

Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen

Die Mathematik zum Computerprogramm «Simulator»

Erstellt 1.10.2025

Das vorliegende Dokument untersucht das mathematische Billard auf konvexen Billardtischen. Dabei lassen sich interessante Aussagen elementar herleiten, insbesondere auch über periodische Bahnen. Unterstützt werden die mathematischen Untersuchungen durch Experimente mit dem Computerprogramm «Simulator».

Das Dokument soll eine Anregung sein für den erweiterten Mathematikunterricht auf der Mittelstufe, sei es für Angebote ausserhalb des obligatorischen Lehrplanes oder für individuelle Arbeiten von interessierten Schülern.

Die gesamte Themenreihe in Zusammenhang mit dem «Simulator» umfasst:

- *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums*
- ***Der ovale Billardtisch und periodische Bahnen***
- *Newton Iteration und die komplexen Einheitswurzeln*
- *Iteration quadratischer Funktionen in der komplexen Ebene*
- *Numerische Methoden und gekoppelte Pendel*
- *Die Planetenbewegung und das Dreikörperproblem*
- *Seltsame Attraktoren und die Wetterprognose von Edward Lorenz*
- *Fraktale Mengen und Lindenmayer-Systeme*
- *Zur Geschichte der Chaostheorie*
- *Programmierung eigener dynamischer Systeme im «Simulator»*

Jedes Thema wird in einem separaten Dokument behandelt.

Das Computerprogramm «Simulator» ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, ebenso eine Microsoft Installer Version. Der entsprechende Link ist: <https://github.com/HermannBiner/Simulator>. Im «Simulator» sind folgende Dokumentationen auf Deutsch und Englisch integriert:

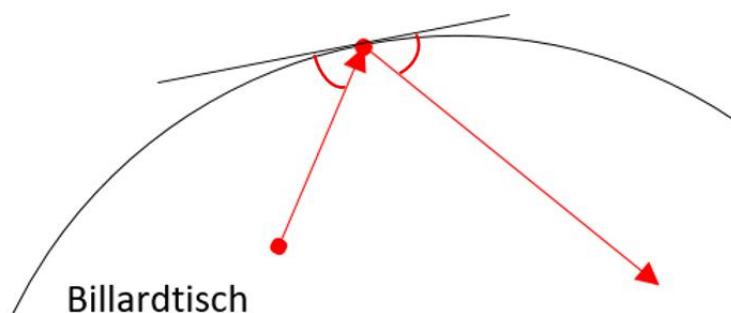
- *Mathematische Dokumentation mit Beispielen und Übungsaufgaben*
- *Technische Dokumentation mit detaillierter Beschreibung der Funktionalität*
- *Benutzerhandbuch mit Beispielen*
- *Versionshistorie*

Inhalt

| | | |
|-----|--|----|
| 1. | Der mathematische Billardtisch | 2 |
| 2. | Billard im Kreis | 7 |
| 3. | Elliptisches Billard | 10 |
| 4. | Kaustik im elliptischen Billard | 18 |
| 5. | Periodische Punkte beim elliptischen Billard | 20 |
| 6. | Das Phasenportrait | 23 |
| 7. | Ovales Billard | 27 |
| 8. | Das C-Diagramm | 29 |
| 9. | Billard im Stadion | 33 |
| 10. | Der konvexe Billardtisch | 35 |
| 11. | Übungsbeispiele | 39 |
| | Weiterführende Literatur | 41 |

1. Der mathematische Billardtisch

In diesem Papier betrachten wir als Billardtisch ein konkaves Gebiet der Ebene. Wir definieren später, was wir darunter verstehen. Auf dem Billardtisch bewegt sich eine idealisierte (masselose und punktförmige) Billardkugel reibungsfrei und geradlinig, bis sie auf den Rand des Billardtisches trifft. Hier wird sie gemäss dem Reflexionsgesetz Ausfallswinkel = Einfallswinkel reflektiert. Der Einfallswinkel ist als Winkel zwischen der Kugelbahn vor dem Stoß und der Tangente an die Randkurve im Stoßpunkt definiert. Ebenso ist der Ausfallswinkel der Winkel zwischen dieser Tangente im Stoßpunkt und der Kugelbahn nach dem Stoß.



Reflexion der Billardkugel (rot) am Rand des Billardtisches

Speziell werden wir den elliptischen, den ovalen und den stadionförmigen Billardtisch untersuchen. Im Simulator sind diese Tischformen implementiert und es können beliebig viele Kugeln gleichzeitig gestartet werden.

Nun definieren wir den Billardtisch genauer, nämlich als endliches Gebiet der Ebene, welches durch eine einfach geschlossene, reguläre und stetig differenzierbare Kurve begrenzt wird.

Definition 1.1

Unter einer *ebenen Kurve* verstehen wir eine stetige Abbildung:

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$$

□

Bemerkung: γ bezeichnet die Abbildung und $\vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$ das Bild von t unter der Abbildung γ . Meist wird die Vektorschreibweise für das Bild weggelassen. Wir bevorzugen aber in Hinblick darauf, dass wir auf ein elementares mathematisches Niveau aufbauen, die Vektorschreibweise, weil wir auch das Skalarprodukt brauchen, welches für Vektoren definiert ist.

Der Rand des Billardtisches ist eine ebene Kurve gemäss obiger Definition. Beim mathematischen Billard muss eine Billardkugel am Rand des Billardtisches reflektiert werden. Das heisst, dass die Tangente für jeden Randpunkt definiert sein sollte. Die Tangente an eine Kurve in einem Punkt t ist definiert durch die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$, falls diese existiert (wir schreiben in diesem Papier für die Ableitung einen Punkt). Die Ableitung einer Kurve in einem Punkt $t \in I$ ist analog zum eindimensionalen Fall reeller Funktionen definiert:

Definition 1.2

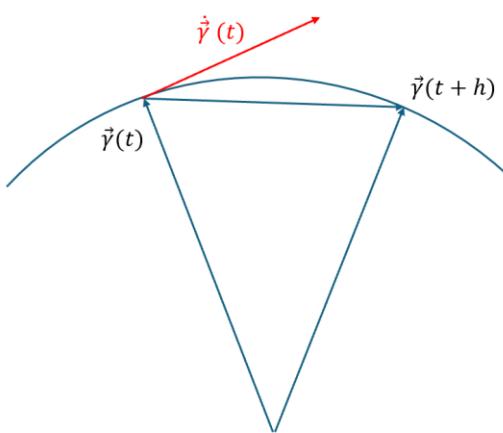
Die Ableitung einer Kurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ im Punkt t ist definiert durch:

$$\dot{\gamma}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$$

Falls dieser Limes existiert.

□

Die Ableitung ist die *Tangente* an die Kurve γ im Punkt t .



Die Ableitung einer Kurve im Punkt t

Für den Billardtisch werden wir verlangen, dass $\dot{\gamma}(t)$ stetig ist. Als nächstes möchten wir, dass die ebene Kurve, welche den Billardtisch begrenzt, geschlossen ist, so dass der Billardtisch ein endliches Gebiet der Ebene darstellt. Das führt auf die nächste Definition:

Definition 1.3

Eine Kurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ ist *geschlossen*, wenn $I = [a, b[$ ein endliches reelles Intervall ist mit $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$. Wenn die Kurve differenzierbar ist, soll zusätzlich gelten: $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$.

Die Kurve ist *einfach geschlossen*, wenn sie keine Doppelpunkte enthält. Das heisst, dass die Abbildung γ auf $[a, b[$ *injektiv* ist.

□

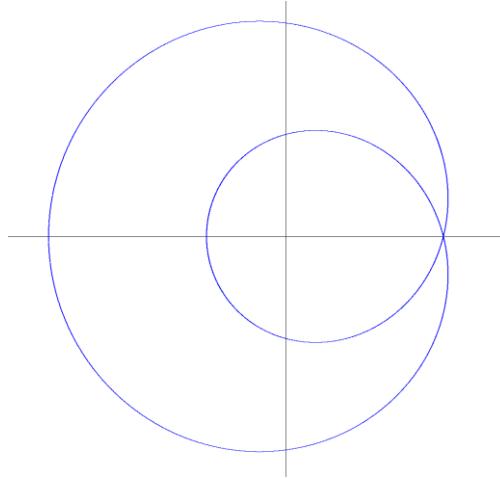
Beispiele

Die Parabel $\gamma: t \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{\gamma}(t) = (t, t^2)$ ist eine ebene Kurve, aber nicht geschlossen.

Der Kreis $\gamma: t \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine geschlossene ebene Kurve, aber nicht einfach geschlossen, weil $(\cos(t + 2\pi k), \sin(t + 2\pi k)) = (\cos t, \sin t)$. Also ist γ nicht injektiv.

Hingegen ist der Kreis, parametrisiert durch $\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, einfach geschlossen.

Die Kurve $\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = (2 + \sin t)(\cos 2t, \sin 2t)$ hat einen Doppelpunkt: $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(\pi)$ und ist nicht einfach geschlossen.



Der Graph der obigen Kurve

Jeder Schreiner, der einen «echten» Billardtisch baut, wird mit Doppelpunkten Schwierigkeiten haben.

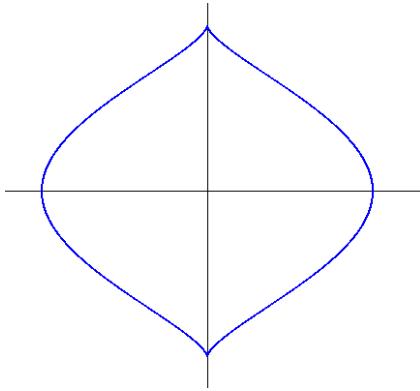
Haben wir damit einen Billardtisch gemäss unserer Vorstellung charakterisiert? Wie wir im nächsten Beispiel sehen, fehlt noch etwas.

Beispiel

Die ebene Kurve

$$\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Ist einfach geschlossen. Sie ist stetig differenzierbar, hat aber «Spitzen» bei $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Das wollen wir bei einem Billardtisch ausschliessen.



Graph der obigen Kurve

Die erste Ableitung der Kurve ist:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

An den Stellen $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ verschwindet diese Ableitung, d.h. $|\dot{\gamma}(t)| = 0$ für $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

□

Wenn wir verlangen, dass $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ führt das zur nächsten Definition:

Definition 1.4

Eine Kurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ heisst *regulär*, wenn der Betrag der Ableitung nirgends verschwindet, das heisst

$$|\dot{\gamma}(t)| \neq 0, \forall t \in I$$

□

Sind mit dieser Definition «Spitzen» ausgeschlossen? Für eine stetig differenzierbare Kurve gilt an jeder Stelle $t_0 \in I$ die Näherung:

$$\vec{\gamma}(t_0 + h) \approx \vec{\gamma}(t_0) + h\dot{\gamma}(t_0) \text{ wenn } h \approx 0$$

Aber das ist für $|\dot{\gamma}(t_0)| \neq 0$ die Gleichung einer Geraden und diese hat keine Spitzen.

Nun können wir definieren, was wir unter einem mathematischen Billardtisch verstehen.

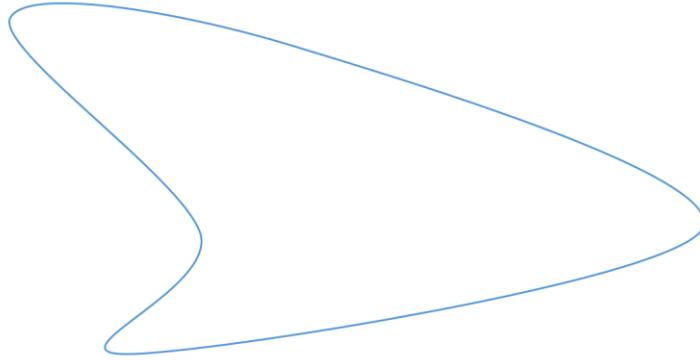
Definition 1.5

Ein *mathematischer Billardtisch* ist ein (endliches) Gebiet der Ebene, welches durch eine einfach geschlossene, stetig differenzierbare und reguläre ebene Kurve begrenzt wird.

□

Mit dieser Definition haben wir u.a. rechteckige Billardtische ausgeschlossen. Untersuchungen des Billards im Rechteck sind interessant, aber nicht Gegenstand dieses Papiers. Man findet entsprechende Literatur im Internet.

Für uns wären immer noch Billardtische möglich, bei denen der Rand an einigen Stellen «einspringt».



Dieser Billardtisch hat einen «einspringenden» Bereich.

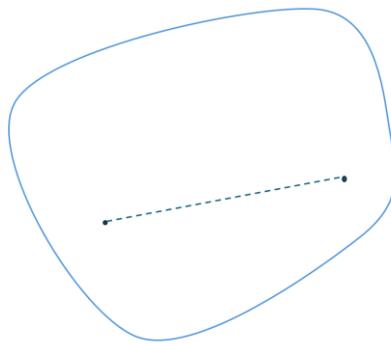
Wir wollen uns aber auf den einfachen Fall beschränken, dass der Billardtisch keine solche einspringenden Bereiche hat. Das führt zur letzten Definition in diesem Abschnitt:

Definition 1.6

Ein mathematischer Billardtisch heisst *konvex*, wenn für zwei beliebige Punkte im Innern des Billardtisches auch deren Verbindungsstrecke ganz im Innern des Billardtisches liegt. Ein konvexer Billardtisch kann noch Geradensegmente enthalten. Wenn er dies nicht tut, heisst er *streng konvex*.

□

Im Folgenden werden wir immer konvexe Billardtische betrachten.



Konvexer Billardtisch

Wir werden an mehreren Stellen die Ableitung von $|\vec{\gamma}(t)|$ brauchen. Als Vorbereitung halten wir fest:

Lemma 1.7

Sei γ eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ mit $|\vec{\gamma}(t)| \neq 0, \forall t$.

Behauptung:

$$\frac{d}{dt} |\vec{\gamma}(t)| = \frac{\vec{\gamma}(t) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)}{|\vec{\gamma}(t)|}$$

□

Beweis:

$$\frac{d}{dt} |\vec{\gamma}(t)| = \frac{d}{dt} \left| \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right| = \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = \frac{2x_1(t) \cdot \dot{x}_1(t) + 2x_2(t) \cdot \dot{x}_2(t)}{2\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} = \frac{\vec{\gamma}(t) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)}{|\vec{\gamma}(t)|}$$

□

Bemerkung:

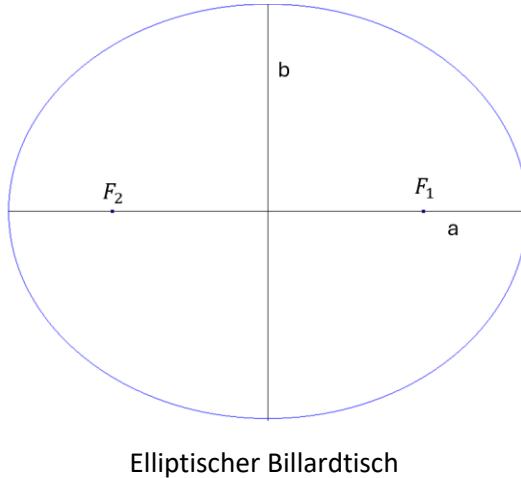
Wenn $\vec{\gamma}(t) \perp \dot{\vec{\gamma}}(t)$, dann ist $\frac{d}{dt} |\vec{\gamma}(t)| = 0$. Wenn $\vec{\gamma}(t) \parallel \dot{\vec{\gamma}}(t)$, dann ist $\frac{d}{dt} |\vec{\gamma}(t)| = |\dot{\vec{\gamma}}(t)|$.

Beispiel

Der elliptische Billardtisch ist ein Beispiel eines streng konvexen Billardtisches. Wir werden diesen in einem späteren Abschnitt genauer untersuchen. Er ist definiert durch die Abbildung:

$$\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

a definiert die Hauptachse und b die Nebenachse der Ellipse. $F_{1,2}$ sind die sogenannten Brennpunkte.



Für $a = b$ erhält man einen Kreis mit Radius a und die Brennpunkte fallen mit dem Nullpunkt zusammen.

2. Billard im Kreis

Als erstes einfaches Beispiel des mathematischen Billards betrachten wir einen kreisförmigen Billardtisch. Dieser ist streng konvex.

Die Standardparametrisierung des Einheitskreises ist:

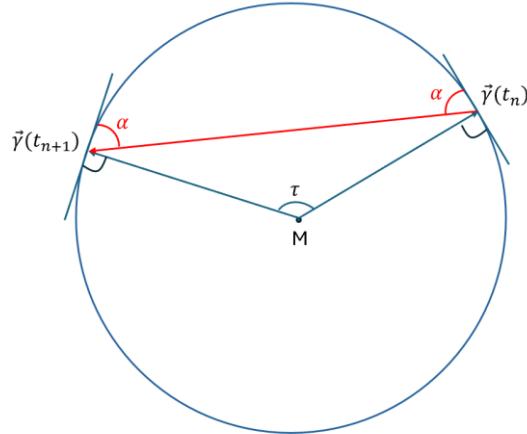
$$\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Und das beschreibt einen Billardtisch gemäss unserer Definition. Der Parameter t ist gleichzeitig auch der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{\gamma}(t)$ und der positiven x-Achse.

Ausgehend von einem Startpunkt $\vec{\gamma}(t_1)$ und einem Startwinkel α_1 zwischen der Tangente in $\vec{\gamma}(t_1)$ und der Kugelbahn, sind die weiteren Stöße und damit die Kugelbahn definiert durch eine Abbildung:

$$(t_n, \alpha_n) \rightarrow (t_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

Dabei sieht man, dass der Stosswinkel α konstant ist:

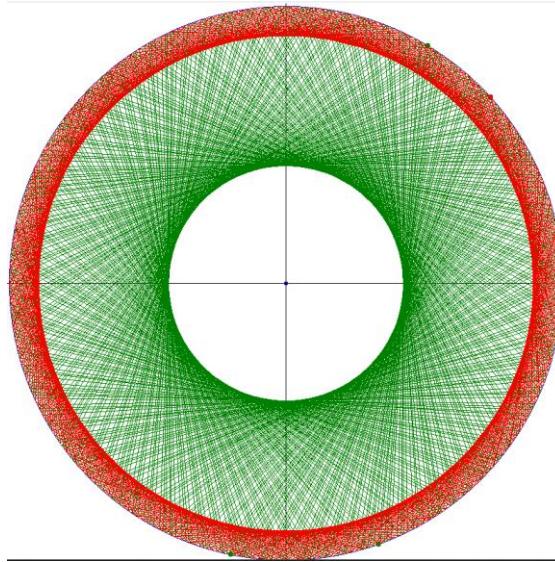


Billard im Kreis

Das Dreieck mit den beiden Stosspunkten und dem Mittelpunkt M ist gleichseitig, da der Abstand M von jedem Stosspunkt gleich dem Radius ist. Somit sind die Basiswinkel dieses Dreiecks gleich. Die Stosswinkel α sind je das Komplement eines Basiswinkels zu $\pi/2$, also ebenfalls gleich. Somit ist der Stosswinkel α während der gesamten Bewegung der Kugel konstant. Der Parameter t nimmt für den nächsten Stosspunkt um einen konstanten Wert $\tau = 2\alpha$ zu. Somit ist die Abbildung explizit gegeben durch:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \text{ (konstant)} \\ t_{n+1} = t_1 + 2n\alpha \end{cases}$$

Hier ein Bild, generiert durch den «Simulator» für zwei verschiedene Kugeln: rot mit einem flachen Reflexionswinkel und grün mit einem steilen:



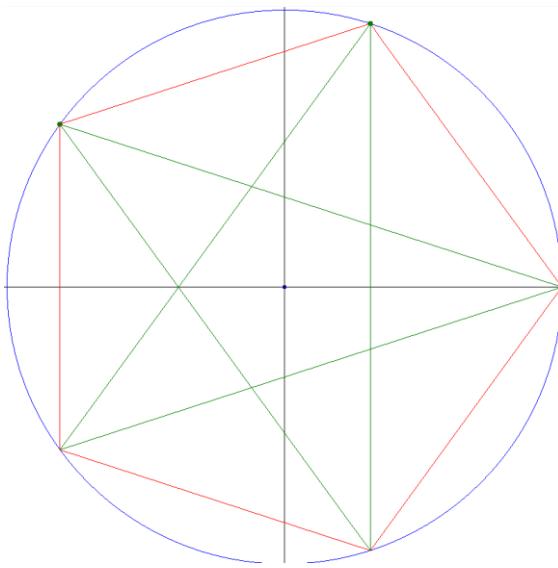
Billard im Kreis

Man sieht auch, dass die Bahnen tangential an einem «inneren» Kreis liegen. Dieser wird als *Kaustik* bezeichnet. Es ist leicht zu überprüfen, dass dieser innere Kreis den Radius $\cos\alpha$ hat, wenn α der konstante Stosswinkel ist.

Offensichtlich gibt es auch periodische Bahnen. Wir wollen diese näher untersuchen.

Annahme, die Kugel starte im Punkt $t_1 = 0$ und Startwinkel α sei ein rationales Vielfaches von π . Dann ist $t_n = 2\alpha(n - 1)$ ein rationales Vielfaches von 2π . Nehmen wir an, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ sei ein gekürzter Bruch und $\alpha = \pi \cdot \frac{p}{q}$. Bei jedem Stoß wächst dann der Drehwinkel t_n um $2\alpha = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$. Wir betrachten nur den Fall $p < q$, denn andernfalls hat der ganzzahlige Teil des Bruches nur eine Drehung um ein Vielfaches von 2π zur Folge.

Die Bahn ist periodisch, falls t_n nach einer gewissen Anzahl Stößen ein Vielfaches von 2π ist. Das ist aber gerade nach q Stößen der Fall, also ist q die Periode der Bahn. Dann ist t_n auf den Wert $2\pi p$ gewachsen. Falls $p < \frac{q}{2}$ ist p die Umlaufzahl der Bahn um den Mittelpunkt des Kreises im negativen Uhrzeigersinn. Falls $p > \frac{q}{2}$, dann ist $q - p$ die Umlaufzahl der Bahn um den Kreismittelpunkt im positiven Uhrzeigersinn.



Bahnen mit Periode $q = 5$ und Umlaufzahlen $p = 1$ (rot) bzw. $p = 2$ (grün)

Falls der Startwinkel α der Bahn ein irrationales Vielfaches von π ist, dann ist der Zentriwinkel τ ein irrationales Vielfaches von 2π . Dann wird sich die Bahn nie schliessen und die Bahn ist aperiodisch. Die Punkte einer solchen Bahn liegen dicht auf dem Kreisrand. Die Begründung dafür liefert folgende Überlegung:

Sei $\vartheta_1 = 2\alpha$ der (konstante) Drehwinkel der Bahn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stoßpunkten und ϑ_1 sei kein rationales Vielfaches von 2π . Ausgehend von einem Startpunkt $\vec{\gamma}_1$ auf dem Kreisrand führen wir dann so viele Stöße aus, bis die Bahn zu ersten Mal dem Punkt $\vec{\gamma}_1$ so nahekommt, dass sie beim nächsten Stoß an $\vec{\gamma}_1$ vorbeiläuft. Das sei nach n Stößen der Fall. Dabei wird die Bahn ausgehend von $\vec{\gamma}_1$ den Punkt $\vec{\gamma}_1$ selbst nie genau treffen, weil ϑ_1 sonst ein rationales Vielfaches von 2π wäre.

Wir bezeichnen n Drehungen um den Winkel ϑ_1 mit $D_{\vartheta_1}^n$. Dann liegt $\vec{\gamma}_1$ zwischen den Punkten:

$$D_{\vartheta_1}^n(\vec{\gamma}_1) < \vec{\gamma}_1 < D_{\vartheta_1}^{n+1}(\vec{\gamma}_1)$$

Wobei wird als Mass die Bogenlänge verwenden. Entweder liegt $\vec{\gamma}_1$ dann näher beim Punkt $D_{\vartheta_1}^n(\vec{\gamma}_1)$ oder sonst näher beim Punkt $D_{\vartheta_1}^{n+1}(\vec{\gamma}_1)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\vec{\gamma}_1$ näher bei $D_{\vartheta_1}^{n+1}(\vec{\gamma}_1)$ liegt. Diese Distanz ist dann kleiner als $\frac{\vartheta_1}{2}$. Wir setzen dann:

$$D_{\vartheta_1}^{n+1} =: D_{\vartheta_2}$$

und ersetzen $D_{\vartheta_1}^{n+1}$ durch eine Drehung D_{ϑ_2} mit $\vartheta_2 < \frac{\vartheta_1}{2}$. Es gilt dann für ein gewisses Vielfaches der Drehung D_{ϑ_2} :

$$D_{\vartheta_2}^m(\vec{\gamma}_1) < \vec{\gamma}_1 < D_{\vartheta_2}^{m+1}(\vec{\gamma}_1)$$

Mit demselben Argument ersetzen wir o.B.d.A.:

$$D_{\vartheta_2}^{m+1} =: D_{\vartheta_3}$$

Es gibt also eine Drehung D_{ϑ_3} mit $\vartheta_3 < \frac{\vartheta_2}{2}$, welche ein Vielfaches der Drehung D_{ϑ_2} ist. Wir wiederholen dasselbe Argument genügend oft, bis wir einen beliebig kleinen Drehwinkel $\vartheta_k < \frac{\vartheta_1}{2^{k-1}}$ erhalten, wobei die Drehung um diesen Winkel ein Vielfaches von D_{ϑ_1} ist: $D_{\vartheta_k} = D_{\vartheta_1}^r$ für ein genügend grosses $r \in \mathbb{N}$. Wenn wir also genügend oft drehen, wird die Bahn jedes beliebig kleinen Intervall treffen.

Als Resultat unserer Überlegungen haben wir:

Satz 2.1

Der Billardtisch sei ein Kreis.

Behauptung:

- 1) Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ein gekürzter Bruch und $p < \frac{q}{2}$. Dann hat die Bahn mit dem Startwinkel $\alpha = \pi \cdot \frac{p}{q}$ die Periode q und die Umlaufzahl p . Insbesondere gibt es für jedes teilerfremde Paar (p, q) von natürlichen Zahlen mit $p < \frac{q}{2}$ eine Bahn mit Periode q und Umlaufzahl p .
- 2) Der Startwinkel α sei *kein* rationales Vielfaches von π . Dann wird sich die Bahn nie schliessen und sie kommt jedem Punkt auf dem Kreisrand beliebig nahe.

□

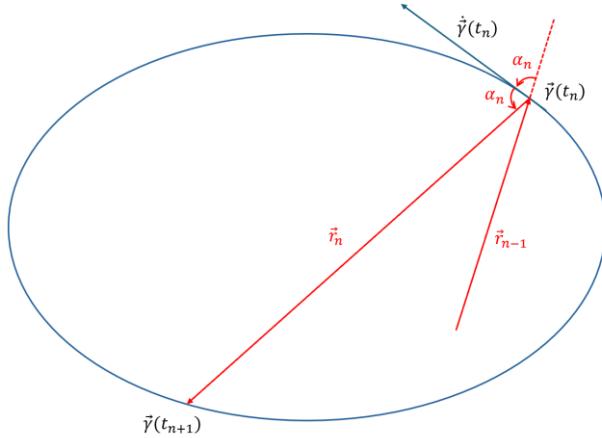
3. Elliptisches Billard

In diesem Kapitel betrachten wir einen elliptischen Billardtisch.

Die übliche Parameterdarstellung einer Ellipse mit Hauptachsen a und b ist gegeben durch:

$$\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^+$$

Auf diesem Tisch rollt eine Kugel reibungsfrei und wird vom Rand gemäss Reflexionsgesetz reflektiert.



Elliptisches Billard

Vor dem n-ten Stoß läuft die Kugel in die Richtung eines Vektors \vec{r}_{n-1} . Dann trifft sie auf den nächsten Stoßpunkt $\vec{y}(t_n)$. Der dort auftretende Stoßwinkel α_n ist definiert durch:

$$\alpha_n = \arccos \frac{\vec{r}_{n-1} \cdot \dot{\vec{y}}(t_n)}{|\vec{r}_{n-1}| |\dot{\vec{y}}(t_n)|}$$

Da dieser Winkel im Intervall $]0, \pi[$ liegt, ist diese Definition eindeutig. Dabei wird der Winkel immer im Gegenuhrzeigersinn gemessen. In der obigen Skizze gilt z.B. für den Reflexionswinkel im nächsten Stoßpunkt $\alpha_{n+1} > \frac{\pi}{2}$.

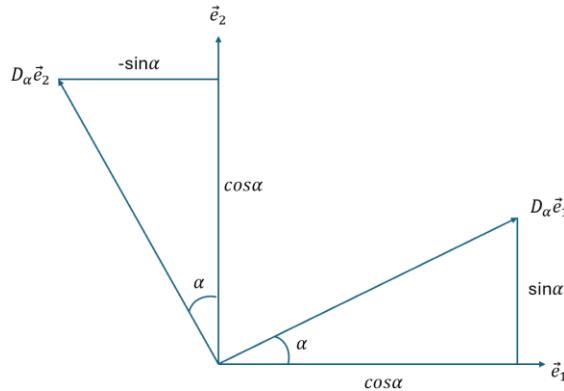
Wegen dem Reflexionsgesetz erhält man die nächste Laufrichtung der Kugel durch die Drehung von $\dot{\vec{y}}(t_n)$ um den Winkel α_n . Wenn D_{α_n} diese Drehung um den Winkel α_n ist (im Gegenuhrzeigersinn), dann gilt:

$$\vec{r}_n = D_{\alpha_n} \dot{\vec{y}}(t_n)$$

Wir überlegen uns zuerst, wie diese Drehung aussieht.

Bei einer Drehung um den Nullpunkt und den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn werden die Basisvektoren abgebildet wie folgt:

$$D_\alpha: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$



Drehung der Basisvektoren

Ein beliebiger Vektor ist Linearkombination der Basisvektoren. Bei einer Drehung spielt es keine Rolle, ob man zuerst linear kombiniert und dann dreht oder ob man die gedrehten Basisvektoren linear kombiniert. Somit wird ein beliebiger Vektor wie folgt gedreht:

$$D_\alpha: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$D_\alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dabei wird das Bild berechnet, indem man das Skalarprodukt einer Matrixzeile mit dem Vektor \vec{x} bildet. Das liefert dann die entsprechende Komponente des Bildvektors.

Wenn also α_n bekannt ist und die Drehung $D_{\alpha_n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{bmatrix}$ ist, dann läuft die Kugel nach dem n-ten Stoss auf einer Geraden

$$\vec{x}(u) = \vec{\gamma}(t_n) + u \cdot D_{\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n) = \begin{pmatrix} a \cos t_n \\ b \sin t_n \end{pmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -a \sin t_n \\ b \cos t_n \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$$

Diese Gerade hat zwei Schnittpunkte mit der Ellipse: Einen für $u = 0$ (der aktuelle Stosspunkt) und den anderen als neuen Stosspunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir die Komponenten der Geraden in die Ellipsengleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ein. Eine etwas aufwendige Rechnung liefert dann:

$$\begin{aligned} u^2 \cos^2 \alpha_n + u^2 \sin^2 \alpha_n \cdot \left[\frac{b^2}{a^2} \cos^2 t_n + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t_n \right] + 2u^2 \sin t_n \cos t_n \sin \alpha_n \cos \alpha_n \cdot \left[\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right] \\ - 2u \sin \alpha_n \left[\frac{b}{a} \cos^2 t_n + \frac{a}{b} \sin^2 t_n \right] = 0 \end{aligned}$$

Da wir $u = 0$ ausschliessen, liefert die Division durch u die Bedingung für die zweite Lösung:

$$\begin{aligned} u \left(\cos^2 \alpha_n + \sin^2 \alpha_n \cdot \left[\frac{b^2}{a^2} \cos^2 t_n + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t_n \right] + 2 \sin t_n \cos t_n \sin \alpha_n \cos \alpha_n \cdot \left[\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right] \right) \\ = 2 \sin \alpha_n \left[\frac{b}{a} \cos^2 t_n + \frac{a}{b} \sin^2 t_n \right] \end{aligned}$$

Diese Lösung liefert den nächsten Stosspunkt auf der Ellipse: $\vec{\gamma}(t_{n+1}) = \begin{pmatrix} a \cos t_{n+1} \\ b \sin t_{n+1} \end{pmatrix}$ und damit kann man t_{n+1} berechnen. Dann hat man $\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})$ und somit auch α_{n+1} .

Man hat also für das Ellipsenbillard eine Abbildung:

$$(t_n, \alpha_n) \rightarrow (t_{n+1}, \alpha_{n+1}), [0, 2\pi[x]0, \pi[\rightarrow [0, 2\pi[x]0, \pi[$$

Diese Abbildung wird beim elliptischen Billard iteriert.

Der Simulator wählt für die explizite Berechnung der Stosspunkte und Stosswinkel noch eine andere Variante. Diese ist in der mathematischen Dokumentation zum Simulator beschrieben.

Satz 3.1

Für das elliptische Billard kann die zugehörige Abbildung $(t_n, \alpha_n) \rightarrow (t_{n+1}, \alpha_{n+1})$, $[0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ explizit berechnet werden gemäss dem vorhin beschriebenen Vorgehen.

Der nächste Stosspunkt ergibt sich aus dem Schnitt zwischen der Geraden

$$\vec{x}(u) = \vec{\gamma}(t_n) + u \cdot D_{\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n)$$

Und der Ellipse. Der nächste Stosswinkel ist:

$$\alpha_{n+1} = \arccos \frac{\vec{r}_n \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})}{|\vec{r}_n| |\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})|}$$

□

Beispiel

Wir wollen prüfen, ob obige Formeln für das Billard im Kreis korrekt sind. Für den Einheitskreis gilt $a = b = 1$. Die Bedingung für die zweite Lösung in der obigen Formel reduziert sich dann auf

$$u = 2\sin\alpha_n$$

Wenn man dies in die Gleichung einsetzt, erhält man für den nächsten Stosspunkt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos t_{n+1} \\ \sin t_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t_n \\ \sin t_n \end{pmatrix} + 2\sin\alpha_n \begin{bmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t_n \\ \cos t_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t_n - 2\sin\alpha_n \cos\alpha_n \sin t_n - 2\sin^2\alpha_n \cos t_n \\ \sin t_n - 2\sin^2\alpha_n \sin t_n + 2\sin\alpha_n \cos\alpha_n \cos t_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t_n (\cos^2\alpha_n - \sin^2\alpha_n) - 2\sin\alpha_n \cos\alpha_n \sin t_n \\ \sin t_n (\cos^2\alpha_n - \sin^2\alpha_n) + 2\sin\alpha_n \cos\alpha_n \cos t_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t_n \cos 2\alpha_n - \sin t_n \sin 2\alpha_n \\ \cos t_n \sin 2\alpha_n + \sin t_n \cos 2\alpha_n \end{pmatrix} = D_{2\alpha_n} \begin{pmatrix} \cos t_n \\ \sin t_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der neue Stosspunkt entsteht also, wenn man den vorhergehenden Stosspunkt um den Winkel $2\alpha_n$ dreht. Das heißt: $t_{n+1} = t_n + 2\alpha_n$.

Ferner ist

$$\cos\alpha_{n+1} = \frac{\vec{r}_n \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})}{|\vec{r}_n| |\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})|}$$

Nun ist: $\vec{\gamma}(t_{n+1}) = D_{2\alpha_n} \vec{\gamma}(t_n)$, also $\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1}) = D_{2\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n)$. Andererseits $\vec{r}_n = D_{\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n)$. Der Ausdruck

$$\frac{\vec{r}_n \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})}{|\vec{r}_n| |\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})|}$$

Ist der Cosinus des Winkels zwischen \vec{r}_n und $\dot{\vec{\gamma}}(t_{n+1})$, also zwischen $D_{2\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n)$ und $D_{\alpha_n} \dot{\vec{\gamma}}(t_n)$. Aber das ist gerade α_n . Somit gilt:

$$\cos\alpha_{n+1} = \cos\alpha_n$$

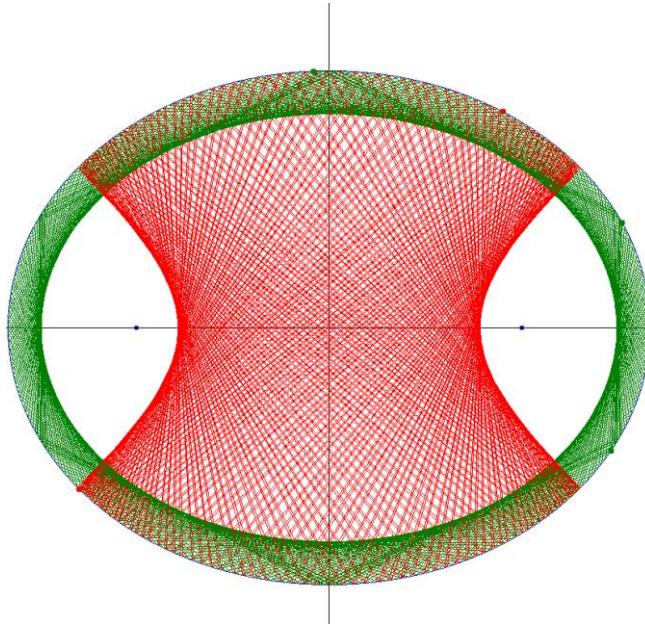
Und wegen $\alpha_n \in]0, \pi[$ gilt: $\alpha_{n+1} = \alpha_n = \text{konstant}$.

Dieses Resultat ist gerade die Abbildung $(t_n, \alpha_n) \rightarrow (t_{n+1}, \alpha_{n+1})$ beim Kreisbillard.

Das war jetzt etwas umständlich, diente aber der Kontrolle unserer bisherigen Überlegungen zum elliptischen Billard.

□

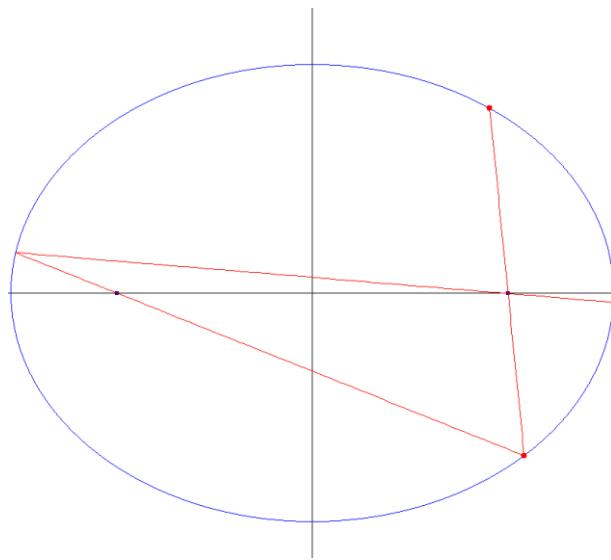
Wir machen nun ein Experiment mit dem Simulator:



Bahn zweier Kugeln auf dem elliptischen Billardtisch

Man sieht im obigen Bild: Wenn der Startwinkel flach gewählt wird (oben grün), dann läuft die Kugelbahn um die Brennpunkte der Ellipse herum. Wenn der Startwinkel steil ist (oben rot), dann läuft die Kugelbahn zwischen den Brennpunkten auf und ab.

Man weiss aus der Optik, dass Strahlen, welche von einem Brennpunkt ausgehen, im anderen Brennpunkt gebündelt werden. Ein Test mit dem Simulator zeigt dieses Verhalten, wobei bei einem Billardtisch mit dem Achsenverhältnis $c := \frac{b}{a} = 0.76$ im folgenden Bild $t_1 = 0.941304146267719$ und $\alpha_1 = 2.17540450580406$ gewählt wird.



Eine Kugel startet rechts oben und die Bahn läuft beim Start durch den Brennpunkt rechts

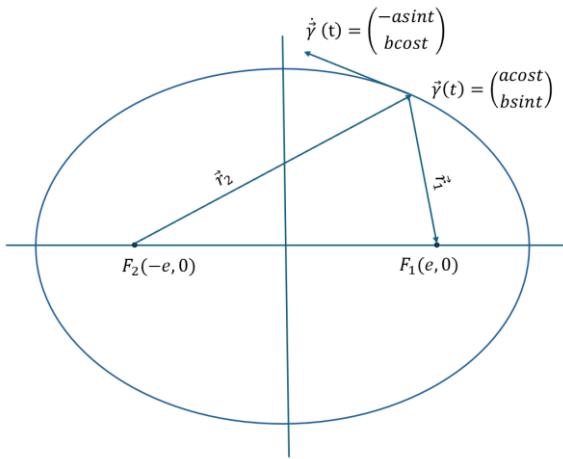
Es gibt elegante elementargeometrische Beweise für die Behauptung, dass eine Kugelbahn, welche durch den einen Brennpunkt geht, nach dem Stoß durch den anderen Brennpunkt geht. Wir wollen hier einen Beweis mit Vektorgeometrie anführen.

Die Brennpunkte einer Ellipse mit Hauptachse a und Nebenachse b haben die Koordinaten $(\pm e, 0)$ wobei $e^2 := a^2 - b^2$. Es sei t wieder der Parameter der eingangs definierten Parameterdarstellung der Ellipse.

Als Vorbereitung stellen wir fest:

$$e \cdot \cos t \leq e < \sqrt{e^2 + b^2} = a$$

Somit ist $a - e \cdot \cos t > 0$



Brennpunkte der Ellipse

Für den Betrag der Vektoren $\vec{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm a \cos t + e \\ \pm b \sin t \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{1,2}|^2 &= a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t + e^2 \pm 2e \cos t \\ &= a^2(1 + \cos^2 t) + b^2(\sin^2 t - 1) \pm 2e \cos t \\ &= a^2 + a^2 \cos^2 t - b^2 \cos^2 t \pm 2e \cos t \\ &= a^2 + e^2 \pm 2e \cos t = (a \pm e \cos t)^2 \end{aligned}$$

Weil $a - e \cdot \cos t > 0$ gilt somit: $|\vec{r}_{1,2}| = a \pm e \cos t$

Nun berechnen wir:

$$\vec{r}_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}} = -e a \sin t \mp a^2 c o s t s i n t \pm b^2 s i n t c o s t = -e a \sin t \mp e^2 s i n t c o s t = -e \sin t (a \pm e \cos t)$$

Somit gilt:

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}}{|\vec{r}_{1,2}| |\dot{\vec{r}}|} = \frac{-e \sin t}{|\dot{\vec{r}}|}$$

Wenn $\alpha_{1,2}$ je der Winkel zwischen $\vec{r}_{1,2}$ und der Tangente $\dot{\vec{x}}$ ist. Die rechte Seite ist aber unabhängig davon, ob man \vec{r}_1 oder \vec{r}_2 betrachtet und somit ist $\alpha_1 = \alpha_2$, da diese Winkel im Intervall $]0, \pi[$ liegen.

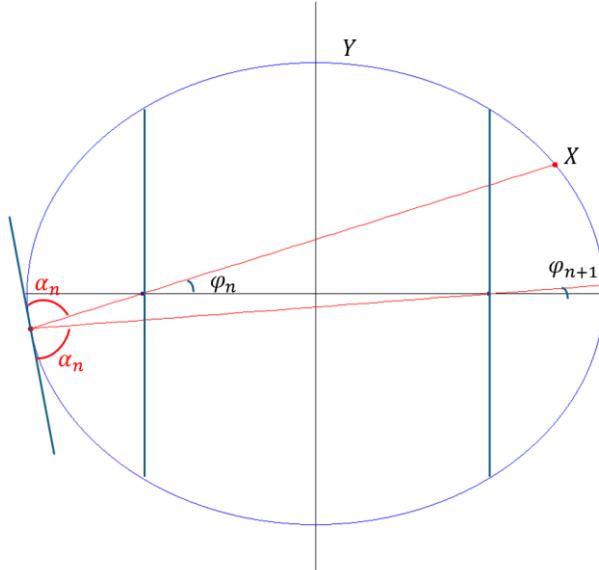
Resultat:

Satz 3.2

Wenn *ein* Bahnabschnitt der Billardkugel durch einen Brennpunkt der Ellipse geht, dann geht *jeder* Bahnabschnitt der Kugel abwechselungsweise durch einen der Brennpunkte.

□

Betrachten wir nochmals den Fall einer Bahn, welche durch einen Brennpunkt geht:



Bahn durch die Brennpunkte

Angenommen, die Kugel startet in einem Punkt X und geht dann durch den entfernten Brennpunkt. Dabei schliesst die Kugelbahn mit der x-Achse den Winkel φ_n ein. Falls X wie oben skizziert oberhalb der x-Achse liegt, dann ist der Stosswinkel $\alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Nach dem Stoss gilt dann für den nächsten Winkel zwischen Kugelbahn und x-Achse: $\varphi_{n+1} = \varphi_n - (\pi - 2\alpha_n)$. Aus Symmetriegründen gilt das analog auch für den nächsten Stoss. Somit nimmt der Winkel φ_n bei jedem Stoss ab. Die untere Grenze wird erreicht, wenn $\pi - 2\alpha_n \approx 0$ ist, bzw. wenn die Kugel zwischen den Scheitelpunkten der Hauptachse hin- und herläuft.

Wenn die Kugel in einem Punkt Y gestartet wäre, dann wird obiger Fall nach dem ersten Stoss erreicht. Falls die Kugel in X startet, aber durch den nahen Brennpunkt geht, dann landet sie nach dem ersten Stoss in einem Punkt im Bereich wie Y und nach dem zweiten hat man wieder obigen Fall. Somit haben wir als Resultat;

Satz 3.3

Eine Bahn, welche durch die Brennpunkte der Ellipse geht, kommt der Hauptachse der Ellipse im Laufe der Iteration beliebig nahe.

□

Eine verlockende Frage ist, *ob man das elliptische Billard als affines Bild des Kreisbillards auffassen könnte*. Ähnlich wie beim Schulprojekt *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums*, wo wir das logistische Wachstum mit dem Parameter $a = 4$ als Konjugierte der Zeltabbildung darstellen konnten. Damit haben wir viel Klarheit über das logistische Wachstum gewonnen.

Wenn also $g: (s, \beta) \mapsto (s', \beta')$ das Kreisbillard beschreibt mit gewissen Startparametern, dann sollte das elliptische Billard $f: (t, \alpha) \mapsto (t', \alpha')$ darstellbar sein als eine Konjugierte in der Form:

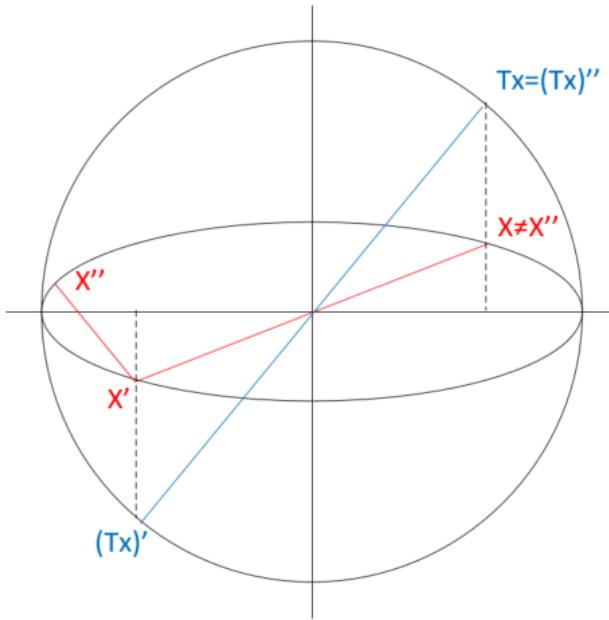
$$f(t, \alpha) = T^{-1} \circ g \circ T(t, \alpha) = T^{-1} \circ g(s, \beta) = T^{-1}(s', \beta') = (t', \alpha')$$

Wobei T die Streckung der Ebene in y -Richtung um den Faktor a/b ist. Dann nämlich wird eine Ellipse mit den Achsen a und b in einen Kreis mit Radius a überführt. Für einen Punkt $\vec{x}(t)$ auf der Ellipse gilt dann:

$$T: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \mapsto \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$$

Wir würden also den Startpunkt und den Startwinkel der Kugel zuerst durch T auf den entsprechenden Startpunkt einer Kugel im Kreis abbilden. Dann wird im Kreis ein Stoß durchgeführt, was zu einem nächsten Stoßpunkt führt, wobei beim Kreis der Startwinkel beim Stoß konstant bleibt. Anschliessend transformieren wir alles zurück auf die Ellipse und hoffen dann, dass wir dasselbe Resultat erhalten, wie wenn wir den Stoß gemäss Reflexionsgesetz direkt in der Ellipse durchgeführt hätten.

Kann das gutgehen? Zum Beispiel bleiben die Brennpunkte der Ellipse bei der Abbildung T fix, verlieren aber im Kreis ihre Bedeutung. Wir suchen also eher ein Gegenbeispiel, welches zeigt, dass die vorgeschlagene Konjugation so nicht funktioniert. Dazu betrachten wir folgende Figur:



Affine Abbildung zwischen Ellipse und Kreis

Wir betrachten den Punkt X . Der wird beim Billard nach zwei Stößen bei X'' landen. Das Bild von X unter der affinen Abbildung T ist TX . Dieser Punkt landet nach zwei Stößen wieder bei ihm selbst und nicht bei TX'' .

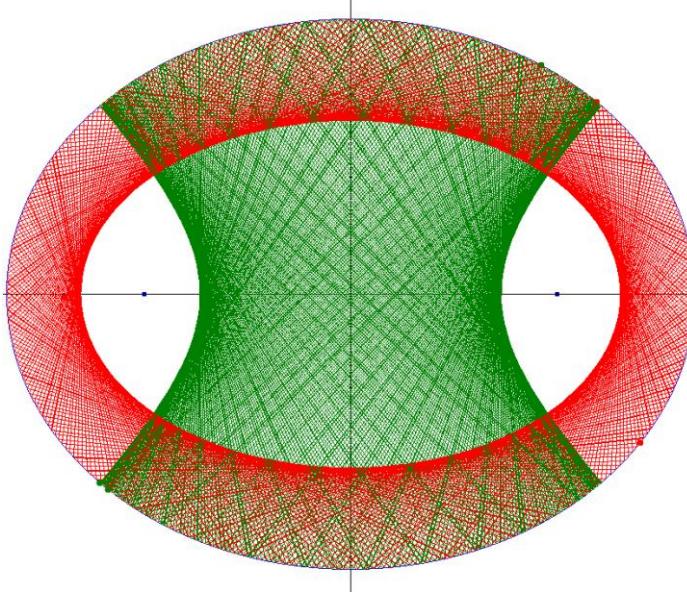
Satz 3.4

Es ist *nicht* möglich, das elliptische Billard als affine Konjugierte des Kreisbillards darzustellen.

□

4. Kaustik im elliptischen Billard

Eine *Kaustik* ist ein Begriff aus der Optik und bezeichnet einen Bogen, an welchen Lichtstrahlen eines optischen Systems Tangenten sind. Im Falle des Billards betrachtet man statt Lichtstrahlen die Kugelbahnen. Beim elliptischen Billard haben wir bereits Bilder gesehen:

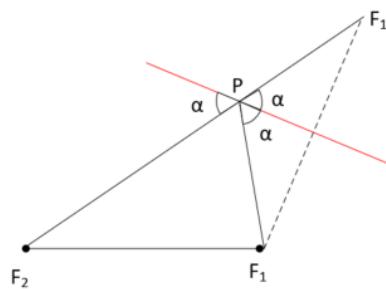


Kaustiken im elliptischen Billard

Gezeigt werden im obigen Bild die Bahnen von zwei unterschiedlichen Kugeln, eine in Grün mit Startrichtung zwischen den Brennpunkten, und eine in Rot mit Startrichtung ausserhalb der Brennpunkte der Ellipse. Man sieht, dass die Kaustik in beiden Fällen offenbar wieder ein Kegelschnitt ist. Im roten Fall eine Ellipse und im grünen Fall eine Hyperbel. Diese haben dieselben Brennpunkte wie die Ellipse des Billardtisches.

Wir wollen diesen Sachverhalt im Falle der roten Bahnkurve beweisen. Mit Hilfe der Vektorgeometrie kann das aufwendig werden. Wir greifen auf einen elementargeometrischen Beweis zurück.

Wir betrachten den elliptischen Billardtisch und einen festen, vorgegebenen Bahnabschnitt einer Kugel. Zuerst müssen wir uns überlegen, wo dieser Bahnabschnitt die Kaustik berührt. Wir betrachten dazu eine (andere) Kugel, welche in einem Brennpunkt startet, am vorgegebenen Bahnabschnitt gemäss Reflexionsgesetz gespiegelt wird und zum anderen Brennpunkt läuft. (Es gibt immer eine solche Bahn.)



Konstruktion des Punktes P auf dem Bahnabschnitt (rot)

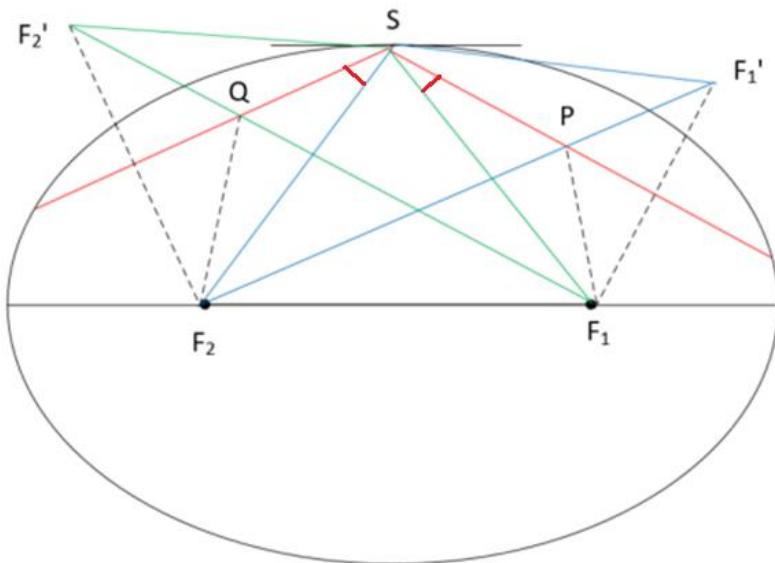
Oben ist der Bahnabschnitt rot dargestellt. Wir müssen den gesuchten Treffpunkt P so wählen, dass für einen Brennstrahl das Reflexionsgesetz gilt. Dazu spiegeln wir F_1 am Bahnabschnitt und

verbinden dann den gespiegelten Punkt F_1' mit dem anderen Brennpunkt F_2 . Im Schnittpunkt P mit dem Bahnabschnitt sind alle markierten Winkel gleich und somit gilt das Reflexionsgesetz. Dieses gilt auch genau dann, wenn die Kaustik den Bahnabschnitt im Punkt P berührt. Vielleicht ist die Kaustik noch keine Ellipse, es gibt aber eine Ellipse E_1 mit Brennpunkten F_1 und F_2 , so dass der Bahnabschnitt eine Tangente an diese Ellipse ist.

Man kann leicht prüfen, dass wir denselben Punkt P erhalten, wenn wir statt F_1 den anderen Brennpunkt F_2 gespiegelt hätten.

Dann konstruieren wir für den nächsten Bahnabschnitt nach demselben Verfahren den nächsten Treffpunkt Q . Auch zu diesem Punkt gibt es eine Ellipse E_2 mit Brennpunkten F_1 und F_2 , so dass der Bahnabschnitt eine Tangente an diese Ellipse ist. Zu zeigen ist jetzt, dass $E_1 = E_2$ und das ist dann gerade die Kaustik.

Wir betrachten folgende Figur mit der ursprünglichen Ellipse, den Bahnabschnitten (rot), dem Stosspunkt S und den wie vorhin konstruierten Punkten P, Q :



Zwei aufeinanderfolgende Bahnabschnitte (rot) mit dem Stosspunkt S auf der Ellipse

Wir betrachten zuerst die Winkel im Stosspunkt. Eine Kugel, welche im Brennpunkt F_2 in Richtung der blauen Linie startet und im Stosspunkt reflektiert wird, landet nach Satz 3.2 beim anderen Brennpunkt F_1 . Wegen dem Reflexionsgesetz gilt:

$$\text{Winkel (blaue Linie durch } F_2, \text{Tangente)} = \text{Winkel (grüne Linie durch } F_1, \text{Tangente)}$$

Da die roten Linien Bahnkurven der Kugel sind, gilt auch hier das Reflexionsgesetz und damit:

$$\text{Winkel (rote Linie nach dem Stoss, Tangente)} = \text{Winkel (rote Linie vor dem Stoss, Tangente)}$$

Daraus folgt aber, dass auch die Differenzwinkel (rot markiert in der Figur) auf beiden Seiten gleich sind. Da F_2 und F_2' spiegelsymmetrisch sind, sind auch die Winkel der gespiegelten Differenzwinkel gleich. Damit haben wir ein erstes Zwischenresultat:

Im Punkt S sind die Innenwinkel des blauen und des grünen Dreiecks gleich.

Wegen der Spiegelung gilt nun: $|SF_2'| = |SF_2|$ und $|SF_1'| = |SF_1|$. Also ist das blaue und das grüne Dreieck *kongruent*. Somit ist auch die dritte, dem Punkt S gegenüberliegende Seite bei beiden Dreiecken gleich lang und es gilt:

$$|F_2'F_1| = |F_1'F_2| \Rightarrow |F_2Q| + |QF_1| = |F_2P| + |PF_1|$$

Weil eine Ellipse der Ort aller Punkte ist, welche von zwei (Brenn-) Punkten eine konstante Abstandssumme haben, liegen P und Q auf *derselben* Ellipse und es gilt $E_1 = E_2$.

Eine analoge Betrachtung für den Fall, dass die Bahnabschnitte zwischen den Brennpunkten verlaufen, werden wir in Form einer Übung führen und sehen, dass in diesem Fall als Kaustik eine Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 erscheint.

Im konkreten Fall kann man diese Ellipse (bzw. Hyperbel) explizit bestimmen, indem man wie in der obigen Konstruktion vorgeht und die jeweilige Hauptachsenlänge $|F_2P| + |PF_1|$ berechnet.

Resultat:

Satz 4.1

Beim elliptischen Billard ist die Kaustik

- a) Eine Ellipse, falls die Kugelbahn ausserhalb der Brennpunkte verläuft
- b) Eine Hyperbel, falls die Kugelbahn innerhalb der Brennpunkte verläuft

Beide Kegelschnitte haben dieselben Brennpunkte wie die ursprüngliche Ellipse.

□

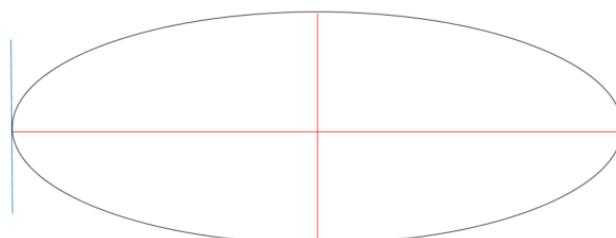
Bemerkung: Im Fall der Hyperbel kann der Berührungsrand der (verlängerten) Kugelbahn auch ausserhalb des Billardtisches liegen.

Sobald der Ausgangspunkt und der erste Reflexionswinkel einer Kugel auf einem elliptischen Billardtisch bestimmt sind, ist damit auch die zugehörige Kaustik eindeutig festgelegt. Das heisst, dass die weitere Kugelbahn auch durch die Kaustik definiert ist. Man legt von einem Stosspunkt eine Tangente an die Kaustik, schneidet sie mit der Ellipse und erhält den nächsten Stosspunkt.

5. Periodische Punkte beim elliptischen Billard

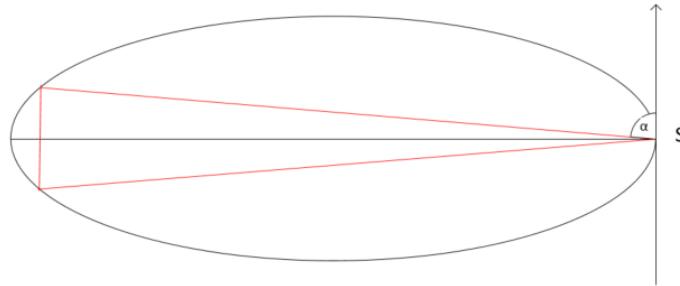
In diesem Abschnitt untersuchen wir periodische Bahnen beim Ellipsenbillard.

Bei einem 2-periodischen Punkt muss die Richtung der einfallenden Kugelbahn gerade um den Winkel π gedreht werden, damit der ausfallende Strahl wieder den ursprünglichen Ausgangspunkt trifft. Das heisst, dass die Einfallsrichtung senkrecht auf der Tangente im Stosspunkt ist. Dasselbe gilt auch, wenn die Kugel wieder am Ausgangspunkt auftrifft. Die einzigen möglichen Bahnen sind somit:



2-periodische Bahnen beim Ellipsenbillard

Bahnen der Periode drei existieren. Wenn man nachfolgende Skizze betrachtet:



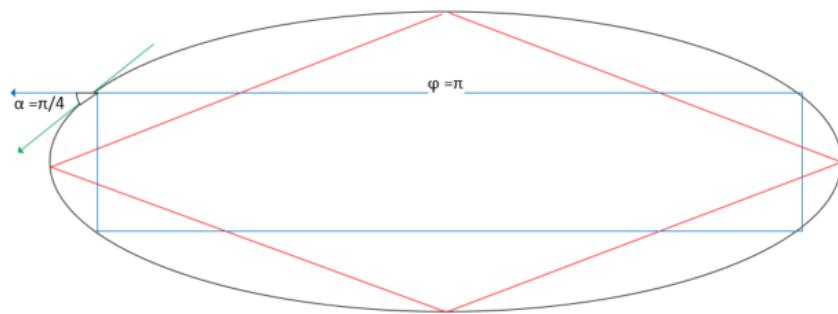
Eine drei-periodische Bahn

Ausgehend vom Punkt S ist α so zu wählen, dass die Kugel nach dem ersten Stoss senkrecht nach unten läuft und nach dem Zweiten Stoss wieder im Punkt S eintrifft. Wenn man mit dem Simulator experimentiert, sieht man, dass dies möglich ist. Wird α etwas zu klein gewählt, landet man etwas unterhalb von S . Wird α zu gross gewählt, landet man oberhalb von S . Wird α dazwischen stetig verändert, dann muss es ein α geben, dass der Punkt S wieder getroffen wird.

Analytisch oder elementargeometrisch scheint es schwierig, eine Lösung für das Problem zu finden. Ein vektorgeometrischer Ansatz führt nämlich auf eine komplizierte Gleichung für das gesuchte α .

Mit dem Simulator kann man aber eine Näherungslösung zu finden. Man startet in einem Experiment wir mit einem etwas zu kleinem α_1 und wählen dann das nächste α_2 etwas zu gross. Das gesuchte α muss also aus Stetigkeitsgründen irgendwo dazwischenliegen. Mit einem Intervallschachtelungsverfahren kann man dann das gesuchte α immer genauer eingrenzen.

Bahnen der Periode 4 findet man wieder leicht:



Bahnen der Periode vier

Rot dargestellt ist eine Bahn, welche von einem Scheitelpunkt zum nächsten läuft. Sie kann im Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.

Blau dargestellt ist eine weitere 4-periodische Bahn. Der Aufschlagpunkt beim Winkel α ist leicht zu bestimmen: Der neue Richtungswinkel der Bahn muss nach dem Stoss senkrecht nach unten zeigen. Der Richtungswinkel der Kugel vor dem Stoss ist gleich π . Dann muss die Richtung der Tangente relativ zur positiven x-Achse $5\pi/4$ betragen. Das liefert für den gesuchten Stosspunkt die Koordinaten

$$\vec{r} \approx \begin{pmatrix} -a \cdot 0.707 \\ b \cdot 3.927 \end{pmatrix}$$

Experimente mit dem Simulator zeigen, dass offenbar auch nicht symmetrische Bahnen der Periode 4 existieren, z.B. mit Startpunkt $t = 1$ liegt ein entsprechender Startwinkel α im Intervall [0.721, 0.722].

Mit dieser Methode lassen sich offenbar Startwinkel finden, welche zu Bahnen einer beliebig vorgegebenen Periode führen. Tatsächlich existieren beim elliptischen Billard Bahnen jeder Periode. Es gilt:

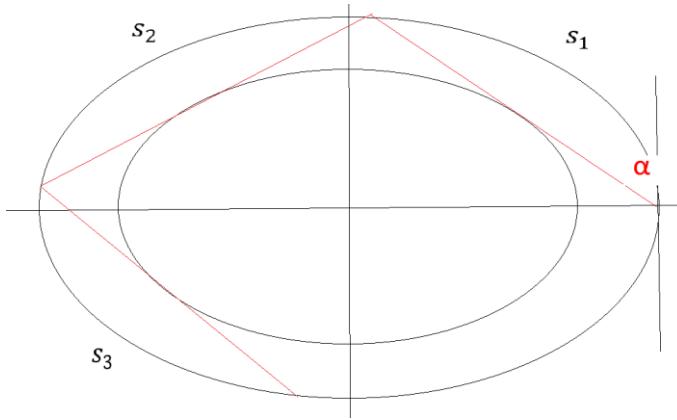
Satz 5.1

Beim elliptischen Billard existiert für jedes teilerfremde Paar (p, q) natürlicher Zahlen mit $q \geq 2$ und $p < [q/2]$ eine q -periodische Bahn mit Umlaufzahl p .

$[q/2]$ bezeichnet hier die nächstkleinere natürliche Zahl kleiner als $q/2$.

□

Beweis



Ein Ball startet im rechten Scheitelpunkt und einem Startwinkel α

Wenn ein Ball im rechten Scheitelpunkt und dem Winkel α startet, dann ist die Kaustik durch den ersten Bahnabschnitt definiert. Die weiteren Bahnabschnitte sind wohldefinierte Tangenten an die Kaustik. Der Drehsinn bleibt dabei erhalten. Die Bogenlängen der Bahnabschnitte s_1, s_2, s_3, \dots auf dem Ellipsenrand liegen auf der Außenseite der Bahnabschnitte relativ zur Kaustik und sind ebenfalls wohldefiniert.

Nun betrachten wir die Funktionen

$$L_q(\alpha) := \sum_{i=1}^q s_i$$

wobei q fix ist. Das ist die gesamte Bogenlänge auf der Ellipse, welche der Kugelbahn nach q Stößen entspricht. $L_q(\alpha)$ ist stetig und streng monoton wachsend in α , da der Startpunkt im rechten Scheitelpunkt der Ellipse fixiert ist. Nun lassen wir α gegen $\pi/2$ gehen. Dann nähert sich die Kugelbahn der zweiperiodischen Bahn zwischen den Hauptscheitelpunkten. Bei q Stößen entspricht der Kugelbahn dann die Bogenlänge $q \cdot \frac{U}{2}$, wenn U der Umfang der Ellipse ist. Somit ist $L_q(\alpha)$ eine stetige Abbildung:

$$L_q(\alpha):]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow]0, q \cdot \frac{U}{2}]$$

Welche das Maximum in $\frac{\pi}{2}$ annimmt: $L_q\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot U$. Die Kugel hat dabei genau $p = [\frac{q}{2}]$ Umläufe gemacht.

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt $L_q(\alpha)$ jeden Wert im Intervall $]0, q \cdot \frac{U}{2}]$ an, also insbesondere auch alle Werte $p \cdot U$ für $p < [\frac{q}{2}]$. Für jedes feste $p < [\frac{q}{2}]$ gibt es also eine q -periodische Bahn, sodass die Kugel nach q Stößen und spätestens nach p Umläufen wieder am Anfangspunkt angelangt ist. Die Frage ist jetzt, ob p die korrekte Umlaufzahl der Bahn ist, oder ob die Kugel bereits früher, also bereits nach $q' < q$ Stößen zum ersten Mal an den Ausgangspunkt zurückkehrt. Angenommen, die zugehörige Umlaufzahl wäre $p' < p$. Da die Kugel auf jeden Fall nach q Stößen und p Umläufen am Ausgangspunkt ist, müsste es eine natürliche Zahl s geben, so dass $s \cdot q' = q$ und $s \cdot p' = p$ ist. Das heisst, p und q wären nicht teilerfremd. Daraus folgt die Behauptung im Umkehrschluss.

□

6. Das Phasenportrait

Ein Billardtisch sei definiert durch die Randkurve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$. Jeder Stoss wird durch ein Paar (t_n, α_n) mit $t_n \in I$ und $\alpha \in]0, \pi[$ eindeutig beschrieben.

Definition 6.1

Jeder Stoss kann durch einen Punkt im Raum $I \times]0, \pi[$ dargestellt werden. Dieser Raum aller möglichen Stösse heisst *Phasenraum*.

□

Die Bahn einer Kugel ist bestimmt, wenn ein Startpunkt auf dem Rand des Billardtisches sowie ein Startwinkel gegeben ist. Jeder folgende Stoss ist definiert durch eine Billardabbildung

$$(t_n, \alpha_n) \rightarrow (t_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

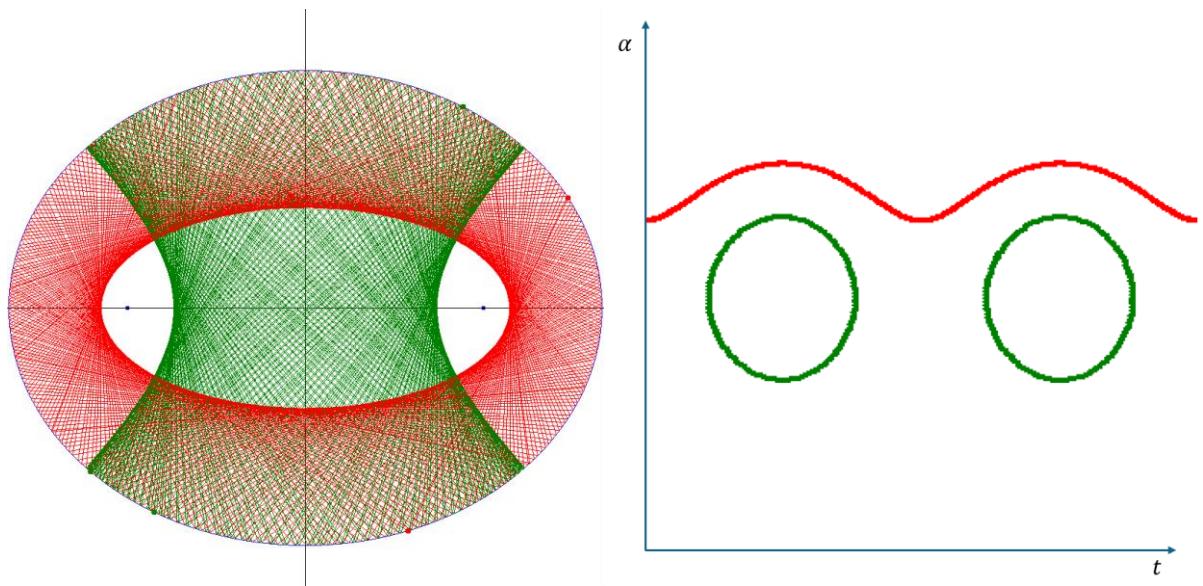
Wobei $t_n \in I$ und $\alpha \in]0, \pi[$. Wenn also t_1 und α_1 gegeben sind, besteht die Bahn aus allen folgenden Paaren (t_n, α_n) .

Definition 6.2

Die Menge aller Paare (t_n, α_n) , welche bei einer Bahn auftreten, kann im Phasenraum dargestellt werden. Diese Menge heisst *Phasenportrait* der Bahn.

□

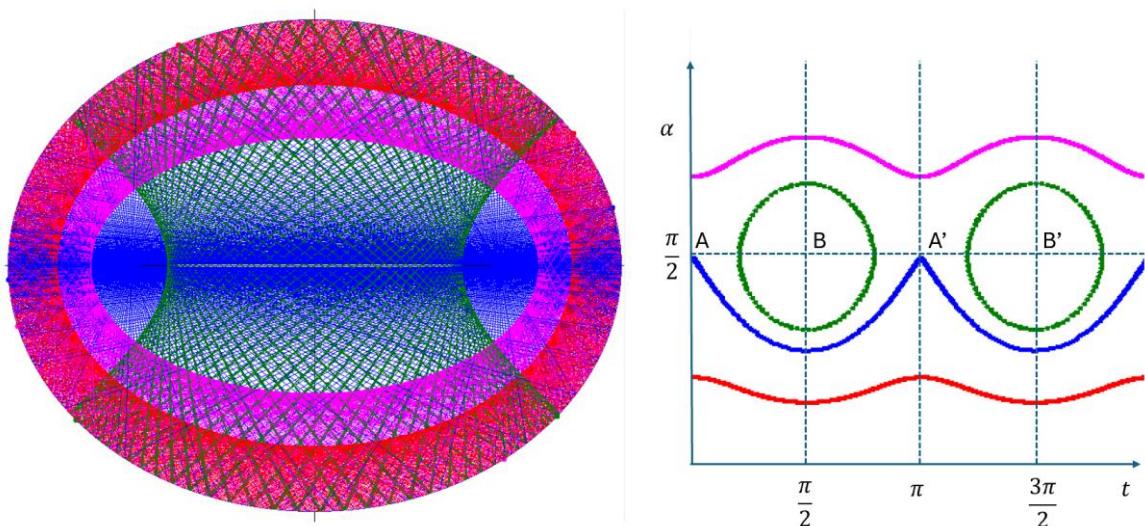
Wir wollen ein Beispiel im Falle des elliptischen Billards und je einer roten und grünen Bahn ansehen. Der Simulator zeigt für jede Bahn auch das zugehörigen Phasenportrait:



Zwei Kugelbahnen links und rechts das zugehörige Phasenportrait

Im Phasenportrait ist auf der x-Achse der Parameter t abgetragen und auf der y-Achse der Stosswinkel α . Man sieht, dass die rote Bahn mit der Zeit allen Randpunkten auf der Ellipse nahekommt. Der Stosswinkel α pendelt in einem begrenzten Bereich. Das führt zur roten Wellenlinie rechts, welche sich aber in x-Richtung über das ganze Intervall I zieht. Bei der grünen Bahn sind die Stosspunkte entweder am oberen Rand oder dem unteren Rand. Deshalb zerfällt das Phasenportrait in zwei getrennte Bereiche im Intervall I , welche abwechselungsweise getroffen werden, weil die Kugel zwischen dem oberen und unteren Rand des Billardtisches hin- und herpendelt. Auch hier liegt der Stosswinkel α in einem begrenzten Bereich.

Nun untersuchen wir das Phasenportrait noch etwas genauer. Zuerst stellen wir wegen der Periodizität der Sinus- und Cosinus-Funktion fest, dass man für $t = 0$ und $t = 2\pi$ für jede Bahn identische Stosspunkte mit identischen Stosswinkeln hat. Der Phasenraum ist somit ein Zylinder. Dabei ist der Phasenraum an den Geraden $t = 0$ und $t = 2\pi$ «zusammengeklebt».



Phasenportrait spezieller Bahnen

Im obigen Diagramm gehören die Punkte A, A' zu einer Bahn, welche im rechten Scheitelpunkt der grossen Halbachse, also bei $t = 0$, unter einem Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ startet. Sie stösst dann im linken Scheitelpunkt, also bei $t = \pi$, auf den Billardrand und wird dort wieder unter dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ reflektiert. Das heisst, das Phasenportrait dieser Bahn besteht aus den Punkten A, A' und pendelt zwischen diesen hin- und her. Ebenso gehört das Punktpaar B, B' zu einer Bahn, welche zwischen den Scheitelpunkten der kleinen Halbachse hin- und herpendelt. Bei der grünen Bahn bleiben t, α in einem begrenzten Bereich und die Stosspunkte pendeln zwischen der linken und rechten grünen Kurve hin- und her. Die blaue Kurve zeigt eine Bahn, welche durch die Brennpunkte der Ellipse geht. Bei der roten Bahn war der erste Stosswinkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Aus den Sätzen über die Kaustik ist klar, dass diese Bahn im Gegenuhrzeigersinn dreht und sämtliche Stosswinkel $< \frac{\pi}{2}$ bleiben. Ebenso ist der erste Stosswinkel bei der Bahn in Magenta $\alpha > \frac{\pi}{2}$ und diese Bahn dreht im Uhrzeigersinn, wobei die Stosswinkel immer $> \frac{\pi}{2}$ bleiben.

Wir betrachten eine Kugel, welche in einer bestimmten Startposition auf dem elliptischen Billardtisch startet und ausserhalb der Brennpunkte läuft. Dann wird dadurch die zugehörige Kaustik eindeutig definiert. Diese Kaustik definiert je eine Abbildung

$$\tau_l: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$$

Und

$$\tau_r: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$$

Denn ausgehend von einem Startpunkt auf dem Rand gibt es eine linksdrehende Bahn (das ist der erste Fall oben), bei welcher jeder Bahnabschnitt die Tangente vom Startpunkt an die Kaustik ist. Ebenso gibt es eine rechtsdrehende Bahn (das ist der zweite Fall oben).

Für den Fall, dass die Kugel innerhalb der Brennpunkte läuft, hat man eine analoge Überlegung.

Definition 6.3

Sei ein elliptischer Billardtisch gegeben und eine Kaustik. Dann nennen wir die Menge der Punktpaare $(t, \tau_l(t))$ bzw. $(t, \tau_r(t))$ gemäss obiger Abbildungen eine *Trajektorie* im Phasenraum.

□

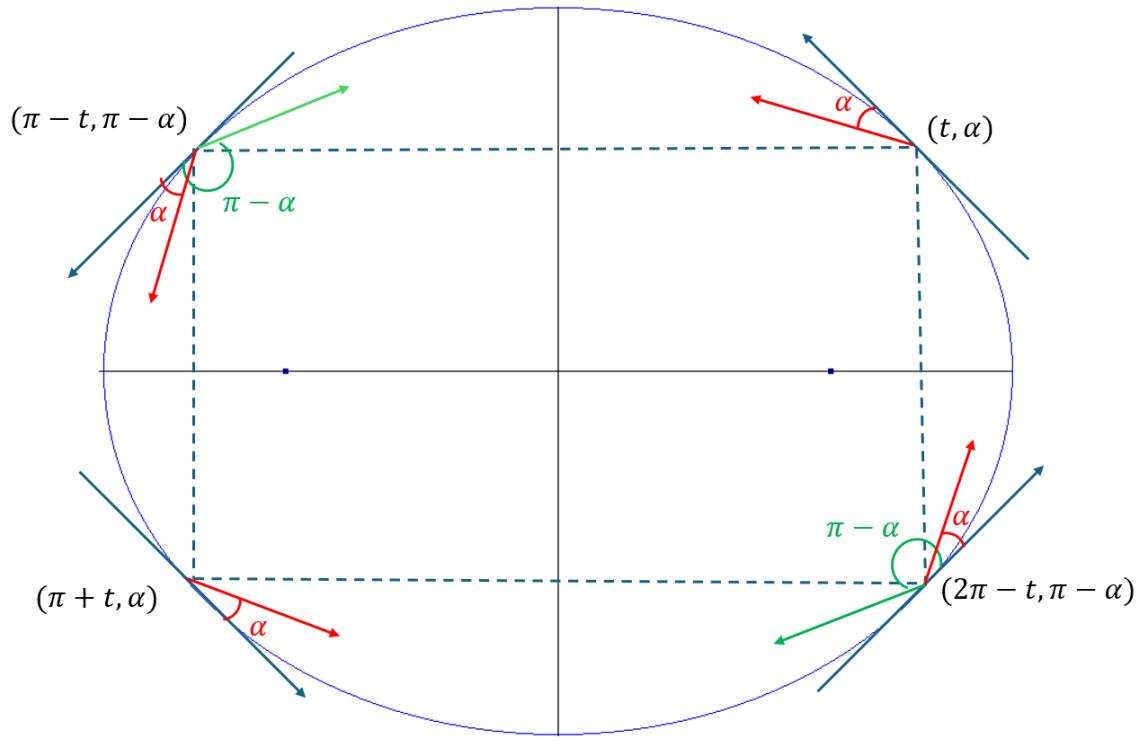
Daraus ergibt sich unmittelbar

Korollar 6.4

Wenn zwei Bahnen dieselbe Kaustik und denselben Drehsinn haben, dann liegt ihr Phasenportrait auf derselben Trajektorie im Phasenraum.

□

Damit können wir nun die offenbar vorhandenen Symmetrien im Phasenraum genauer untersuchen. Wir betrachten folgende Skizze:



Bahnen mit symmetrischen Startparametern

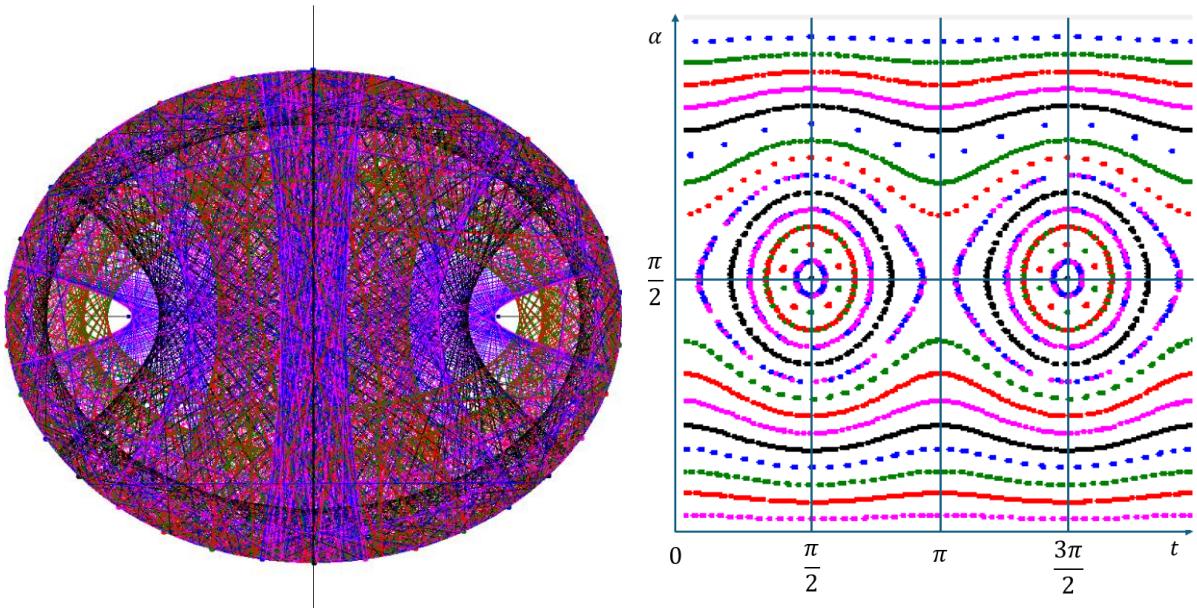
Wegen der Achsensymmetrie der Ellipse haben die linksdrehende rote Bahn mit dem Startpunkt (t, α) und die rechtsdrehende grüne Bahn mit dem Startpunkt $(\pi - t, \pi - \alpha)$ dieselbe Kaustik. Wegen dem Reflexionsgesetz hat dann auch die rechtsdrehende rote Bahn dieselbe Kaustik. Wenn man das Argument auf die weiteren, oben gezeichneten Startpunkte ausdehnt, sieht man, dass alle roten Bahnabschnitte auf derselben Trajektorie im Phasenraum liegen und ebenso alle grünen Bahnabschnitte. Im roten Fall hat diese Trajektorie für die Werte von t und $\pi - t$ denselben Wert α . Sie ist also Spiegelsymmetrisch zur senkrechten Geraden $t = \frac{\pi}{2}$. Dasselbe gilt, wenn man die unteren roten Punkte in obiger Skizze betrachtet, für die Symmetriearchse $t = \frac{3\pi}{2}$. Da auch für t und $2\pi - t$ derselbe Wert von α auftritt, hat man auch die Symmetriearchse $t = \pi$. Ferner sind die linksdrehende, rote Trajektorie und die zugehörige rechtsdrehende, grüne Trajektorie symmetrisch, wobei für ein festes t zu einem roten Winkel α der zugehörige grüne Winkel $\pi - \alpha$ gehört. Das heisst, dass auch die waagrechte Gerade $\alpha = \frac{\pi}{2}$ eine Symmetriearchse des Phasenraumes ist. Eine analoge Überlegung, falls die Kugelbahn innerhalb der Brennpunkte verläuft, überlassen wir als Übung. Als Resultat haben wir:

Satz 6.5

Beim elliptischen Billard hat der Phasenraum als Zylinder vier senkrechte Symmetriearchsen, nämlich $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi, t = \frac{3\pi}{2}$ und die waagrechte Symmetriearchse $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

□

Das Phasenportrait und der Phasenraum sind nützlich, weil sie eine gute Übersicht über die Menge aller Bahnen liefern. Im Simulator kann man viele Kugeln mit verschiedenen Startwinkeln über den Billardtisch verteilen, laufen lassen und dann den Phasenraum ansehen.



Phasenportrait vieler Kugelbahnen mit Symmetrieachsen

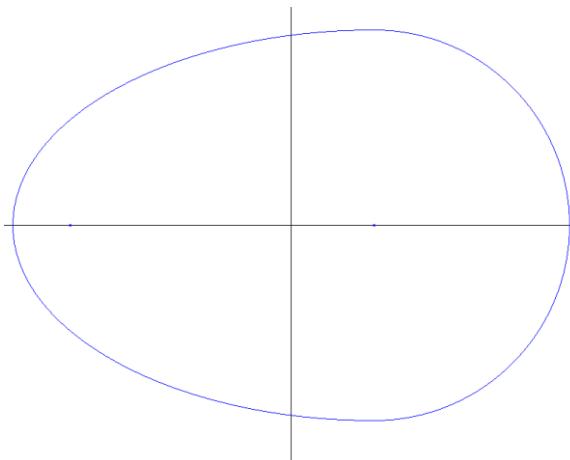
7. Ovales Billard

Hühner hätten wahrscheinlich keine Freude an gewissen Eiern, welche wir im Folgenden als Billardtisch benutzen. Wir setzen den Billardtisch nämlich zusammen aus einem Halbkreis und einer halben Ellipse. Dabei ist b immer der Kreisradius und falls $a \geq b$ ist a die Hauptachse der Ellipse und b deren Nebenachse. Falls $a < b$ ist es gerade umgekehrt. Im Simulator kann man das Verhältnis $c := \frac{b}{a}$ frei wählen und je nach Wahl passt sich die Form des Billardtisches an.

Als Parameterdarstellung des Ovals wählen wir:

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} \left(\begin{array}{c} m + b \cos t \\ b \sin t \end{array} \right), & t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \left(\begin{array}{c} m + a \cos t \\ b \sin t \end{array} \right), & t \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

Wobei $m := (a - b)/2$ die x-Koordinate des Mittelpunktes des Halbkreises ist. Seine y-Koordinate ist 0.



Ovaler Billardtisch: Links eine halbe Ellipse, rechts ein Halbkreis

Die so parametrisierte Kurve ist stetig an den Verbindungsstellen. Es gilt z.B.:

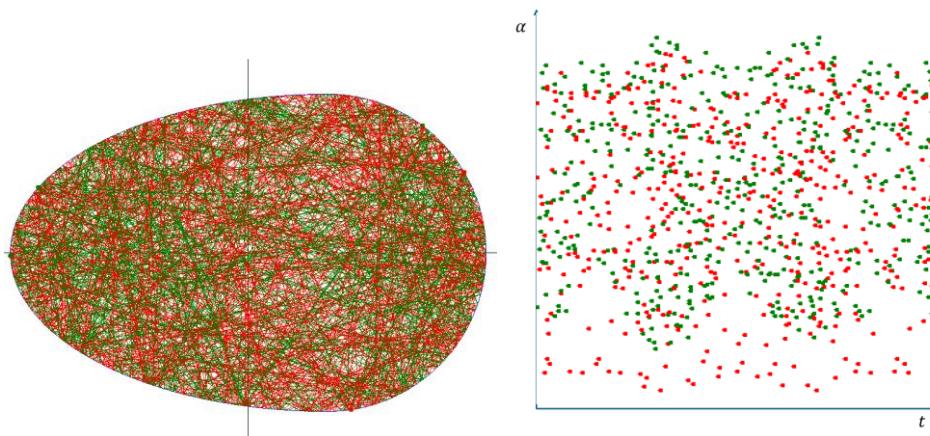
$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \vec{\gamma}(t) = \binom{m}{b} = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}(\pi/2)$$

Sie ist aber an den Übergangsstellen nicht differenzierbar, falls $a \neq b$. Man hat z.B.:

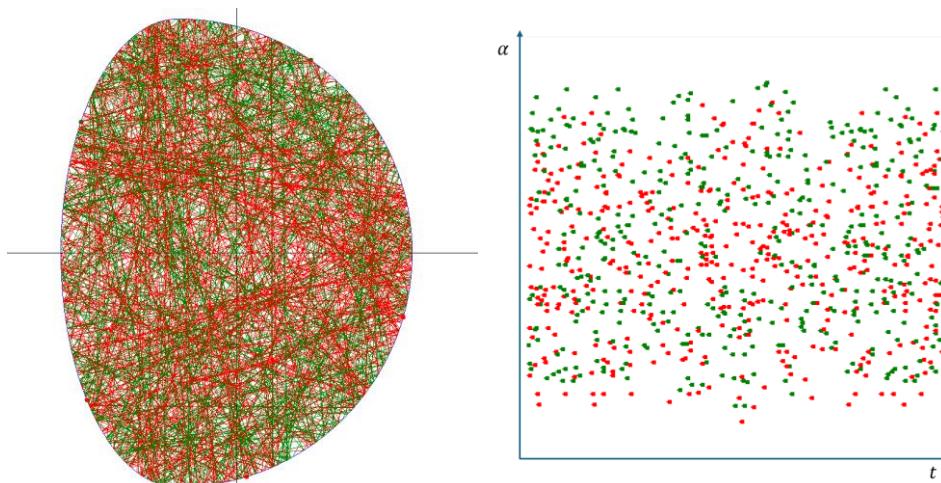
$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^+} \dot{\vec{\gamma}}(t) = \binom{-a}{0} \neq \binom{-b}{0} = \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

Für die Reflexion brauchen wir aber jeweils nur die Steigung der Tangente in diesem Punkt und die ist an den Übergangsstellen gleich 0.

Die Berechnung des jeweils nächsten Stosspunktes und Stosswinkels erfolgt analog wie beim Ellipsenbillard und ist in der mathematischen Dokumentation zum Simulator beschrieben. Wir schauen uns einige Bilder an, welche mit dem Simulator erzeugt wurden.



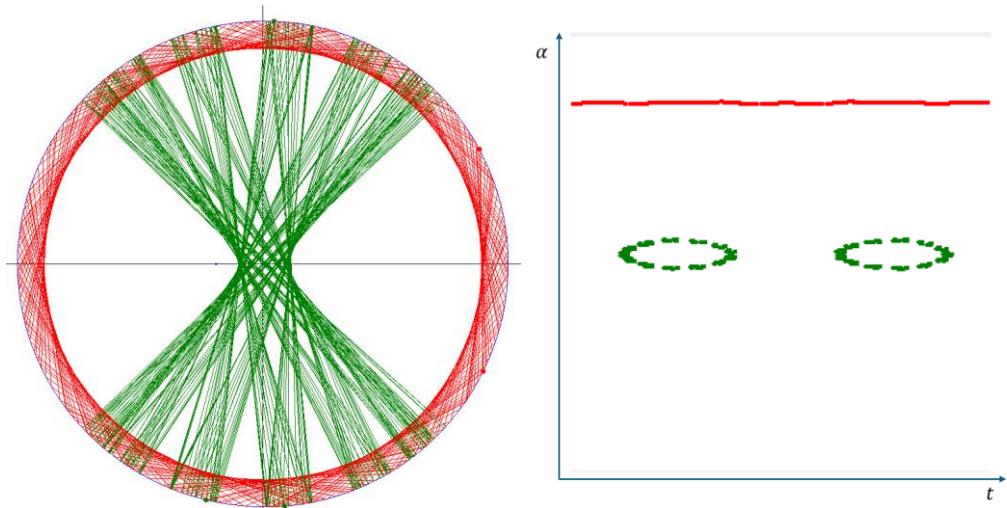
Die Bahn zweier Kugeln mit $c = 0.5$ und zugehörige Phasenportraits



Dasselbe für zwei Kugeln mit $c = 2$

Wenn man die Kugeln länger laufen lässt, dann verteilen sich die Punkte im Phasenportrait immer mehr über den ganzen Raum. Das lässt auf chaotisches Verhalten schliessen, ohne dass wir dies hier begründen können. Für die genaue Definition von chaotischem Verhalten siehe Schulprojekt *Die chaotischen Eigenschaften des logistischen Wachstums*.

Wenn man aber c in der Nähe von 1 wählt, dann ähneln die Bahnen eher denen in einem elliptischen Billardtisch:



Zwei Kugeln mit $c = 0.98$

Wenn c nahe bei 1 ist, dann ähneln die Bahnen und ihr Phasenportrait einem elliptischen Billardtisch.

Auch beim ovalen Billard kann man die periodischen Bahnen diskutieren. Wir überlassen das als Übung. Wir werden später sehen, dass die Aussage von Satz 4.1 auch für das ovale Billard gilt.

8. Das C-Diagramm

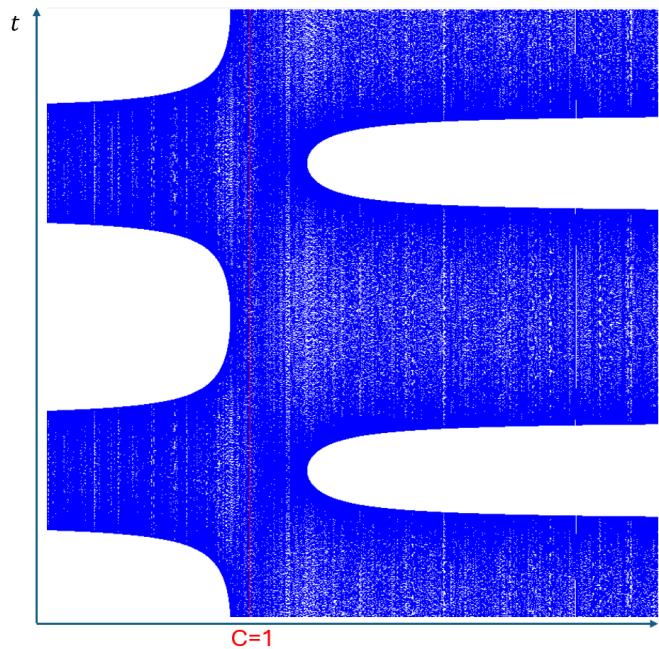
Der Parameter C hat beim elliptischen und beim ovalen Billard die Form des Billardtisches bestimmt. Im ersten Fall war C das Verhältnis der Nebenachse zur Hauptachse der Ellipse, im zweiten Fall das Verhältnis von Kreisradius zur Hauptachse der Ellipse.

Wie wirkt sich die kontinuierliche Änderung von C auf Kugelbahnen aus? Im Simulator kann man das untersuchen. Man lässt eine Kugel immer aus einer definierbaren festen Position aus starten. Dann erzeugt der Simulator folgendes Diagramm:

Entlang der x-Achse wird C variiert. Auf der y-Achse plottet man dann wahlweise die auftretenden Reflexionswinkel oder Stossparameter. Damit sieht man, in welchem Bereich sich diese Werte für jeden Wert von C bewegen.

Beispiel

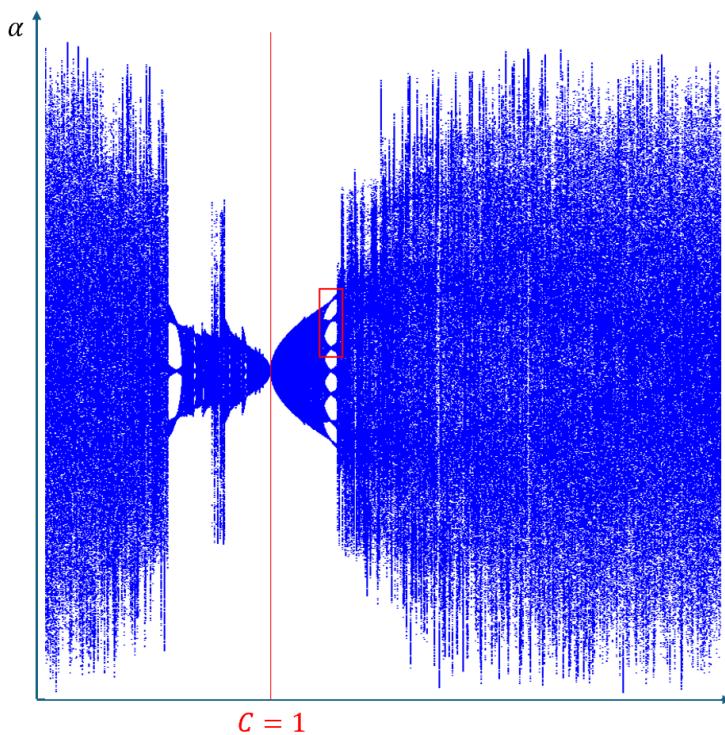
Für das elliptische Billard und den geplotteten Stossparameter erhält man folgendes Diagramm:



C-Diagramm für das elliptische Billard und den Parameter t

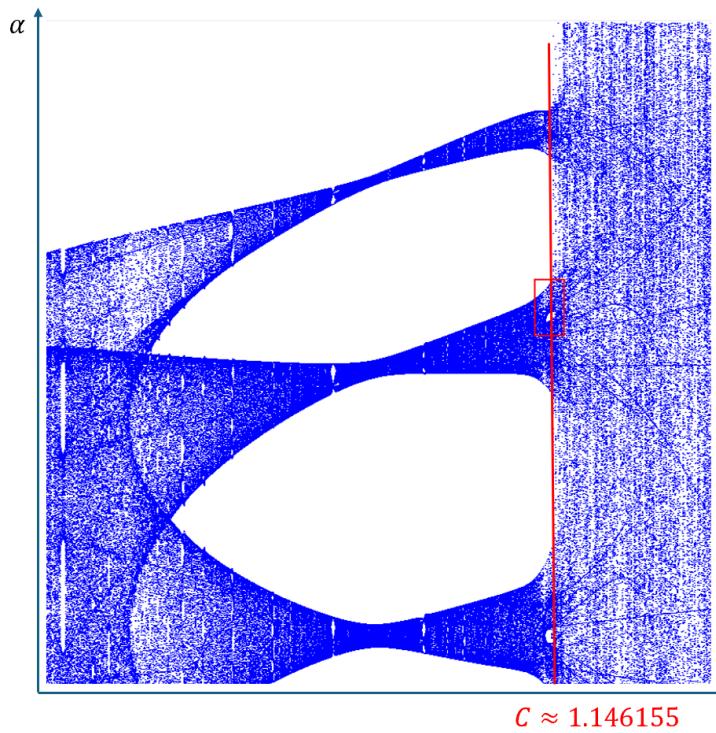
C variiert dabei zwischen 0.5 und 2. Für $C = 1$ hat man einen Kreis und der Parameter t verteilt sich über das gesamte Intervall $]0,2\pi[$. Wegen seiner Periodizität ist das Bild oben eigentlich ein Zylinder, wobei der untere und obere Rand in Richtung x-Achse zusammengeklebt sind. In der Nähe von $C = 1$ läuft die Kugel aussen an den Brennpunkten herum und t verteilt sich in ganz $]0,2\pi[$. Auf der linken und rechten Seite davon läuft t zwischen den Brennpunkten und verteilt sich nur in zwei Teilintervallen von $]0,2\pi[$.

Interessant ist die Untersuchung des Reflexionswinkels α beim ovalen Billard.



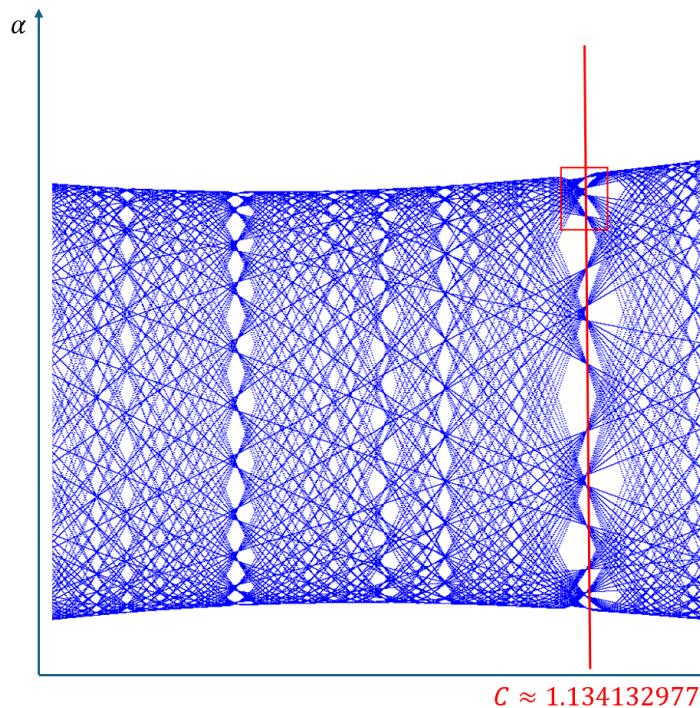
C-Diagramm für das ovale Billard und den Reflexionswinkel α

Für $C = 1$ hat man den Kreis und α ist konstant. Ganz links und ganz rechts «verschmiert» α im Intervall $]0, \pi[$. In der Nähe von $C = 1$ scheint es aber auch periodische Fenster zu geben. Mit dem Simulator kann man gewisse Bereiche markieren und dann hineinzoomen. Oben ist ein periodischer Bereich markiert. Die Mitte des Rechtecks ist bei $C \approx 1.1333$. Das gezoomte Bild sieht dann so aus:



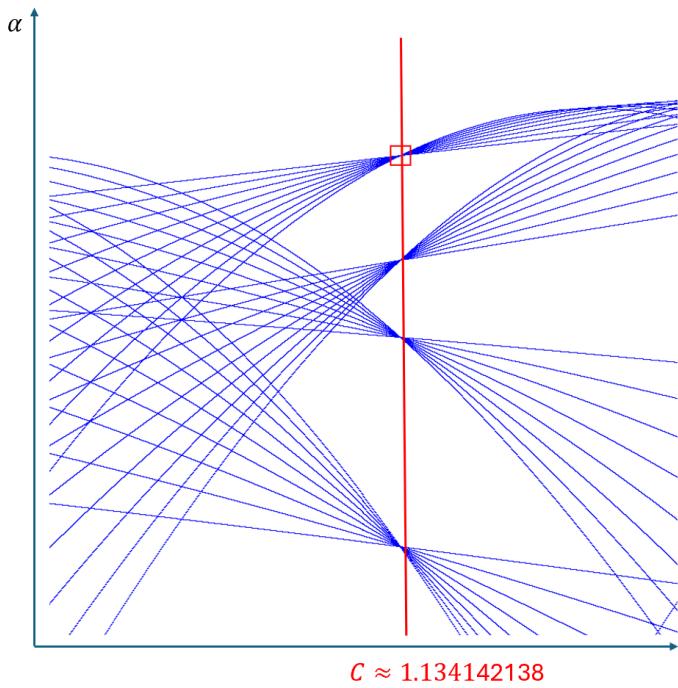
Zoom in den ersten Ausschnitt

Hier haben wir wieder einen Ausschnitt markiert, in den wir hineinzoomen.



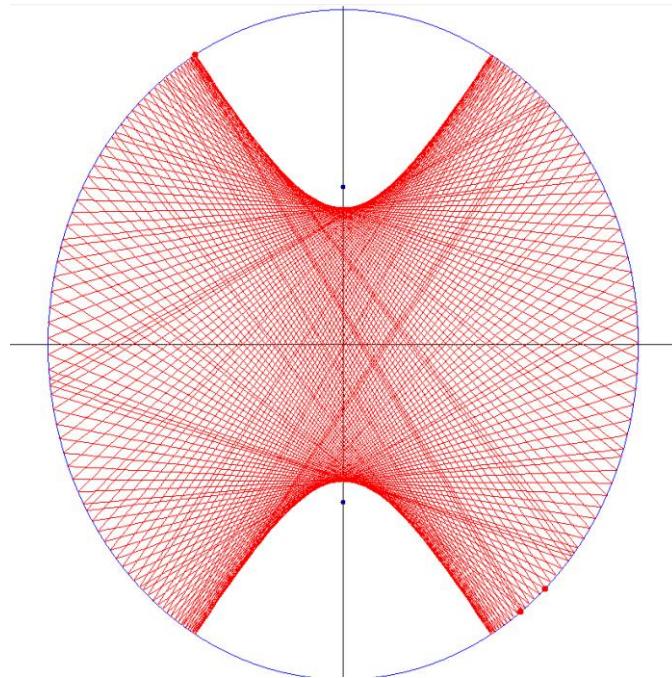
Zoom in den nächsten Ausschnitt

Hier wird bereits eine recht komplex aussehende Periode sichtbar. Wir zoomen nochmals:



Zoom in den letzten Ausschnitt

Im Simulator können wir die Werte von C abschätzen. Wir gehen nun zurück zum ovalen Billard mit dem Wert $C = 1.134142138$ und den Startparametern, welche beim C-Diagramm gewählt wurden, nämlich $t = 2.0944, \alpha = 1.5708$.

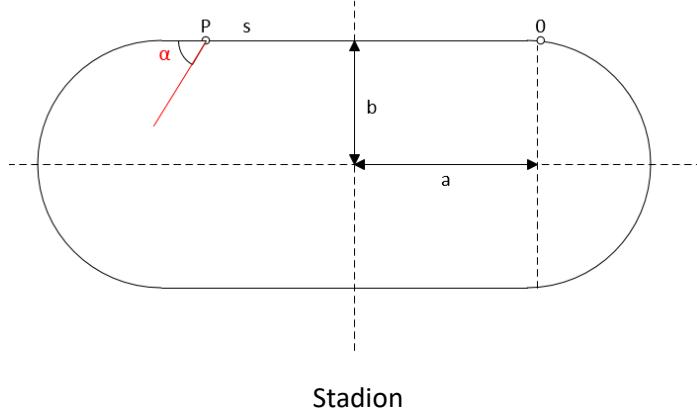


Die Kugelbahn mit den obigen Parametern

Wir überlassen die weitere Untersuchung am elliptischen Billard dem Leser, insbesondere Diagramme für den Reflexionswinkel α .

9. Billard im Stadion

Hier untersuchen wir einen stadionförmigen Billardtisch. Dieser ist nur noch konvex, aber nicht mehr streng konvex.

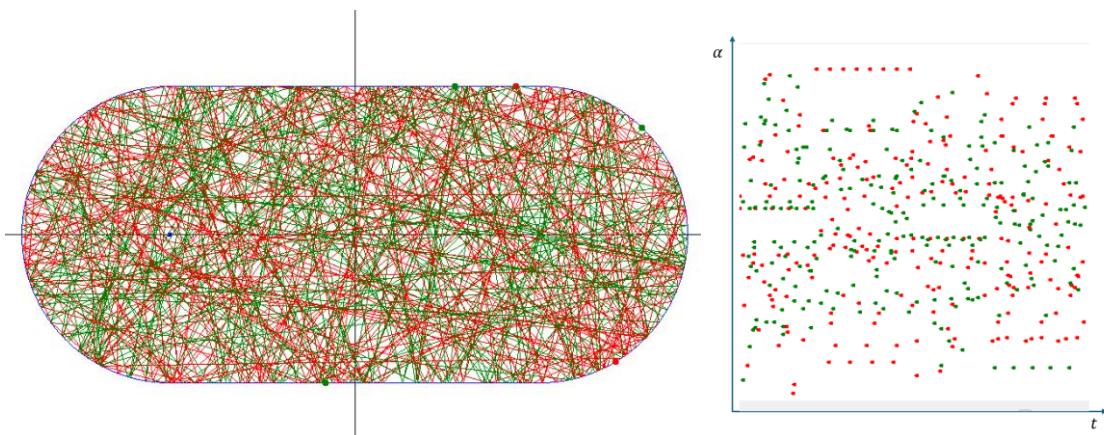


Das Stadion ist zusammengesetzt aus einem Rechteck mit Breite $2a$ und Höhe $2b$. An den vertikalen Seiten wird je ein Halbkreis mit Radius b angefügt. Als Koordinatensystem verwenden wir eines mit Nullpunkt im Mittelpunkt des Stadiions und den Symmetriegeraden als Achsen. Ferner ist: $c := \frac{b}{a}$.

Eine Billardkugel wird am Rand des Stadiions gemäss Reflexionsgesetz reflektiert.

Für die Parametrisierung fixieren wir einen Nullpunkt auf dem Rand, und zwar den Punkt (a, b) . Um einen Punkt P auf dem Rand zu beschreiben, verwenden wir die Bogenlänge s zwischen diesem Punkt und dem festgelegten Nullpunkt auf dem Rand. Dabei rechnen wir modulo dem Umfang des Stadiions, also modulo $L = 4a + 2\pi b$. Damit ist jeder Stoßpunkt der Billardkugel eindeutig definiert durch den Parameter s . Als zweiten Parameter verwenden wir wieder den Winkel α zwischen Kugelbahn und Kurventangente im Stoßpunkt. Wenn die Kugel auf einer Rechteckseite stösst, ist diese Tangente gerade identisch mit der Rechteckseite. Im anderen Fall hat man als Kurventangente die Kreistangente im Stoßpunkt.

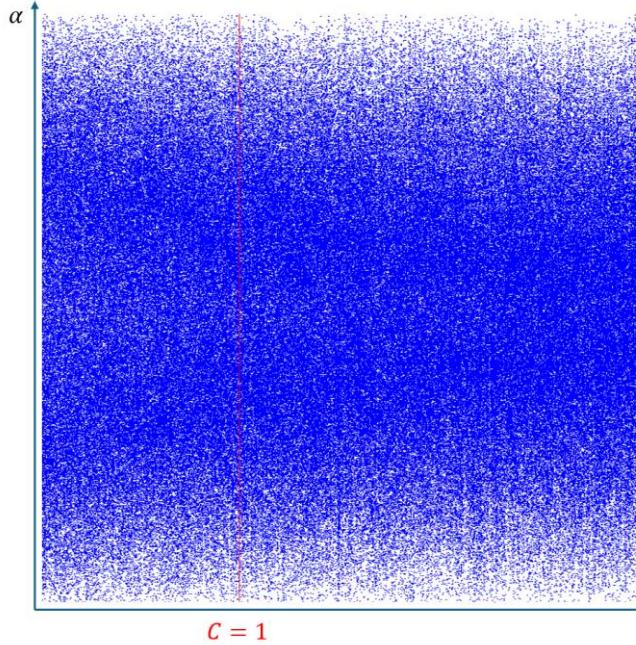
Das Verfahren, um den nächsten Stoßpunkt zu finden, ist analog zum Verfahren beim elliptischen Billard, wobei hier eine mehrfache Fallunterscheidung nötig ist, je nachdem in welchem Bereich des Billardtisches die Kugel anstösst. In der mathematischen Dokumentation zum Simulator ist das Verfahren beschrieben, welches der Simulator verwendet. Wir machen ein Experiment mit dem Simulator. Gestartet wird eine rote und eine grüne Kugel.



Billard im Stadion

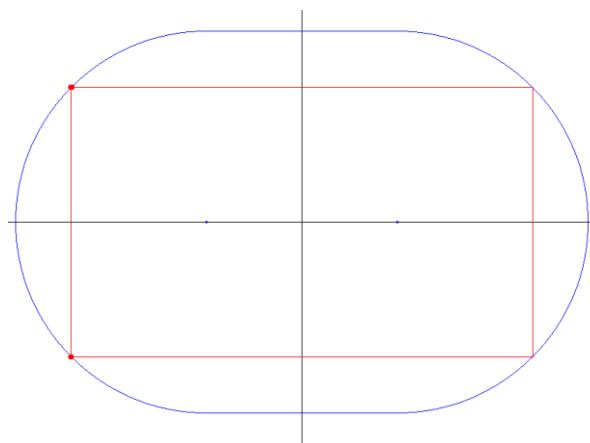
Wie man sieht, sind auch hier die Punkte, welche den einzelnen Stößen entsprechen, über den ganzen Phasenraum verteilt. Tatsächlich ist das Billard im Stadion chaotisch. Den Nachweis dazu hat der russische Mathematiker Leonid Bunimowich (1947 -) erbracht.

Ein Hinweis darauf ist auch das C-Diagramm für das Billard im Stadion:



C-Diagramm für das Billard im Stadion und den Reflexionswinkel α

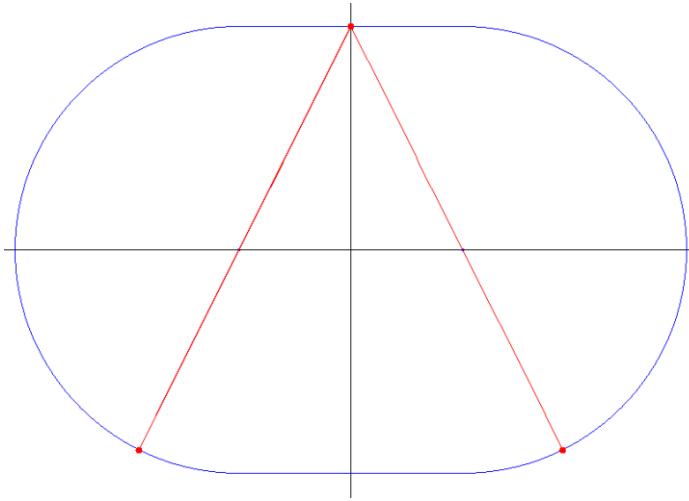
Auch für das Billard im Stadion ist es einfach, periodische Punkte zu finden. Zum Beispiel gibt es ausgehend von einem Scheitelpunkt $(0, a + b)$ Bahnen jeder Periode $2k$, $k \in \mathbb{N}$, welche durch entsprechende Bahnen im Kreis gefunden werden können.



Eine Bahn der Periode 4 auf dem Tisch $c = 2$

Wie man leicht nachrechnen kann, gilt für obige Bahn $s = 2a + b \cdot \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Wenn eine Bahn durch den Mittelpunkt eines Kreises geht und anschliessend an diesem gespiegelt wird, läuft sie auf dem Rückweg wieder durch den Mittelpunkt. Damit kann man weitere periodische Bahnen finden.

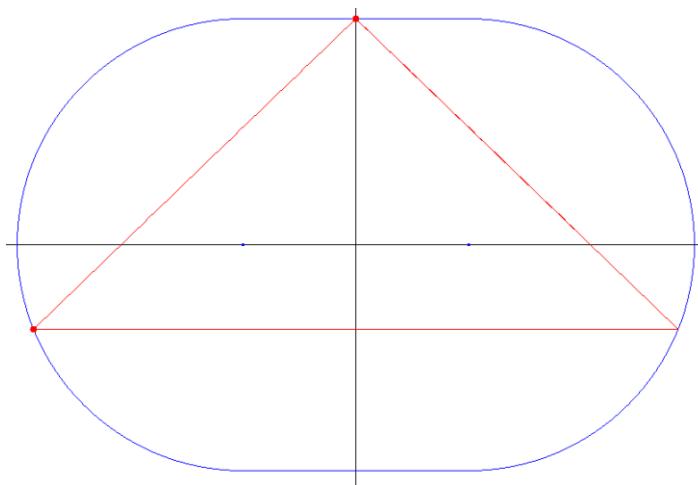


Eine weitere Bahn der Periode vier auf dem Tisch $c = 2$

Im obigen Fall ist wieder $s = 0.31\bar{6}$, d.h. der Startpunkt ist $(0, b)$. Für den Winkel α gilt $\alpha = \arctan \frac{b}{a} = 1.10715 \dots$

Für Bahnen ungerader Periode können wir wieder experimentell durch eine Intervallschachtelung die entsprechenden Startparameter wenigstens näherungsweise bestimmen. Als Beispiel suchen wir eine dreiperiodische Bahn mit Startpunkt in $(0, b)$ für den Faktor $c = 2$. Für diesen Faktor ist der Startparameter $s = a = 0.31\bar{6}$. Wir starten zuerst mit einem Winkel $\alpha = 0.75$ und passen diesen laufend so an, dass nach drei Stößen im Protokoll wieder der Parameter $s = 0.31\bar{6}$ für die Position der Kugel möglichst gut erreicht wird.

Nach einigen Iterationsschritten erhalten wir als Näherung $\alpha \approx 0.766239$:



Angenäherte Startparameter für eine dreiperiodische Bahn auf dem Tisch $c = 2$

10. Der konvexe Billardtisch

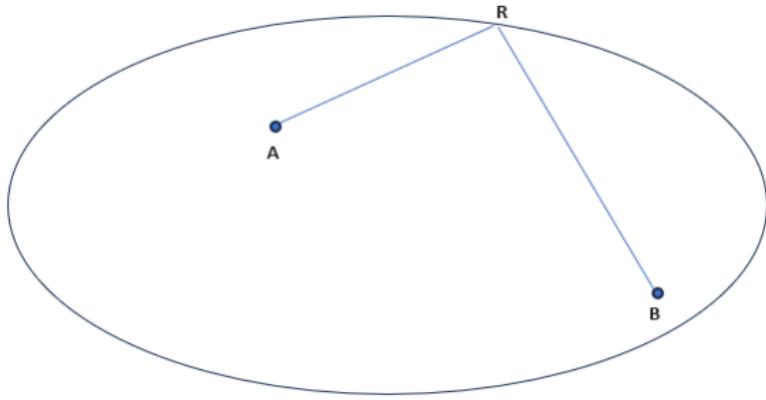
Einige elementare Aussagen gelten für beliebige konvexe Billardtische und wir wollen in diesem Abschnitt zwei davon formulieren und elementar beweisen.

Zuerst definieren wir den Begriff des «Reflexionspunktes».

Definition 10.1

Seien A, B zwei verschiedene Punkte im Innern eines konvexen Billardtisches. Dann heisst ein Punkt R auf dem Rand des Billardtisches ein *Reflexionspunkt für A, B* wenn ein von A ausgehender Bahnabschnitt in R so reflektiert wird, dass er nach der Reflexion in B eintrifft.

□



R ist Reflexionspunkt für A, B

Beispiel

Beim elliptischen Billard ist jeder Punkt auf der Ellipse ein Reflexionspunkt für die Brennpunkte der Ellipse.

Eine erste Frage ist: *Gibt es für beliebige Punkte $A \neq B$, die im Innern eines konvexen Billardtisches liegen, immer einen Reflexionspunkt R ?*

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = |\vec{AR}| + |\vec{RB}|, t \in I$$

Wobei I das Parameterintervall für die Randkurve ist, welche den Billardtisch begrenzt. Sei $\vec{r}(t)$ der zu R gehörende Ortsvektor. Dann ist:

$$f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{a}| + |\vec{r}(t) - \vec{b}|$$

f ist eine reellwertige, stetige Funktion und I ein abgeschlossenes Intervall. Wenn f konstant ist, dann sind A und B Brennpunkte einer Ellipse und dann ist jeder Randpunkt ein Reflexionspunkt. Andernfalls nimmt f auf I ein Maximum und ein Minimum effektiv an. I kann periodisch fortgesetzt werden, da die Randkurve geschlossen ist. Das heisst, dass die Extrema von f im Innern von I oder im Innern der periodischen Fortsetzung auftreten. Weil die Randkurve stetig differenzierbar ist, ist auch f stetig differenzierbar. Die Ableitung von f an den Extremalstellen ist gleich Null. Seien t_1, t_2 die Parameterwerte, für die f maximal bzw. minimal wird. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{(\vec{r}(t) - \vec{a})}{|\vec{r}(t) - \vec{a}|} \cdot \dot{\vec{r}}(t) + \frac{(\vec{r}(t) - \vec{b})}{|\vec{r}(t) - \vec{b}|} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0 \text{ für } t = t_{1,2}$$

$\frac{(\vec{r}(t) - \vec{a})}{|\vec{r}(t) - \vec{a}|} =: \vec{e}_a$ ist ein Einheitsvektor und ebenso $\frac{(\vec{r}(t) - \vec{b})}{|\vec{r}(t) - \vec{b}|} =: \vec{e}_b$ in jeweils Richtung des entsprechenden Bahnabschnittes durch den Punkt A bzw. B . Die Summe der Einheitsvektoren $\vec{e}_a + \vec{e}_b$ ist die Winkelhalbierende dieser beiden Bahnabschnitte. Es gilt:

$$(\vec{e}_a + \vec{e}_b) \cdot \dot{\vec{r}}(t_{1,2}) = 0$$

Somit steht diese Winkelhalbierende für $t = t_{1,2}$ senkrecht auf der Tangente in diesen Punkten und damit schliessen die Verbindungsstrecken AR und BR mit der Tangente denselben Winkel ein.

Da der Billardtisch konvex ist, liegen die Verbindungen AR und BR ganz im Innern des Tisches und stellen Bahnabschnitte einer Kugel dar, welche in A startet, in R reflektiert wird und dann auf B stösst.

Als Resultat haben wir:

Satz 10.2

Sind A und B zwei beliebige Punkte im Innern eines konvexen Billardtisches. Dann gibt es mindestens zwei Reflexionspunkte $R_{1,2}$ für A und B auf dem Rand des Billardtisches. An diesen Stellen hat die Summe der Abstände $|\overrightarrow{AR}| + |\overrightarrow{BR}|$ ein lokales Extremum.

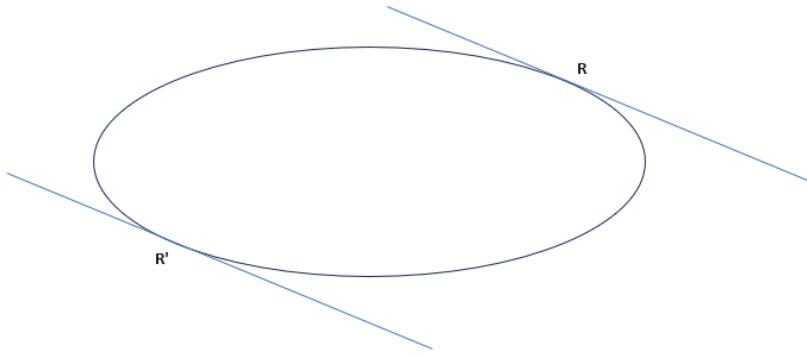
□

Man kann auch den Fall untersuchen, wo A und B zusammenfallen. Auch dann gilt dasselbe Resultat: Es gibt mindestens zwei Reflexionspunkte, so dass eine von A ausgehende Kugel nach dem Stoß wieder zu A zurückkehrt. Der Nachweis ist eine Übung.

In einigen Beispielen konnten wir Startparameter, welche zu periodischen Bahnen führten, mit einer Intervallschachtelung approximieren. Die Frage ist, ob es für konvexe Billardtische immer periodische Bahnen gibt.

Betrachten wir einen (eventuell nicht konvexen) Billardtisch und eine Tangente an seinen Rand in einem beliebigen Randpunkt. Angenommen, es gibt auf beiden Seiten der Tangente Punkte, die zum Innern des Billardtisches gehören. Dann lassen sich Punkte auf verschiedenen Seiten der Tangente finden, deren Verbindung nicht mehr vollständig im Innern des Billardtisches liegen. Dann wäre der Billardtisch nicht konvex. Wenn umgekehrt der Billardtisch konvex ist und wir eine Tangente in einen beliebigen Randpunkt legen, dann liegen alle Punkte, die zum Billardtisch gehören, auf derselben Seite der Tangente.

Nehmen wir einen konvexen Billardtisch und legen wir die Tangente in einen Randpunkt R . Wenn wir diesen Randpunkt einmal auf dem Tischrand herumlaufen lassen, dann hat sich die Tangente dabei um 2π gedreht. Wegen der Stetigkeit der Ableitung gibt es also einen Randpunkt R' , in welchem die Tangente parallel zur ursprünglichen ist. Wenn wir nun ein solches Tangentenpaar betrachten, ist ihre Distanz die «Breite» des Billardtisches bezüglich dieser Tangenten.



Ein Paar paralleler Tangenten bei einem konvexen Billardtisch

Die Breite des Billardtisches in Abhängigkeit des Randpunktes R oder damit des zugehörigen Parameters t des Ellipsenrandes ist eine periodische, beschränkte reelle Funktion und nimmt somit ein Maximum und ein Minimum an. Diese Funktion kann dargestellt werden als:

$$B(t, t') = |\vec{r}(t) - \vec{r}(t')|$$

An den Extremalstellen ist die Ableitung von B nach t gleich Null. Es gilt also:

$$\frac{d}{dt} B(t) = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t')}{|\vec{r}(t) - \vec{r}(t')|} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$$

Somit steht der Vektor $\overrightarrow{RR'}$ senkrecht auf der Tangente im Punkt R . Da die Tangente in R' parallel zu Tangente in R ist, steht dieser Vektor auch auf dieser Tangente senkrecht. Somit wird ein von R ausgehender Ball in R' reflektiert und kehrt wieder nach R zurück. Damit gibt es eine 2-periodische Bahn. Da es mindestens zwei Extremalstellen gibt, folgt:

Satz 10.3

Bei einem konvexen Billardtisch gibt es mindestens zwei 2-periodische Bahnen. Sie entsprechen der minimalen und maximalen Breite des Tisches.

□

Auf Grund unserer Experimente mit dem Simulator kann man vermuten, dass es bei einem konvexen Billardtisch möglich ist, periodische Bahnen jeder Periode zu finden. Das ist tatsächlich so, denn es gilt:

Satz 10.4 (George Birkhoff 1884 - 1944)

Bei einem streng konvexen Billardtisch existieren für jedes teilerfremde paar (q, p) natürlicher Zahlen mit $p \geq 2$ und $q \leq [(p-1)/2]$ zwei geometrisch verschiedene p -periodische Bahnen mit Umlaufzahl q .

□

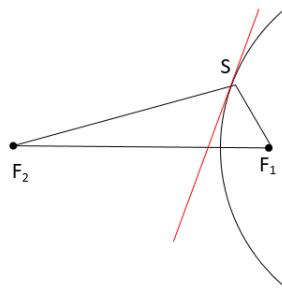
$[(p-1)/2]$ bezeichnet hier die nächstkleinere natürliche Zahl kleiner gleich $(p-1)/2$.

Dieser Satz ist eine Folgerung eines viel allgemeineren Fixpunktsatzes von Poincaré-Birkhoff, der hier nicht erläutert werden kann. Die genaue Formulierung dieses Fixpunktsatzes und einen Beweis findet man in [2]. Ebenso die Anwendung dieses Satzes auf das konvexe Billard, aus welcher Satz 10.4 folgt.

11. Übungsbeispiele

1. Untersuche das Billard im Rechteck. Spiegle dazu das Rechteck an allen Seiten und setze diese Spiegelungen an den neuen Rechtecken fort. Diese Technik heisst *Entfaltungsmethode*. Dann wird die Kugelbahn eine Gerade. Welche periodischen Bahnen gibt es? Füllen aperiodische Bahnen das Rechteck dicht aus? Kann man die Bahn durch «Zusammenkleben» geeigneter Seiten des Rechteckgitters als Bahn auf einem Torus interpretieren?
2. Untersuche den Graphen der Kurve $\gamma: t \in [0, 2\pi[\rightarrow \vec{\gamma}(t) = (2 + \sin t)(\cos pt, \sin pt)$ für $p \in \mathbb{N}$. Wie viele Doppelpunkte gibt es? Auf welcher Koordinatenachse liegen diese?
3. Beweise: Beim Kreisbillard ist die Kaustik ein Kreis mit Radius $\cos \alpha$, wenn α der Reflexionswinkel ist.
4. Im Abschnitt 3 über das elliptische Billard haben wir die Bedingung zur Berechnung des zweiten Stosspunktes mit dem Parameter u skizziert. Führe die entsprechende Berechnung explizit durch.
5. Ein elliptischer Billardtisch ist gegeben durch $\gamma: t \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$. Eine Kugel startet im Punkt $t_1 = 0$ mit dem Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ gegenüber der ersten Tangente im Punkt $t_1 = 0$. Bestimme den zweiten Stosspunkt sowie den zweiten Stosswinkel mit Hilfe der Berechnungen in Abschnitt 3.
6. Die Hyperbel ist definiert als der Ort aller Punkte in der Ebene, so dass der Betrag der Differenz der beiden Abstände von zwei fixen Brennpunkten konstant ist. Diese Konstante bezeichnet man üblicherweise mit $2a$ analog zur Ellipse. Sei P ein Punkt auf der Hyperbel und F_1, F_2 seien die beiden Brennpunkte. Dann ist sowohl $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ wie auch $|PF_2| - |PF_1| = 2a$. Die Hyperbel hat also zwei Zweige.

Anstelle der «Reflexion» eines von einem Brennpunkt ausgehenden Strahles tritt hier die Spiegelung dieses Strahles an der Hyperbeltangente im Treffpunkt des Strahles. Dann geht dieser Strahl nach der Spiegelung durch den anderen Brennpunkt.



Ein Brennstrahl wird an der Hyperbeltangente (rot) gespiegelt

Das heisst, in obiger Figur schliesst $\overline{SF_1}$ und $\overline{SF_2}$ mit der Hyperbeltangente denselben Winkel ein. Betrachte nun das elliptische Billard für den Fall, dass die Kugelbahn zwischen den Brennpunkten durchgeht. Zeige, dass in diesem Fall die Kaustik der Bahn eine Hyperbel ist.

Hinweis: Gehe analog vor wie im Fall einer elliptischen Kaustik.

7. Gegeben ist ein elliptischer Billardtisch mit Achsenverhältnis $\frac{b}{a} = 0.8$ und der üblichen Parameterdarstellung. Eine Kugel startet im Punkt $t_1 = 0$. Bestimme durch Experimente mit dem Simulator und einem Intervallschachtelungsverfahren einen Startwinkel α , der zu einer dreiperiodischen Bahn führt. Untersuche auch Bahnen anderer Perioden.
8. Untersuche beim elliptischen Billard das Phasenportrait einer Bahn, welche möglichst genau durch die Brennpunkte der Ellipse läuft.
9. Diskutiere die periodischen Bahnen beim ovalen Billard und beim Billard im Stadion. Untersuche insbesondere Bahnen niedriger Periode. Bestimme mit Hilfe von Simulator-Experimenten und mit Hilfe von Intervallschachtelungen zugehörige Startwinkel näherungsweise.
10. Betrachte einen Billardtisch, der von einer konvexen und differenzierbaren Kurve γ begrenzt wird. Ferner sei $\vec{\gamma}(t)$ positiv orientiert, d.h. der Billardtisch liegt immer links der Kurventangente $\dot{\vec{\gamma}}(t)$. Es sei:

ψ_n = der Winkel zwischen Kurventangente im n-ten Stoßpunkt und positiver x-Achse
 α_n = der Reflexionswinkel beim n-ten Stoß
 φ_n = der Winkel zwischen dem n-ten Bahnabschnitt und der positiven x-Achse

Zeige, dass gilt:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \psi_{n+1} - \varphi_n \\ \varphi_{n+1} = \psi_{n+1} + \alpha_{n+1} \\ \varphi_{n+1} = 2\psi_{n+1} - \varphi_n \end{cases}$$

11. Analysiere das C-Diagramm für das ovale Billard und untersuche insbesondere auftretende Strukturen, welche periodisch scheinen.
12. Sei $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ eine reguläre und zweimal stetig differenzierbare ebene Kurve. Wenn man die Kurve in Abhängigkeit des Parameters t durchläuft, kann $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ als (tangentialer) Geschwindigkeitsvektor und $\ddot{\vec{\gamma}}(t)$ als Beschleunigung aufgefasst werden. Diese Beschleunigung kann man zerlegen in einen Vektor parallel und einen senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor:

$$\ddot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{a}^{\parallel}(t) + \vec{a}^{\perp}(t)$$

Zeige: Wenn γ nach der Bogenlänge s parametrisiert ist, dann gilt: $\vec{a}^{\parallel}(s) = 0, \forall s$.

13. Die übliche Parameterdarstellung des Kreises mit Radius r ist:

$$\vec{\gamma}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi[, r > 0$$

Wie sieht eine Parameterdarstellung mit der Bogenlänge als Parameter explizit aus?

14. Der Punkt A sei im Innern eines konvexen Billardtisches. Beweise: Dann gibt es mindestens zwei Reflexionspunkte auf dem Rand des Billardtisches, so dass ein von A ausgehender Ball, der in einem Reflexionspunkt reflektiert wird, wieder zu A zurückkehrt.

Weiterführende Literatur

- [1] Serge Tabachnikov: Geometrie und Billard, Springer Spektrum 2013
- [2] Anna-Maria Vocke: Das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem und Anwendungen auf Billards, Bachelorarbeit, Mathematisches Institut, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2014