(x))^2 g'(x)^4 + 2f''(g(x))f'(g(x))g'(x)^2 g''(x) + f'(g(x))^2 g''(x)^2}{f'(g(x))^2 g'(x)^2} \end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man:

$$\begin{aligned} S(f \circ g)(x) &= \left( \frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))} - \frac{3}{2} \frac{f''(g(x))^2}{f'(g(x))^2} \right) \cdot g'(x)^2 + \left( \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \frac{g''(x)^2}{g'(x)^2} \right) \\ &= Sf(g(x)) \cdot g'(x)^2 + Sg(x) \end{aligned}$$

□

### Lemma 5.4

Sei  $f$  die logistische Wachstumsfunktion und  $g := f^n$ .  $g$  habe einen attraktiven Fixpunkt  $\xi$  mit  $]a, b[$  als unmittelbarem Bassin.

Behauptung:

$g$  besitzt einen kritischen Punkt und dieser liegt in  $]a, b[$ .

□

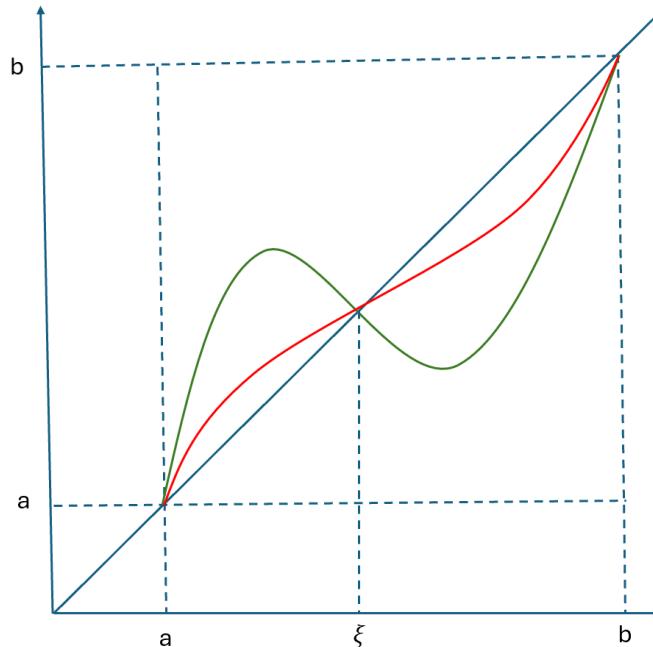
Wenn  $a = 0$  oder  $b = 1$  ist, dann ist der folgende Beweis ebenfalls schlüssig mit kleinen Anpassungen. Wir betrachten also den Fall, bei dem  $]a, b[$  ganz im Innern von  $[0, 1]$  liegt.

Nach Satz 4.5 werden  $a, b$  unter der Funktion  $g$  wieder auf  $a, b$  abgebildet.

Falls  $g(a) = a, g(b) = a$  oder  $g(a) = b, g(b) = b$  gibt es einen Punkt  $c \in ]a, b[$  mit  $g'(c) = 0$  nach dem Satz von Rolle. In diesem Fall gilt die Behauptung.

Übrig bleiben die Fälle  $g(a) = a, g(b) = b$  und  $g(a) = b, g(b) = a$ . Den zweiten Fall können wir auf den ersten zurückführen, indem wir  $g^2$  betrachten. Dann ist  $g^2(a) = a, g^2(b) = b$ . Wenn es einen Punkt  $c \in ]a, b[$  gibt mit  $g^2'(c) = g'(g(c)) \cdot g'(c) = 0$  dann gilt die Behauptung.

Also bleibt der Fall  $g(a) = a, g(b) = b$  zu untersuchen. Das unmittelbare Bassin von  $\xi$  kann folgendermassen aussehen:



Das unmittelbare Bassin von  $\xi$

Im Fall der grünen Kurve gilt die Behauptung. Wir müssen also noch zeigen, dass der rote Fall nicht möglich ist. In diesem Fall gibt es einen Wendepunkt der Kurve  $d \in ]a, b[$  mit:

$$g'(d) > 0, g''(d) = 0, g'''(d) > 0$$

Da  $g''$  in  $d$  ein Minimum hat. Somit gilt auch:

$$Sg(d) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 > 0$$

Nun zeigen wir mit vollständiger Induktion nach  $n$ , dass dies für das logistische Wachstum  $f$  nicht möglich ist.

Verankerung: Für alle  $x \in ]a, b[$  gilt:

$$Sf(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$$

Induktionsschritt:

Sei  $Sf^n(x) < 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ . Dann ist nach Lemma 5.3:

$$Sf^{n+1}(x) = Sf(f^n(x)) \cdot f'^{n+1}(x)^2 + Sf^n(x) < 0$$

Somit ist  $Sg > 0$  nicht möglich und damit ist Lemma 5.4 bewiesen.

□

Beweis von Satz 5.2.

Sei unter den Voraussetzungen des Satzes  $d \in ]a, b[$  der kritische Punkt von  $g$ , welcher nach Lemma 5.4 existiert. Es ist dann:

$$0 = g'(d) = f'(f^{n-1}(d)) \cdot f'(f^{n-2}(d)) \cdots f'(d)$$

Also gilt für mindestens einen der Faktoren  $f'(f^{n-k}(d)) = 0$  und somit ist  $f^{n-k}(d) = c \in ]a, b[$  der kritische Punkt von  $f$  und dieser liegt im unmittelbaren Bassin wegen dessen Vollinvarianz.

□

Dieser Satz hat wichtige Folgerungen. Wenn eine Funktion die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, dann gilt:

### Korollar 5.5

Sei  $f$  das logistische Wachstum.

Behauptung:

- 1) Der kritische Punkt  $c = 0.5$  ist der ideale Startpunkt, um einen attraktiven Zyklus zu finden.
- 2) Es gibt höchstens *einen* attraktiven Zyklus. Alle übrigen Zyklen sind repulsiv.
- 3) Wenn der kritische Punkt bei der Iteration auf einen Repellor fällt, dann gibt es keinen attraktiven Zyklus.

□

1) und 3) folgen direkt aus Satz 5.2.

2) gilt, da  $f$  nur einen kritischen Punkt besitzt und dieser nicht gleichzeitig zu zwei verschiedenen Bassins von attraktiven Zyklen gehören kann.

## 6. Der Fall $a=4$

Falls  $a = 4$  ist die iterierte Funktion beim logistischen Wachstum:

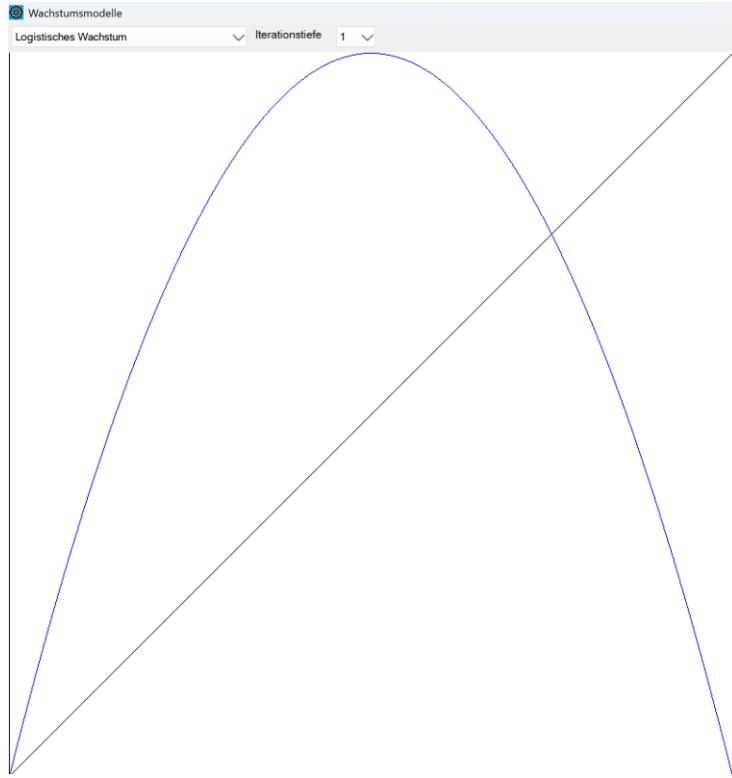
$$f(x) = 4x(1-x)$$

Der kritische Punkt fällt nach zwei Iterationsschritten auf den Nullpunkt:

$$f^2(0.5) = f(1) = 0$$

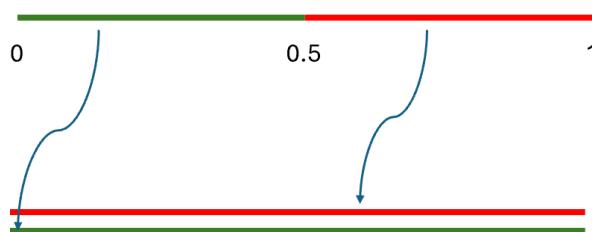
Der Nullpunkt ist aber ein Repellor. Somit kann es in diesem Fall keinen attraktiven Zyklus geben. Was heisst dies jetzt für das Verhalten der Iteration?

Zuerst betrachten wir den Graphen von  $f$ :



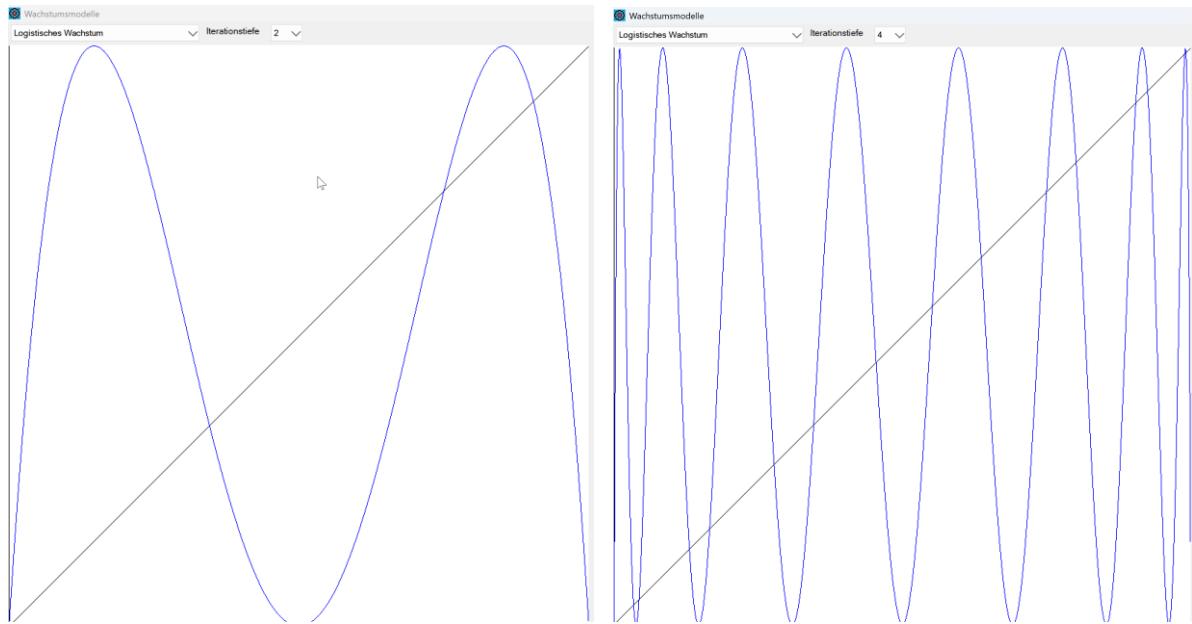
$$f(x) = 4x(1-x)$$

Das Intervall  $[0,0.5]$  wird gestreckt und auf ganz  $[0,1]$  abgebildet. Ebenso das Intervall  $[0.5,1]$ . Die Punkte in  $[0,1]$  werden also durch die Abbildung vollständig durchmischt, ohne dass dabei ein attraktiver Zyklus entsteht.



Durchmischung der Punkte in  $[0,1]$

Im Graphen sehen wir, dass  $f$  einen repulsiven Fixpunkt hat. Wenn wir Zyklen von  $f$  suchen, müssen wir die Fixpunkte von  $f^n$  untersuchen. Bei jedem Iterationsschritt wird das Intervall  $[0,1]$  halbiert, jede Hälfte wieder auf die volle Intervalllänge gestreckt und dann auf das Intervall gelegt. Das führt beim Graphen zu folgenden Bildern:



Links der Graph von  $f^2$ , rechts von  $f^4$

Links sieht man 4 Fixpunkte, zwei davon gehören zu den Fixpunkten von  $f$  und die anderen beiden bilden einen 2-er Zyklus. Sieht man 16 Fixpunkte. Sie gehören zu den Fixpunkten und 2-er Zyklen von  $f^2$ . Dann hat man offenbar drei verschiedene 4-er Zyklen von  $f$ .

Offenbar gibt es Zyklen für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , welche das Intervall  $[0,1]$  immer dichter füllen. Da die Tangentensteigung in den Schnittpunkten mit der  $45^\circ$ -Geraden im Betrag immer grösser als 1 ist, sind sämtliche Zyklen repulsiv.

### Satz 6.1

Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$ .

Behauptung:

- 1) Die Funktion  $f^n$  hat im Intervall  $[0,1]$  genau  $2^n$  Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden.
- 2) Für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es genau  $2^n$  periodische Punkte von  $f$ .

□

### Beweis

Zuerst stellen wir fest: 1)  $\Leftrightarrow$  2)

Nun beweisen wir 1) mit vollständiger Induktion.

Verankerung:  $f$  hat im Intervall  $[0,1]$  genau ein Maximum mit dem Funktionswert 1 und zwei Minima mit dem Funktionswert 0 und ist stetig.  $\Rightarrow f$  hat zwei Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden.

Induktionsannahme:  $f^n$  hat im Intervall  $[0,1]$  genau  $2^n$  Maxima mit dem Funktionswert 1 und  $2^n + 1$  Minima mit dem Funktionswert 0.  $\Rightarrow f$  hat  $2^n$  Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden.

Dann betrachten wir  $f^{n+1}$ . Wegen der vorhin besprochenen Faltung gilt:

Wenn  $x \in [0,0.5]$ , dann ist  $f(x) \in [0,1]$ . Somit hat  $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$  im Intervall  $[0,0.5]$  genau  $2^n$  Maxima mit dem Funktionswert 1 und  $2^n + 1$  Minima mit dem Funktionswert 0. Ebenso wenn  $x \in [0.5,1]$  ist  $f(x) \in [0,1]$ . Somit hat  $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$  im Intervall  $[0.5,1]$  genau  $2^n$  Maxima

mit dem Funktionswert 1 und  $2^n + 1$  Minima mit dem Funktionswert 0. Nun haben wir das Minimum an der Intervallgrenze bei  $x = 0.5$  doppelt gezählt. Somit hat  $f^{n+1}$  im Intervall  $[0.5, 1]$  genau  $2 \cdot 2^n$  Maxima mit dem Funktionswert 1 und  $2 \cdot 2^n + 1$  Minima mit dem Funktionswert 0.  $\Rightarrow f^{n+1}$  hat  $2^{n+1}$  Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden.

□

Wir machen nun fünf Experimente mit dem Simulator. Im Menüpunkt «Wachstumsmodelle – Zweidimensional» bewegt man sich im Quadrat  $[0,1] \times [0,1]$ . Ausgehend von einem Startpunkt  $(x_1, y_1)$  wird der nächste Punkt in jeder Komponente nach dem logistischen Wachstum mit  $a = 4$  berechnet, also:

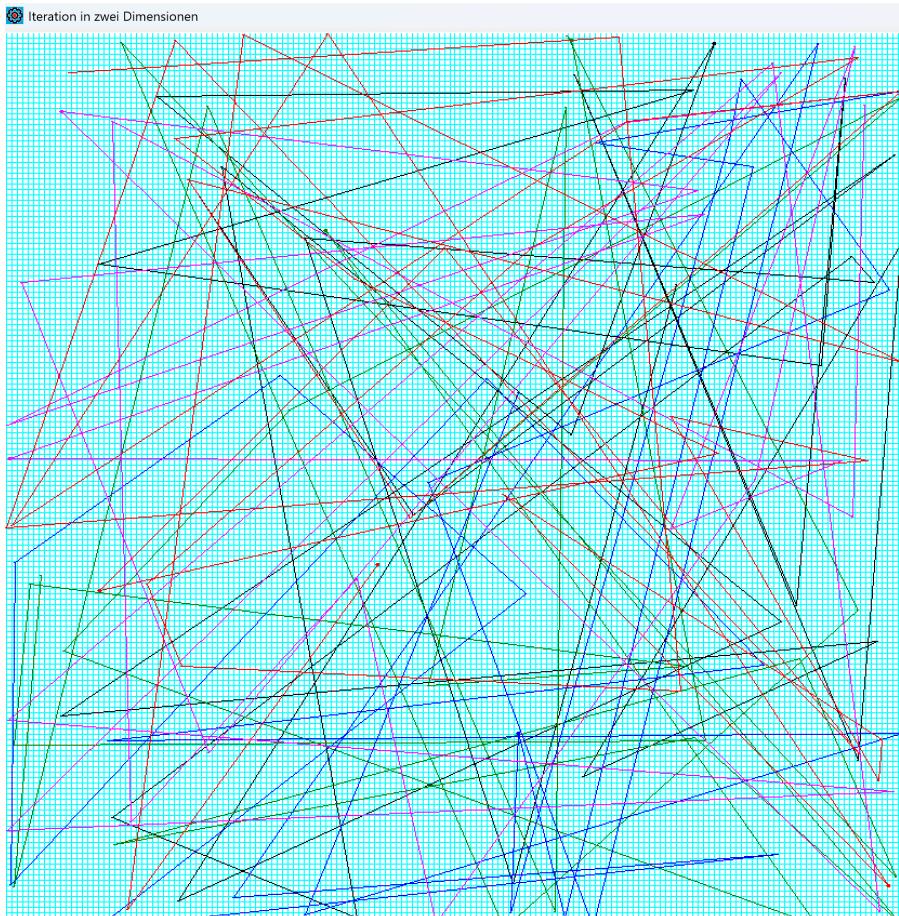
$$(x_{n+1}, y_{n+1}) := (4x_n(1 - x_n), 4y_n(1 - y_n))$$

Dann werden die beiden Punkte mit einer geraden Linie verbunden. Man sieht also den «Orbit» des Startpunktes bei der Iteration.

Als erstes untersuchen wir die Option «Sensitivität» im Fenster des Simulators. Wir wählen folgende fünf Startpunkte und zeichnen die ersten 30 Schritte des Orbits. Jedes Experiment hat eine andere Farbe. Dabei stellen wir fest, dass dieser Orbit sensitiv auf minime Änderungen des Startwertes reagiert.

Startpunkt x-Koordinate	Startpunkt y-Koordinate	Farbe des Orbits
0.414	0.407	schwarz
0.4140000001	0.4070000001	grün
0.41400000011	0.40700000011	blau
0.414000000111	0.407000000111	violett
0.4140000001111	0.4070000001111	rot

Hier ist das Resultat:

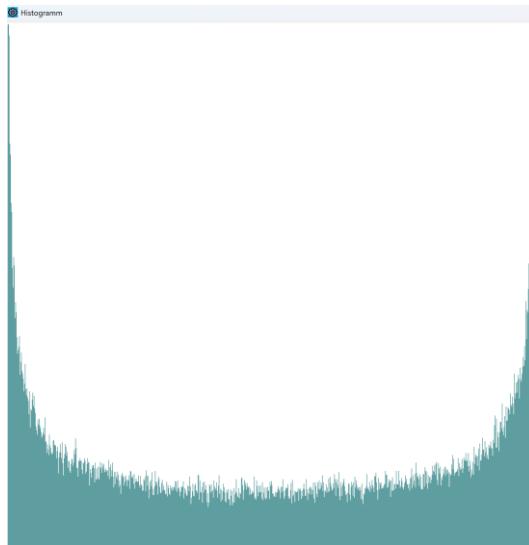


Die fünf Experimente

Der Startpunkt ist immer dieselbe Zelle. Im Simulator hat das Diagramm 600x600 Pixel und die Zellengröße ist 5x5 Pixel. Es gibt also in einer Richtung 120 Zellen. Bei einer Intervallbreite von 1 beim logistischen Wachstum, entspricht das einer Breite von  $\Delta x \approx 0.0083$ .

Stellen wir uns einen Experimentator vor, welcher das hier vorliegende dynamische System untersucht. Er kennt das Bewegungsgesetz des dynamischen Systems (also das logistische Wachstum in jeder Komponente) nicht, aber möchte es herausfinden. Sein Messgerät hat eine Genauigkeit von etwa 0.01 Einheiten. Beim Setzen des Startpunktes können Fehler in diesem Bereich auftreten. Wenn er obige fünf Experimente durchführt, dann wählt er aus seiner Sicht immer denselben Startpunkt. Bei jedem Experiment verläuft aber der Orbit völlig anders. Unser Experimentator würde zum Schluss kommen, dass er es mit einer zufälligen Bewegung zu tun hat.

Bei einer zufälligen Bewegung würde ein Histogramm weitere Informationen liefern. Der Simulator bietet dies im Menüpunkt «Wachstumsmodelle – Histogramm» an: Das Intervall  $[0,1]$  wird in so viele Teile geteilt, wie der Anzeigebereich Pixel hat. Dann werden die Anzahl Treffer pro Teil aufsummiert und als Balken dargestellt.



Histogramm für das logistische Wachstum

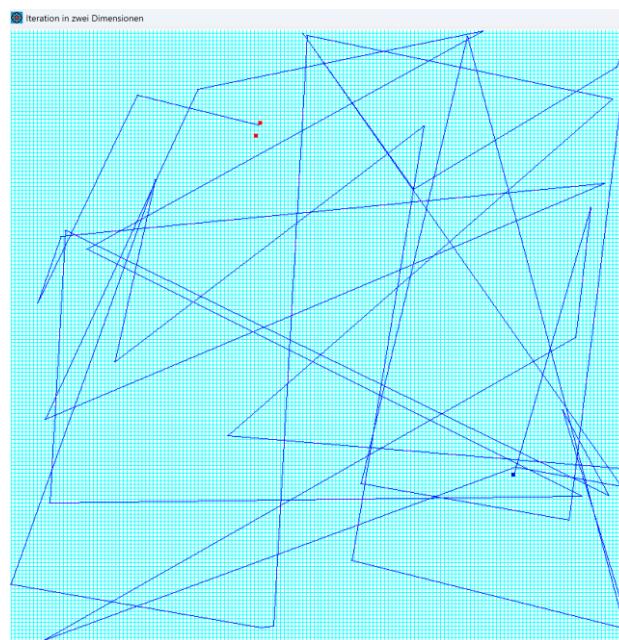
Die Kurve im Histogramm ist nicht eine Gleichverteilung. Wir werden in Kürze sehen, warum die Verteilfunktion  $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$  ist.

Nun hat der Simulator gewisse Fähigkeiten, die wir erst später verstehen werden. Das zeigt das nächste Experiment. Dabei wählen wir im Fenster des Simulators die Option «Transitivität».

Wir wählen einen beliebigen Startpunkt mit der Maus und merken uns seine Koordinaten. Zum Beispiel (0.811, 0.280). Anschliessend wählen wir mit der Maus einen beliebigen Endpunkt. Nun hat der Simulator die Fähigkeit, den Startpunkt minim so anzupassen, dass man im Laufe der Iteration dem frei gewählten Endpunkt beliebig nahekommt. Im folgenden Bild war der neue Startpunkt

$$(0.8109999490120963488132810481, 0.2799996838249315863022343866)$$

Der Startpunkt ist im Bild bau gezeichnet, der Endpunkt rot. Dann lassen wir die Iteration laufen. Hier ist das Resultat:



Nach einigen Schritten landet man nahe beim vorgegebenen Endpunkt

Dieses Experiment zeigt, dass offenbar ausgehend von einem beliebigen Startpunkt jeder vorgegebene Endpunkt beinahe erreicht werden kann, wenn man den Startpunkt nur ein klein wenig ändert.

Nun versuchen wir, das logistische Wachstum im Fall  $a = 4$  noch auf andere Weise «in den Griff» zu bekommen. Wir notieren die einzelnen Werte der Iteration, also die generierte Folge der  $x_n$  und machen folgendes «Protokoll»:

$$p(x_n) := \begin{cases} 0, & x_n \in [0,0.5[ \\ 1, & x_n \in [0.5,1] \end{cases}$$

Beim Startpunkt  $x_1 = 0.314159$  liefert der Simulator dann folgende Werte:

x-Werte	Log
0.314159	0
0.8618524908	1
0.4762510993	0
0.9977439588	1
0.0090038055	0
0.0356909483	0
0.1376684181	0
0.4748632992	0
0.9974725850	1
0.0100841083	0
0.0399296762	0
0.1533411889	0
0.5193106749	1
0.9985083913	1
0.0059575351	0
0.0236881715	0
0.0925081682	0
0.3358016280	0
0.8921555786	1
0.3848560085	0
0.9469674449	1
0.2008804127	0
0.6421098900	1
0.9192191165	1

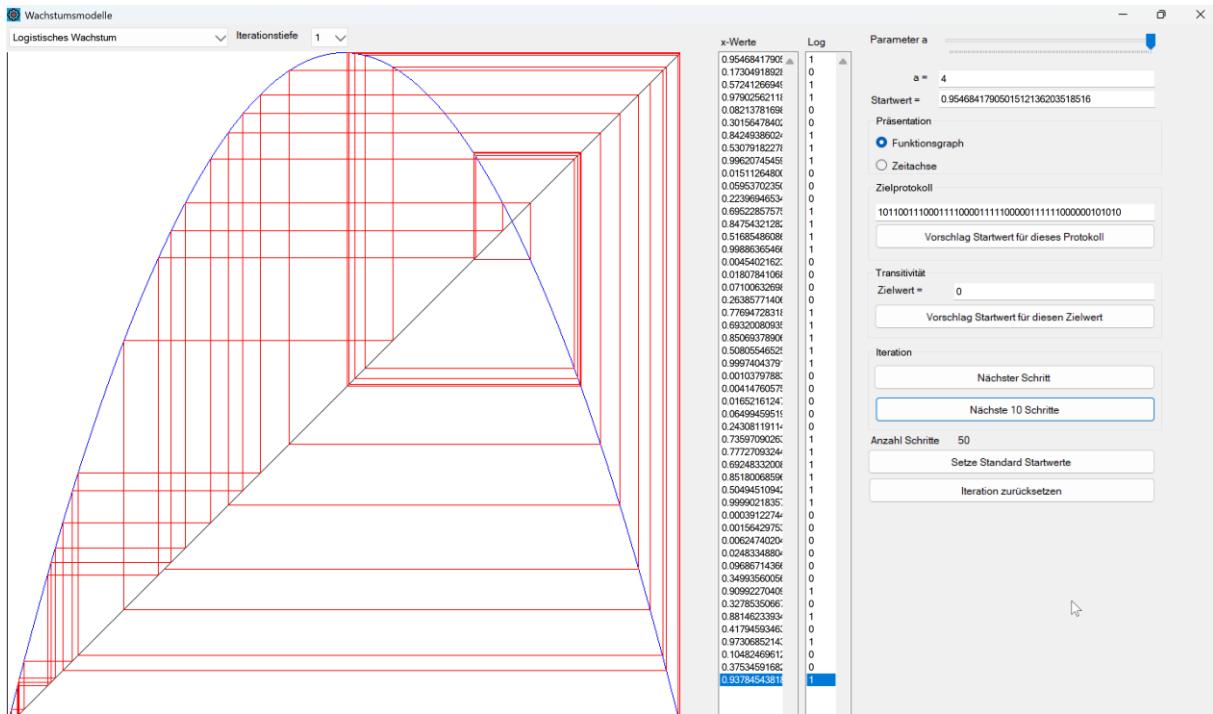
Protokoll des Startpunktes  $x_1 = 0.314159$  in der Spalte «log»

Nun hat der Simulator eine weitere Fähigkeit. Wir können nämlich ein beliebiges Protokoll vorgeben und dann findet der Simulator einen Startpunkt, welcher dieses Protokoll liefert. Im folgenden Beispiel wählen wir als Zielprotokoll die Folge:

10110011100011110000111110000011111000000101010

Der Simulator schlägt dann als Startwert vor:  $x_1 = 0.9546841790501512136203518516$

Resultat:



Der Startwert liefert das vorgegebene Protokoll

Mit anderen Worten: Beim logistischen Wachstum ist im Fall  $a = 4$  jedes Protokoll möglich, wenn man den Startpunkt geeignet wählt.

Wie der Simulator «das macht», werden wir später verstehen.

## 7. Zyklen im Fall $a=4$

Wir betrachten wieder das logistische Wachstum  $f$  mit  $a = 4$ . In Satz 6.1 haben wir gesehen, dass die Iterierte  $f^n$  genau  $2^n$  Fixpunkte hat. Somit gehören genauso viele Punkte zu einem Zyklus. Da ein Punkt nicht gleichzeitig zu zwei verschiedenen Zyklen gehören kann, sind alle diese Zyklen *disjunkt*.

Ferner stellen wir fest: Wenn  $\xi$  zu einem  $p$ -Zyklus gehört, dann ist  $f^n(\xi) = \xi \Leftrightarrow n$  ist ein Vielfaches von  $p$ .

Wenn  $n$  eine Primzahl ist, dann gibt es somit für die Fixpunkte von  $f^n$  nur die Möglichkeit, dass sie entweder ein Fixpunkt von  $f$  sind (davon gibt es zwei) oder dann zu einem «echten» Zyklus der Länge  $n$  gehören. Wie viele solche verschiedenen  $n$ -Zyklen gibt es dann? Insgesamt gehören  $2^n - 2$  Punkte zu den echten Zyklen und jeder davon hat  $n$  Punkte. Somit muss  $n$  ein Teiler von  $2^n - 2$  sein und es gibt  $(2^n - 2)/n$  verschiedene Zyklen der Länge  $n$ .

### Satz 7.1

Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . Sei ferner  $n$  eine Primzahl.

Behauptung:

- 1)  $n$  ist ein Teiler von  $2^n - 2$
- 2) Es gibt  $(2^n - 2)/n$  verschiedene Zyklen der Länge  $n$

□

Bemerkung: Dass  $n$  ein Teiler von  $2^n - 2$  ist, folgt auch aus dem kleinen Satz von Fermat.

### Beispiel

Sei  $n = 3$ . Dann ist  $2^3 - 2 = 6$  und somit gibt es zwei verschiedene 3-Zyklen.

□

Wenn  $p \neq q$  zwei Primzahlen sind, dann gibt es  $(2^p - 2)/p$  Zyklen der Länge  $p$  und analog  $(2^q - 2)/q$  Zyklen der Länge  $q$ . Das liefert  $2^p - 2$  Fixpunkte für die  $p$ -Zyklen und  $2^q - 2$  Fixpunkte für die  $q$ -Zyklen. Zusammen mit den beiden Fixpunkten von  $f$  liefert das  $2^p + 2^q - 2$  Fixpunkte.

Somit bleiben  $2^n - 2^p - 2^q + 2$  Fixpunkte übrig für die «echten»  $n$ -Zyklen. Andere Zyklen sind nicht möglich, denn wenn  $f^n(\xi) = \xi$  und  $\xi$  zu einem  $k$ -Zyklus gehören würde mit  $k < n$ , dann müsste  $n$  ein Vielfaches von  $k$  sein. Es gilt der

### Satz 7.2

Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . Seien  $p \neq q$  Primzahlen und  $n = pq$ .

Behauptung:

- 1)  $n$  ist ein Teiler von  $2^n - 2^p - 2^q + 2$
- 2) Es gibt genau  $(2^n - 2^p - 2^q + 2)/n$  Zyklen der Länge  $n$

□

### Beispiel

$p = 3, q = 5, n = 15$ .

$2^{15} - 2^3 - 2^5 + 2 = 32730$  und es gibt 2182 verschiedene Zyklen der Länge 15.

Ferner gibt es 2 verschiedene Zyklen der Länge 3 und 6 verschiedene Zyklen der Länge 5. Zusammen mit den beiden Fixpunkten von  $f$  macht das  $15 \cdot 2182 + 6 + 30 + 2 = 32768 = 2^{15}$  Fixpunkte von  $f^{15}$ .

□

Im Abschnitt 11 werden wir sämtliche Zyklen explizit bestimmen können.

## 8. Chaotische dynamische Systeme

Zuerst wollen wir, gestützt auf die bisherigen Erfahrungen, etwas allgemeiner formulieren, was man unter einem dynamischen System versteht. Wir beschränken uns auf den diskreten Fall. Bei einem diskreten dynamischen System hat man einen Zustandsraum  $X$ , in welchem jeder Punkt den Zustand des Systems eindeutig charakterisiert. Beim logistischen Wachstum war  $X = [0,1]$ .

Dann gehorcht das dynamische System einem *Bewegungsgesetz*. Das ist sehr wichtig, weil man annehmen könnte, dass chaotisches Verhalten – wie immer man das definiert – dadurch entsteht, dass ein Bewegungsgesetz fehlt oder das System nur ungefähr beschreibt. Das ist aber nicht der Fall! Auch chaotische Systeme gehorchen einem präzisen Bewegungsgesetz!

Dieses Gesetz ist im Allgemeinen gegeben durch eine Funktion  $f: X \rightarrow X$ . Das System geht durch  $f$  von einem Zustand in den nächsten über. Beim logistischen Wachstum war  $f(x) = ax(1-x)$  mit  $a \in ]0,4]$ .

Bei einem diskreten System geschieht dieser Übergang nicht kontinuierlich, sondern schrittweise. Man zählt also die Schrittnummer in einer Indexmenge  $I$ . In der Regel (und auch beim logistischen Wachstum) ist diese Indexmenge  $I = \mathbb{N}$ .

Somit ist ein dynamisches System ein Tripel  $(X, f, I)$ .

Beim logistischen Wachstum haben wir im Fall  $\alpha = 4$  festgestellt, dass sich das System in gewisser Weise chaotisch oder pseudozufällig verhält. Wir wollen das präzisieren.

Angenommen, man hat zwei Intervalle  $U, V \subset X$ ,  $U \cap V = \emptyset$  und es gebe Bahnen  $(x_i)$ , welche ganz in  $U \cup V$  verlaufen. Für eine solche Bahn erstellt man ein Protokoll wie folgt:

$$p(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \in U \\ 1, & x_i \in V \end{cases}$$

Beim logistischen Wachstum war  $U = [0, 0.5[$ ,  $V = [0.5, 1]$ . Damit haben wir eine erste einfache Definition, welche chaotisches Verhalten spezifiziert.

### Definition 8.1

Ein dynamisches System heisst *chaotisch im Sinne des Münzwurfs*, wenn es zwei Mengen  $U$  und  $V$  wie eingangs beschrieben gibt, so dass jede 0-1 Folge als Protokoll einer Bahn vorkommt, wenn man den Startwert entsprechend wählt.

□



Es gibt verschiedene weitere Definitionen, welche teilweise äquivalent sind. Die wohl am meisten verwendete Definition stammt aus dem Jahr 1989 und geht auf den Mathematiker *Robert Devaney* (1948 -..) zurück.

### Definition 8.2

Ein dynamisches System heisst *chaotisch im Sinne von Devaney*, falls es folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1) Es ist *sensitiv* abhängig von den Anfangsbedingungen. Das heisst, zwei beliebig nahe beieinander liegende Startwerte  $x_1, x_2 \in X$  entfernen sich im Laufe der Iteration im Zustandsraum  $X$  beliebig weit auseinander.
- 2) Es ist *transitiv*. Das heisst, wenn ein beliebiger Startwert  $x_0 \in X$  und ein beliebiger Zielwert  $z \in X$  gegeben sind, dann gibt es einen alternativen Startwert in einer beliebig kleinen Umgebung von  $x_0$  der im Laufe der Bewegung dem Zielwert  $z$  beliebig nahekommt.
- 3) Die periodischen Orbits liegen *dicht* im Zustandsraum und sind alle repulsiv.

□

Einen Zusammenhang zwischen «*chaotisch im Sinne des Münzwurfs*» und der Definition im Sinne von Devaney wird in [2] hergestellt.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel eines dynamischen Systems, bei dem die chaotischen Eigenschaften einfach nachzuweisen sind.

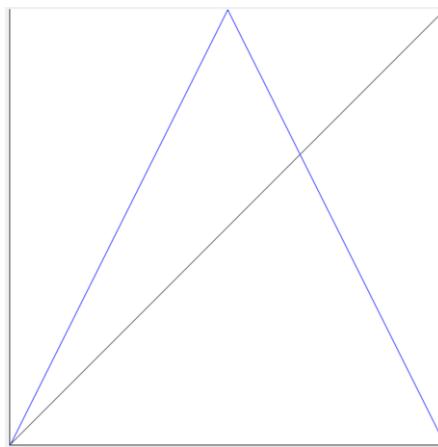
## 9. Die Zeltabbildung

### Definition 9.1

Wir betrachten das Intervall  $[0,1]$  und definieren die *Zeltabbildung* als:

$$z: [0,1] \rightarrow [0,1]; z(u) = \begin{cases} 2u, & u \in [0,0.5[ \\ 2(1-u), & u \in [0.5,1] \end{cases}$$

□



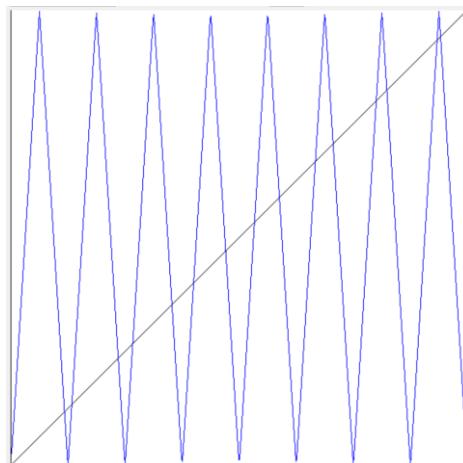
Graph der Zeltabbildung über dem Intervall  $[0,1]$  erstellt durch den «Simulator»

Die Zeltabbildung schneidet die  $45^\circ$  Gerade in den Punkten 0 und  $2/3$ . Sie hat also die Fixpunkte

$$\xi_1 = 0 \text{ und } \xi_2 = 2/3$$

In diesen Punkten ist  $|f'(\xi_1)| = |f'(\xi_2)| = 2 > 1$  und beide Punkte sind repulsiv.

Wenn man die Zeltabbildung iteriert, wird das Einheitsintervall bei jeder Iteration gestreckt und zusammengefaltet. Bei vier Iterationen zum Beispiel hat man den Graphen:



Graph der vierfach iterierten Zeltabbildung  $f^4: [0,1] \rightarrow [0,1]$

Die oben dargestellte Funktion  $f^4$  hat insgesamt 16 Fixpunkte (Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden) und sämtliche sind repulsiv (die Ableitung an allen Fixpunktstellen ist  $> 1$ ).

Nun untersuchen wir chaotische Eigenschaften der Zeltabbildung.

### **Lemma 9.2**

Behauptung: Die Zeltabbildung ist sensitiv.

□

Beweis: Wenn wir eine Zahl  $x \in [0,1]$  als Dualbruch darstellen, dann sehen wir die Wirkung der Zeltabbildung, insbesondere die Multiplikation mit der Dualzahl  $10_2$ . Es gilt in dieser Darstellung und wenn  $s_i \in \{0,1\}$  die i-te duale Ziffer nach dem Komma ist:

$$f: \begin{cases} 0,0s_2s_3s_4 \dots \mapsto 0,s_2s_3s_4 \dots \\ 0,1s_2s_3s_4 \dots \mapsto 0,\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4 \dots \end{cases}$$

Dabei bedeuten  $\bar{s}_i$  das duale Komplement von  $s_i$ .

Sei nun ein Startwert in Dualdarstellung gegeben:

$$x_1 = 0.s_1s_2s_3s_4 \dots$$

Wir schneiden dann diesen Dualbruch nach einer genügend grossen Anzahl Stellen ab (oder ergänzen fehlende Stellen mit «0»), damit der so geänderte Startwert nahe genug beim Ursprünglichen ist. Wenn darin eine ungerade Zahl «1» vorkommt, wählen wir  $x'_1 = 0.s_1s_2s_3s_4..00\dots s_1s_2s_3s_4 \dots$  Das heisst, wir hängen dann nochmals die Ziffern von  $x_1$  an den Schluss an. Bei jedem Iterationsschritt rücken diese Stellen um eine Position nach links, wobei bei jeder auftretenden «1» an erster Position hinter dem Komma das duale Komplement der restlichen Stellen gebildet wird. Da dies eine ungerade Anzahl mal vorkommt, steht nach entsprechend vielen Iterationsschritten die Zahl da:  $x_n = 0.\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3 \dots$ , also eine Zahl mit maximalem Abstand zu  $x_1$ .

Analog gehen wir vor, wenn der abgeschnittene und allenfalls mit «0» ergänzte Dualbruch von  $x_1$  eine gerade Anzahl «1» enthält, und setzen  $x'_1 = 0.s_1s_2s_3s_4..00\dots \bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4 \dots$  mit demselben Resultat.

□

### **Lemma 9.3**

Behauptung: Die Zeltabbildung ist transitiv.

□

Beweis:

Wie beim Nachweis der Sensitivität gehen wir von einem Startwert  $x_1 = 0.s_1s_2s_3s_4 \dots$  und einem Zielwert  $z_1 = 0.t_1t_2t_3 \dots$  aus, beide in Dualbruchdarstellung. Wir schneiden den Dualbruch von  $x_1$  wieder nach genügend vielen Stellen ab (oder ergänzen fehlende Stellen mit «0»), damit der geänderte Startwert nahe genug beim Ursprünglichen ist. Wenn der verbleibende Dualbruch eine gerade Anzahl «1» enthält, hängen wir die Stellen des Zielwertes hinten an diesen an. Wenn die Anzahl «1» ungerade ist, dann hängen wir das duale Komplement hinten an. In beiden Fällen erhalten wir nach genügend vielen Iterationsschritten  $z_n = 0.t_1t_2t_3 \dots$

□

Es ist leicht einzusehen, dass die Zyklen durch periodische Dualbrüche dargestellt werden und dass diese dicht in  $[0,1]$  liegen. Somit gilt:

#### Satz 9.4

Behauptung: Die Zeltabbildung ist chaotisch im Sinne von Devaney.

□

Für die Zeltabbildung definieren wir ein Protokoll  $p$  nach der Vorschrift:

$$p(x_n) = \begin{cases} 0, & x_n \in [0,0.5] \\ 1, & x_n \in [0.5,1] \end{cases}$$

Für jedes vorgegebene Protokoll kann der zugehörige Startwert, der dieses Protokoll liefert, konstruiert werden: Man nimmt das vorgegebene Protokoll als Startwert in Dualdarstellung und iteriert diesen schrittweise. Wenn das so entstehende Protokoll mit dem vorgegebenen übereinstimmt, lässt man dieses Bit im Startwert stehen. Sonst ersetzt man es durch sein Komplement. Somit gilt:

#### Satz 9.5

Behauptung: Die Zeltabbildung ist chaotisch im Sinne des Münzwurfs.

□

## 10. Konjugierte der Zeltabbildung

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gesehen, dass die Zeltabbildung chaotisch ist sowohl im Sinne des Münzwurfs wie auch im Sinne von Devaney.

Nun betrachten wir folgende Transformation:

$$T: [0,1] \rightarrow [0,1], u \in [0,1] \mapsto x = T(u) = \sin^2 \frac{\pi}{2} u \in [0,1]$$

$T$  ist bijektiv, stetig differenzierbar und ebenso ist  $T^{-1}$  stetig differenzierbar.

#### Satz 10.1

Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$  und  $z$  die Zeltabbildung.  $T$  sei obige Transformation.

Behauptung: Die Abbildungen  $f$  und  $z$  sind *konjugiert*. Das heisst, für  $x \in [0,1]$  gilt:  $f \equiv T \circ z \circ T^{-1}$ .

□

Beweis: Für  $x \in [0,1]$  ist auch  $u \in [0,1]$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} f(T(u)) &= f\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} u\right) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} u \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} u\right) = (2 \sin \frac{\pi}{2} u \cdot \cos \frac{\pi}{2} u)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u \\ &= \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u, & u \in [0,0.5[ \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2(1-u), & u \in [0.5,1] \end{cases} = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot 2u \\ \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2u\right) \end{cases} = T(z(u)) \end{aligned}$$

Beachte:  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

□

Eine Konjugierte der Zeltabbildung übernimmt deren Eigenschaften hinsichtlich periodischem und chaotischem Verhalten.

### Satz 10.2

Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$  und  $z$  die Zeltabbildung.  $T$  sei obige Transformation.

Behauptung:

- 1)  $f^n = T \circ z^n \circ T^{-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Das heisst,  $f^n$  ist eine Konjugierte von  $z^n$
- 2)  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  ist ein  $k$ -Zyklus von  $z \Leftrightarrow \{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)\}$  ist ein  $k$ -Zyklus von  $f$
- 3) Der  $k$ -Zyklus von  $z$  und der entsprechende  $k$ -Zyklus von  $f$  haben denselben Multiplikator

□

Beweis:

$$1) f^n = (T \circ z \circ T^{-1})^n = T \circ z \circ T^{-1} \circ T \circ z \circ T^{-1} \circ \dots \circ T \circ z \circ T^{-1} = T \circ z^n \circ T^{-1}$$

$$2) u \in [0, 1] \text{ ist ein Fixpunkt von } z^k \Leftrightarrow T(u) \text{ ist ein Fixpunkt von } f^k:$$

$$\begin{aligned} " \Rightarrow ": z^k(u) &= u \Rightarrow f^k(T(u)) = (T \circ z^{k \circ T^{-1}})(T(u)) = T(z^k(u)) = T(u) \\ " \Leftarrow ": T(z^k(u)) &= T(u) \Rightarrow z^k(u) = u \end{aligned}$$

3) Sei  $\xi = T(u)$  für ein  $u \in ]0, 1[$  und  $u$  ein Fixpunkt von  $z^k$ , also ein Zyklus von  $z$  (der Fall  $u = 0$  und  $u = 1$  ist trivial). Es gilt also  $z^k(u) = u$ . Dann ist  $\xi$  ein Fixpunkt von  $f^k$ :  $f^k(\xi) = \xi$ .

Beachte ferner:  $T(T^{-1}(\xi)) = \xi$ , also  $[T(T^{-1}(\xi))]' = T'(u) \cdot T^{-1}'(\xi) = 1$ ,  $u \in ]0, 1[$  nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrabbildung.

Dann gilt für die Multiplikatoren nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \lambda_\xi &= |f^k'(\xi)| = \left| (T \circ z^{k \circ T^{-1}})'(\xi) \right| = \left| T'(z^k(T^{-1}(\xi))) \cdot z^{k'}(T^{-1}(\xi)) \cdot T^{-1}'(\xi) \right| = \\ &\quad \left| T'(z^k(u)) \cdot z^{k'}(u) \cdot T^{-1}'(\xi) \right| = \left| T'(u) \cdot z^{k'}(u) \cdot T^{-1}'(\xi) \right| = |z^{k'}(u)| = \lambda_u \end{aligned}$$

□

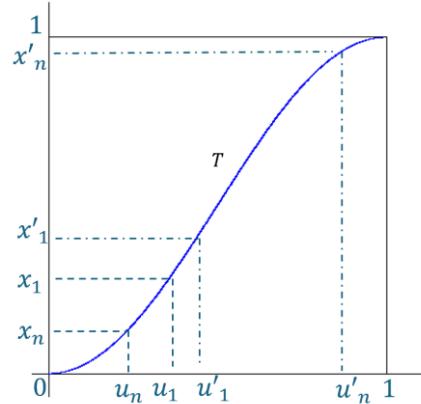
### Satz 10.3

Behauptung: Das logistische Wachstum ist für  $a = 4$  chaotisch im Sinne von Devaney.

□

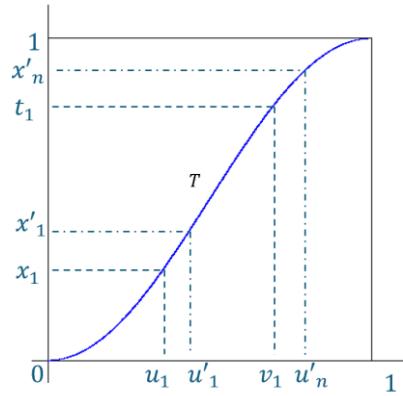
Beweis:

Sensitivität: Wir betrachten folgendes Bild. Auf der y-Achse sind die Iterationswerte des logistischen Wachstums abgebildet und auf der x-Achse die entsprechenden Werte der Zeltabbildung.  $T$  ist immer die Transformation, welche wir am Beginn des Abschnittes definiert haben.



Der Startwert  $x_1$  entspricht einem Startwert  $u_1$ . Dann gibt es bei der Zeltabbildung einen Startwert  $u'_1$ , so dass nach  $n$  Iterationsschritten der Abstand zwischen  $u_n$  und  $u'_n$  beliebig gross werden. Dann wird auch der Abstand zwischen  $x_n$  und  $x'_n$  beliebig gross.

Transitivität: Wir betrachten das Bild:



Vorgegeben ist für das logistische Wachstum ein Startwert  $x_1$  und ein Zielwert  $t_1$ . Die entsprechenden Werte für die Zeltabbildung sind  $u_1$  und  $v_1$ . Dann gibt es wegen der Transitivität der Zeltabbildung einen leicht abgeänderten Startwert  $u'_1$ , so dass nach  $n$  Iterationsschritten  $u'_n$  dem Zielwert  $v_1$  beliebig nahe kommt. Der entsprechende Startwert für das logistische Wachstum ist  $x'_1$  und  $x'_n$  kommt  $t_1$  beliebig nahe.

Ferner ist auf den Bildern leicht zu sehen, dass – wenn die periodischen Punkte bei der Zeltabbildung dicht im Intervall  $[0, 1]$  liegen – auch die periodischen Punkte beim logistischen Wachstum dicht in diesem Intervall liegen. Wegen Satz 10.2, 3) sind auch die Zyklen des logistischen Wachstums alle repulsiv.

□

#### Satz 10.4

Behauptung: Das logistische Wachstum ist für  $a = 4$  chaotisch im Sinne des Münzwurfs.

□

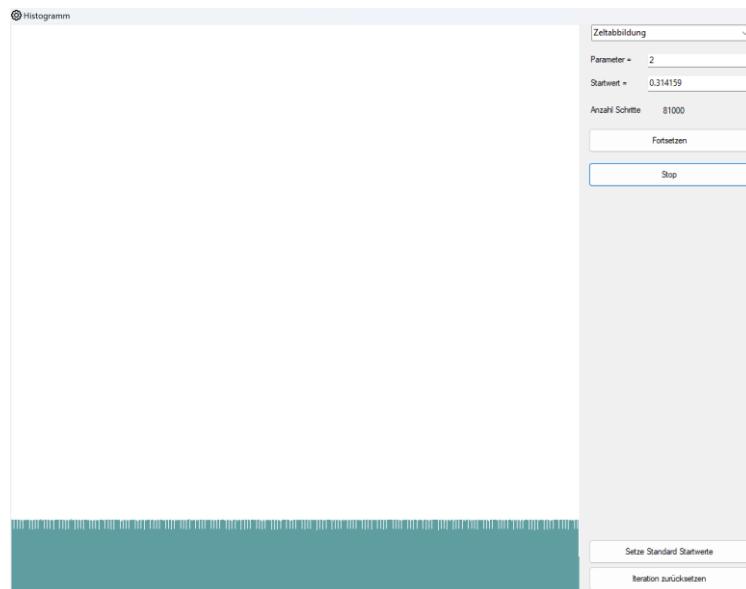
Beweis: Man kann leicht kontrollieren, dass das Protokoll der Zeltabbildung mit dem Protokoll der logistischen Abbildung übereinstimmt. Für die Zeltabbildung kann das Protokoll aber beliebig vorgegeben werden. Die Transformation  $T$  liefert dann den entsprechenden Startpunkt für das logistische Wachstum, welcher das vorgegebene Protokoll liefert.

□

Der Simulator «arbeitet» genau gemäss den im Beweis von Satz 10.1 – 10.4 verwendeten Methoden, um Startpunkte für vorgegebene Protokolle zu finden, oder um die Sensitivität und Transitivität des logistischen Wachstums nachzuweisen. Eine detaillierte Beschreibung findet man in der mathematischen Dokumentation zum Simulator.

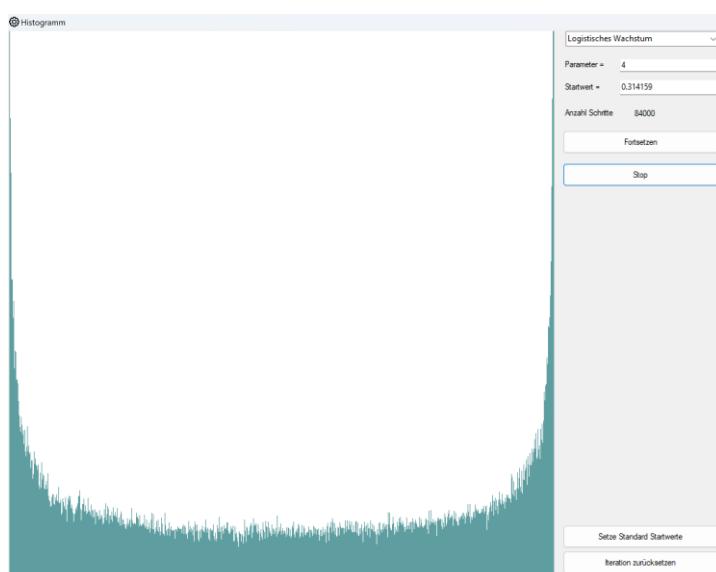
Zuletzt wollen wir noch die Form des Histogramms diskutieren, welches wir beim logistischen Wachstum für  $a = 4$  angetroffen haben.

Bei der Zeltabbildung ist es auf Grund der Dualdarstellung der Zahlen klar, dass die Verteilung der Iterationswerte in einem Histogramm gleichverteilt ist. Das bestätigt auch ein Experiment mit dem Simulator.



Verteilung der getroffenen Intervalle bei der Zeltabbildung nach 81'000 Schritten

Bei der logistischen Abbildung haben wir folgendes Bild angetroffen:



Histogramm des logistischen Wachstums nach 84'000 Schritten

Ausgehend von der gleichverteilten Zeltabbildung ist diese Verteilung ein Effekt der Transformation zum logistischen Wachstum gegeben durch  $x = T(u) = \sin^2 \frac{\pi}{2} u$ :

Wenn  $p(x)$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das logistische Wachstum ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Iterationswert in ein Intervall  $\Delta x$  fällt, ungefähr  $p(x)\Delta x$ . Das ist aber gleich der Wahrscheinlichkeit, dass  $u = T^{-1}(x)$  in das entsprechende Intervall  $\Delta u$  fällt. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber gerade  $\Delta u$ , weil wir bei der Zeltabbildung auf dem Intervall  $[0,1]$  eine Gleichverteilung haben. Es ist also  $p(x)\Delta x \approx \Delta u$ . Im Grenzwert gilt:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = T'^{-1}(u) = \frac{1}{T'(u)} = \frac{2}{\pi \sin(\pi u)}$$

Mit  $u = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$  erhalten wir  $p(x) = \frac{2}{\pi \sin(2 \arcsin \sqrt{x})} = \frac{1}{\pi \sqrt{x} \sqrt{1-x}}$ .

Das erklärt die Symmetrie des Histogramms des logistischen Wachstums bezüglich  $x = 0.5$  bzw.

$u = 0.5$  und auch die Form der Verteilung am Rande des Iterationsintervalls  $[0,1]$ .

## 11. Explizite Berechnung von Zyklen

*Erster Ansatz:* Bei der Zeltabbildung lassen sich Zyklen durch etwas Experimentieren im Dualsystem herausfinden. Wenn man diese kennt, kann man durch die Konjugation zu den Zyklen des logistischen Wachstums für  $a = 4$  gelangen.

Vorerst verwenden wir aber folgenden

### Satz 11.1

Behauptung: Die Zeltabbildung besitzt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen echten Zyklus der Länge  $n$ .

□

Beweis: Betrachte den Startwert  $x_1 = \frac{2}{2^{n+1}}$

Dieser wird bei jedem Schritt mit 2 multipliziert, solange das Resultat < 0.5 ist. Das ist der Fall, bis zum Wert

$$x_{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2^n + 1}$$

Wie man leicht prüft, ist noch immer  $x_{n-1} < \frac{1}{2}$ . Beim nächsten Schritt erhält man:

$$x_n = \frac{2^n}{2^n + 1} > \frac{1}{2}$$

Also wird gemäss Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = 2(1 - x_n) = 2 \frac{1}{2^n + 1} = x_1$$

Alle auftretenden Brüche lassen sich nicht kürzen, also hat der Zyklus effektiv die Länge  $n$ .

□

### Satz 11.2

Behauptung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\sin^2 \frac{\pi}{2^n+1}$  ein n-Zyklus des logistischen Wachstums mit  $a = 4$ .

□

Beweis:  $\frac{2}{2^n+1}$  ist ein n-Zyklus der Zeltabbildung. Dann ist nach Satz 10.2 die Konjugation  $\sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{2^n+1}$  ein n-Zyklus des logistischen Wachstums.

□

In den folgenden Beispielen untersuchen wir jeweils das logistische Wachstum mit  $a = 4$ .

*Beispiel: n = 2*

Nach Satz 7.1 gibt es genau einen 2-Zyklus für das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . In Abschnitt drei haben wir die 2-Zyklen explizit berechnet als:

$$\xi_{3,4} = \frac{1+a \pm \sqrt{(1+a)(a-3)}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{5} \\ \sin^2 \frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

*Beispiel: n = 3*

Nach Satz 7.1 gibt es zwei verschiedene 3-Zyklen für das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . Einen davon kennen wir nach Satz 11.1. Wir wollen aber in diesem Beispiel beide durch die Untersuchung der Zeltabbildung finden. Ohne diese Hilfe, müssten wir die Nullstellen des Polynoms  $f^3(x) - x$  suchen, also eine Gleichung vom Grad 8 lösen.

Wenn wir mit der Zeltabbildung in der Dualdarstellung experimentieren, finden wir folgende 3-Zyklen:

$$0.110110 \dots \rightarrow 0.0100100 \dots \rightarrow 0.100100 \dots \rightarrow 0.11001100 \dots$$

Und

$$0.111000111000 \dots \rightarrow 0.00111000111 \dots \rightarrow 0.0111000 \dots \rightarrow 0.111000 \dots$$

Der erste Startwert ist identisch mit (wir verwenden die geometrische Reihe):

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{64} - \frac{1}{512} - \dots = 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - 1/8} = \frac{6}{7}$$

Kontrolle: Bei der Zeltabbildung erhalten wir die Sequenz:  $\frac{6}{7} \rightarrow \frac{2}{7} \rightarrow \frac{4}{7} \rightarrow \frac{6}{7}$

Somit gehört nach Satz 10.2  $\sin^2 \frac{3\pi}{7} \approx 0.950484434 \dots$  zu einem 3-Zyklus des logistischen Wachstums für  $a = 4$ .

Kontrolle: Wir erhalten im Simulator die Sequenz:

$$0.950484434 \rightarrow 0.18825509889 \rightarrow 0.61126046653 \rightarrow 0.950484434$$

Da der Zyklus repulsiv ist, wird man sich bei der weiteren Iteration aus dem Zyklus herausbewegen. Zum Beispiel erhält man nach 30 Iterationsschritten den Wert 0.989293719.

Nun betrachten wir den zweiten 3-Zyklus. Er ist identisch mit:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \dots = \frac{7}{8} + \frac{1}{64} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{7}{8} \left( 1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{64^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{7}{8} \left( \frac{1}{1 - 1/64} \right) = \frac{8}{9}$$

Kontrolle: Bei der Zeltabbildung liefert dieser Startwert die Sequenz:

$$\frac{8}{9} \rightarrow \frac{2}{9} \rightarrow \frac{4}{9} \rightarrow \frac{8}{9}$$

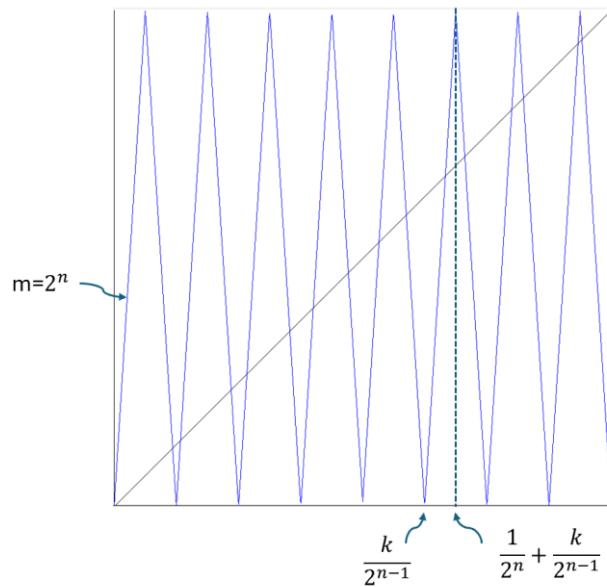
Somit gehört nach Satz 10.2  $\sin^2 \frac{4\pi}{9} \approx 0.9698463104 \dots$  zu einem 3-Zyklus des logistischen Wachstums für  $a = 4$ .

Kontrolle: Wir erhalten im Simulator die Sequenz:

$$0.9698463104 \rightarrow 0.1169777784 \rightarrow 0.41317591108 \rightarrow 0.9698463103$$

Für grössere Werte von  $n$  wird dieses Verfahren zunehmend mühsam. Wir wollen deshalb noch einen weiteren Ansatz versuchen, um alle Zyklen des logistischen Wachstums mit  $a = 4$  zu bestimmen.

*Zweiter Ansatz:* Wir betrachten die Zeltabbildung und davon die  $n$ -te Iterierte. Deren Graph sieht folgendermassen aus (das Bild zeigt  $n = 4$ ):



Graph der iterierten Zeltabbildung

Die Steigung der einzelnen Geradenstücke beträgt  $\pm 2^n$ . Die Geraden mit positiver Steigung gehen durch die Punkte  $\frac{k}{2^{n-1}}$  auf der x-Achse für  $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Somit haben die Geraden mit positiver Steigung die Gleichung:

$$y = 2^n x - 2k$$

Ihre Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden sind  $\xi = \frac{2k}{2^{n-1}}, k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ .

Die Geraden mit negativer Steigung gehen durch die Punkte  $\frac{k+1}{2^{n-1}}$  auf der x-Achse,  $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$

Sie haben somit die Gleichung:

$$y = -2^n x + 2(k + 1)$$

Ihre Schnittpunkte mit der  $45^\circ$  Geraden sind  $\xi = \frac{2(k+1)}{2^n+1}, k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ .

Alle diese Schnittpunkte liefern aber gerade sämtliche Punkte, welche zu einem Zyklus der Zeltabbildung gehören. Wegen Satz 10.2 gewinnen wir damit sämtliche Zyklen des logistischen Wachstums, ohne dass wir die Nullstellen von Polynomen vom Grad  $2^n$  berechnen müssen. Es gilt:

**Satz 11.3 (über die Zyklen des logistischen Wachstums und der Zeltabbildung)**

Behauptung:

- 1) Alle periodischen Punkte der Zeltabbildung haben die Form  $\xi = \frac{2k}{2^n-1}$  oder  $\xi = \frac{2(k+1)}{2^n+1}$  mit  $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$  und  $n \in \mathbb{N}$
- 2) Alle periodischen Punkte des logistischen Wachstums für  $a = 4$  haben die Form  $\xi = \sin^2 \frac{\pi k}{2^n - 1}$  oder  $\xi = \sin^2 \frac{\pi(k+1)}{2^n + 1}$  mit  $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$  und  $n \in \mathbb{N}$

□

Beispiel:  $n = 4$

Wir betrachten die Zyklen der Zeltabbildung. Die entsprechenden Zyklen für das logistische Wachstum ergeben sich durch die Konjugation.

Man hat 2 Fixpunkte:  $\frac{0}{15}$  und  $\frac{10}{15}$

Es gibt einen 2-Zyklus:  $\frac{12}{15} \leftrightarrow \frac{6}{12}$

Somit bleiben 12 Punkte, welche zu einem 4-Zyklus gehören. Die entsprechenden drei 4-Zyklen sind:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{15} \rightarrow \frac{14}{15} \rightarrow \frac{2}{15} \rightarrow \frac{4}{15} \\ & \frac{16}{17} \rightarrow \frac{2}{17} \rightarrow \frac{4}{17} \rightarrow \frac{8}{17} \\ & \frac{14}{17} \rightarrow \frac{6}{17} \rightarrow \frac{12}{17} \rightarrow \frac{10}{17} \end{aligned}$$

Jeder Punkt  $\neq 0$ , der zu einem Zyklus gehört, hat genau einen präperiodischen Vorgänger:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{15} \rightarrow \frac{10}{15}; \frac{3}{15} \rightarrow \frac{6}{15}; \frac{9}{15} \rightarrow \frac{12}{15}; \frac{1}{15} \rightarrow \frac{2}{15}; \frac{13}{15} \rightarrow \frac{4}{15}; \frac{11}{15} \rightarrow \frac{8}{15}; \frac{7}{15} \rightarrow \frac{14}{15} \\ & \frac{1}{17} \rightarrow \frac{2}{17}; \frac{15}{17} \rightarrow \frac{4}{17}; \frac{13}{17} \rightarrow \frac{8}{17}; \frac{9}{17} \rightarrow \frac{16}{17}; \frac{3}{17} \rightarrow \frac{6}{17}; \frac{11}{17} \rightarrow \frac{12}{17}; \frac{5}{17} \rightarrow \frac{10}{17}; \frac{7}{17} \rightarrow \frac{14}{17} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass dies allgemein gilt.

□

Es bleibt dem Leser überlassen, weitere Fälle durchzurechnen oder mit dem Simulator zu testen.

## 12. Ausblick: Periodenverdoppelung

Wir haben gesehen, dass das logistische Wachstum für Parameterwerte  $a < 1$  den attraktiven Fixpunkt  $\xi_1 = 0$  hat. Für  $a \in ]1, 3[$  wird dieser Fixpunkt repulsiv, aber an seine Stelle tritt der attraktive Fixpunkt  $\xi_2 = 1 - 1/a$ . Dieser ist attraktiv für  $a \in ]1, 3[$ . An der Stelle  $a = 3$  wird dieser Fixpunkt repulsiv, aber es entsteht ein attraktiver 2-er Zyklus

$$\xi_{3,4} = \begin{cases} 0.799455 \dots \\ 0.513044 \dots \end{cases}$$

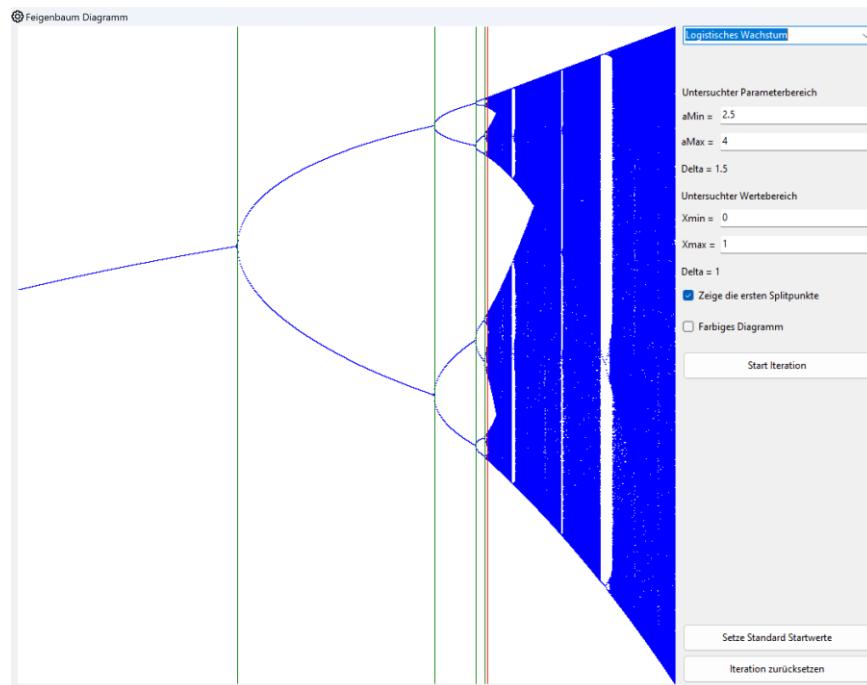
Dieser ist attraktiv im Bereich  $a \in ]3, 1 + \sqrt{6}[$  und wird an der Stelle  $a = 1 + \sqrt{6}$  repulsiv. Das Computerexperiment zeigt dann, dass hier ein attraktiver 4-er Zyklus entsteht. Für wachsende  $a$  entsteht dann ein 8-Zyklus, dann ein 16-Zyklus und die Periode der Zyklen verdoppelt sich laufend bis zu einem gewissen Grenzwert von  $a$  und geht dann über zu chaotischem Verhalten.



Der Mathematiker *Mitchell Feigenbaum* (1944 – 2019) hat das Phänomen der Periodenverdoppelung untersucht und dabei 1975 die sogenannte Feigenbaum-Konstante entdeckt:

$$\delta \approx 4.669202 \dots$$

Die Periodenverdoppelung kann im Feigenbaum-Diagramm dargestellt werden.



Feigenbaum-Diagramm für das logistische Wachstum

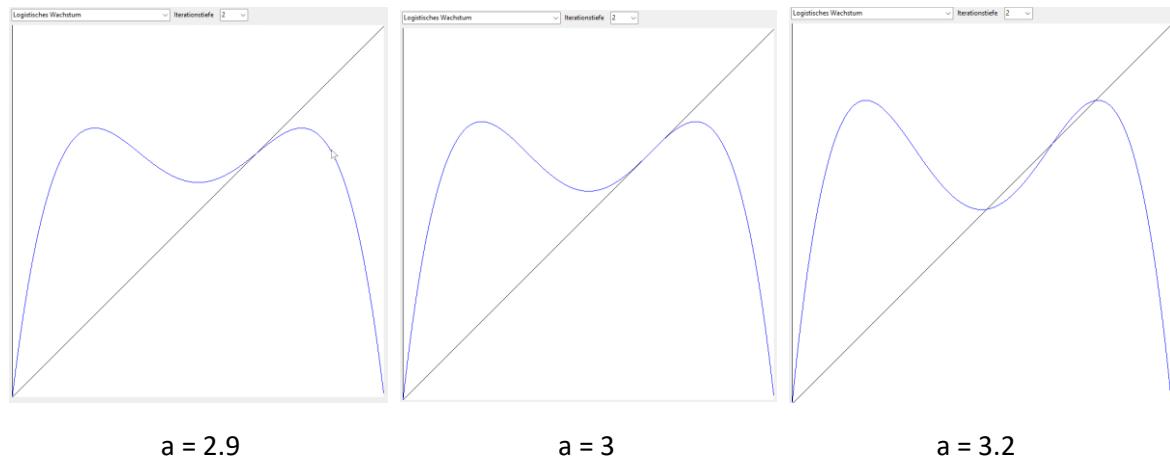
Auf der horizontalen Achse sind die Werte des Parameters  $a$  dargestellt. Das Intervall, in welchem sich  $a$  bewegt, kann innerhalb  $]0,4]$  frei gewählt werden. Im obigen Bild sieht man einen Ausschnitt für  $a \in [2.5, 4]$ . Für jeden Wert von  $a$  wird dann so lange iteriert, dass man hoffen kann, dass sich die Iteration entweder auf einen Zyklus einpendelt oder chaotisch ist. Anschliessend weitere

Iterationsschritte durchgeführt und die x-Werte der Iteration in vertikaler Richtung ins Diagramm eingetragen.

Die grünen Linien zeigen die Split Punkte auf, an denen ein attraktiver Zyklus instabil wird und ein neuer Zyklus entsteht. Den ersten Split Punkt hat man für  $a_1 = 3$ . Dort entsteht ein attraktiver 2-Zyklus. An der Stelle  $a_2 = 3.449499 \dots$  verdoppelt sich die Periode und es entsteht ein attraktiver 4-Zyklus bei den entsprechenden zwei Split Punkten. An der Stelle  $a_3 = 3.544090 \dots$  entsteht bei vier Split Punkten der attraktive 8-Zyklus. Im weiteren Verlauf verdoppelt sich die Periode in immer kürzeren Abständen und die Folge der  $a_i$ , also den Stellen an denen weitere Split Punkte auftreten, strebt gegen den Grenzwert  $a_\infty = 3.569946 \dots$ . Diese Stelle ist im Diagramm mit einer roten Linie markiert.

Die Split Punkte gehören jeweils zu einem  $2^n$ -Zyklus, welcher an dieser Stelle attraktiv wird. Da alle zu einem Zyklus gehörenden Punkte denselben Multiplikator haben, wie bereits früher festgestellt, werden sie gleichzeitig attraktiv, das heisst, sie liegen alle auf einer Geraden parallel zur vertikalen Achse.

Was zum Beispiel beim Übergang des Fixpunktes  $\xi_2 = 1 - 1/a$  in einen attraktiven 2-Zyklus an der Stelle  $a=3$  passiert, sieht man beim Graph von  $f^2$  an dieser Stelle (generiert vom Simulator):



Der Fixpunkt  $\xi_2$  ist der Schnittpunkt des Graphen mit der  $45^\circ$ -Geraden. Links hat die Kurve eine Tangente mit Steigung  $< 1$ , der Fixpunkt ist also attraktiv. Für  $a = 3$  ist die Tangentensteigung genau 1 (mittleres Bild). Wenn für  $a = 3.2$  die Kurve steiler wird, ist der Fixpunkt  $\xi_2$  repulsiv geworden mit einer Tangentensteigung  $> 1$ . Dafür sind zwei neue Schnittpunkte entstanden mit Tangentensteigung  $< 1$ . Das ist der neu entstandene 2-Zyklus.

Die ersten zugehörigen Werte von  $a$ , an denen die jeweiligen Zyklen instabil werden und sich in einen Zyklus der doppelten Periode aufsplitten, können mit numerischen Methoden ermittelt werden und sind:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, a_2 = 3.449499 \dots, a_3 = 3.544090 \dots, a_4 = 3.564407 \dots, \\ a_5 &= 3.568759 \dots, a_6 = 3.569692 \dots, a_7 = 3.569891 \dots, a_8 = 3.569934 \dots \end{aligned}$$

Die Werte von  $a_k, k \in \mathbb{N}$  nehmen geometrisch ab und streben gegen einen Grenzwert  $a_\infty$  gemäss:

$$a_k \approx a_\infty - c \cdot \delta^{-k}, k \in \mathbb{N}$$

$\delta \approx 4.669202 \dots$  ist die sogenannte Feigenbaum Konstante. Für das logistische Wachstum gilt:

$$c \approx 2.6327 \dots$$

Zum Beispiel ist:

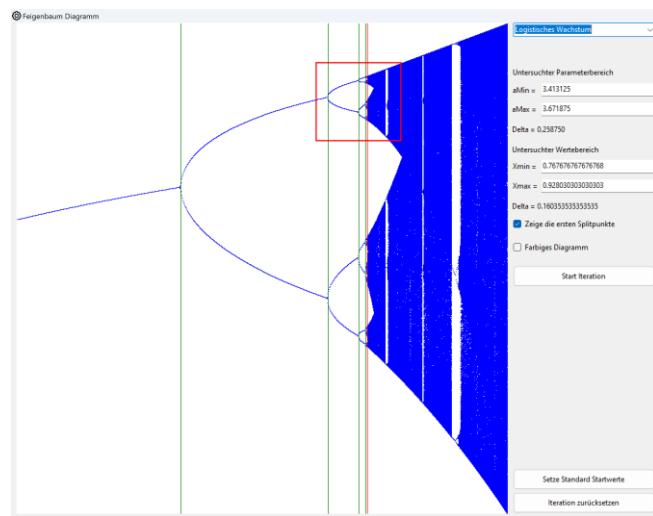
$$a_\infty - c \cdot \delta^{-5} = 3.568759 \approx a_5$$

Ein  $n$ -Zyklus erfüllt die Bedingung  $f^n(\xi_i) = \xi_i$ ,  $1 \leq i < n$ . Beim logistischen Wachstum sind diese Punkte Nullstellen des Polynoms  $f^n(x) - x = 0$ , welches den Grad  $2^n$  hat. Kann es sein, dass einige dieser Nullstellen komplex und die anderen reell sind? Die Antwort ist nein. Angenommen, man kennt eine reelle Nullstelle  $\xi_1$ . Dann ergeben sich die weiteren Nullstellen aus der Iteration  $\xi_{i+1} = f(\xi_i)$ ,  $1 \leq i < n$  und  $\xi_1 = f(\xi_n)$ . Das heisst, alle weiteren Nullstellen sind ebenfalls reell.

Feigenbaum hat entdeckt, dass das Verhalten der Periodenverdoppelung ein universelles Phänomen ist und in vielen dynamischen Systemen beim Übergang zum Chaos auftritt. Dabei ist die Konstante  $\delta$  immer dieselbe und scheint ebenfalls universell.

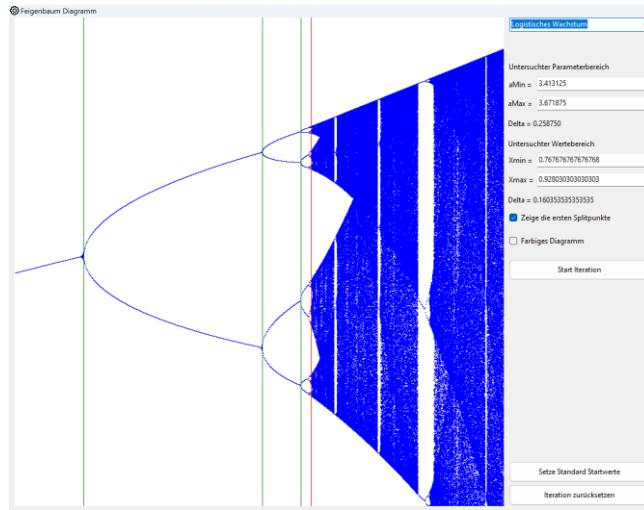
### *Selbstähnlichkeit*

Feigenbaum verwendete bei seiner Untersuchung das Phänomen der Selbstähnlichkeit einer quadratischen Funktion und deren Iterierten. Eine gute Darstellung über diesen Ansatz findet man in [1] und einen elementaren Zugang in [4].



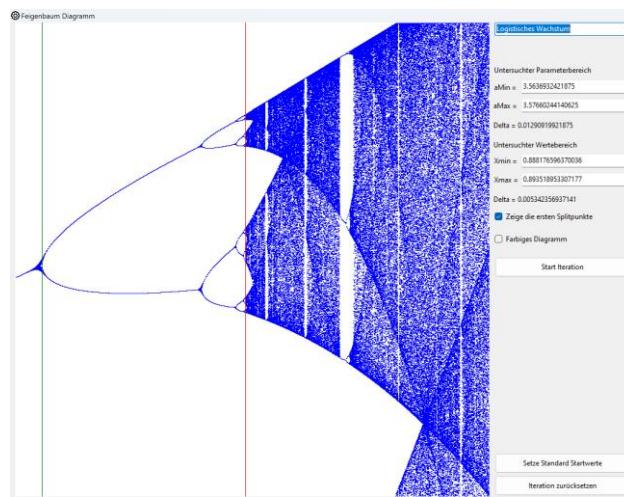
Selbstähnlichkeit bei der Periodenverdoppelung

Der Simulator ermöglicht es, den mit einem roten Rechteck markierten Ausschnitt in einer entsprechend skalierten Iteration zu betrachten. Man erhält für den obigen Ausschnitt folgendes Bild:



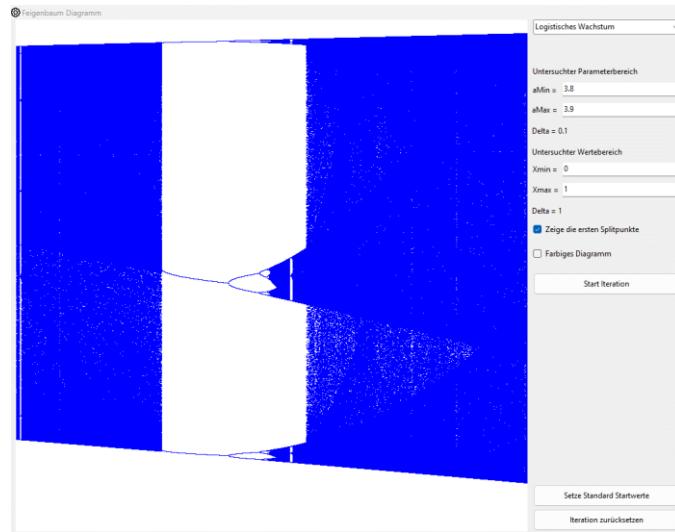
Rot markierter Ausschnitt in vergrößerter Form

Wenn  $\alpha$  den Wert  $\alpha_\infty \approx 3.569946$  überschreitet, wird das System chaotisch.



Übergang ins Chaos – die rote Linie markiert ungefähr den Wert  $\alpha_\infty \approx 3.569946$

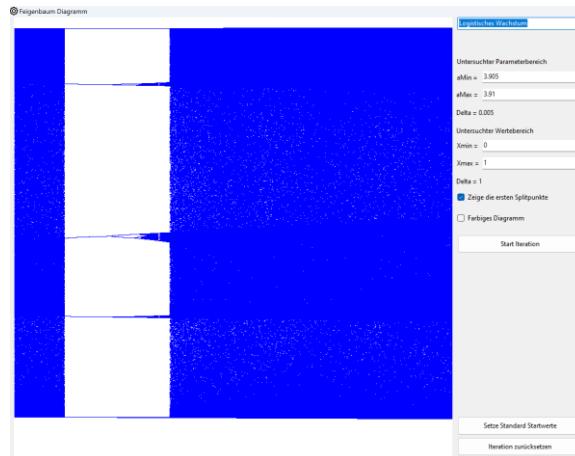
Wenn  $\alpha$  weiter zunimmt, wechseln sich chaotische Bereich mit immer kleineren Fenstern ab, in denen sich attraktive Zyklen befinden. Im Bereich  $\alpha \in [3.828427, 3.841499]$  taucht z.B. ein attraktiver 3-Zyklus auf, der dann an der rechten Intervallgrenze instabil wird. An dieser Stelle findet wieder eine Kaskade von Periodenverdoppelungen statt: Aus dem 3-Zyklus wird ein 6-Zyklus, dann ein 12-Zyklus usw. Bei  $\alpha = 4$  wird das Chaos definitiv erreicht.



Attraktiver 3-Zyklus im Bereich  $\alpha \in [3.8, 3.9]$

Man sieht im obigen Bild, wie etwa an der Stelle  $\alpha=3.82$  nach einem chaotischen Bereich wie aus dem Nichts ein stabiler 3-Zyklus auftaucht, welcher dann in die Periodenverdoppelung übergeht, und später wieder im Chaos landet. Etwas rechts von der Periodenverdoppelung sieht man die Selbstähnlichkeit: Auch hier tauchen Fenster mit stabilen 9-Zyklen auf, ähnlich zum 3-Zyklus.

Auch im Bereich  $\alpha \in [3.905, 3.91]$  tauchen noch Fenster mit stabilen Zyklen auf, wie das folgende Bild zeigt. Man erkennt z.B: auf der linken Seite des Diagramms einen stabilen 5-Zyklus. Bei genauem Hinsehen erkennt man schwach, dass er in die Periodenverdoppelung übergeht, sobald er instabil wird.



Attraktiver 5-Zyklus im Bereich  $\alpha \in [3.905, 3.91]$

## 13. Übungsbeispiele

### 1. Untersuche die Iteration

$$x_{n+1} = ax_n \sqrt{1 - x_n^2}, x_n \in [0,1]$$

- a) In welchem Intervall darf der Parameter  $a$  liegen?
- b) Bestimme Fixpunkte und 2-er Zyklen der Iteration
- c) Für welche Werte von  $a$  sind diese attraktiv?

- d) Zeige, dass die Iteration für ein gewisses  $a$  zur Zeltabbildung konjugiert ist (verwende trigonometrische Funktionen).
2. Untersuche die Sägezahnabbildung (bzw. das Bernoulli-Shift System):
- $$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 0.5[ \\ 2x - 1, & x \in [0.5, 1] \end{cases}$$
- und die dadurch definierte Iteration.  
Zeige mit Hilfe der Dualbruchdarstellung von  $x$ , dass diese chaotisch ist sowohl im Sinne des Münzwurfs wie auch im Sinne von Devaney.
3. Untersuche die Winkelverdoppelung am Einheitskreis hinsichtlich chaotischem Verhalten.  
Verwende dazu die Abbildung  $\varphi \rightarrow e^{i\varphi}$  in der komplexen Ebene.
4. Untersuche die Funktion:
- $$(x) = ax^2(1 - x^2), [0,1] \rightarrow [0,1]$$
- a) In welchem Intervall darf der Parameter  $a$  liegen?  
b) Bestimme Fixpunkte und 2-Zyklen.  
c) für welche  $a$  sind diese attraktiv?
5. Untersuche die Zeltabbildung. Beweise:  
Jede rationale Zahl aus dem Einheitsintervall ist periodisch oder präperiodisch (d.h. fällt nach einigen Iterationsschritten auf einen Zyklus. Die zugehörigen Zyklen sind repulsiv. Sie liegen dicht im Einheitsintervall. (Diese Aufgabe ist etwas schwieriger. Eine Lösung findet sich in der mathematischen Dokumentation zum Simulator)).
6. Untersuche das Feigenbaum Diagramm mit dem «Simulator». Wähle das rote Auswahldreieck so, dass die Parameterdifferenzen aufeinanderfolgender Split Punkte getroffen werden. Dann werden rechts diese Differenzen angezeigt. Ermittle damit Näherungswerte für die Feigenbaumkonstante.
7. Oft wird an Stelle des logistischen Wachstums die Parabel untersucht:

$$g(y) = 1 - \mu y^2, [-1,1] \rightarrow [-1,1], \mu \in ]0,2]$$

Betrachte die Transformation

$$x = T(y) := \frac{\mu}{a}y + \frac{1}{2}, [-1,1] \rightarrow [0,1]$$

a) Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a \in ]2,4]$ . Zeige, dass gilt:

$$T^{-1} \circ f \circ T \equiv g$$

b) Zeige, dass bei dieser Transformation gilt:  $\mu = \frac{a(a-2)}{4}$

c) Zeige, dass diese Parabel für  $\mu = 2$  eine Konjugierte der Zeltabbildung ist. Hinweis: Die Konjugation ist gegeben durch  $T(u) = \cos\pi((1-u))$ .

8. Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . Klassifiziere die Zyklen von  $f^{21}$ .
9. Sei  $f$  das logistische Wachstum mit  $a = 4$ . Untersuche die Zyklen im Fall, dass  $p$  eine Primzahl ist und  $n = p^2$ .

## Weiterführende Literatur

Aufgeführt sind hier wenige Quellen, bei denen einzelne Kapitel noch in einem elementar zugänglichen Rahmen liegt. Ausgehend von diesen Quellen findet man weitere Literaturhinweise.

- [1] Wolfgang Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos, Teubner Studienbücher 1998
- [2] Urs Kirchgraber: Mathematik im Chaos, Mathematische Semesterberichte, Springer 1992
- [3] Urs Kirchgraber: Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen, Berichte über Mathematik und Unterricht, ETHZ, 1992
- [4] Urs Kirchgraber, Niklaus Sigrist: Feigenbaum Universalität: Beschreibung und Beweisskizze, Berichte über Mathematik und Unterricht, ETHZ, 1995
- [5] Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann: Iterated maps on the Interval as dynamical Systems, Birkhäuser 1986
- [6] Moritz Adelmeyer: Theorem von Sarkovskii, Berichte über Mathematik und Unterricht, ETHZ, 1990
- [16] An introduction to Chaotic Dynamical Systems, Robert L. Devaney, Addison Wesley, 1989