

Dynamische Systeme Teil 2

Die Mathematik zum Computerprogramm «Simulator»

Das Computerprogramm «Simulator», dessen Einsatz in einem separaten Handbuch beschrieben wird, ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, in VB.NET geschrieben, mit ausführlichen Kommentaren versehen und kann nach Bedarf erweitert werden. Dazu ist die kostenlose Community-Version von Microsoft Visual Studio nötig, und zwar mindestens in der Version 17.9. Diese setzt auf dem Microsoft Framework 8.0 auf.

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen für den «Simulator». Im Teil 1 werden die Systeme behandelt, welche im entsprechenden Inhaltsverzeichnis aufgelistet sind. Im Teil 2 folgen weitere Systeme. Die technische Dokumentation zum «Simulator» findet man im Dokument «Technische Dokumentation».

Version 7.0 - 01.03.2025

Inhalt

Inhalt.....	1
Einführung	2
1. Das N-Körperproblem.....	4
1.1 Das Zweikörperproblem.....	4
1.2 Die Kepler'schen Gesetze.....	14
1.3 Angaben zu unserem Sonnensystem	15
1.4 Das N-Körperproblem	16
1.5 Numerische Approximation des N-Körperproblems	18
1.6 Wahl des Koordinatensystems.....	20
1.7 Änderung der Sternmasse	21
1.8 Darstellung des Universums im «Simulator».....	22
1.9 Darstellung der Bahnskizze beim Platzieren eines Sternes	23
1.10 Die Stossproblematik	24
1.11 Erhaltungssätze und Phasendiagramm.....	25
1.12 Das Newton'sche Universum	25
1.13 Alternative Universen	27
1.14 Periodisch stabile Bahnen.....	28
1.15 Übungsbeispiele.....	29
Weiterführende Literatur.....	31

Einführung

Im Internet findet man viele Programme, welche die Simulation von einfachen dynamischen Systemen ermöglichen. Deren Code ist aber kaum öffentlich und die zugrundeliegende Mathematik ist auch wenig dokumentiert. Der «Simulator» ermöglicht die Iteration von einfachen reellen Funktionen, die Simulation des mathematischen Billards, die Untersuchung von numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Simulation von verschiedenen gekoppelten Pendeln oder des Newton'schen Universums. Der Code des Programmes ist in VB.NET geschrieben und steht öffentlich auf Github im Repository «HermannBiner/Simulator» zur Verfügung. Um mit ihm zu arbeiten, genügt die Community Version 2022 des Microsoft Visual Studio, welche kostenlos heruntergeladen und einfach installiert werden kann. Voraussetzung für den «Simulator» ist auch die Installation des Microsoft Frameworks 8.0.

Der GitHub Link ist folgender:

<https://github.com/HermannBiner/Simulator>

Die Mathematik, welche dem «Simulator» zu Grunde liegt, wird in diesem Dokument auf elementarem Niveau behandelt. Beispiele von Übungsaufgaben oder Vorschläge zur Erweiterung des «Simulator» sollen zu eigener Aktivität anregen. Die Mathematik am Gymnasium ist stofflich zwar mehr als ausgelastet. Dennoch kann es sein, dass im Rahmen eines Freifaches oder eines Seminars interessierten Schülern weiterführende Themen angeboten werden. Der «Simulator» und dieses Dokument soll einen Beitrag dazu bieten.

In der Version 7 des Programmes sind folgende Systeme implementiert:

- Wachstumsmodelle und Iteration quadratischer Funktionen wie das logistische Wachstum, die Zeltabbildung, die Iteration an der Parabel inklusive der damit verbundenen Themen wie das Feigenbaum Diagramm.
- Das mathematische Billard mit verschiedenen Formen des Billardtisches: Elliptisches Billard, Billard im Stadion, ovales Billard. Das Analogon zum Feigenbaum-Diagramm ist hier das C-Diagramm.
- Die Untersuchung von numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier werden einige einfache Verfahren am Beispiel des Federpendels miteinander verglichen.
- Die Simulation von gekoppelten Pendeln: Doppelpendel, schwingendes Federpendel und horizontales Rüttelpendel.
- Iterationen in der komplexen Ebene: Newton Iteration und Bassins von Einheitswurzeln. Nullstellen von Polynomen dritten Grades.
- Untersuchung der quadratischen Funktion im Komplexen. Julia Mengen. Mandelbrot Menge. Die n-te Potenzfunktion.
- Simulation des Newton'schen Universums inklusive unseres Planetensystems

Die Benutzung des «Simulator» ist in einem Handbuch auf Deutsch und einem Manual auf Englisch ausführlich dokumentiert. Zusätzlich erläutert eine technische Dokumentation die Architektur des «Simulator». Die Sprache im User Interface sowie in allen Dokumentationen kann zwischen Deutsch und Englisch gewählt werden. Im Code findet man ausführliche Kommentare auf Englisch.

Vorausgesetzt wird lediglich Mathematik, welche entweder am Gymnasium behandelt wird oder welche einem Mittelschüler mit wenig Aufwand zugänglich gemacht werden kann. Gestreift werden Themen aus der Geometrie (Kegelschnitte und ebene Vektorgeometrie), der Analysis (Stetigkeit,

Differentialrechnung und gewöhnliche Differentialgleichungen) und der Physik (Lagrange Formalismus, Gravitation).

Die einzelnen Themenbereiche sind weitgehend unabhängig, sodass je nach Interesse und der zur Verfügung stehenden Zeit eine Auswahl möglich ist.

Ein spezieller Dank gebührt Prof. em. Dr. Urs Kirchgraber der ETH Zürich, der mich in den neunziger Jahren auf die Chaostheorie aufmerksam machte. Ebenso danke ich Prof. Dr. Norbert Hungerbühler der ETH Zürich, der mich in vielerlei Hinsicht unterstützte und dem ich wertvolle Hinweise verdanke.

1. Das N-Körperproblem

Das N-Körperproblem handelt von N Körpern, welche im dreidimensionalen Raum positioniert sind und deren Bewegung nur von den zwischen ihnen vorhandenen Gravitationskräften beeinflusst werden. Es tritt auf, wenn zum Beispiel Astronomen Bahnen von Sternen oder Planeten berechnen wollen. Bereits Johannes Kepler (1571 – 1630) hat in den Jahren 1599 - 1619 Gesetze formuliert, welche das Zweikörperproblem korrekt beschreiben. Isaac Newton (1642 – 1726) hat diese Gesetze 1687 aus seinem Gravitationsgesetz hergeleitet.

Der Fall $N > 2$ hat später viele Mathematiker und Physiker beschäftigt, ohne dass man eine geschlossene analytische Lösung finden konnte, welche im allgemeinen Fall die Bahnen der Bewegung der N Körper beschreibt. Quidong Wang hat zwar 1991 eine Lösung für den allgemeinen Fall mit Hilfe von Taylorreihen gefunden, aber diese konvergieren so langsam, dass sie für die Praxis unbrauchbar sind. Der allgemeine Fall hat nämlich chaotische Eigenschaften. Darauf ist bereits Henri Poincaré (1854 – 1912) 1890 bei der Untersuchung spezieller Fälle des Dreikörperproblems gestossen.

Im Folgenden geht es darum, den «Simulator» mit einer Simulation des N-Körperproblems zu erweitern. Dabei werden wir nur den vereinfachten Fall betrachten, dass alle Körper in derselben Ebene liegen. Bei der Simulation muss man sich bewusst sein, dass sie nur ein numerisches Artefakt ist und nicht die wirkliche Bewegung der N Körper wiedergibt.

Eine vertiefte Darstellung der mathematischen Theorie findet man in «Orbital Motion» [1] und «Celestial Mechanics» [2]. Beide Bücher berichten ausführlich über das N-Körperproblem, aber auch der allgemeinen Himmelsmechanik und bleiben dabei auf einem weitgehend elementar verständlichen mathematischen Niveau.

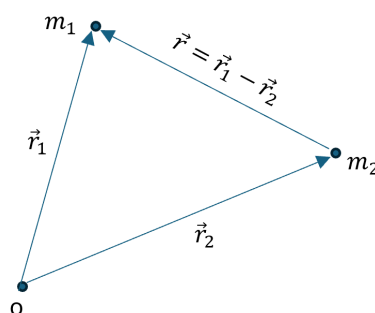
1.1 Das Zweikörperproblem

Die Newton'schen Gleichungen

Obwohl sich die numerische Simulation des Zweikörperproblems nicht wesentlich von jener des N-Körperproblems unterscheidet, wollen wir hier das Zweikörperproblem mathematisch behandeln.

Wir betrachten zwei Massen m_1, m_2 welche sich zum Zeitpunkt t an den Positionen $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ befinden. Dabei soll $\vec{r}_1(0) \neq \vec{r}_2(0)$ sein.

Zwischen den Massen wirkt die Kraft $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}$ in Richtung der jeweils anderen Masse nach dem *Gravitationsgesetz von Newton*, wobei $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \neq \vec{0}$ der Differenzvektor der Positionen ist. $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ ist die Gravitationskonstante.



Nach den *Newton'schen Gesetzen* und seinem *Gravitationsgesetz* hat man die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Oder:

$$(1) \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Die Erhaltungssätze

Aus diesen Gleichungen folgen die klassischen Erhaltungssätze. Wir prüfen dies zuerst für den *Impulssatz*. Addiert man obige Gleichungen, erhält man nämlich:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$$

Und durch Integration nach t erhält man den Gesamtimpuls des Systems:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}$$

Wobei \vec{p} konstant ist.

Wenn \vec{R} die Koordinate des Schwerpunktes ist und $M := m_1 + m_2$, dann ist der Gesamtimpuls auch

$$M \dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

Durch Integration nach t und Bestimmung der Integrationskonstanten durch Spezialfälle wie $m_1 = 0$, erhält man als Ortsvektor für den Schwerpunkt:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

Aus $M \dot{\vec{R}} = \vec{p} = \text{konstant}$ folgt auch, dass sich der Schwerpunkt des Systems mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Nun untersuchen wir den *Drehimpulssatz*. Für den Gesamtdrehimpuls \vec{L} des Systems gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{r}_1 \times m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \\ &= -\vec{r}_1 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} + \vec{r}_2 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r} \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0} \end{aligned}$$

Somit ist der Drehimpuls \vec{L} des Systems konstant.

Wir kontrollieren noch, dass die *Gesamtenergie* des Systems konstant ist. Die potenzielle Energie im Abstand $|\vec{a}|$ vom Schwerpunkt ist (wenn der Nullpunkt im unendlichen definiert wird):

$$E_{pot} = - \int_{|\vec{a}|}^{\infty} G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} d\vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{a}|}$$

Somit ist

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{d}{dt} E = m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 + G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Wir setzen $\gamma = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}$. Dann ist nach (1): $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma \vec{r}$ und $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \gamma \vec{r}$ und man hat:

$$\frac{d}{dt} E = -\dot{\vec{r}}_1 \cdot \gamma \vec{r} + \dot{\vec{r}}_2 \cdot \gamma \vec{r} + \gamma \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \gamma \vec{r} + \gamma \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

□

Wahl des Bezugssystems

Im Folgenden versuchen wir nun die Bahnen der Massen m_1, m_2 zu bestimmen. Dazu wählen wir zuerst ein geeignetes Koordinatensystem als Bezugssystem.

Man sieht leicht, dass die Newton'schen Gleichungen (1) *unabhängig von der Wahl des Nullpunktes* sind. Ersetzt man nämlich $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}' + \vec{c}$, wobei der alte Nullpunkt durch die Translation \vec{c} in den neuen geschoben wird, dann erfüllen $\vec{r}_{1,2}'$ dieselben Gleichungen. Nun wählen wir den Schwerpunkt des Systems, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, als Nullpunkt. Damit hat man ein Inertialsystem. Relativ zu diesem ist der Gesamtimpuls des Systems gleich Null. Es gilt also:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

Subtrahiert man die Gleichungen (1) voneinander folgt:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. Ebenso folgt aus der ersten Gleichung (1) und da der Gesamtimpuls Null ist:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -G \frac{m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{|\vec{r}|^3} = -G \frac{m_2 \vec{r}_1 + m_1 \vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3}$$

Für \vec{r}_2 führt man eine analoge Rechnung durch und erhält schliesslich das (symmetrische) Gleichungssystem relativ zum Schwerpunkt:

$$(2) \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -GM \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{cases}$$

Wenn wir das Kreuzprodukt mit \vec{r} bilden, haben wir:

$$0 = \vec{r} \times \left(\ddot{\vec{r}} + GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Und Integration nach t liefert:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Wobei \vec{h} konstant und im Allgemeinen $\neq \vec{0}$ ist. Es ist $\vec{r} \neq \vec{0}$ nach Voraussetzung und im Allgemeinen $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$, da sich die Körper im gegenseitigen Gravitationsfeld befinden. Wenn die Körper nicht aufeinander zufliegen und kollidieren, ist zudem \vec{r} nicht parallel zu $\dot{\vec{r}}$. Die Bahn verläuft dann in einer Ebene senkrecht zu $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ unabhängig von t . Wir legen diese Ebene durch den Schwerpunkt.

Können wir die x- und y-Achse des Koordinatensystems in diese Ebene legen? Dazu müssten wir das Koordinatensystem so drehen, dass die x- und y-Achse in die Ebene fallen und die z-Achse senkrecht zu dieser Ebene liegt. Wir bezeichnen diese Drehung mit D . Diese ist bijektiv und D^{-1} führt das gedrehte Koordinatensystem wieder ins ursprüngliche über. Seien $\vec{r}_{1,2}'$ die Positionen der Massen im gedrehten System. Dann gilt: $\vec{r}_{1,2} = D^{-1} \vec{r}_{1,2}'$. D und damit auch D^{-1} sind längentreu, es gilt also $|\vec{r}| = |D^{-1} \vec{r}'| = |\vec{r}'|$. Somit geht z.B. die erste Gleichung (1) über in:

$$D^{-1} \ddot{\vec{r}}_1' = -G \frac{m_2}{|\vec{r}'|^3} \cdot D^{-1} \vec{r}'$$

Da D^{-1} bijektiv ist, folgt daraus:

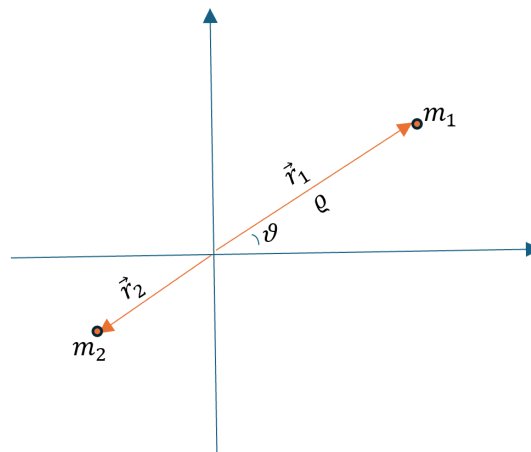
$$\ddot{\vec{r}}_1' = -G \frac{m_2}{|\vec{r}'|^3} \cdot \vec{r}'$$

Dasselbe gilt für die zweite Gleichung. Das heisst, die neuen Koordinaten erfüllen dieselben Gleichungen (*) wie die alten.

Die Bewegungsgleichungen sind also *unabhängig von der Drehung des Koordinatensystems* und wir können die x- und y-Achse in die Ebene legen, in welcher die Bewegung verläuft. Gleichzeitig liegt für uns der Nullpunkt des Koordinatensystems im gemeinsamen Schwerpunkt. Diesen Bezugspunkt brauchen wir später für die Implementierung, um die Bahn *einer* Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt zu beschreiben.

Die Bahn einer Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt

Folgende Skizze zeigt die entsprechende Situation.



Lage der Massen relativ zum gewählten Koordinatensystem

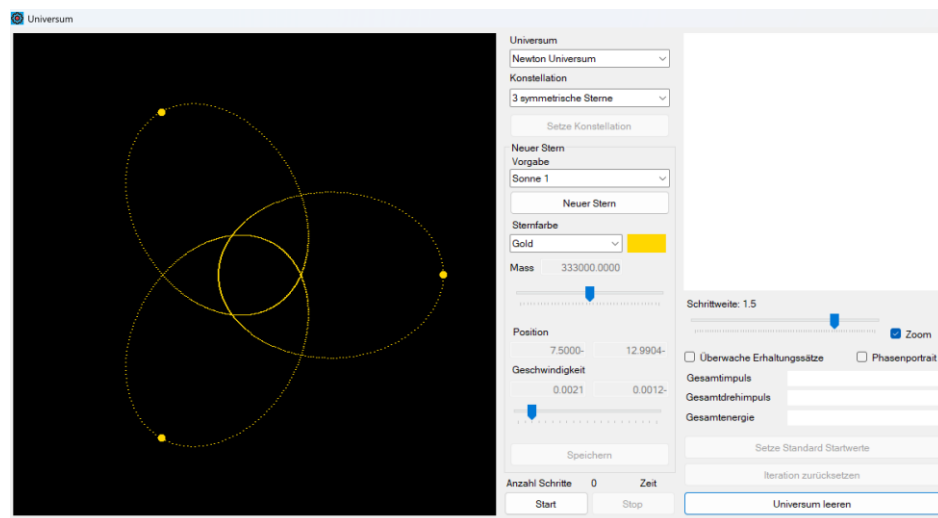
Betrachten wir die erste Gleichung (2) erhalten wir unter Berücksichtigung, dass der Gesamtimpuls Null ist:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1\right|^3} = -G \frac{M m_2^3}{M^3} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Und damit erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur noch die Bewegung der Masse m_1 auftritt:

$$(3) \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2^3}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Das sind – in Komponenten zerlegt – drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bei der Lösung derselben sind insgesamt 6 Integrationskonstanten zu bestimmen.



Drei symmetrische Sterne im «Simulator»

Für die Berechnung der angezeigten Bahnen wurde angenommen, dass der Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt kreist. Die Bahnkurve wurde für jeden Stern als Zweikörperproblem gegenüber den anderen Massen im Schwerpunkt berechnet.

Polarkoordinaten

Wir führen nun Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \varrho \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, |\vec{r}_1| = \varrho \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\varrho} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + \varrho \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\varrho} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + 2\dot{\varrho}\dot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + \varrho \ddot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + \varrho \dot{\vartheta}^2 \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da wir annehmen, dass zwei unterschiedlich positionierte (punktförmige) Massen vorhanden sind, liegt jede Masse ausserhalb des gemeinsamen Schwerpunktes. **Somit ist immer $\varrho > 0$!**

Das Ziel ist nun, zwei Gleichungen für $\varrho(t)$ und $\vartheta(t)$ zu finden. Aus diesen Gleichungen t zu eliminieren, so dass man eine Gleichung für $\varrho(\vartheta)$ und damit die gesuchte Bahngleichung gewinnt. Dazu betrachten wir den Drehimpuls und die Energie der Masse m_1 . Zuerst zeigen wir, dass dieser Drehimpuls konstant ist:

$$\dot{\vec{L}} := \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1) = \vec{r}_1 \times m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{0}$$

Da nach (3) $\ddot{\vec{r}}_1 \parallel \vec{r}_1$. Der Drehimpuls steht immer senkrecht auf der Koordinatenebene und wir betrachten nur seinen Betrag. Dann ist in Polarkoordinaten:

$$L := |\vec{L}| = |\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1| = m_1 \varrho^2 \dot{\vartheta} = \text{konstant}$$

Damit können wir die Ableitungen nach der Zeit eliminieren.

Zuerst erhalten wir:

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{m_1} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$$

Ferner ist:

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho' \dot{\vartheta} = \frac{L}{m_1} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho^2}$$

Nun betrachten wir nochmals die Gleichung (3):

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Auf m_1 wirkt die Kraft $-G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$ und die zugehörige potenzielle Energie ist (wenn der Nullpunkt im Unendlichen gewählt wird):

$$E_{pot} = -G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

Damit lässt die die Energie der Masse m_1 schreiben als:

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

In Polarkoordinaten haben wir:

$$E = \frac{m_1}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\vartheta}^2) - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Nun eliminieren wir $\dot{\varrho}, \dot{\vartheta}$:

$$E = \frac{m_1}{2} \left[\left(\frac{L}{m_1} \right)^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{\varrho^4} + \varrho^2 \left(\frac{L}{m_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho^4} \right] - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Und erhalten:

$$E = \frac{L^2}{2m_1} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + 1 \right) - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Wenn die Masse m_1 direkt auf den Schwerpunkt und damit die andere Masse m_2 zufliegt, ist $\vec{r}_1 \parallel \dot{\vec{r}}_1$ und damit $L = 0$. Dann haben wir einfach eine geradlinige Bewegung, welche mit dem Zusammenstoß der Massen endet. Diesen Fall schliessen wir aus. **Somit ist im Folgenden $L \neq 0$** und wir dividieren durch L:

$$\frac{2m_1 E}{L^2} = \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + 1 \right) - 2G \frac{m_2^3 m_1^2}{M^2 L^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Lösung der Differentialgleichung

Wir setzen: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_2^3 m_1^2}$ und substituieren wir: $\varrho = \frac{1}{u}$, $\varrho' = -\frac{u'}{u^2}$. Damit erhalten wir:

$$\frac{2m_1 E}{L^2} = u'^2 + u^2 - \frac{2u}{p}$$

Quadratisch ergänzen liefert:

$$\frac{2m_1 E}{L^2} = u'^2 + \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1}{p^2}$$

Wir machen den Ansatz:

$$u(\vartheta) = A \cos(\vartheta - \alpha) + \frac{1}{p}, u'(\vartheta) = -A \sin(\vartheta - \alpha)$$

Und erhalten durch Einsetzen:

$$\frac{2m_1 E}{L^2} = A^2 - \frac{1}{p^2}$$

Dann erhalten wir:

$$A^2 = \frac{2m_1 E}{L^2} + \frac{1}{p^2}$$

Wir wollen zuerst prüfen, ob dieser Ausdruck immer definiert ist, das heißt, ob die rechte Seite immer positiv ist.

E ist konstant. Wenn die die Energie im Perihel oder Aphel betrachten, ist dort $\dot{\varrho} = 0$ und wir erhalten für die kinetische Energie in diesem Punkt:

$$E_{kin} = \frac{m_1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{m_1}{2} \varrho^2 \frac{L^2}{m_1^2 \varrho^4} = \frac{L^2}{2m_1 \varrho^2}$$

Und für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{L^2}{2m_1 \varrho^2} - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{L^2}{2m_1} \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \right)$$

Damit wird:

$$\frac{2m_1 E}{L^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{p^2} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{p} \right)^2 \geq 0$$

□

Nun ist:

$$A^2 = \frac{2m_1 E}{L^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} \left(\frac{2m_1 E}{L^2} \cdot p^2 + 1 \right) = \frac{1}{p^2} \cdot \left(\frac{2EL^2 M^4}{G^2 m_1^3 m_2^6} + 1 \right)$$

Wir definieren ε durch:

$$\varepsilon^2 := A^2 p^2 = \frac{2EL^2 M^4}{G^2 m_1^3 m_2^6} + 1 \geq 0$$

Es genügt, den Fall $\varepsilon \geq 0$ zu betrachten, denn sonst kann man zu $\vartheta - \alpha$ einfach π addieren.

Man hat: $A = \varepsilon/p$ und

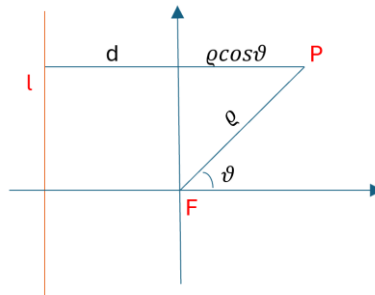
$$u(\vartheta) = \frac{\varepsilon \cos(\vartheta - \alpha) + 1}{p}$$

Und damit:

$$(4) \quad \varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Diskussion der Lösung

(4) ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Wenn wir diesen als Ort der Punkte definieren, welche von einem festen Punkt (dem Brennpunkt F) und einer festen Geraden (der Leitlinie l) ein konstantes Abstandsverhältnis ε haben, erhalten wir nämlich:



Der Punkt P und sein Abstand von F bzw. l

$$\frac{\varrho}{d + \varrho \cos \vartheta} = \varepsilon$$

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}$$

$p = \varepsilon d = \varrho(\frac{\pi}{2})$ ist die halbe Kegelschnittbreite am Brennpunkt. Für $\alpha = \pi$ stimmt Gleichung (4) mit obiger Gleichung überein.

Der minimale Abstand eines Planeten von der Sonne bzw. vom Brennpunkt ist das *Perihel*. Wenn man nochmals Gleichung (4) betrachtet:

$$(4) \quad \varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Dann sieht man, dass das Minimum für $\cos(\vartheta - \alpha) = 1$ bzw. $\vartheta = \alpha$ angenommen wird.

α ist gerade *das Argument des Perihels*, bzw. der Winkel zwischen der Richtung des Perihels und der x-Achse. In unserem Sonnensystem wird die x-Achse durch den Schnittpunkt zwischen Ekliptik und der Äquatorebene der Erde im Frühlingspunkt definiert.

Je nach Wert der numerischen Exzentrizität ε erhält man die verschiedenen Typen des Kegelschnittes:

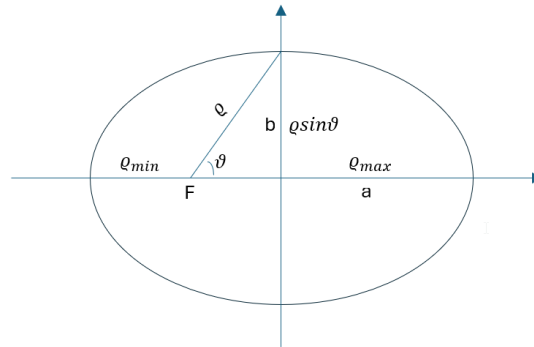
$\varepsilon = 0: \varrho = p = \text{konstant}$. Der Kegelschnitt ist ein Kreis

$0 < \varepsilon < 1: \frac{p}{1-\varepsilon} < \varrho < \frac{p}{1+\varepsilon}$. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

$\varepsilon = 1: \varrho \rightarrow \infty$ für $\vartheta \rightarrow 0$. Sonst ist $\varrho > 0$ und definiert für alle $\vartheta \in]0, 2\pi[$. Man hat eine Parabel.

$\varepsilon > 1: \varrho > 0$ nur für $\cos\vartheta < \frac{1}{\varepsilon}$. $\varrho \rightarrow \infty$ für $\vartheta \rightarrow \arccos \frac{1}{\varepsilon}$. Man hat eine Hyperbel.

Im Falle der Ellipse ist es nützlich, die Halbachsen zu berechnen. Sei a die grosse und b die kleine Halbachse der Ellipse.



Grosse und kleine Halbachse der Ellipse

Es gilt:

$$a = \frac{1}{2}(\varrho_{\min} + \varrho_{\max}) = \frac{1}{2}\left(\varrho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varrho(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon}\right) = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

Um b zu bestimmen suchen wir das Maximum von $\varrho \sin\vartheta$. Es ist:

$$(\varrho \sin\vartheta)' = \frac{p \cos\vartheta (1 - \varepsilon \cos\vartheta) - p \sin\vartheta \cdot \varepsilon \sin\vartheta}{(1 - \varepsilon \cos\vartheta)^2} = \frac{p \cos\vartheta - \varepsilon p}{(1 - \varepsilon \cos\vartheta)^2} = 0$$

Für $\cos\vartheta = \varepsilon$. Damit erhalten wir:

$$b = \varrho \sin\vartheta = \frac{p\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Bemerkung:

Wir haben unsere Berechnung mit dem Schwerpunkt als Nullpunkt durchgeführt. In der Literatur wird manchmal der Ort der Masse m_2 als Nullpunkt gesetzt und die Bewegung von m_1 relativ zu m_2 berechnet. Dann erhält man für die Parameter p, ε in der Bahngleichung etwas andere Werte.

Zuletzt wollen wir einige Überlegungen zu den Einheiten der Parameter machen, welche in der Bahngleichung im Falle des Zweikörperproblems aufgetreten sind. Diese lautete:

$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Darin war: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_1^2 m_2^3}$. Wir schreiben für die Einheit einer Grösse diese Grösse in eckigen Klammern

und wir verwenden das Kilogramm – Meter – Sekunden System. Dann ist $[L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$. Damit wird:

$$[p] = [M]^2 [L]^2 \cdot [G m_1^2 m_2^3]^{-1} = kg^2 \cdot \frac{kg^2 \cdot m^4}{s^2} \cdot \frac{kg \cdot s^2}{m^3} \cdot \frac{1}{kg^5} = m$$

p hat also die Dimension einer Länge.

Ferner war:

$$\varepsilon^2 := \frac{2EL^2M^4}{G^2m_1^3m_2^6} + 1$$

Es ist:

$$\left[\frac{EL^2M^4}{G^2m_1^3m_2^6} \right] = [EL^2M^4] \cdot [G^2m_1^3m_2^6]^{-1} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \frac{kg^2 \cdot m^4}{s^2} \cdot kg^4 \cdot \frac{kg^2 \cdot s^4}{m^6} \cdot \frac{1}{kg^9} = 1$$

ε ist dimensionslos.

Bei der Implementierung tritt ein weiteres Problem auf. Die Geschwindigkeit, bei welcher sich die Zentrifugalkraft und Gravitationskraft im Gravitationsfeld einer Masse M die Waage halten, ist:

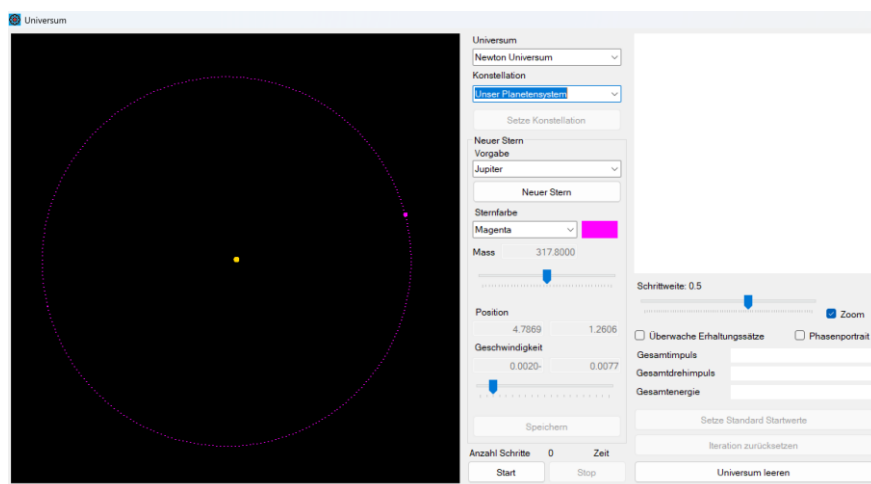
$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Wenn die bewegte Masse zu M den Abstand r hat. Wir nehmen bei der Implementierung bei der Angabe der Geschwindigkeit v an, dass dies die Geschwindigkeit im Perihel ist. Das ist aber nur der Fall, wenn $v > v_0$ ist. Andernfalls wird sich die bewegte Masse der Masse M nähern und das heisst, dass der Startpunkt der Bahn eigentlich das Aphel der Bahn ist. Dem tragen wir bei der Implementierung insofern Rechnung, dass die Bahnkurve folgendermassen bestimmt ist:

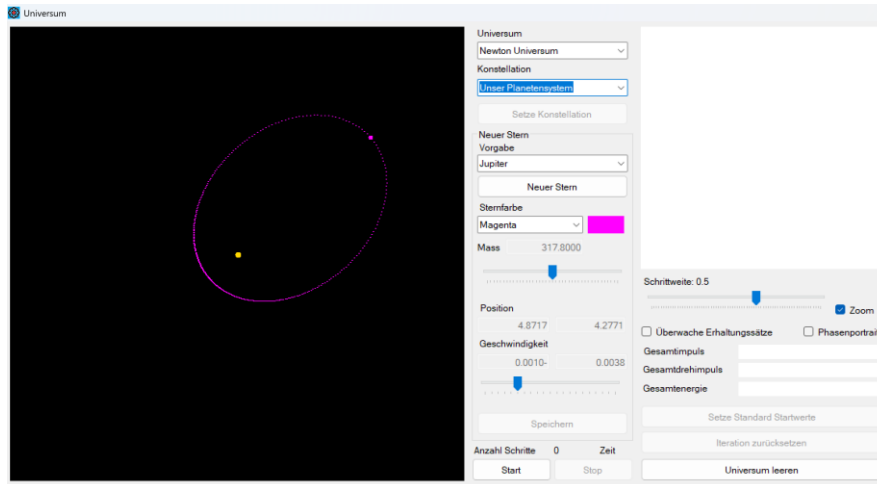
$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}, \text{ wenn } v \geq v_0$$

$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \text{ wenn } v < v_0$$

Man sieht leicht, dass der Startpunkt für $\vartheta = \alpha$ in beiden Fällen identisch ist. Die zweite Gleichung liefert aber eine Ellipsenbahn mit Startpunkt im Aphel.



Jupiter, startend aus der tatsächlichen Position im Perihel und der tatsächlichen Geschwindigkeit



Hier hat der User die Startposition und die Geschwindigkeit geändert

1.2 Die Kepler'schen Gesetze

Hier können wir einen Blick auf die Kepler'schen Gesetze werfen. Die im vorherigen Abschnitt berechnete Bahnkurve der Masse m_1 liefert unmittelbar das erste Kepler'sche Gesetz: *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.*

Ein infinitesimales Flächenelement, welches vom Ortsvektor überstrichen ist, ist in Polarkoordinaten:

$$dF = \frac{1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \frac{L}{m_1} dt$$

Da der Drehimpuls L konstant ist. Somit ist die während einer fixen Zeit Δt überstrichene Fläche immer gleich gross. Daraus folgt das zweite Kepler'sche Gesetz: *Die Verbindungslinie zwischen Planet und Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Wenn T die Umlaufszeit der Masse m_1 ist, dann wird in dieser Zeit die Ellipsenfläche $F = \pi ab$ überstrichen. Es gilt also:

$$\pi ab = \int_0^T \frac{1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{L}{m_1} dt = \frac{1}{2} T \frac{L}{m_1}$$

Es ist also:

$$T = 2\pi ab \frac{m_1}{L}$$

Die Definition von p war: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_2^3 m_1^2}$. Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$ und somit

$$L = \sqrt{G m_2} \cdot \frac{m_1 m_2}{M} \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}$$

Ferner ist $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Wenn wir das in der obigen Formel für T einsetzen, erhalten wir:

$$T = 2\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot m_1 \frac{M}{\sqrt{G m_2 m_1 m_2} \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}} = 2\pi \sqrt{a^3} \frac{M}{\sqrt{G m_2^3}}$$

Somit ist:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{M^2}{Gm_2^3} = \text{konstant}$$

Im speziellen Fall der Sonne und eines Planeten ist $m_2 = M_{\text{Sonne}}$ und $M = m_1 + m_2 \approx M_{\text{Sonne}}$

Dann wird:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{GM_{\text{Sonne}}}$$

Insbesondere folgt daraus das dritte Kepler'sche Gesetz: *Die Quadrate der Umlaufzeiten stehen im gleichen Verhältnis wie die Kuben der großen Halbachsen.*

1.3 Angaben zu unserem Sonnensystem

Später werden wir gewisse Berechnungen für die Simulation am Beispiel unseres Sonnensystems überprüfen. Auch einzelne Übungsaufgaben beziehen sich auf dieses System. Deshalb sind die nötigen Daten in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Nochmals die Gravitationskonstante: $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

	Sonne	Merkur	Venus	Erde	Mars
Masse in kg	1.9884E+30	3.3010E+23	4.8673E+24	5.9722E+24	6.4200E+23
Masse relativ zur Erdmasse	332'943	0.055	0.815	1.000	0.107
Masse relativ zur Sonnenmasse	1	1.660E-07	2.448E-06	3.004E-06	3.229E-07
Durchmesser in km	1'392'000	4'879	12'103	12'735	6'772
Gravitationskonstante in m/s ²	274.00	3.70	8.87	9.80	3.73
Umlaufzeit um die Sonne in Tagen	-	87.969	224.701	365.256	686.980
Grosse Halbachse in Mio km	-	57.909	108.200	149.600	227.990
Grosse Halbachse in AE	-	0.3871	0.7233	1.000	1.524
Exzentrizität der Ellipsenbahn	-	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934
Geschwindigkeit rel. Sonne in km/h	-	172'332	126'072	107'208	86'868
Geschwindigkeit rel. Sonne in AE/Tag	-	0.0276	0.0202	0.0172	0.0139
... und in AE/Jahr	-	10.0700	7.3669	6.2646	5.0760
Fluchtgeschwindigkeit in km/s *)	617.4	4.3	10.4	11.2	5.0
Argument des Perihels **)	-	1.3519	2.2956	1.7967	5.8650
Perihel in AE	-	0.3075	0.7184	0.9833	1.3814
Perihel Geschwindigkeit in km/h	-	212'328	126'936	109'044	95'400
Perihel Geschwindigkeit in AE/Tag	-	0.034063	0.020364	0.017494	0.015305
Aphel in AE	-	0.467	0.728	1.017	1.666

	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Masse in kg	1.8980E+27	5.6830E+26	8.6800E+25	1.0024E+26
Masse relativ zur Erdmasse	317.8	95.2	14.5	16.8
Masse relativ zur Sonnenmasse	9.545E-04	2.858E-04	4.365E-05	5.041E-05
Durchmesser in km	138'346	114'632	50'532	49'105
Gravitationskonstante in m/s ²	24.79	10.44	8.87	11.15
Umlaufzeit um die Sonne in Tagen	4'329	10'751	30'664	60'148

Grosse Halbachse in Mio km	778.51	1'433.40	2'872.40	4'514.60
Grosse Halbachse in AE	5.204	9.582	19.201	30.178
Exzentrizität der Ellipsenbahn	0.0489	0.0542	0.0472	0.0097
Geschwindigkeit rel. Sonne in km/h	47'052	34'884	24'516	19'548
Geschwindigkeit rel. Sonne in AE/Tag	0.0075	0.0056	0.0039	0.0031
... und in AE/Jahr	2.7393	2.0453	1.4244	1.1322
Fluchtgeschwindigkeit in km/s *)	60.2	36.1	21.4	23.6
Argument des Perihels **)	0.2575	1.6132	2.9839	0.7849
Perihel in AE	4.9501	9.0481	18.3755	29.7667
Perihel Geschwindigkeit in km/h	49'392	36'648	25'596	19'800
Perihel Geschwindigkeit in AE/Tag	0.007924	0.005879	0.004106	0.003176
Aphel	5.455	10.12	20.11	30.069

*) am Äquator

**) Relativ zur Nullrichtung, welche durch den Schnittpunkt der Ekliptik mit der Äquatorebene der Erde definiert ist. Die Angabe ist im Bogenmass.

Die Angaben zum Perihel ändern sich im Laufe der Zeit. Obige Angaben stammen aus dem Jahr 2000. Sie werden bei der Implementierung unseres Planetensystems als Startposition eines Planeten verwendet. Da die numerische Approximation ohnehin sehr bald unpräzise wird, verzichten wir darauf, hier eine grössere Genauigkeit anzustreben. Zudem würde das rasch sehr aufwendig werden.

1.4 Das N-Körperproblem

Bereits das Dreikörperproblem weist eine signifikant höhere Komplexität auf als das Zweikörperproblem. Formuliert wurde es bereits durch Newton. Es gibt keine geschlossene analytische Lösung für dieses Problem. In den letzten dreihundert Jahren haben sich grosse Mathematiker mit diesem Problem beschäftigt. Bedeutende Beiträge stammen von Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) und Henri Poincaré (1854 – 1912). Ein neueres Resultat aus den Jahren 1953 - 1963, welches sich u.a. auf die Stabilität unseres Planetensystems bezieht, ist das sogenannte KAM Theorem von Andrei Kolmogorow (1903 – 1987), Jürgen Moser (1928 – 1999) und Wladimir Arnold (1937 – 2010).

Bei n Körpern mit Masse $m_j, j = 1..n$, welche sich an den Positionen $\vec{r}_j, j = 1..n$ befinden, sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen gegeben durch:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i \neq j} G \frac{m_j m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Diese Gleichungen werden wir bei der Simulation der Bewegung dieser Körper für die numerischen Verfahren verwenden. Diese Gleichungen sind invariant bei Verschiebung des Nullpunktes, d.h. wenn man $\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{c}$ ersetzt, wobei \vec{c} ein konstanter Vektor ist. Wir werden den gemeinsamen Schwerpunkt der Massen als Nullpunkt wählen. Die Koordinate \vec{R} des Schwerpunktes bei einem beliebigen Koordinatensystem ist gegeben durch:

$$M \vec{R} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j$$

Dabei ist $M = \sum_{j=1}^n m_j$.

Die Summe aller Kräfte hebt sich auf, weil für alle Paare von Körpern die Kraft zwischen diesen Körpern insgesamt Null ist. Es ist also:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\vec{r}}_j = 0$$

Daraus folgt durch Integration der Impulssatz:

$$\sum_{j=1}^n m_j \dot{\vec{r}}_j = \vec{p}$$

Wobei \vec{p} konstant ist.

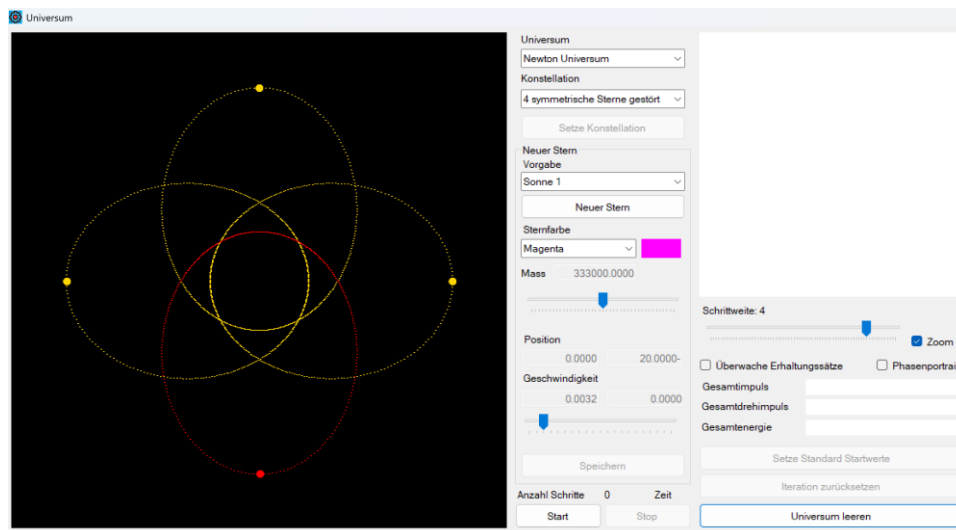
Für den Drehimpuls \vec{L} gilt:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \dot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \left\{ \sum_{i \neq j} G \frac{m_j m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\}$$

In dieser etwas komplexen Summe treten die Summanden immer paarweise auf, z.B.

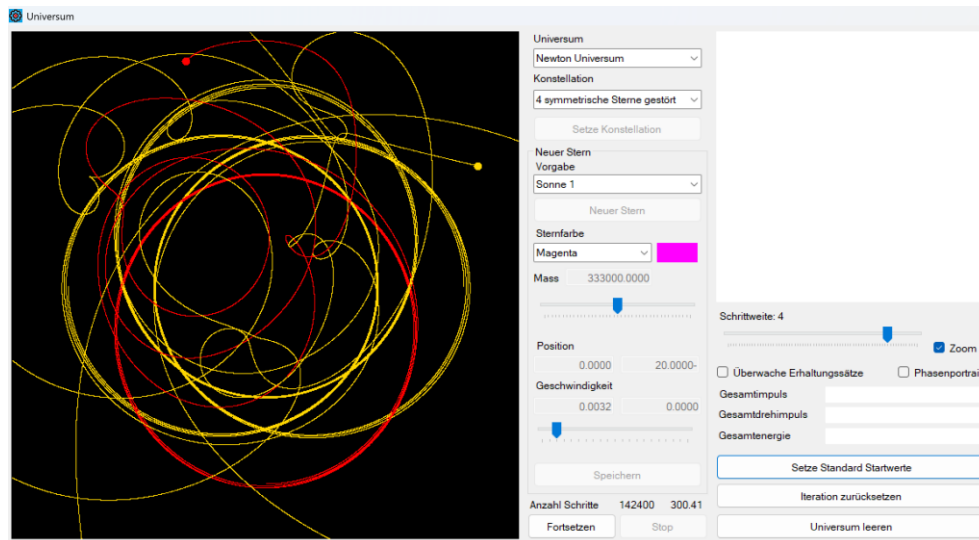
$\vec{r}_1 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ und $\vec{r}_2 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Die Summe eines solchen Paares ist Null, also ist insgesamt $\frac{d}{dt} \vec{L} = 0$ und damit der Drehimpuls konstant. Für die Bewegung der N-Körper ist die Ebene senkrecht zu \vec{L} invariant und wir können sie in den Schwerpunkt des Systems legen. Sie wird die *invariante Ebene von Laplace* genannt. Bei der Simulation des N-Körper Problems werden wir uns auf den Fall beschränken, dass alle Körper in dieser Ebene liegen.

Mit einer ähnlichen, aber etwas aufwendigen Rechnung, kann man zeigen, dass die Gesamtenergie des Systems konstant ist.



4 (fast) symmetrische Sterne in Startposition

Die angezeigten Bahnen wurden für jeden Stern wie ein Zweikörperproblem berechnet. Der Abstand des roten Sternes vom Schwerpunkt ist um $5 \cdot 10^{-7} \text{ ‰}$ kleiner. Das System reagiert sehr sensitiv auf diese Störung und nach vier Umläufen läuft es «aus dem Ruder».



Das «gestörte» System der vier Sterne gerät nach vier Umläufen ausser Kontrolle

1.5 Numerische Approximation des N-Körperproblems

Im «Simulator» betrachten wir nur ebene Systeme, rechnen also mit zwei Komponenten.

Die Beschleunigung, welche der Körper Nummer j erfährt, ist:

$$\ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Wir schreiben für den Ortsvektor des Körpers:

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

Wir setzen:

$$R_{ji} := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Und erhalten dann z.B. für die erste Komponente von $\ddot{\vec{r}}_j$:

$$\ddot{x}_j = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (x_i - x_j)$$

Das liefert bei n Körpern ein System von $2n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mit der Substitution: $u_{1j} = x_j$, $v_{1j} = \dot{x}_j$ bzw. $u_{2j} = y_j$, $v_{2j} = \dot{y}_j$ erhält man für die Beschleunigung des Körpers Nummer j ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{u}_{1j} = v_{1j} =: f_1(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{v}_{1j} = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (u_{1i} - u_{1j}) =: g_1(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{u}_{2j} = v_{2j} =: f_2(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{v}_{2j} = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (u_{2i} - u_{2j}) =: g_2(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \end{cases}$$

Mit

$$R_{ji} := \sqrt{(u_{1i} - u_{1j})^2 + (u_{2i} - u_{2j})^2}$$

Wie im Abschnitt über das Doppelpendel wenden wir nun das vierstufige Runge-Kutta Verfahren für eine Simulation dieses Systems an. Das Resultat wird nur ein numerisches Artefakt eines wirklichen Systems sein. Wir werden aber bei der Implementierung den Gesamtimpuls, den Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des Systems überwachen und kontrollieren, ob diese (einigermassen) konstant sind.

Damit die Implementierung im «Simulator» dokumentiert ist, bereiten wir diese in folgendem Algorithmus vor. Darin sind $u_{1n}, v_{1n}, u_{2n}, v_{2n}$ die Werte der Parameter nach dem n -ten Iterationsschritt. Die (konstante) Schrittweite ist d , welche genügend klein gewählt werden muss. Nun versuchen wir, die Darstellung etwas kompakt zu halten. Nacheinander führen wir folgende Schritte durch:

$$\begin{aligned} \vec{z}_{1n} &:= (u_{1n}, v_{1n}, u_{2n}, v_{2n}) \\ \begin{cases} k_{i1} &:= f_i(t_n, \vec{z}_{1n}) \\ h_{i1} &:= g_i(t_n, \vec{z}_{1n}) \end{cases}, i \in \{1, 2\} \\ \vec{z}_{2n} &:= (u_{1n} + \frac{d}{2}k_{11}, v_{1n} + \frac{d}{2}h_{11}, u_{2n} + \frac{d}{2}k_{21}, v_{2n} + \frac{d}{2}h_{21}) \\ \begin{cases} k_{i2} &:= f_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{2n}) \\ h_{i2} &:= g_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{2n}) \end{cases}, i \in \{1, 2\} \\ \vec{z}_{3n} &:= (u_{1n} + \frac{d}{2}k_{12}, v_{1n} + \frac{d}{2}h_{12}, u_{2n} + \frac{d}{2}k_{22}, v_{2n} + \frac{d}{2}h_{22}) \\ \begin{cases} k_{i3} &:= f_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{3n}) \\ h_{i3} &:= g_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{3n}) \end{cases}, i \in \{1, 2\} \\ \vec{z}_{4n} &:= (u_{1n} + k_{13}, v_{1n} + h_{13}, u_{2n} + k_{23}, v_{2n} + h_{23}) \\ \begin{cases} k_{i4} &:= f_i(t_n + d, \vec{z}_{4n}) \\ h_{i4} &:= g_i(t_n + d, \vec{z}_{4n}) \end{cases}, i \in \{1, 2\} \\ \begin{cases} t_{n+1} = t_n + d \\ u_{i(n+1)} = u_{in} + \frac{d(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})}{6} \\ v_{i(n+1)} = v_{in} + \frac{d(h_{i1} + 2h_{i2} + 2h_{i3} + h_{i4})}{6} \end{cases}, i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Dieses sind die Gleichungen, welche bei der Implementation verwendet werden. Da das Runge-Kutta Verfahren für alle Universen strukturell dasselbe ist, wird es in der abstrakten Universum-Klasse implementiert. Hingegen hängen die Funktionen $f_{1,2}, g_{1,2}$ vom Kraftgesetz des Universums ab und werden im spezifischen Universum implementiert.

Nach der Implementierung musste man feststellen, dass das Runge-Kutta Verfahren leider sehr ungenaue Bahnen liefert, welche nur bei sehr kleinen Schrittweiten einigermaßen plausibel sind.

Es gibt gewisse Effekte im «Simulator», die noch nicht genügend abgeklärt sind, insbesondere wenn Sterne aufeinanderstossen oder sich sehr nahekomen.

1.6 Wahl des Koordinatensystems

Der Nullpunkt des Koordinatensystems soll mit dem gemeinsamen Schwerpunkt aller Massen zusammenfallen. Der gemeinsame Schwerpunkt wird bei einer Platzierung eines neuen Körpers neu berechnet. Wenn diese Platzierung abgeschlossen ist, werden alle Körper so umplatziert, dass der Schwerpunkt wieder mit dem Nullpunkt (0,0) zusammenfällt. Wenn n Massen platziert sind, dann gilt relativ zu ihrem Schwerpunkt als Nullpunkt:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

Nun kommt die Masse n+1 dazu. Der gemeinsame Schwerpunkt verschiebt sich dann um einen Vektor \vec{c} . Für den neuen Schwerpunkt gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i (\vec{r}_i + \vec{c}) = \vec{0}$$

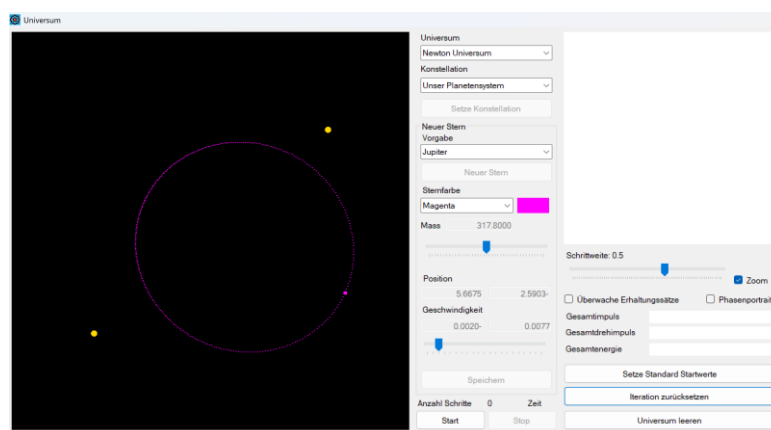
Also ist:

$$\vec{c} = -\frac{m_{n+1} \vec{r}_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i}$$

Die Richtung des x-Achse ist in Wirklichkeit festgelegt durch den Schnittpunkt der Ekliptik mit der Äquatorebene der Erde, und zwar im Frühlingspunkt. Im Simulator ist der Nullpunkt des Koordinatensystems der Mittelpunkt des Darstellungsdiagrammes und die x-Achse zeigt wie üblich nach rechts.

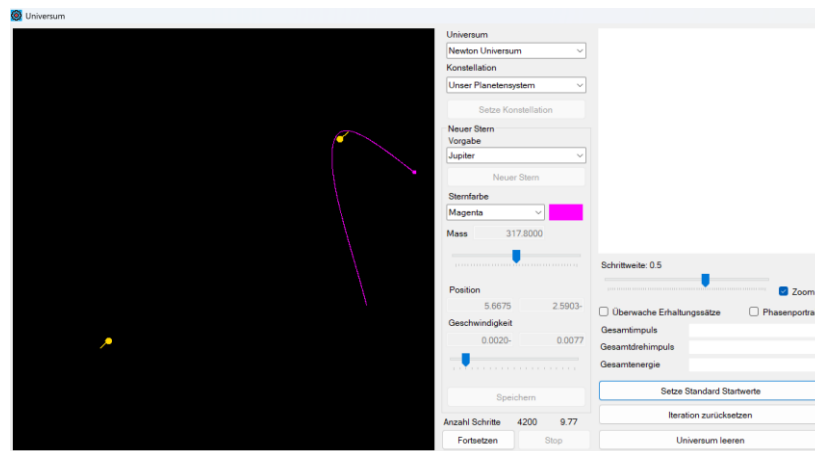
Diese Wahl des Koordinatensystems ist für alle Universen gültig, da sich diese nur durch das Kraftgesetz unterscheiden.

Im «Simulator» bewirkt dies, dass nach der Platzierung eines neuen Sterns das gesamte Bild so verschoben wird, dass der gemeinsame Schwerpunkt im Ursprung liegt. Die Koordinaten aller bisherigen Sterne beziehen sich dann auf diesen neuen Schwerpunkt. Bei einem neu hinzugefügten Stern werden seine Standardkoordinaten bei der Platzierung auf das neue Koordinatensystem umgerechnet.



Hier wurden zwei Sonnen und ein Jupiter platziert

Im obigen Bild beziehen sich die Koordinaten der dargestellten Sonnen und des Jupiters auf den gemeinsamen Schwerpunkt. Da die Sonnen in Ruhe sind, wird bei ihnen keine zu erwartende Bahn relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt berechnet. Hingegen ist dies für Jupiter der Fall.



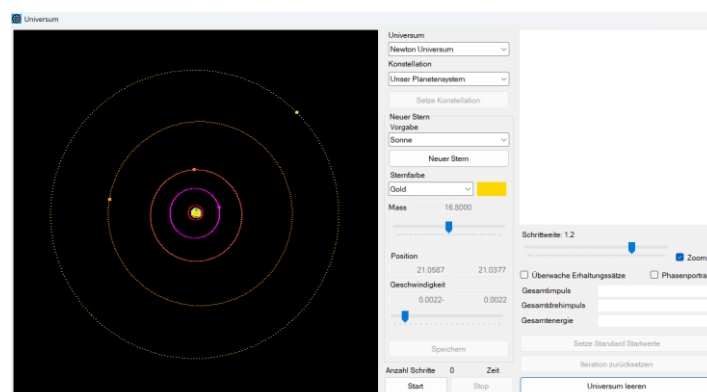
Die Bahnen nach dem Start der Iteration

1.7 Änderung der Sternmasse

Bei der Platzierung eines neuen Körpers kann auch seine Masse angepasst werden. Diese kann zwischen $3.3010 \cdot 10^{23}$ bzw. 0.055 Ermassen (Merkur) und $1.9884 \cdot 10^{30}$ bzw. 332942.6 Erdmassen (Sonne) variieren. Die Masse kann manuell oder über ein Schieberegister eingegeben werden. Das Schieberegister passt die Masse nur relativ zur Ausgangsmasse an, und zwar um einen Faktor, welcher zwischen 1 und 100 variiert. Damit kann der Merkur nicht mehr verkleinert werden, es sind aber alle Größenordnungen zwischen Merkur und dem 100-fachen der Sonne repräsentierbar. Es wird davon ausgegangen, dass man beim Default bereits einen Körper der gewünschten Mindestgröße wählt. Die Änderung einer Masse hat wiederum die Neuberechnung des gemeinsamen Schwerpunktes zur Folge.

Die Größe der Masse wird im Diagramm durch den Durchmesser angedeutet. Die Anzahl der Pixel für die Darstellung ist mindestens 1 und sonst der Exponent der Masse minus 22. Für die Größenordnung 10^{23} (Merkur, Mars) steht 1 Pixel. Für die Größenordnung 10^{24} (Erde, Venus) 2 Pixel. Der Jupiter mit der Größenordnung 10^{27} wird dann durch 5 Pixel dargestellt und die Sonne durch 8 Pixel.

Der zulässige Definitionsbereich der Masse ist vom Universum abhängig und für jedes Universum individuell definiert.



Darstellung unseres Planetensystems. Die inneren Planeten sind kaum mehr sichtbar.

1.8 Darstellung des Universums im «Simulator»

Ein Universum im «Simulator» ist definiert durch das Bewegungsgesetz, also zum Beispiel durch das Newton'sche Gravitationsgesetz. Alternative Universen werden in einem eigenen Abschnitt behandelt. Ein Universum enthält n Körper, welche im «Simulator» allgemein als «Sterne» bezeichnet werden, auch wenn es sich um Planeten handelt. Wenn es aber um die echten Planeten geht, wird auch diese Bezeichnung verwendet.

Standardmässig sind gewisse Sterne als Default vorgegeben, insbesondere die Bestandteile unseres Planetensystems. Das ist die Sonne inklusive der zugehörigen Planeten. Ein solches System, zum Beispiel bestehend aus Sonne plus einer Auswahl von Planeten, ist eine *Konstellation*. Im «Simulator» stehen für jedes Universum verschiedene Konstellationen zur Verfügung. Im Beispiel des Newton'schen Universums gehört dazu unser Planetensystem oder das System der inneren Planeten. Dazu gibt es Varianten mit «Störungen», wenn zum Beispiel der Jupiter so umplatziert ist, dass er den inneren Planeten nahekommt. Wenn man eine Konstellation ausgewählt hat, kann man die Planeten oder die Sonne auch einzeln platzieren und anschliessend mit der Maus verschieben oder deren Masse und Geschwindigkeit ändern.

Der Bereich, in welchem die Körper platziert werden, ist im «Simulator» ein Quadrat mit einer Seitenlänge, welche für jedes Universum festgelegt ist. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt dieses Quadrates und er ist der gemeinsame Schwerpunkt der im Universum liegenden Körper.

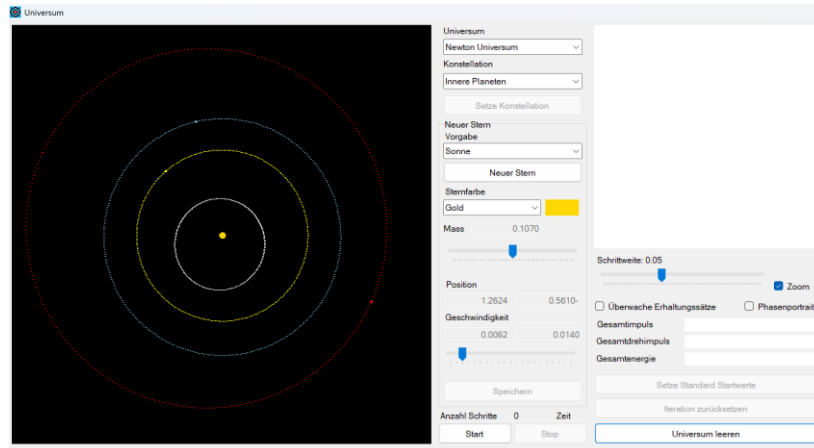
Zoom: Wenn «Zoom» aktiviert ist, werden bei der Darstellung von neuen Planeten oder Sternen deren Positionskoordinaten so in mathematische Koordinaten umgerechnet, dass sie optimal ins Quadrat hineinpassen.

Beispiel

Wenn nur die inneren Planeten betrachtet werden, dann ist der Mars der äusserste Planet mit einer Distanz von $\sim 1.524 \text{ AE}$ zur Sonne. Sein Aphel ist aber 1.666 AE . Die Skalierung (in der Implementierung der «Zoom») wird dann so gewählt, dass 1.666 AE gerade der Zahl 30 entspricht. Dann sind alle Planetenbahnen gut sichtbar. Zum Beispiel ist das Perihel des Merkurs 0.3075 AE . Das entspricht dann der Zahl 5.353 oder etwa 53 Pixeln.

Wenn auch die äusseren Planeten gezeigt werden sollen, dann ist das Aphel des Neptuns 30.069 AE . Die Skalierung wird so gewählt, dass dieser Wert der Zahl 29 in mathematischen Koordinaten entspricht. Dann ist das Perihel des Merkurs noch 0.297 in mathematischen Koordinaten was etwa 3 Pixeln entspricht. Er ist dann nicht mehr sichtbar, weil die Sonnenmasse durch 8 Pixel dargestellt wird.

Nach der Platzierung eines Sternes wird der neue gemeinsame Schwerpunkt ermittelt und dann alle Sterne relativ zu diesem Schwerpunkt platziert. Das heisst, die aktuelle Startposition bezieht sich dann auf diesen Schwerpunkt. Bei der Platzierung eines neuen Sterns muss dessen Originalstartposition, welche als Standard beim Stern gespeichert ist, ebenfalls in das neue Koordinatensystem umgerechnet werden.



Darstellung der inneren Planeten

Die Bewegung der Sterne läuft im «Simulator» in der Regel im Gegenuhrzeigersinn. Bei der Planetenbewegung ist nämlich zu beachten, dass der Drehimpulsvektor eine Planetenbahn parallel zum Drehimpulsvektor der Erddrehung ist. Wenn man «von oben», also für uns vom Nordpol aus auf die Erde blickt, dann dreht sich die Erde im Gegenuhrzeigersinn. Das ist der übliche positive Drehsinn bei der mathematischen Winkelmessung. Die Planeten drehen sich im Simulator deshalb ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn. Für alternative Universen wird dieser Drehsinn beibehalten.

1.9 Darstellung der Bahnskizze beim Platzieren eines Sternes

Als Platzierungshilfe für neue Planeten wird deren Bahn im Diagramm dynamisch skizziert, wie wenn es sich um ein Zweikörpersystem handeln würde mit der gemeinsamen Masse aller bereits vorhandenen Körper im gemeinsamen Schwerpunkt. Voraussetzung dafür ist, dass der neu platzierte Planet oder Stern eine Geschwindigkeit $v > 0$ hat. Es wird bei der Berechnung angenommen, dass dies die Geschwindigkeit im Perihel ist.

Wir führen hier die nötigen Berechnungen durch, welche der «Simulator» machen muss. Im Folgenden ist:

M ist die Summe aller bereits vorhandenen Massen. m die Masse des neu hinzugefügten Körpers.

Für die Geschwindigkeit v im Perihel q gilt:

$$v = q\dot{\vartheta}$$

Damit wird der Drehimpuls der neu hinzugefügten Masse

$$L = m q^2 \dot{\vartheta} = m q v$$

Für ihre Energie hat man:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M^3 m}{(M + m)^2} \cdot \frac{1}{q} \approx \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{q}$$

\approx gilt, wenn $M \gg m$.

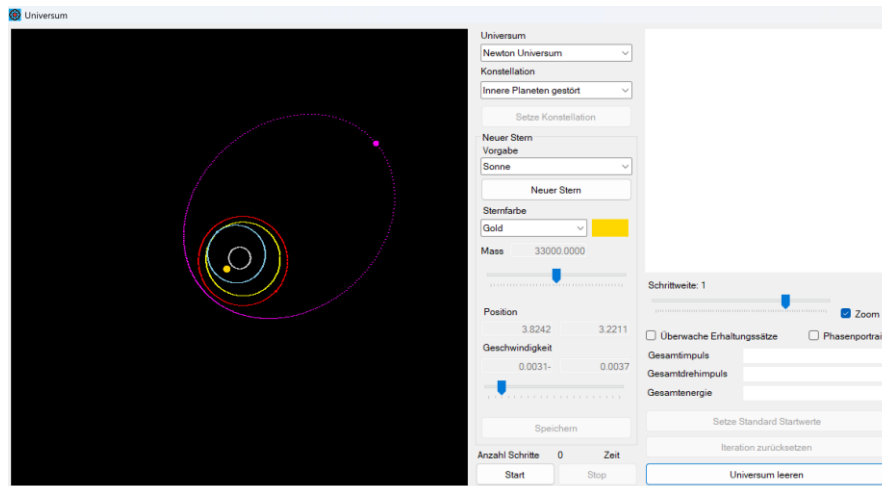
Die Bahnparameter sind nun:

$$p = \frac{(M + m)^2 q^2 v^2}{G M^3} \approx \frac{q^2 v^2}{G M}$$

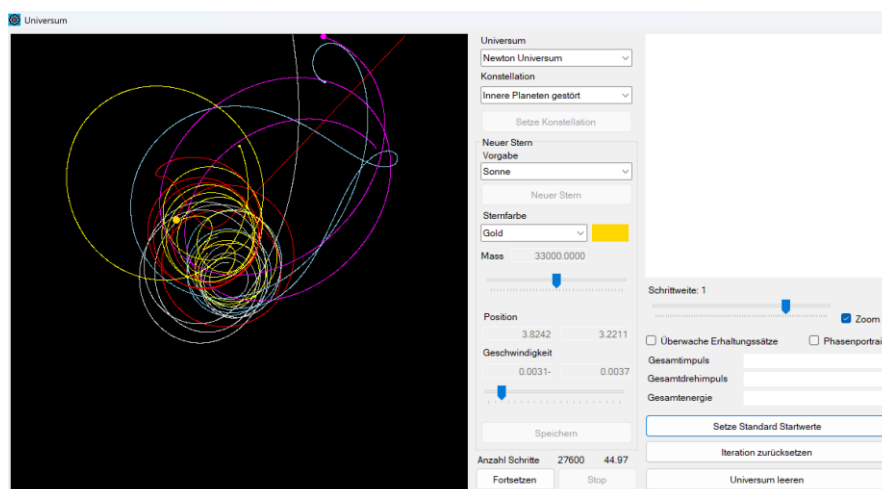
$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2(M+m)^4}{G^2m^3M^6} = \frac{2Em^2Q^2v^2(M+m)^4}{G^2m^3M^6} \approx \frac{2EQ^2v^2}{G^2mM^2}$$

Unter Berücksichtigung des Argumentes des Perihels kann dann die Bahn gezeichnet werden. Das wird nicht die wirkliche Bahn sein, dient aber als Anhaltspunkt.

Bei alternativen Universen ist die Bahnberechnung nicht möglich, falls das Zweikörperproblem nicht analytisch lösbar ist.



Die inneren Planeten zusammen mit einem gestörten Jupiter. Im Mittelpunkt steht der gemeinsame Schwerpunkt und nicht die Sonne



Der gestörte Jupiter hat soeben den Mars ins Jenseits befördert und die Erdbahn gestört

1.10 Die Stossproblematik

Wenn sich zwei Körper näherkommen als zwei Pixel, das sind 0.1 in mathematischen Einheiten oder je nach Skalierung und Zoom ein entsprechend grosser Wert in astronomischen Einheiten, dann könnte man das in der Simulation als plastischen Stoss betrachten.

In einer Version des «Simulator» wurde das so implementiert: Die Simulation wird nicht angehalten, sondern wir ersetzen die beiden zusammenstossenden Körper durch einen Körper mit der Summe beider Massen. Der Geschwindigkeitsvektor des neuen Körpers wird dann so gesetzt, dass der Impuls konstant bleibt. Das entspricht nicht einer physikalischen Realität, sondern dient nur der

Weiterführung der Simulation. Wenn $m_{1,2}$, $\vec{v}_{1,2}$ die Parameter der Körper vor dem Stoss sind und m, v die Parameter des neuen Körpers nach dem Stoss, gilt:

$$m = m_1 + m_2$$

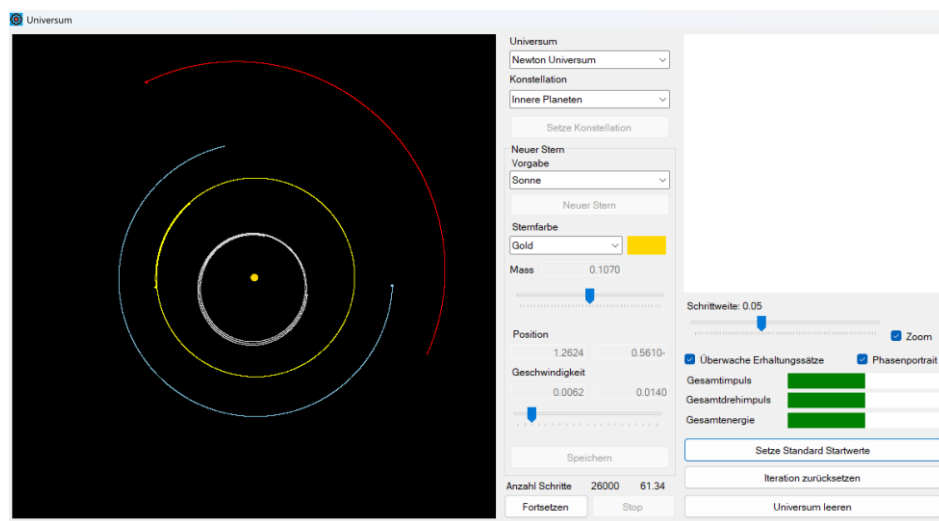
$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m}$$

Wie man leicht nachrechnen kann, bleibt dann auch der Drehimpuls des Systems erhalten, nicht aber die Gesamtenergie.

Nachdem aber Experimente mit Stößen keine zufriedenstellende Wirkung hatten, wurde diese Implementierung wieder entfernt. Jetzt wird dafür gesorgt, dass sich Körper «knapp verfehlen», wenn sie sich zu nahekommen.

1.11 Erhaltungssätze und Phasendiagramm

Während der Simulation wird der Gesamtimpuls, der Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des Systems laufend berechnet und mit den entsprechenden Werten beim Start der Simulation verglichen. Eine Bedingung für alternative Universen ist, dass diese Erhaltungssätze auch dort gelten. Im Benutzerfenster werden diese Werte in Balken rechts unterhalb des Phasenportraits dargestellt.



Bewegung der inneren Planeten um die Sonne und Überwachung der Erhaltungssätze

Wegen der Ungenauigkeit des Runge Kutta-Verfahrens kann es hier aber immer wieder zu Abweichungen kommen.

Zusätzlich kann man die Darstellung der Bewegung in einem Phasendiagramm aktivieren. In diesem Fall wird für jeden Stern in waagrechter Richtung der Abstand des Sterns vom gemeinsamen Schwerpunkt und in senkrechter Richtung der Betrag seiner Geschwindigkeit relativ zu diesem eingetragen.

1.12 Das Newton'sche Universum

Ziel ist, dass intern im «Simulator» mit dem Variablentyp «Decimal» gerechnet werden kann. Für das Newton'sche Universum bedeutet dies, dass die räumlichen Distanzen intern in astronomischen Einheiten AE geführt werden. Die Masse wird für den Benutzer in kg angegeben, aber intern in Anzahl Erdmassen ME geführt. Die Geschwindigkeit von Körpern wird für den Benutzer in km/h

angegeben. Intern führen wir sie in AE/Tag . Entsprechend muss bei der Berechnung der Kraft die Gravitationskonstante angepasst werden. Es gilt:

$$G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Und der Simulator verwendet:

$$G_s = 6.6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.9722 \cdot 10^{24} \cdot (3600 \cdot 24)^2}{149.6^3 \cdot 10^{27}} = 8.88736 \cdot 10^{-10} \frac{AE^3}{ME \cdot Tag^2}$$

Wir können als Beispiel eine kleine Kontrolle durchrechnen, indem wir aus der Gleichgewichtsbedingung Zentrifugalkraft = Gravitationskraft die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne berechnen, und zwar zuerst im m.kg.s-System und dann im AE.ME.Tag-System. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

Oder

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

Dabei ist M die Sonnenmasse und r der Abstand Erde – Sonne.

Im m.kg.s System lautet die Gleichung:

$$v^2 = 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{1.9884 \cdot 10^{30}}{1.496 \cdot 10^{11}} = 8.8711 \cdot 10^8$$

$$v = 2.9784 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Wenn wir das in AE/Tag umrechnen, ergibt das:

$$v = 2.9784 \cdot 10^4 \cdot \frac{86400}{1.496 \cdot 10^{11}} = 0.0172 \text{ AE/Tag}$$

Wenn wir von Anfang an im AE.ME.Tag System rechnen, haben wir:

$$v^2 = 8.88736 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{332942.6}{1} = 2.959 \cdot 10^{-4}$$

$$v = 0.0172 \text{ AE/Tag}$$

Wenn die Einheit der Geschwindigkeit zu hoch gewählt wird, z.B. AE/Jahr, dann muss die Schrittweite des Runge Kutta-Verfahrens sehr niedrig gewählt werden, damit das Verfahren zu einem einigermaßen plausibel aussehenden Orbit führt. Damit wird die Bewegung der Planeten sehr langsam. Wenn hingegen $v \ll |\vec{r}|$, also z.B. wie hier, dann ist das Runge Kutta-Verfahren auch bei grösseren Schrittweiten einigermaßen plausibel und gleichzeitig die Geschwindigkeit der Planeten akzeptabel. Diesen Effekt haben wir hier nicht weiter untersucht. Bei der Implementierung ist aber ein Faktor τ vorhanden, der als Faktor für einen Wechsel der Einheit der Geschwindigkeit dienen kann. Wenn die Geschwindigkeit durch eine Änderung der Zeiteinheit angepasst wird: $v' = \tau v$, muss die Gravitationskonstante im Bewegungsgesetz entsprechend korrigiert werden: $G' = \tau^2 G$, da in der Gravitationskonstanten die Zeit im Quadrat erscheint. Dieser Faktor kann für jedes Universum individuell angepasst werden. Auf Grund von Experimenten ist beim Newton'schen Universum $\tau = 1$.

1.13 Alternative Universen

Ein alternatives Universum soll sich vom Newton'schen nur durch das Kraftgesetz unterscheiden. Dabei sollen wesentliche Eigenschaften des Newton'schen Universums erhalten bleiben. Dazu gehören die Erhaltungssätze und die Unabhängigkeit des Bewegungsgesetzes von der Wahl des Koordinatensystems.

Dazu nehmen wir an, dass auch in alternativen Universen zwischen zwei Massen m_1, m_2 und den Positionen \vec{r}_1, \vec{r}_2 ein Kraftgesetz der Form gilt:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -F(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Es gelten also die drei Newton'schen Gesetze:

- a) Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit
- b) *Kraft = Masse x Beschleunigung*
- c) *Kraft = - Gegenkraft*

Daraus folgt der *Impulssatz*.

Ferner hängt der Betrag der Kraft nur vom Abstand zwischen den Massen ab. Daraus folgt, dass die Bewegungsgleichungen *unabhängig von der Wahl des Nullpunktes* sind.

Da die Richtung des Kraftvektors parallel zu \vec{r} ist, folgt der *Drehimpulssatz* und damit, dass die Bewegung der Massen *in einer Ebene* verläuft. Ebenso folgt, dass die Bewegungsgleichungen *invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems* sind.

Wir nehmen zusätzlich an, dass sich die Kraft von einer Potentialfunktion ableiten lässt. Das heisst, dass es eine Funktion $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$ gibt, so dass

$$\vec{F} = -\nabla\Phi := \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} \\ -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial y} \\ -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}, \vec{r} = (x, y, z)$$

Aus der letzten Bedingung folgt der *Energiesatz*.

Den Beweis dieser Aussagen überlassen wir als Übung.

Im Simulator ist das *normierte Universum* implementiert. Hier ist das Kraftgesetz identisch mit dem Newton'schen Universum, die Einheiten sind aber handlicher normiert. Hier gilt bei der Implementierung:

Die Massen sind im Bereich $m_i \in [0.5, 2], \forall i$ und deren Positionen im Bereich $|\vec{r}_i| \leq 2$. Die Gravitationskonstante ist $G = 1$ und die Geschwindigkeiten bewegen sich im Bereich $|\dot{\vec{r}}_i| \leq 1$.

Für die Berechnung des Orbits ergeben sich die Parameter wie im Newton'schen Universum mit dem einzigen Unterschied, dass die Gravitationskonstante $G = 1$ ist. Bei N Körpern skizzieren wir die Bahn

einer Masse als Zweikörperproblem, nämlich als Bewegung der Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt, wobei alle übrigen Massen in einem Punkt vereint sind. Somit ist mit derselben Herleitung wie beim Zweikörperproblem im Newton'schen Universum:

$$L = m_1 |\dot{\vec{r}}_1| |\dot{\vec{r}}_1|$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 - \frac{M^3 m_1}{(m_1 + M)^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

Wenn M = Masse aller übrigen Sterne.

Damit führen wir wieder die Parameter ein:

$$p := \frac{(m_1 + M)^2 L^2}{m_1^2 M^3}$$

$$\varepsilon^2 := \frac{2EL^2(m_1 + M)^4}{m_1^3 M^6} + 1$$

Und erhalten wie im Abschnitt über das Zweikörperproblem die Gleichung für die Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Für Universen, welche nicht dem Newton'schen Gravitationsgesetz gehorchen, lässt sich die Bahnkurve im Allgemeinen nicht berechnen.

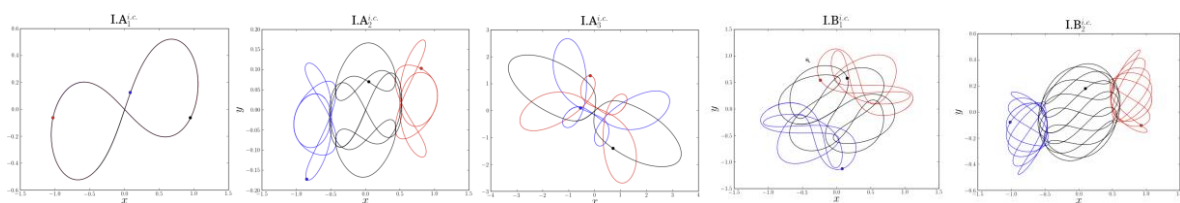
1.14 Periodisch stabile Bahnen

Ein spannendes Thema im (normierten) Universum ist die Frage nach periodisch stabilen Bahnen, insbesondere beim Dreikörperproblem. Die ersten Familien solcher periodischer Bahnen wurden durch Leonhard Euler (1707 – 1783) und später durch Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) gefunden.

Im Internet findet man Beispiel unter den Links:

<https://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body.htm>

<https://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body-movies.htm>



Beispiele von periodischen stabilen Bahnen im Internet

Weitere Erläuterungen findet man ebenfalls in den obigen Links. Im «Simulator» sind einige dieser Szenarien als Konstellationen gespeichert. Insbesondere der Fall dreier Sterne mit gleichen Massen $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ und den Anfangspositionen $\vec{r}_1 = (-1,0)$, $\vec{r}_2 = (1,0)$, $\vec{r}_3 = (0,0)$.

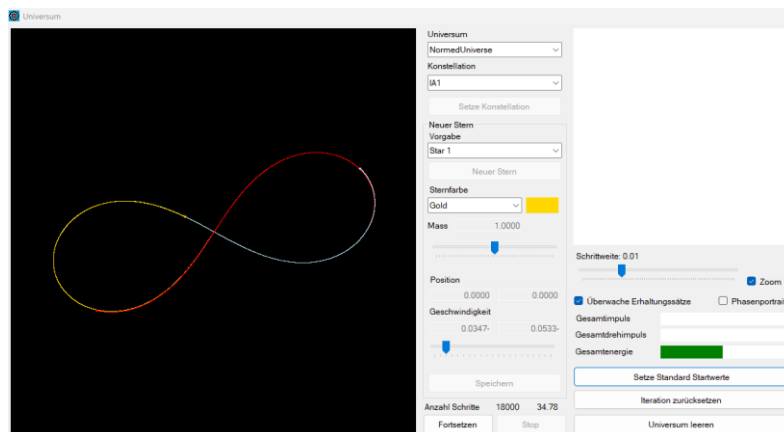
Die Anfangsgeschwindigkeiten sind: $\vec{v}_1 = (c_1, c_2) = \vec{v}_2, \vec{v}_3 = (-2c_1, -2c_2)$ wobei man die Werte von $c_{1,2}$ der folgenden Tabelle entnehmen kann. Beachte, dass der Gesamtimpuls beim Start Null ist.

Implementiert sind einige Beispiele mit niedriger Periode, wobei das Runge Kutta-Verfahren deutlich an seine Grenzen stösst:

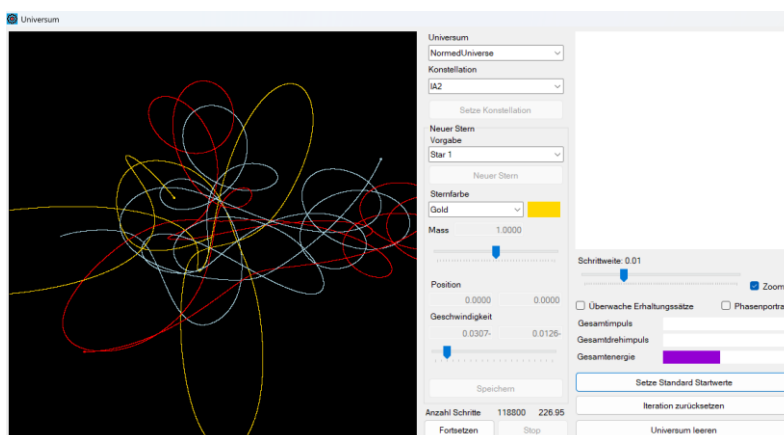
Konstellation	C_1	C_2
IA1	0.3471168881	0.5327249454
IA2	0.3068934205	0.1255065670
IA3	0.6150407229	0.5226158545
IB1	0.4644451728	0.3960600146
IB2	0.4059155671	0.2301631260
IIC1	0.2827020949	0.3272089716

In den letzten Jahrzehnten wurden hunderttausende solcher Bahnen gefunden, auch mit Sternen unterschiedlicher Massen.

Beim normierten Universum ist der Faktor für die Zeiteinheit gesetzt als $\tau = 0.1$.



Die periodisch stabile Bahn IA1



Für die Darstellung der Bahn IA2 ist das Runge Kutta-Verfahren zu wenig präzise

1.15 Übungsbeispiele

1. Zweikörperproblem: Berechne die Bahn der Masse m_1 relativ zur Position der Masse m_2 und vergleiche das Resultat mit der Berechnung der Bahn relativ zum Schwerpunkt.
2. Zweikörperproblem: Berechne die Bahn der Masse m_2 relativ zum Schwerpunkt der Massen.

3. Bestimme aus der Polarform der Kegelschnittgleichung ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.
4. Die Gravitationskonstante ist bekannt. Im Kapitel «Angaben zu unserem Sonnensystem» sind auch die wichtigsten Daten aus diesem System angegeben.
 - a) Berechne aus diesen Angaben die Umlaufdauer T der Erde um die Sonne.
 - b) Berechne den Drehimpuls des Systems Erde – Sonne.
 - c) Berechne die explizite Polargleichung der Erdbahn um die Sonne.
 - d) Die Umlaufzeit des Mars um die Sonne beträgt 687 Erdtage. Bestimme aus dieser Angabe die grosse Halbachse der Marsbahn.
5. Bestimme die Gesamtenergie für ein System mit N Körpern. Zeige, dass die Ableitung der Energie nach der Zeit Null ist, weil sich die zu zwei Körpern gehörenden Summanden paarweise zu Null aufheben.
6. Untersuche im «Simulator» symmetrische Startpositionen. Das heisst, die betrachteten Körper haben alle dieselbe Masse, ihre Startposition sowie die Startgeschwindigkeit ist drehsymmetrisch zum Nullpunkt.
7. Bestimme die Gleichung der Jupiterbahn um die Sonne in astronomischen Einheiten.
8. Ein Körper liegt auf einer Ellipse mit Hauptachse $a = 2$ und Nebenachse $b = 1$. Beim Start befindet sich der Körper in der Position $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0.5176 \\ 1.9318 \end{pmatrix}$ und $\vartheta_0 = 1.309$. Bestimme die Bahngleichung der Ellipse.
9. Bestimme die Bahngleichung des Jupiters in AE. Berechne damit Aphel und Perihel des Jupiters. Vergleiche das Resultat mit Angaben aus dem Internet. Beachte, dass das Resultat lediglich eine Näherung ist.
10. Wenn sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen würde, würden sich Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gerade aufheben. Wie gross wäre dann die Geschwindigkeit der Erde in km/h? Vergleiche das Resultat mit der Geschwindigkeitsangabe in der Tabelle über das Sonnensystem.
11. Beweise die Aussagen im Abschnitt über alternative Universen.
12. Suche weitere Beispiele für stabile periodische Bahnen im Internet und implementiere diese als entsprechende Konstellationen im normierten Universum.

Weiterführende Literatur

[1] Orbital Motion, Archie E. Roy, Taylor & Francis Group, 2005

[2] Celestial Mechanics, John M.A. Danby, Willmann-Bell Inc., 1992