

Dynamische Systeme Teil 2

Die Mathematik zum Computerprogramm «Simulator»

Das Computerprogramm «Simulator», dessen Einsatz in einem separaten Handbuch beschrieben wird, ermöglicht die Simulation einfacher dynamischer Systeme und das Experimentieren mit ihnen. Der Code ist öffentlich auf GitHub zugänglich, in VB.NET geschrieben, mit ausführlichen Kommentaren versehen und kann nach Bedarf erweitert werden. Dazu ist die kostenlose Community-Version von Microsoft Visual Studio nötig, und zwar mindestens in der Version 17.9. Diese setzt auf dem Microsoft Framework 8.0 auf.

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen für den «Simulator». Im Teil 1 werden die Systeme behandelt, welche im entsprechenden Inhaltsverzeichnis aufgelistet sind. Im Teil 2 folgen weitere Systeme. Die technische Dokumentation zum «Simulator» findet man im Dokument «Technische Dokumentation».

Version 8.0 - 01.06.2025

Inhalt

Inhalt.....	1
Einführung	2
1. Das N-Körperproblem	4
1.1 Das Zweikörperproblem.....	4
1.2 Die Kepler'schen Gesetze.....	14
1.3 Angaben zu unserem Sonnensystem.....	15
1.4 Das N-Körperproblem	16
1.5 Numerische Approximation des N-Körperproblems	18
1.6 Wahl des Koordinatensystems.....	20
1.7 Änderung der Sternmasse	21
1.8 Darstellung des Universums im «Simulator».....	22
1.9 Darstellung der Bahnskizze beim Platzieren eines Sternes	23
1.10 Die Stossproblematik	24
1.11 Erhaltungssätze und Phasendiagramm.....	25
1.12 Das Newton'sche Universum.....	25
1.13 Alternative Universen	27
1.14 Periodisch stabile Bahnen.....	28
1.15 Übungsbeispiele.....	29
2. 3D Attraktoren.....	30
2.1 Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	30
2.2 Stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	40

2.3	Das Lorenz-System.....	42
2.4	Elementare Eigenschaften des Lorenz-Systems	46
2.5	Pitchfork- und Hopf Bifurkation.....	50
2.6	Projektion des Lorenz-Attraktors.....	57
2.7	Seltsame Attraktoren.....	59
2.8	Numerische Lösung mit dem Runge Kutta-Verfahren.....	61
2.9	Übungsbeispiele.....	62
3.	Fraktale Mengen.....	63
3.1	Lindenmayer Systeme.....	63
3.2	Historischer Exkurs: Vom anschaulichen zum abstrakten Denken.....	66
3.3	Die Koch Kurve (oder Schneeflockenkurve).....	66
3.4	Die Drachenkurve.....	69
3.5	Die Hilbert- und die Peano-Kurve	74
3.6	Baumstrukturen	80
3.7	Selbstähnlichkeit.....	83
3.8	Fraktale Dimension	84
3.9	Übungsbeispiele.....	90
	Weiterführende Literatur.....	93

Einführung

Im Internet findet man viele Programme, welche die Simulation von einfachen dynamischen Systemen ermöglichen. Deren Code ist aber kaum öffentlich und die zugrundeliegende Mathematik ist auch wenig dokumentiert. Der «Simulator» ermöglicht die Iteration von einfachen reellen Funktionen, die Simulation des mathematischen Billards, die Untersuchung von numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Simulation von verschiedenen gekoppelten Pendeln oder des Newton'schen Universums. Der Code des Programmes ist in VB.NET geschrieben und steht öffentlich auf Github im Repository «HermannBiner/Simulator» zur Verfügung. Um mit ihm zu arbeiten, genügt die Community Version 2022 des Microsoft Visual Studio, welche kostenlos heruntergeladen und einfach installiert werden kann. Voraussetzung für den «Simulator» ist auch die Installation des Microsoft Frameworks 8.0.

Der GitHub Link ist folgender:

<https://github.com/HermannBiner/Simulator>

Die Mathematik, welche dem «Simulator» zu Grunde liegt, wird in diesem Dokument auf elementarem Niveau behandelt. Beispiele von Übungsaufgaben oder Vorschläge zur Erweiterung des «Simulator» sollen zu eigener Aktivität anregen. Die Mathematik am Gymnasium ist stofflich zwar mehr als ausgelastet. Dennoch kann es sein, dass im Rahmen eines Freifaches oder eines Seminars

interessierten Schülern weiterführende Themen angeboten werden. Der «Simulator» und dieses Dokument soll einen Beitrag dazu bieten.

In der Version 8 des Programmes sind folgende Systeme implementiert:

- Wachstumsmodelle und Iteration quadratischer Funktionen wie das logistische Wachstum, die Zeltabbildung, die Iteration an der Parabel inklusive der damit verbundenen Themen wie das Feigenbaum Diagramm.
- Das mathematische Billard mit verschiedenen Formen des Billardtisches: Elliptisches Billard, Billard im Stadion, ovales Billard. Das Analogon zum Feigenbaum-Diagramm ist hier das C-Diagramm.
- Die Untersuchung von numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier werden einige einfache Verfahren am Beispiel des Federpendels miteinander verglichen.
- Die Simulation von gekoppelten Pendeln: Doppelpendel, schwingendes Federpendel und horizontales Rüttelpendel.
- Iterationen in der komplexen Ebene: Newton Iteration und Bassins von Einheitswurzeln. Nullstellen von Polynomen dritten Grades.
- Untersuchung der quadratischen Funktion im Komplexen. Julia Mengen. Mandelbrot Menge. Die n-te Potenzfunktion.
- Simulation des Newton'schen Universums inklusive unseres Planetensystems
- Seltsame Attraktoren wie das Lorenz System
- Fraktale Mengen

Die Benutzung des «Simulator» ist in einem Handbuch auf Deutsch und einem Manual auf Englisch ausführlich dokumentiert. Zusätzlich erläutert eine technische Dokumentation die Architektur des «Simulator». Die Sprache im User Interface sowie in allen Dokumentationen kann zwischen Deutsch und Englisch gewählt werden. Im Code findet man ausführliche Kommentare auf Englisch.

Vorausgesetzt wird lediglich Mathematik, welche entweder am Gymnasium behandelt wird oder welche einem Mittelschüler mit wenig Aufwand zugänglich gemacht werden kann. Gestreift werden Themen aus der Geometrie (Kegelschnitte und ebene Vektorgeometrie), der Analysis (Stetigkeit, Differentialrechnung und gewöhnliche Differentialgleichungen) und der Physik (Lagrange Formalismus, Gravitation).

Die einzelnen Themenbereiche sind weitgehend unabhängig, sodass je nach Interesse und der zur Verfügung stehenden Zeit eine Auswahl möglich ist.

Ein spezieller Dank gebührt Prof. em. Dr. Urs Kirchgraber der ETH Zürich, der mich in den neunziger Jahren auf die Chaostheorie aufmerksam machte. Ebenso danke ich Prof. Dr. Norbert Hungerbühler der ETH Zürich, der mich in vielerlei Hinsicht unterstützte und dem ich wertvolle Hinweise verdanke.

1. Das N-Körperproblem

Das N-Körperproblem handelt von N Körpern, welche im dreidimensionalen Raum positioniert sind und deren Bewegung nur von den zwischen ihnen vorhandenen Gravitationskräften beeinflusst werden. Es tritt auf, wenn zum Beispiel Astronomen Bahnen von Sternen oder Planeten berechnen wollen. Bereits Johannes Kepler (1571 – 1630) hat in den Jahren 1599 - 1619 Gesetze formuliert, welche das Zweikörperproblem korrekt beschreiben. Isaac Newton (1642 – 1726) hat diese Gesetze 1687 aus seinem Gravitationsgesetz hergeleitet.

Der Fall $N > 2$ hat später viele Mathematiker und Physiker beschäftigt, ohne dass man eine geschlossene analytische Lösung finden konnte, welche im allgemeinen Fall die Bahnen der Bewegung der N Körper beschreibt. Quidong Wang hat zwar 1991 eine Lösung für den allgemeinen Fall mit Hilfe von Taylorreihen gefunden, aber diese konvergieren so langsam, dass sie für die Praxis unbrauchbar sind. Der allgemeine Fall hat nämlich chaotische Eigenschaften. Darauf ist bereits Henri Poincaré (1854 – 1912) 1890 bei der Untersuchung spezieller Fälle des Dreikörperproblems gestossen.

Im Folgenden geht es darum, den «Simulator» mit einer Simulation des N-Körperproblems zu erweitern. Dabei werden wir nur den vereinfachten Fall betrachten, dass alle Körper in derselben Ebene liegen. Bei der Simulation muss man sich bewusst sein, dass sie nur ein numerisches Artefakt ist und nicht die wirkliche Bewegung der N Körper wiedergibt.

Eine vertiefte Darstellung der mathematischen Theorie findet man in «Orbital Motion» [1] und «Celestial Mechanics» [2]. Beide Bücher berichten ausführlich über das N-Körperproblem, aber auch der allgemeinen Himmelsmechanik und bleiben dabei auf einem weitgehend elementar verständlichen mathematischen Niveau.

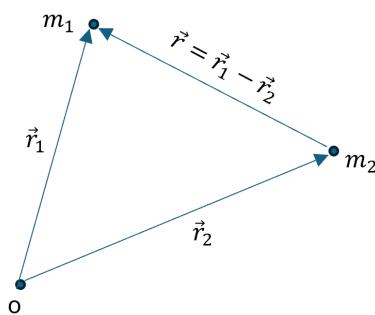
1.1 Das Zweikörperproblem

Die Newton'schen Gleichungen

Obwohl sich die numerische Simulation des Zweikörperproblems nicht wesentlich von jener des N-Körperproblems unterscheidet, wollen wir hier das Zweikörperproblem mathematisch behandeln.

Wir betrachten zwei Massen m_1, m_2 welche sich zum Zeitpunkt t an den Positionen $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ befinden. Dabei soll $\vec{r}_1(0) \neq \vec{r}_2(0)$ sein.

Zwischen den Massen wirkt die Kraft $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}$ in Richtung der jeweils anderen Masse nach dem *Gravitationsgesetz von Newton*, wobei $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \neq \vec{0}$ der Differenzvektor der Positionen ist. $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ ist die Gravitationskonstante.



Nach den *Newton'schen Gesetzen* und seinem *Gravitationsgesetz* hat man die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Oder:

$$(1) \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_1}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Die Erhaltungssätze

Aus diesen Gleichungen folgen die klassischen Erhaltungssätze. Wir prüfen dies zuerst für den *Impulssatz*. Addiert man obige Gleichungen, erhält man nämlich:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$$

Und durch Integration nach t erhält man den Gesamtimpuls des Systems:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}$$

Wobei \vec{p} konstant ist.

Wenn \vec{R} die Koordinate des Schwerpunktes ist und $M := m_1 + m_2$, dann ist der Gesamtimpuls auch

$$M \dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

Durch Integration nach t und Bestimmung der Integrationskonstanten durch Spezialfälle wie $m_1 = 0$, erhält man als Ortsvektor für den Schwerpunkt:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

Aus $M \dot{\vec{R}} = \vec{p} = \text{konstant}$ folgt auch, dass sich der Schwerpunkt des Systems mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Nun untersuchen wir den *Drehimpulssatz*. Für den Gesamtdrehimpuls \vec{L} des Systems gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{r}_1 \times m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \\ &= -\vec{r}_1 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} + \vec{r}_2 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r} \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0} \end{aligned}$$

Somit ist der Drehimpuls \vec{L} des Systems konstant.

Wir kontrollieren noch, dass die *Gesamtenergie* des Systems konstant ist. Die potenzielle Energie im Abstand $|\vec{r}|$ vom Schwerpunkt ist (wenn der Nullpunkt im unendlichen definiert wird):

$$E_{pot} = - \int_{|\vec{a}|}^{\infty} G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} d\vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{a}|}$$

Somit ist

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{d}{dt} E = m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 + G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Wir setzen $\gamma = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}$. Dann ist nach (1): $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma \vec{r}$ und $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \gamma \vec{r}$ und man hat:

$$\frac{d}{dt} E = -\dot{\vec{r}}_1 \cdot \gamma \vec{r} + \dot{\vec{r}}_2 \cdot \gamma \vec{r} + \gamma \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{\vec{r}} \cdot \gamma \vec{r} + \gamma \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

□

Wahl des Bezugssystems

Im Folgenden versuchen wir nun die Bahnen der Massen m_1, m_2 zu bestimmen. Dazu wählen wir zuerst ein geeignetes Koordinatensystem als Bezugssystem.

Man sieht leicht, dass die Newton'schen Gleichungen (1) *unabhängig von der Wahl des Nullpunktes* sind. Ersetzt man nämlich $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}' + \vec{c}$, wobei der alte Nullpunkt durch die Translation \vec{c} in den neuen geschoben wird, dann erfüllen $\vec{r}_{1,2}'$ dieselben Gleichungen. Nun wählen wir den Schwerpunkt des Systems, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, als Nullpunkt. Damit hat man ein Inertialsystem. Relativ zu diesem ist der Gesamtimpuls des Systems gleich Null. Es gilt also:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

Subtrahiert man die Gleichungen (1) voneinander folgt:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist. Ebenso folgt aus der ersten Gleichung (1) und da der Gesamtimpuls Null ist:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -G \frac{m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{|\vec{r}|^3} = -G \frac{m_2 \vec{r}_1 + m_1 \vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3}$$

Für \vec{r}_2 führt man eine analoge Rechnung durch und erhält schliesslich das (symmetrische) Gleichungssystem relativ zum Schwerpunkt:

$$(2) \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -GM \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{cases}$$

Wenn wir das Kreuzprodukt mit \vec{r} bilden, haben wir:

$$0 = \vec{r} \times \left(\ddot{\vec{r}} + GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Und Integration nach t liefert:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Wobei \vec{h} konstant und im Allgemeinen $\neq \vec{0}$ ist. Es ist $\vec{r} \neq \vec{0}$ nach Voraussetzung und im Allgemeinen $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$, da sich die Körper im gegenseitigen Gravitationsfeld befinden. Wenn die Körper nicht aufeinander zufliegen und kollidieren, ist zudem \vec{r} nicht parallel zu $\dot{\vec{r}}$. Die Bahn verläuft dann in einer Ebene senkrecht zu \vec{r} , \vec{r} unabhängig von t . Wir legen diese Ebene durch den Schwerpunkt.

Können wir die x- und y-Achse des Koordinatensystems in diese Ebene legen? Dazu müssten wir das Koordinatensystem so drehen, dass die x- und y-Achse in die Ebene fallen und die z-Achse senkrecht zu dieser Ebene liegt. Wir bezeichnen diese Drehung mit D . Diese ist bijektiv und D^{-1} führt das gedrehte Koordinatensystem wieder ins ursprüngliche über. Seien $\vec{r}'_{1,2}$ die Positionen der Massen im gedrehten System. Dann gilt: $\vec{r}'_{1,2} = D^{-1}\vec{r}_{1,2}$. D und damit auch D^{-1} sind längentreu, es gilt also $|\vec{r}| = |D^{-1}\vec{r}'| = |\vec{r}'|$. Somit geht z.B. die erste Gleichung (1) über in:

$$D^{-1}\ddot{\vec{r}}'_1 = -G \frac{m_2}{|\vec{r}'|^3} \cdot D^{-1}\vec{r}'$$

Da D^{-1} bijektiv ist, folgt daraus:

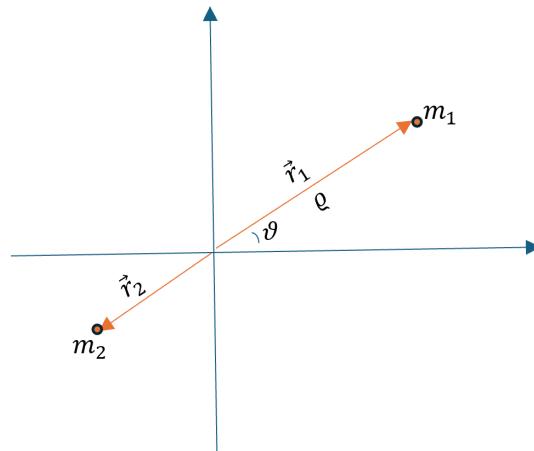
$$\ddot{\vec{r}}'_1 = -G \frac{m_2}{|\vec{r}'|^3} \cdot \vec{r}'$$

Dasselbe gilt für die zweite Gleichung. Das heisst, die neuen Koordinaten erfüllen dieselben Gleichungen (*) wie die alten.

Die Bewegungsgleichungen sind also *unabhängig von der Drehung des Koordinatensystems* und wir können die x- und y-Achse in die Ebene legen, in welcher die Bewegung verläuft. Gleichzeitig liegt für uns der Nullpunkt des Koordinatensystems im gemeinsamen Schwerpunkt. Diesen Bezugspunkt brauchen wir später für die Implementierung, um die Bahn *einer* Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt zu beschreiben.

Die Bahn *einer* Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt

Folgende Skizze zeigt die entsprechende Situation.



Lage der Massen relativ zum gewählten Koordinatensystem

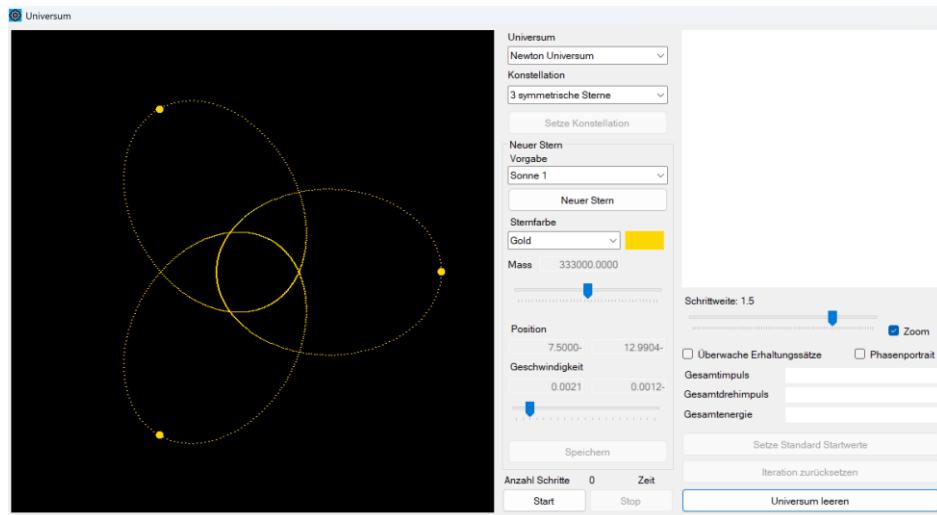
Betrachten wir die erste Gleichung (2) erhalten wir unter Berücksichtigung, dass der Gesamtimpuls Null ist:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -GM \frac{\vec{r}_1}{\left| \vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \right|^3} = -G \frac{M m_2^3}{M^3} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Und damit erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur noch die Bewegung der Masse m_1 auftritt:

$$(3) \quad \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2^3}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Das sind – in Komponenten zerlegt – drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bei der Lösung derselben sind insgesamt 6 Integrationskonstanten zu bestimmen.



Drei symmetrische Sterne im «Simulator»

Für die Berechnung der angezeigten Bahnen wurde angenommen, dass der Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt kreist. Die Bahnkurve wurde für jeden Stern als Zweikörperproblem gegenüber den anderen Massen im Schwerpunkt berechnet.

Polarkoordinaten

Wir führen nun Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \rho \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, |\vec{r}_1| = \rho \\ \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\rho} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} + \rho \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\rho} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} + 2\dot{\rho} \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \rho \ddot{\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \rho \dot{\vartheta}^2 \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da wir annehmen, dass zwei unterschiedlich positionierte (punktformige) Massen vorhanden sind, liegt jede Masse ausserhalb des gemeinsamen Schwerpunktes. **Somit ist immer $\rho > 0$!**

Das Ziel ist nun, zwei Gleichungen für $\rho(t)$ und $\vartheta(t)$ zu finden. Aus diesen Gleichungen t zu eliminieren, so dass man eine Gleichung für $\rho(\vartheta)$ und damit die gesuchte Bahngleichung gewinnt. Dazu betrachten wir den Drehimpuls und die Energie der Masse m_1 . Zuerst zeigen wir, dass dieser Drehimpuls konstant ist:

$$\dot{\vec{L}} := \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1) = \vec{r}_1 \times m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{0}$$

Da nach (3) $\ddot{\vec{r}}_1 \parallel \vec{r}_1$. Der Drehimpuls steht immer senkrecht auf der Koordinatenebene und wir betrachten nur seinen Betrag. Dann ist in Polarkoordinaten:

$$L := |\vec{L}| = |\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1| = m_1 \varrho^2 \dot{\vartheta} = \text{konstant}$$

Damit können wir die Ableitungen nach der Zeit eliminieren.

Zuerst erhalten wir:

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{m_1} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$$

Ferner ist:

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho' \dot{\vartheta} = \frac{L}{m_1} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho^2}$$

Nun betrachten wir nochmals die Gleichung (3):

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$$

Auf m_1 wirkt die Kraft $-G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}$ und die zugehörige potenzielle Energie ist (wenn der Nullpunkt im Unendlichen gewählt wird):

$$E_{pot} = -G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

Damit lässt die die Energie der Masse m_1 schreiben als:

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

In Polarkoordinaten haben wir:

$$E = \frac{m_1}{2} \left(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\vartheta}^2 \right) - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Nun eliminieren wir $\dot{\varrho}, \dot{\vartheta}$:

$$E = \frac{m_1}{2} \left[\left(\frac{L}{m_1} \right)^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{\varrho^4} + \varrho^2 \left(\frac{L}{m_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho^4} \right] - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Und erhalten:

$$E = \frac{L^2}{2m_1} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + 1 \right) - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Wenn die Masse m_1 direkt auf den Schwerpunkt und damit die andere Masse m_2 zufliegt, ist $\vec{r}_1 \parallel \dot{\vec{r}}_1$ und damit $L = 0$. Dann haben wir einfach eine geradlinige Bewegung, welche mit dem Zusammenstoss der Massen endet. Diesen Fall schliessen wir aus. **Somit ist im Folgenden $L \neq 0$** und wir dividieren durch L :

$$\frac{2m_1E}{L^2} = \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} + 1 \right) - 2G \frac{m_2^3 m_1^2}{M^2 L^2} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Lösung der Differentialgleichung

Wir setzen: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_2^3 m_1^2}$ und substituieren wir: $\varrho = \frac{1}{u}$, $\varrho' = -\frac{u'}{u^2}$. Damit erhalten wir:

$$\frac{2m_1E}{L^2} = u'^2 + u^2 - \frac{2u}{p}$$

Quadratisch ergänzen liefert:

$$\frac{2m_1E}{L^2} = u'^2 + \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1}{p^2}$$

Wir machen den Ansatz:

$$u(\vartheta) = A \cos(\vartheta - \alpha) + \frac{1}{p}, \quad u'(\vartheta) = -A \sin(\vartheta - \alpha)$$

Und erhalten durch Einsetzen:

$$\frac{2m_1E}{L^2} = A^2 - \frac{1}{p^2}$$

Dann erhalten wir:

$$A^2 = \frac{2m_1E}{L^2} + \frac{1}{p^2}$$

Wir wollen zuerst prüfen, ob dieser Ausdruck immer definiert ist, das heisst, ob die rechte Seite immer positiv ist.

E ist konstant. Wenn die die Energie im Perihel oder Aphel betrachten, ist dort $\dot{\varrho} = 0$ und wir erhalten für die kinetische Energie in diesem Punkt:

$$E_{kin} = \frac{m_1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{m_1}{2} \varrho^2 \frac{L^2}{m_1^2 \varrho^4} = \frac{L^2}{2m_1 \varrho^2}$$

Und für die Gesamtenergie:

$$E = \frac{L^2}{2m_1 \varrho^2} - G \frac{m_2^3 m_1}{M^2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{L^2}{2m_1} \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \right)$$

Damit wird:

$$\frac{2m_1E}{L^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{p^2} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{p} \right)^2 \geq 0$$

□

Nun ist:

$$A^2 = \frac{2m_1E}{L^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} \left(\frac{2m_1E}{L^2} \cdot p^2 + 1 \right) = \frac{1}{p^2} \cdot \left(\frac{2EL^2 M^4}{G^2 m_1^3 m_2^6} + 1 \right)$$

Wir definieren ε durch:

$$\varepsilon^2 := A^2 p^2 = \frac{2EL^2 M^4}{G^2 m_1^3 m_2^6} + 1 \geq 0$$

Es genügt, den Fall $\varepsilon \geq 0$ zu betrachten, denn sonst kann man zu $\vartheta - \alpha$ einfach π addieren.

Man hat: $A = \varepsilon/p$ und

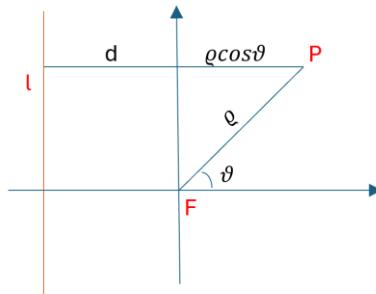
$$u(\vartheta) = \frac{\varepsilon \cos(\vartheta - \alpha) + 1}{p}$$

Und damit:

$$(4) \quad \rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Diskussion der Lösung

(4) ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Wenn wir diesen als Ort der Punkte definieren, welche von einem festen Punkt (dem Brennpunkt F) und einer festen Geraden (der Leitlinie l) ein konstantes Abstandsverhältnis ε haben, erhalten wir nämlich:



Der Punkt P und sein Abstand von F bzw. l

$$\frac{\rho}{d + \rho \cos \theta} = \varepsilon$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

$p = \varepsilon d = \rho(\frac{\pi}{2})$ ist die halbe Kegelschnittbreite am Brennpunkt. Für $\alpha = \pi$ stimmt Gleichung (4) mit obiger Gleichung überein.

Der minimale Abstand eines Planeten von der Sonne bzw. vom Brennpunkt ist das *Perihel*. Wenn man nochmals Gleichung (4) betrachtet:

$$(4) \quad \rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Dann sieht man, dass das Minimum für $\cos(\vartheta - \alpha) = 1$ bzw. $\vartheta = \alpha$ angenommen wird.

α ist gerade *das Argument des Perihels*, bzw. der Winkel zwischen der Richtung des Perihels und der x-Achse. In unserem Sonnensystem wird die x-Achse durch den Schnittpunkt zwischen Ekliptik und der Äquatorebene der Erde im Frühlingspunkt definiert.

Je nach Wert der numerischen Exzentrizität ε erhält man die verschiedenen Typen des Kegelschnittes:

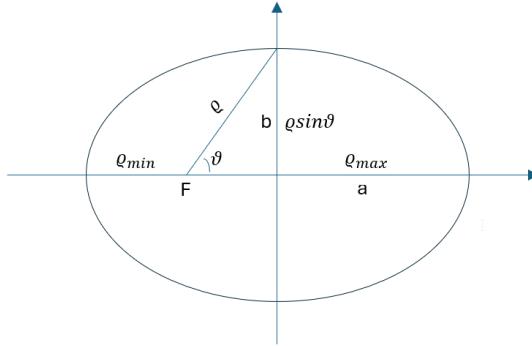
$\varepsilon = 0$: $\rho = p = \text{konstant}$. Der Kegelschnitt ist ein Kreis

$0 < \varepsilon < 1$: $\frac{p}{1-\varepsilon} < \rho < \frac{p}{1+\varepsilon}$. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

$\varepsilon = 1$: $\rho \rightarrow \infty$ für $\vartheta \rightarrow 0$. Sonst ist $\rho > 0$ und definiert für alle $\vartheta \in]0, 2\pi[$. Man hat eine Parabel.

$\varepsilon > 1$: $\rho > 0$ nur für $\cos \vartheta < \frac{1}{\varepsilon}$. $\rho \rightarrow \infty$ für $\vartheta \rightarrow \arccos \frac{1}{\varepsilon}$. Man hat eine Hyperbel.

Im Falle der Ellipse ist es nützlich, die Halbachsen zu berechnen. Sei a die grosse und b die kleine Halbachse der Ellipse.



Grosse und kleine Halbachse der Ellipse

Es gilt:

$$a = \frac{1}{2}(\rho_{min} + \rho_{max}) = \frac{1}{2}\left(\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) + \rho(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon}\right) = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

Um b zu bestimmen suchen wir das Maximum von $\rho \sin \vartheta$. Es ist:

$$(\rho \sin \vartheta)' = \frac{p \cos \vartheta (1 - \varepsilon \cos \vartheta) - p \sin \vartheta \cdot \varepsilon \sin \vartheta}{(1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2} = \frac{p \cos \vartheta - \varepsilon p}{(1 - \varepsilon \cos \vartheta)^2} = 0$$

Für $\cos \vartheta = \varepsilon$. Damit erhalten wir:

$$b = \rho \sin \vartheta = \frac{p \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Bemerkung:

Wir haben unsere Berechnung mit dem Schwerpunkt als Nullpunkt durchgeführt. In der Literatur wird manchmal der Ort der Masse m_2 als Nullpunkt gesetzt und die Bewegung von m_1 relativ zu m_2 berechnet. Dann erhält man für die Parameter p, ε in der Bahngleichung etwas andere Werte.

Zuletzt wollen wir einige Überlegungen zu den Einheiten der Parameter machen, welche in der Bahngleichung im Falle des Zweikörperproblems aufgetreten sind. Diese lautete:

$$\rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Darin war: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_1^2 m_2^3}$. Wir schreiben für die Einheit einer Größe diese Größe in eckigen Klammern

und wir verwenden das Kilogramm – Meter – Sekunden System. Dann ist $[L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$. Damit wird:

$$[p] = [M]^2[L]^2 \cdot [Gm_1^2 m_2^3]^{-1} = kg^2 \cdot \frac{kg^2 \cdot m^4}{s^2} \cdot \frac{kg \cdot s^2}{m^3} \cdot \frac{1}{kg^5} = m$$

p hat also die Dimension einer Länge.

Ferner war:

$$\varepsilon^2 := \frac{2EL^2M^4}{G^2m_1^3m_2^6} + 1$$

Es ist:

$$\left[\frac{EL^2M^4}{G^2m_1^3m_2^6} \right] = [EL^2M^4] \cdot [G^2m_1^3m_2^6]^{-1} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \frac{kg^2 \cdot m^4}{s^2} \cdot kg^4 \cdot \frac{kg^2 \cdot s^4}{m^6} \cdot \frac{1}{kg^9} = 1$$

ε ist dimensionslos.

Bei der Implementierung tritt ein weiteres Problem auf. Die Geschwindigkeit, bei welcher sich die Zentrifugalkraft und Gravitationskraft im Gravitationsfeld einer Masse M die Waage halten, ist:

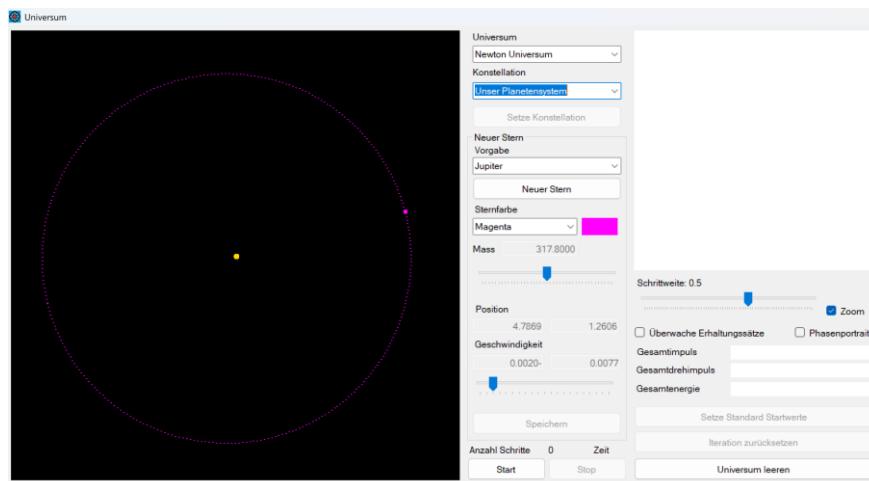
$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Wenn die bewegte Masse zu M den Abstand r hat. Wir nehmen bei der Implementierung bei der Angabe der Geschwindigkeit v an, dass dies die Geschwindigkeit im Perihel ist. Das ist aber nur der Fall, wenn $v > v_0$ ist. Andernfalls wird sich die bewegte Masse der Masse M nähern und das heisst, dass der Startpunkt der Bahn eigentlich das Aphel der Bahn ist. Dem tragen wir bei der Implementierung insofern Rechnung, dass die Bahnkurve folgendermassen bestimmt ist:

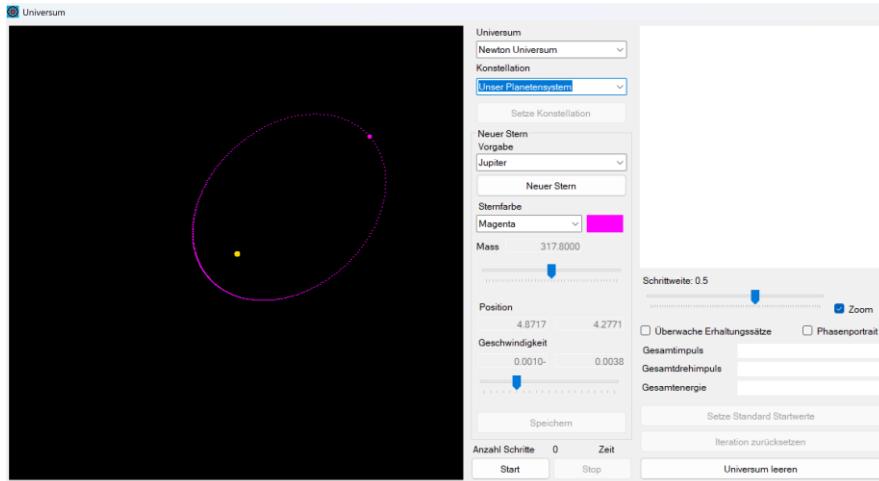
$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}, \text{ wenn } v \geq v_0$$

$$\varrho(\vartheta) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, \text{ wenn } v < v_0$$

Man sieht leicht, dass der Startpunkt für $\vartheta = \alpha$ in beiden Fällen identisch ist. Die zweite Gleichung liefert aber eine Ellipsenbahn mit Startpunkt im Aphel.



Jupiter, startend aus der tatsächlichen Position im Perihel und der tatsächlichen Geschwindigkeit



Hier hat der User die Startposition und die Geschwindigkeit geändert

1.2 Die Kepler'schen Gesetze

Hier können wir einen Blick auf die Kepler'schen Gesetze werfen. Die im vorherigen Abschnitt berechnete Bahnkurve der Masse m_1 liefert unmittelbar das erste Kepler'sche Gesetz: *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.*

Ein infinitesimales Flächenelement, welches vom Ortvektor überstrichen ist, ist in Polarkoordinaten:

$$dF = \frac{1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \frac{L}{m_1} dt$$

Da der Drehimpuls L konstant ist. Somit ist die während einer fixen Zeit Δt überstrichene Fläche immer gleich gross. Daraus folgt das zweite Kepler'sche Gesetz: *Die Verbindungsline zwischen Planet und Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Wenn T die Umlaufszeit der Masse m_1 ist, dann wird in dieser Zeit die Ellipsenfläche $F = \pi ab$ überstrichen. Es gilt also:

$$\pi ab = \int_0^T \frac{1}{2} \varrho^2 \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{L}{m_1} dt = \frac{1}{2} T \frac{L}{m_1}$$

Es ist also:

$$T = 2\pi ab \frac{m_1}{L}$$

Die Definition von p war: $p := \frac{M^2 L^2}{G m_2^3 m_1^2}$. Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$ und somit

$$L = \sqrt{G m_2} \cdot \frac{m_1 m_2}{M} \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}$$

Ferner ist $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Wenn wir das in der obigen Formel für T einsetzen, erhalten wir:

$$T = 2\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot m_1 \frac{M}{\sqrt{G m_2 m_1 m_2 \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}}} = 2\pi \sqrt{a^3} \frac{M}{\sqrt{G m_2^3}}$$

Somit ist:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{M^2}{Gm_2^3} = \text{konstant}$$

Im speziellen Fall der Sonne und eines Planeten ist $m_2 = M_{\text{Sonne}}$ und $M = m_1 + m_2 \approx M_{\text{Sonne}}$

Dann wird:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{GM_{\text{Sonne}}}$$

Insbesondere folgt daraus das dritte Kepler'sche Gesetz: *Die Quadrate der Umlaufzeiten stehen im gleichen Verhältnis wie die Kuben der großen Halbachsen.*

1.3 Angaben zu unserem Sonnensystem

Später werden wir gewisse Berechnungen für die Simulation am Beispiel unseres Sonnensystems überprüfen. Auch einzelne Übungsaufgaben beziehen sich auf dieses System. Deshalb sind die nötigen Daten in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Nochmals die Gravitationskonstante: $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

	Sonne	Merkur	Venus	Erde	Mars
Masse in kg	1.9884E+30	3.3010E+23	4.8673E+24	5.9722E+24	6.4200E+23
Masse relativ zur Erdmasse	332'943	0.055	0.815	1.000	0.107
Masse relativ zur Sonnenmasse	1	1.660E-07	2.448E-06	3.004E-06	3.229E-07
Durchmesser in km	1'392'000	4'879	12'103	12'735	6'772
Gravitationskonstante in m/s ²	274.00	3.70	8.87	9.80	3.73
Umlaufzeit um die Sonne in Tagen	-	87.969	224.701	365.256	686.980
Grosse Halbachse in Mio km	-	57.909	108.200	149.600	227.990
Grosse Halbachse in AE	-	0.3871	0.7233	1.000	1.524
Exzentrizität der Ellipsenbahn	-	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934
Geschwindigkeit rel. Sonne in km/h	-	172'332	126'072	107'208	86'868
Geschwindigkeit rel. Sonne in AE/Tag	-	0.0276	0.0202	0.0172	0.0139
... und in AE/Jahr	-	10.0700	7.3669	6.2646	5.0760
Fluchtgeschwindigkeit in km/s *)	617.4	4.3	10.4	11.2	5.0
Argument des Perihels **)	-	1.3519	2.2956	1.7967	5.8650
Perihel in AE	-	0.3075	0.7184	0.9833	1.3814
Perihel Geschwindigkeit in km/h	-	212'328	126'936	109'044	95'400
Perihel Geschwindigkeit in AE/Tag	-	0.034063	0.020364	0.017494	0.015305
Aphel in AE	-	0.467	0.728	1.017	1.666

	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	
Masse in kg	1.8980E+27	5.6830E+26	8.6800E+25	1.0024E+26	
Masse relativ zur Erdmasse	317.8	95.2	14.5	16.8	
Masse relativ zur Sonnenmasse	9.545E-04	2.858E-04	4.365E-05	5.041E-05	
Durchmesser in km	138'346	114'632	50'532	49'105	
Gravitationskonstante in m/s ²	24.79	10.44	8.87	11.15	
Umlaufzeit um die Sonne in Tagen	4'329	10'751	30'664	60'148	

Grosse Halbachse in Mio km	778.51	1'433.40	2'872.40	4'514.60
Grosse Halbachse in AE	5.204	9.582	19.201	30.178
Exzentrizität der Ellipsenbahn	0.0489	0.0542	0.0472	0.0097
Geschwindigkeit rel. Sonne in km/h	47'052	34'884	24'516	19'548
Geschwindigkeit rel. Sonne in AE/Tag	0.0075	0.0056	0.0039	0.0031
... und in AE/Jahr	2.7393	2.0453	1.4244	1.1322
Fluchtgeschwindigkeit in km/s *)	60.2	36.1	21.4	23.6
Argument des Perihels **)	0.2575	1.6132	2.9839	0.7849
Perihel in AE	4.9501	9.0481	18.3755	29.7667
Perihel Geschwindigkeit in km/h	49'392	36'648	25'596	19'800
Perihel Geschwindigkeit in AE/Tag	0.007924	0.005879	0.004106	0.003176
Aphel	5.455	10.12	20.11	30.069

*) am Äquator

**) Relativ zur Nullrichtung, welche durch den Schnittpunkt der Ekliptik mit der Äquatorebene der Erde definiert ist. Die Angabe ist im Bogenmass.

Die Angaben zum Perihel ändern sich im Laufe der Zeit. Obige Angaben stammen aus dem Jahr 2000. Sie werden bei der Implementierung unseres Planetensystems als Startposition eines Planeten verwendet. Da die numerische Approximation ohnehin sehr bald unpräzis wird, verzichten wir darauf, hier eine grössere Genauigkeit anzustreben. Zudem würde das rasch sehr aufwendig werden.

1.4 Das N-Körperproblem

Bereits das Dreikörperproblem weist eine signifikant höhere Komplexität auf als das Zweikörperproblem. Formuliert wurde es bereits durch Newton. Es gibt keine geschlossene analytische Lösung für dieses Problem. In den letzten dreihundert Jahren haben sich grosse Mathematiker mit diesem Problem beschäftigt. Bedeutende Beiträge stammen von Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) und Henri Poincaré (1854 – 1912). Ein neueres Resultat aus den Jahren 1953 – 1963, welches sich u.a. auf die Stabilität unseres Planetensystems bezieht, ist das sogenannte KAM Theorem von Andrei Kolmogorow (1903 – 1987), Jürgen Moser (1928 – 1999) und Wladimir Arnold (1937 – 2010).

Bei n Körpern mit Masse $m_j, j = 1..n$, welche sich an den Positionen $\vec{r}_j, j = 1..n$ befinden, sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen gegeben durch:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i \neq j} G \frac{m_j m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Diese Gleichungen werden wir bei der Simulation der Bewegung dieser Körper für die numerischen Verfahren verwenden. Diese Gleichungen sind invariant bei Verschiebung des Nullpunktes, d.h. wenn man $\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{c}$ ersetzt, wobei \vec{c} ein konstanter Vektor ist. Wir werden den gemeinsamen Schwerpunkt der Massen als Nullpunkt wählen. Die Koordinate \vec{R} des Schwerpunktes bei einem beliebigen Koordinatensystem ist gegeben durch:

$$M\vec{R} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j$$

Dabei ist $M = \sum_{j=1}^n m_j$.

Die Summe aller Kräfte hebt sich auf, weil für alle Paare von Körpern die Kraft zwischen diesen Körpern insgesamt Null ist. Es ist also:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\vec{r}}_j = 0$$

Daraus folgt durch Integration der Impulssatz:

$$\sum_{j=1}^n m_j \dot{\vec{r}}_j = \vec{p}$$

Wobei \vec{p} konstant ist.

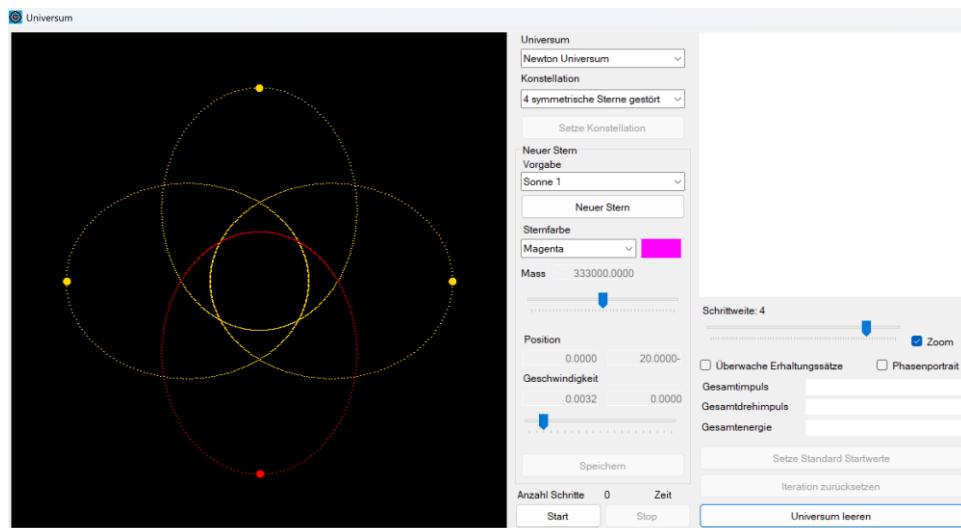
Für den Drehimpuls \vec{L} gilt:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \dot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \left\{ \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\}$$

In dieser etwas komplexen Summe treten die Summanden immer paarweise auf, z.B.

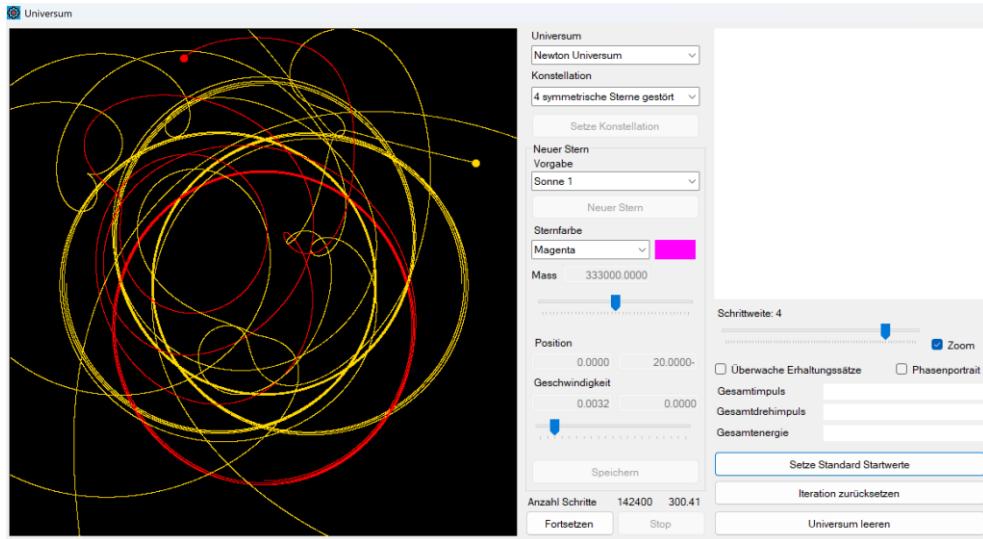
$\vec{r}_1 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ und $\vec{r}_2 \times G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Die Summe eines solchen Paares ist Null, also ist insgesamt $\frac{d}{dt} \vec{L} = 0$ und damit der Drehimpuls konstant. Für die Bewegung der N-Körper ist die Ebene senkrecht zu \vec{L} invariant und wir können sie in den Schwerpunkt des Systems legen. Sie wird die *invariante Ebene von Laplace* genannt. Bei der Simulation des N-Körper Problems werden wir uns auf den Fall beschränken, dass alle Körper in dieser Ebene liegen.

Mit einer ähnlichen, aber etwas aufwendigen Rechnung, kann man zeigen, dass die Gesamtenergie des Systems konstant ist.



4 (fast) symmetrische Sterne in Startposition

Die angezeigten Bahnen wurden für jeden Stern wie ein Zweikörperproblem berechnet. Der Abstand des roten Sternes vom Schwerpunkt ist um $5 \cdot 10^{-7}$ % kleiner. Das System reagiert sehr sensiv auf diese Störung und nach vier Umläufen läuft es «aus dem Ruder».



Das «gestörte» System der vier Sterne gerät nach vier Umläufen ausser Kontrolle

1.5 Numerische Approximation des N-Körperproblems

Im «Simulator» betrachten wir nur ebene Systeme, rechnen also mit zwei Komponenten.

Die Beschleunigung, welche der Körper Nummer j erfährt, ist:

$$\ddot{\vec{r}}_j = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Wir schreiben für den Ortsvektor des Körpers:

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

Wir setzen:

$$R_{ji} := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Und erhalten dann z.B. für die erste Komponente von \vec{r}_j :

$$\ddot{x}_j = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (x_i - x_j)$$

Das liefert bei n Körpern ein System von $2n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mit der Substitution: $u_{1j} = x_j, v_{1j} = \dot{x}_j$ bzw. $u_{2j} = y_j, v_{2j} = \dot{y}_j$ erhält man für die Beschleunigung des Körpers Nummer j ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{u}_{1j} = v_{1j} =: f_1(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{v}_{1j} = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (u_{1i} - u_{1j}) =: g_1(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{u}_{2j} = v_{2j} =: f_2(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \\ \dot{v}_{2j} = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{R_{ji}^3} \cdot (u_{2i} - u_{2j}) =: g_2(t, u_1, v_1, u_2, v_2) \end{cases}$$

Mit

$$R_{ji} := \sqrt{(u_{1i} - u_{1j})^2 + (u_{2i} - u_{2j})^2}$$

Wie im Abschnitt über das Doppelpendel wenden wir nun das vierstufige Runge-Kutta Verfahren für eine Simulation dieses Systems an. Das Resultat wird nur ein numerisches Artefakt eines wirklichen Systems sein. Wir werden aber bei der Implementierung den Gesamtimpuls, den Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des Systems überwachen und kontrollieren, ob diese (einigermassen) konstant sind.

Damit die Implementierung im «Simulator» dokumentiert ist, bereiten wir diese in folgendem Algorithmus vor. Darin sind $u_{1n}, v_{1n}, u_{2n}, v_{2n}$ die Werte der Parameter nach dem n-ten Iterationsschritt. Die (konstante) Schrittweite ist d, welche genügend klein gewählt werden muss. Nun versuchen wir, die Darstellung etwas kompakt zu halten. Nacheinander führen wir folgende Schritte durch:

$$\begin{aligned} \vec{z}_{1n} &:= (u_{1n}, v_{1n}, u_{2n}, v_{2n}) \\ \begin{cases} k_{i1} := f_i(t_n, \vec{z}_{1n}) \\ h_{i1} := g_i(t_n, \vec{z}_{1n}) \end{cases}, i \in \{1,2\} \\ \vec{z}_{2n} &:= (u_{1n} + \frac{d}{2}k_{11}, v_{1n} + \frac{d}{2}h_{11}, u_{2n} + \frac{d}{2}k_{21}, v_{2n} + \frac{d}{2}h_{21}) \\ \begin{cases} k_{i2} := f_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{2n}) \\ h_{i2} := g_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{2n}) \end{cases}, i \in \{1,2\} \\ \vec{z}_{3n} &:= (u_{1n} + \frac{d}{2}k_{12}, v_{1n} + \frac{d}{2}h_{12}, u_{2n} + \frac{d}{2}k_{22}, v_{2n} + \frac{d}{2}h_{22}) \\ \begin{cases} k_{i3} := f_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{3n}) \\ h_{i3} := g_i(t_n + \frac{d}{2}, \vec{z}_{3n}) \end{cases}, i \in \{1,2\} \\ \vec{z}_{4n} &:= (u_{1n} + k_{13}, v_{1n} + h_{13}, u_{2n} + k_{23}, v_{2n} + h_{23}) \\ \begin{cases} k_{i4} := f_i(t_n + d, \vec{z}_{4n}) \\ h_{i4} := g_i(t_n + d, \vec{z}_{4n}) \end{cases}, i \in \{1,2\} \\ \begin{cases} t_{n+1} = t_n + d \\ u_{i(n+1)} = u_{in} + \frac{d(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})}{6} \\ v_{i(n+1)} = v_{in} + \frac{d(h_{i1} + 2h_{i2} + 2h_{i3} + h_{i4})}{6} \end{cases}, i \in \{1,2\} \end{aligned}$$

Dieses sind die Gleichungen, welche bei der Implementation verwendet werden. Da das Runge-Kutta Verfahren für alle Universen strukturell dasselbe ist, wird es in der abstrakten Universum-Klasse implementiert. Hingegen hängen die Funktionen $f_{1,2}, g_{1,2}$ vom Kraftgesetz des Universums ab und werden im spezifischen Universum implementiert.

Nach der Implementierung musste man feststellen, dass das Runge-Kutta Verfahren leider sehr ungenaue Bahnen liefert, welche nur bei sehr kleinen Schrittweiten einigermassen plausibel sind.

Es gibt gewisse Effekte im «Simulator», die noch nicht genügend abgeklärt sind, insbesondere wenn Sterne aufeinanderstossen oder sich sehr nahekommen.

1.6 Wahl des Koordinatensystems

Der Nullpunkt des Koordinatensystems soll mit dem gemeinsamen Schwerpunkt aller Massen zusammenfallen. Der gemeinsame Schwerpunkt wird bei einer Platzierung eines neuen Körpers neu berechnet. Wenn diese Platzierung abgeschlossen ist, werden alle Körper so umplaziert, dass der Schwerpunkt wieder mit dem Nullpunkt (0,0) zusammenfällt. Wenn n Massen platziert sind, dann gilt relativ zu ihrem Schwerpunkt als Nullpunkt:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0}$$

Nun kommt die Masse n+1 dazu. Der gemeinsame Schwerpunkt verschiebt sich dann um einen Vektor \vec{c} . Für den neuen Schwerpunkt gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i (\vec{r}_i + \vec{c}) = \vec{0}$$

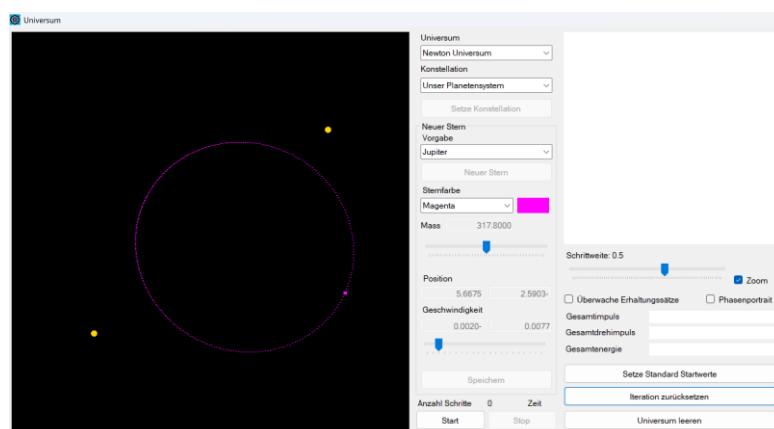
Also ist:

$$\vec{c} = -\frac{m_{n+1} \vec{r}_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i}$$

Die Richtung des x-Achse ist in Wirklichkeit festgelegt durch den Schnittpunkt der Ekliptik mit der Äquatorebene der Erde, und zwar im Frühlingspunkt. Im Simulator ist der Nullpunkt des Koordinatensystems der Mittelpunkt des Darstellungsdiagrammes und die x-Achse zeigt wie üblich nach rechts.

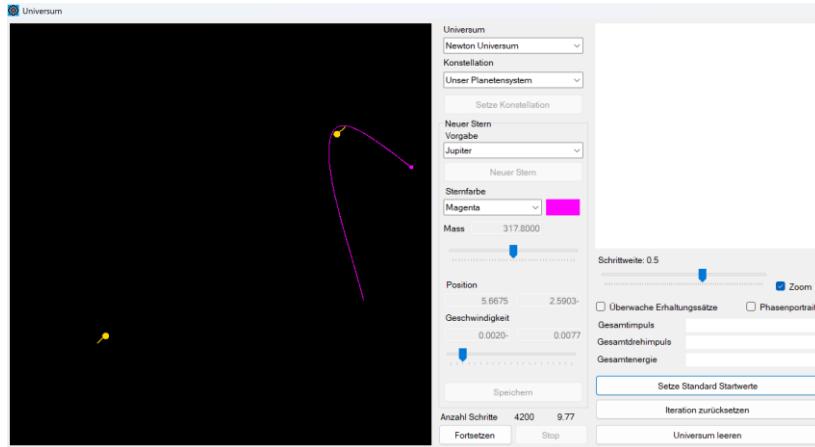
Diese Wahl des Koordinatensystems ist für alle Universen gültig, da sich diese nur durch das Kraftgesetz unterscheiden.

Im «Simulator» bewirkt dies, dass nach der Platzierung eines neuen Sterns das gesamte Bild so verschoben wird, dass der gemeinsame Schwerpunkt im Ursprung liegt. Die Koordinaten aller bisherigen Sterne beziehen sich dann auf diesen neuen Schwerpunkt. Bei einem neu hinzugefügten Stern werden seine Standardkoordinaten bei der Platzierung auf das neue Koordinatensystem umgerechnet.



Hier wurden zwei Sonnen und ein Jupiter platziert

Im obigen Bild beziehen sich die Koordinaten der dargestellten Sonnen und des Jupiters auf den gemeinsamen Schwerpunkt. Da die Sonnen in Ruhe sind, wird bei ihnen keine zu erwartende Bahn relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt berechnet. Hingegen ist dies für Jupiter der Fall.



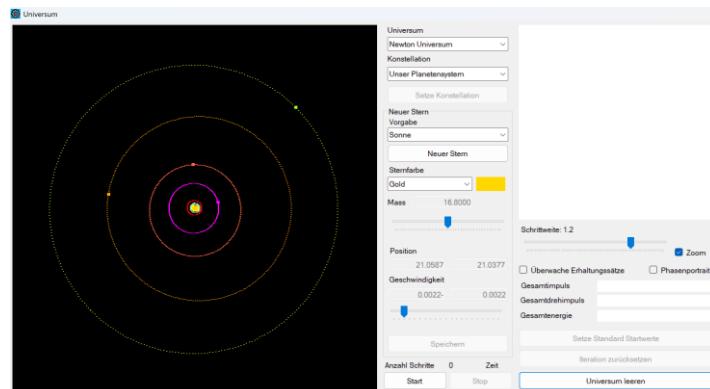
Die Bahnen nach dem Start der Iteration

1.7 Änderung der Sternmasse

Bei der Platzierung eines neuen Körpers kann auch seine Masse angepasst werden. Diese kann zwischen $3.3010 \cdot 10^{23}$ bzw. 0.055 Ermassen (Merkur) und $1.9884 \cdot 10^{30}$ bzw. 332942.6 Erdmassen (Sonne) variieren. Die Masse kann manuell oder über ein Schieberegister eingegeben werden. Das Schieberegister passt die Masse nur relativ zur Ausgangsmasse an, und zwar um einen Faktor, welcher zwischen 1 und 100 variiert. Damit kann der Merkur nicht mehr verkleinert werden, es sind aber alle Größenordnungen zwischen Merkur und dem 100-fachen der Sonne repräsentierbar. Es wird davon ausgegangen, dass man beim Default bereits einen Körper der gewünschten Mindestgröße wählt. Die Änderung einer Masse hat wiederum die Neuberechnung des gemeinsamen Schwerpunktes zur Folge.

Die Größe der Masse wird im Diagramm durch den Durchmesser angedeutet. Die Anzahl der Pixel für die Darstellung ist mindestens 1 und sonst der Exponent der Masse minus 22. Für die Größenordnung 10^{23} (Merkur, Mars) steht 1 Pixel. Für die Größenordnung 10^{24} (Erde, Venus) 2 Pixel. Der Jupiter mit der Größenordnung 10^{27} wird dann durch 5 Pixel dargestellt und die Sonne durch 8 Pixel.

Der zulässige Definitionsbereich der Masse ist vom Universum abhängig und für jedes Universum individuell definiert.



Darstellung unseres Planetensystems. Die inneren Planeten sind kaum mehr sichtbar.

1.8 Darstellung des Universums im «Simulator»

Ein Universum im «Simulator» ist definiert durch das Bewegungsgesetz, also zum Beispiel durch das Newton'sche Gravitationsgesetz. Alternative Universen werden in einem eigenen Abschnitt behandelt. Ein Universum enthält n Körper, welche im «Simulator» allgemein als «Sterne» bezeichnet werden, auch wenn es sich um Planeten handelt. Wenn es aber um die echten Planeten geht, wird auch diese Bezeichnung verwendet.

Standardmäßig sind gewisse Sterne als Default vorgegeben, insbesondere die Bestandteile unseres Planetensystems. Das ist die Sonne inklusive der zugehörigen Planeten. Ein solches System, zum Beispiel bestehend aus Sonne plus einer Auswahl von Planeten, ist eine *Konstellation*. Im «Simulator» stehen für jedes Universum verschiedene Konstellationen zur Verfügung. Im Beispiel des Newton'schen Universums gehört dazu unser Planetensystem oder das System der inneren Planeten. Dazu gibt es Varianten mit «Störungen», wenn zum Beispiel der Jupiter so umplaziert ist, dass er den inneren Planeten nahekommt. Wenn man eine Konstellation ausgewählt hat, kann man die Planeten oder die Sonne auch einzeln platzieren und anschliessend mit der Maus verschieben oder deren Masse und Geschwindigkeit ändern.

Der Bereich, in welchem die Körper platziert werden, ist im «Simulator» ein Quadrat mit einer Seitenlänge, welche für jedes Universum festgelegt ist. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt dieses Quadrates und er ist der gemeinsame Schwerpunkt der im Universum liegenden Körper.

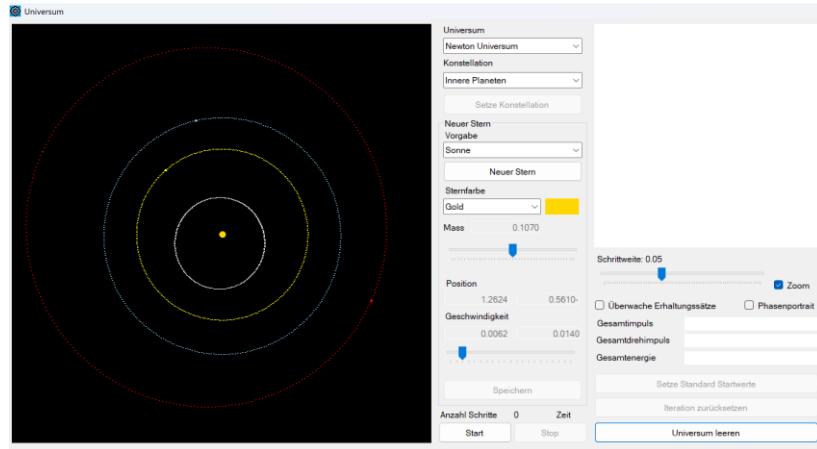
Zoom: Wenn «Zoom» aktiviert ist, werden bei der Darstellung von neuen Planeten oder Sternen deren Positionskoordinaten so in mathematische Koordinaten umgerechnet, dass sie optimal ins Quadrat hineinpassen.

Beispiel

Wenn nur die inneren Planeten betrachtet werden, dann ist der Mars der äusserste Planet mit einer Distanz von $\sim 1.524 \text{ AE}$ zur Sonne. Sein Aphel ist aber 1.666 AE . Die Skalierung (in der Implementierung der «Zoom») wird dann so gewählt, dass 1.666 AE gerade der Zahl 30 entspricht. Dann sind alle Planetenbahnen gut sichtbar. Zum Beispiel ist das Perihel des Merkurs 0.3075 AE . Das entspricht dann der Zahl 5.353 oder etwa 53 Pixeln.

Wenn auch die äusseren Planeten gezeigt werden sollen, dann ist das Aphel des Neptuns 30.069 AE . Die Skalierung wird so gewählt, dass dieser Wert der Zahl 29 in mathematischen Koordinaten entspricht. Dann ist das Perihel des Merkurs noch 0.297 in mathematischen Koordinaten was etwa 3 Pixeln entspricht. Er ist dann nicht mehr sichtbar, weil die Sonnenmasse durch 8 Pixel dargestellt wird.

Nach der Platzierung eines Sternes wird der neue gemeinsame Schwerpunkt ermittelt und dann alle Sterne relativ zu diesem Schwerpunkt platziert. Das heisst, die aktuelle Startposition bezieht sich dann auf diesen Schwerpunkt. Bei der Platzierung eines neuen Sterns muss dessen Originalstartposition, welche als Standard beim Stern gespeichert ist, ebenfalls in das neue Koordinatensystem umgerechnet werden.



Darstellung der inneren Planeten

Die Bewegung der Sterne läuft im «Simulator» in der Regel im Gegenuhrzeigersinn. Bei der Planetenbewegung ist nämlich zu beachten, dass der Drehimpulsvektor eine Planetenbahn parallel zum Drehimpulsvektor der Erddrehung ist. Wenn man «von oben», also für uns vom Nordpol aus auf die Erde blickt, dann dreht sich die Erde im Gegenuhrzeigersinn. Das ist der übliche positive Drehsinn bei der mathematischen Winkelmessung. Die Planeten drehen sich im Simulator deshalb ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn. Für alternative Universen wird dieser Drehsinn beibehalten.

1.9 Darstellung der Bahnskizze beim Platzieren eines Sternes

Als Platzierungshilfe für neue Planeten wird deren Bahn im Diagramm dynamisch skizziert, wie wenn es sich um ein Zweikörpersystem handeln würde mit der gemeinsamen Masse aller bereits vorhandenen Körper im gemeinsamen Schwerpunkt. Voraussetzung dafür ist, dass der neu platzierte Planet oder Stern eine Geschwindigkeit $v > 0$ hat. Es wird bei der Berechnung angenommen, dass dies die Geschwindigkeit im Perihel ist.

Wir führen hier die nötigen Berechnungen durch, welche der «Simulator» machen muss. Im Folgenden ist:

M ist die Summe aller bereits vorhandenen Massen. m die Masse des neu hinzugefügten Körpers.

Für die Geschwindigkeit v im Perihel ϱ gilt:

$$v = \varrho \dot{\vartheta}$$

Damit wird der Drehimpuls der neu hinzugefügten Masse

$$L = m\varrho^2 \dot{\vartheta} = m\varrho v$$

Für ihre Energie hat man:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M^3 m}{(M+m)^2} \cdot \frac{1}{\varrho} \approx \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{\varrho}$$

\approx gilt, wenn $M \gg m$.

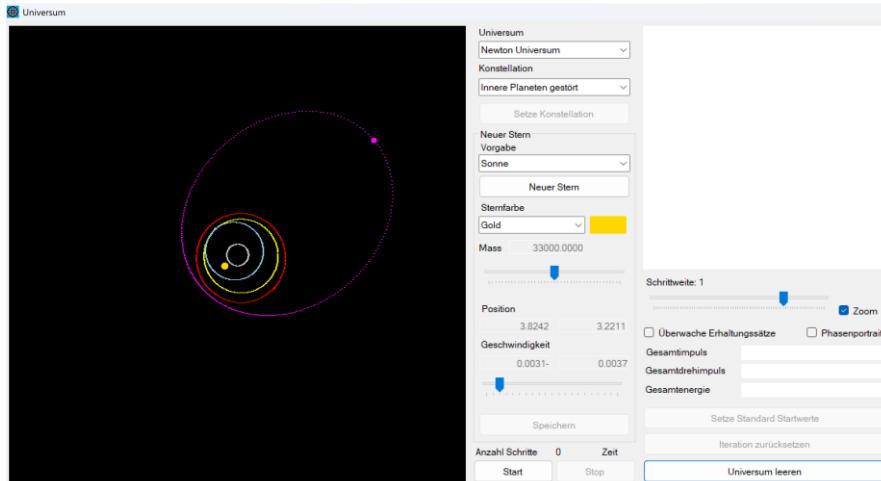
Die Bahnpараметer sind nun:

$$p = \frac{(M+m)^2 \varrho^2 v^2}{GM^3} \approx \frac{\varrho^2 v^2}{GM}$$

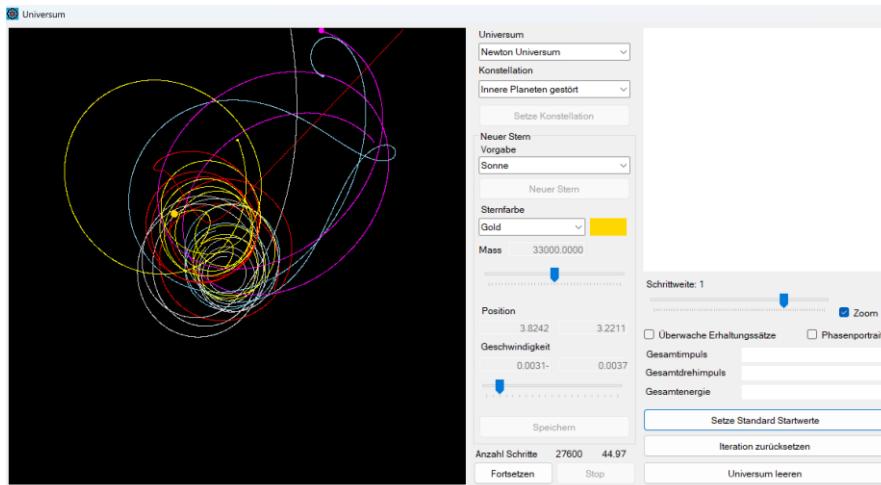
$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2(M+m)^4}{G^2m^3M^6} = \frac{2Em^2\varrho^2v^2(M+m)^4}{G^2m^3M^6} \approx \frac{2E\varrho^2v^2}{G^2mM^2}$$

Unter Berücksichtigung des Argumentes des Perihels kann dann die Bahn gezeichnet werden. Das wird nicht die wirkliche Bahn sein, dient aber als Anhaltspunkt.

Bei alternativen Universen ist die Bahnberechnung nicht möglich, falls das Zweikörperproblem nicht analytisch lösbar ist.



Die inneren Planeten zusammen mit einem gestörten Jupiter. Im Mittelpunkt steht der gemeinsame Schwerpunkt und nicht die Sonne



Der gestörte Jupiter hat soeben den Mars ins Jenseits befördert und die Erdbahn gestört

1.10 Die Stossproblematik

Wenn sich zwei Körper nähernkommen als zwei Pixel, das sind 0.1 in mathematischen Einheiten oder je nach Skalierung und Zoom ein entsprechend grosser Wert in astronomischen Einheiten, dann könnte man das in der Simulation als plastischen Stoss betrachten.

In einer Version des «Simulator» wurde das so implementiert: Die Simulation wird nicht angehalten, sondern wir ersetzen die beiden zusammenstossenden Körper durch einen Körper mit der Summe beider Massen. Der Geschwindigkeitsvektor des neuen Körpers wird dann so gesetzt, dass der Impuls konstant bleibt. Das entspricht nicht einer physikalischen Realität, sondern dient nur der

Weiterführung der Simulation. Wenn $m_{1,2}, \vec{v}_{1,2}$ die Parameter der Körper vor dem Stoß sind und m, v die Parameter des neuen Körpers nach dem Stoß, gilt:

$$m = m_1 + m_2$$

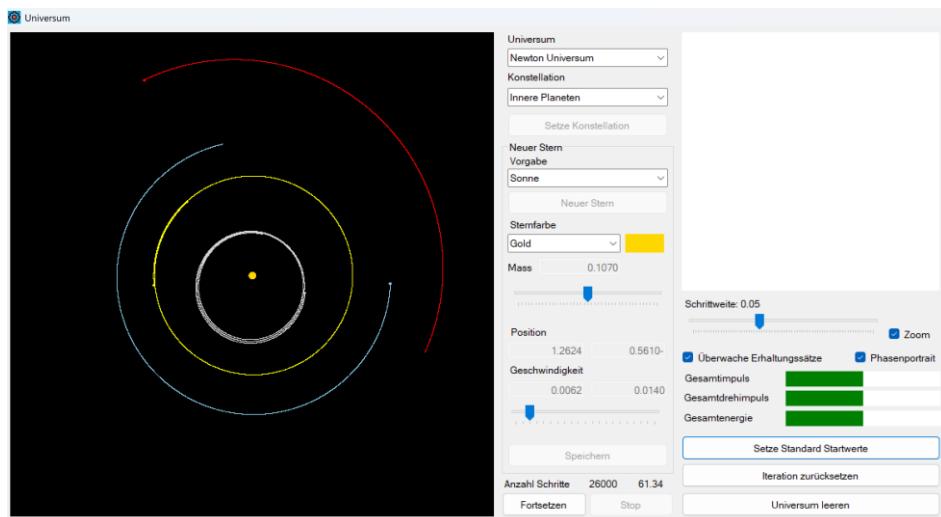
$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m}$$

Wie man leicht nachrechnen kann, bleibt dann auch der Drehimpuls des Systems erhalten, nicht aber die Gesamtenergie.

Nachdem aber Experimente mit Stößen keine zufriedenstellende Wirkung hatten, wurde diese Implementierung wieder entfernt. Jetzt wird dafür gesorgt, dass sich Körper «knapp verfehlen», wenn sie sich zu nahekommen.

1.11 Erhaltungssätze und Phasendiagramm

Während der Simulation wird der Gesamtmoment, der Gesamtdrehmoment und die Gesamtenergie des Systems laufend berechnet und mit den entsprechenden Werten beim Start der Simulation verglichen. Eine Bedingung für alternative Universen ist, dass diese Erhaltungssätze auch dort gelten. Im Benutzeroberfläche werden diese Werte in Balken rechts unterhalb des Phasenportraits dargestellt.



Bewegung der inneren Planeten um die Sonne und Überwachung der Erhaltungssätze

Wegen der Ungenauigkeit des Runge-Kutta-Verfahrens kann es hier aber immer wieder zu Abweichungen kommen.

Zusätzlich kann man die Darstellung der Bewegung in einem Phasendiagramm aktivieren. In diesem Fall wird für jeden Stern in waagrechter Richtung der Abstand des Sterns vom gemeinsamen Schwerpunkt und in senkrechter Richtung der Betrag seiner Geschwindigkeit relativ zu diesem eingetragen.

1.12 Das Newton'sche Universum

Ziel ist, dass intern im «Simulator» mit dem VariablenTyp «Decimal» gerechnet werden kann. Für das Newton'sche Universum bedeutet dies, dass die räumlichen Distanzen intern in astronomischen Einheiten *AE* geführt werden. Die Masse wird für den Benutzer in *kg* angegeben, aber intern in Anzahl Erdmassen *ME* geführt. Die Geschwindigkeit von Körpern wird für den Benutzer in *km/h*

angegeben. Intern führen wir sie in *AE/Tag*. Entsprechend muss bei der Berechnung der Kraft die Gravitationskonstante angepasst werden. Es gilt:

$$G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Und der Simulator verwendet:

$$G_S = 6.6743 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.9722 \cdot 10^{24} \cdot (3600 \cdot 24)^2}{149.6^3 \cdot 10^{27}} = 8.88736 \cdot 10^{-10} \frac{AE^3}{ME \cdot Tag^2}$$

Wir können als Beispiel eine kleine Kontrolle durchrechnen, indem wir aus der Gleichgewichtsbedingung Zentrifugalkraft = Gravitationskraft die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne berechnen, und zwar zuerst im m.kg.s-System und dann im AE.ME.Tag-System. Die Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

Oder

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

Dabei ist M die Sonnenmasse und r der Abstand Erde – Sonne.

Im m.kg.s System lautet die Gleichung:

$$v^2 = 6.6743 \cdot 10^{-11} \frac{1.9884 \cdot 10^{30}}{1.496 \cdot 10^{11}} = 8.8711 \cdot 10^8$$

$$v = 2.9784 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Wenn wir das in *AE/Tag* umrechnen, ergibt das:

$$v = 2.9784 \cdot 10^4 \cdot \frac{86400}{1.496 \cdot 10^{11}} = 0.0172 \text{ AE/Tag}$$

Wenn wir von Anfang an im AE.ME.Tag System rechnen, haben wir:

$$v^2 = 8.88736 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{332942.6}{1} = 2.959 \cdot 10^{-4}$$

$$v = 0.0172 \text{ AE/Tag}$$

Wenn die Einheit der Geschwindigkeit zu hoch gewählt wird, z.B. AE/Jahr, dann muss die Schrittweite des Runge Kutta-Verfahrens sehr niedrig gewählt werden, damit das Verfahren zu einem einigermassen plausibel aussehenden Orbit führt. Damit wird die Bewegung der Planeten sehr langsam. Wenn hingegen $v \ll |\vec{r}|$, also z.B. wie hier, dann ist das Runge Kutta-Verfahren auch bei grösseren Schrittweiten einigermassen plausibel und gleichzeitig die Geschwindigkeit der Planeten akzeptabel. Diesen Effekt haben wir hier nicht weiter untersucht. Bei der Implementierung ist aber ein Faktor τ vorhanden, der als Faktor für einen Wechsel der Einheit der Geschwindigkeit dienen kann. Wenn die Geschwindigkeit durch eine Änderung der Zeiteinheit angepasst wird: $v' = \tau v$, muss die Gravitationskonstante im Bewegungsgesetz entsprechend korrigiert werden: $G' = \tau^2 G$, da in der Gravitationskonstanten die Zeit im Quadrat erscheint. Dieser Faktor kann für jedes Universum individuell angepasst werden. Auf Grund von Experimenten ist beim Newton'schen Universum $\tau = 1$.

1.13 Alternative Universen

Ein alternatives Universum soll sich vom Newton'schen nur durch das Kraftgesetz unterscheiden. Dabei sollen wesentliche Eigenschaften des Newton'schen Universums erhalten bleiben. Dazu gehören die Erhaltungssätze und die Unabhängigkeit des Bewegungsgesetzes von der Wahl des Koordinatensystems.

Dazu nehmen wir an, dass auch in alternativen Universen zwischen zwei Massen m_1, m_2 und den Positionen \vec{r}_1, \vec{r}_2 ein Kraftgesetz der Form gilt:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -F(|\vec{r}|) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{cases}$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Es gelten also die drei Newton'schen Gesetze:

- a) Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit
- b) *Kraft = Masse x Beschleunigung*
- c) Kraft = - Gegenkraft

Daraus folgt der *Impulssatz*.

Ferner hängt der Betrag der Kraft nur vom Abstand zwischen den Massen ab. Daraus folgt, dass die Bewegungsgleichungen *unabhängig von der Wahl des Nullpunktes* sind.

Da die Richtung des Kraftvektors parallel zu \vec{r} ist, folgt der *Drehimpulssatz* und damit, dass die Bewegung der Massen *in einer Ebene* verläuft. Ebenso folgt, dass die Bewegungsgleichungen *invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems* sind.

Wir nehmen zusätzlich an, dass sich die Kraft von einer Potentialfunktion ableiten lässt. Das heisst, dass es eine Funktion $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$ gibt, so dass

$$\vec{F} = -\nabla \Phi := \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}, \vec{r} = (x, y, z)$$

Aus der letzten Bedingung folgt der *Energiesatz*.

Den Beweis dieser Aussagen überlassen wir als Übung.

Im Simulator ist das *normierte Universum* implementiert. Hier ist das Kraftgesetz identisch mit dem Newton'schen Universum, die Einheiten sind aber handlicher normiert. Hier gilt bei der Implementierung:

Die Massen sind im Bereich $m_i \in [0.5, 2], \forall i$ und deren Positionen im Bereich $|\vec{r}_i| \leq 2$. Die Gravitationskonstante ist $G = 1$ und die Geschwindigkeiten bewegen sich im Bereich $|\dot{\vec{r}}_i| \leq 1$.

Für die Berechnung des Orbits ergeben sich die Parameter wie im Newton'schen Universum mit dem einzigen Unterschied, dass die Gravitationskonstante $G = 1$ ist. Bei N Körpern skizzieren wir die Bahn

einer Masse als Zweikörperproblem, nämlich als Bewegung der Masse relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt, wobei alle übrigen Massen in einem Punkt vereint sind. Somit ist mit derselben Herleitung wie beim Zweikörperproblem im Newton'schen Universum:

$$L = m_1 |\vec{r}_1| |\dot{\vec{r}}_1|$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 - \frac{M^3 m_1}{(m_1 + M)^2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_1|}$$

Wenn $M = \text{Masse aller übrigen Sterne}$.

Damit führen wir wieder die Parameter ein:

$$p := \frac{(m_1 + M)^2 L^2}{m_1^2 M^3}$$

$$\varepsilon^2 := \frac{2EL^2(m_1 + M)^4}{m_1^3 M^6} + 1$$

Und erhalten wie im Abschnitt über das Zweikörperproblem die Gleichung für die Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$\rho(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \alpha)}$$

Für Universen, welche nicht dem Newton'schen Gravitationsgesetz gehorchen, lässt sich die Bahnkurve im Allgemeinen nicht berechnen.

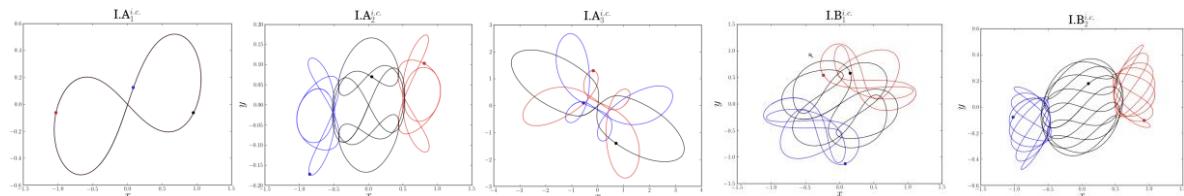
1.14 Periodisch stabile Bahnen

Ein spannendes Thema im (normierten) Universum ist die Frage nach periodisch stabilen Bahnen, insbesondere beim Dreikörperproblem. Die ersten Familien solcher periodischer Bahnen wurden durch Leonhard Euler (1707 – 1783) und später durch Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) gefunden.

Im Internet findet man Beispiel unter den Links:

<https://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body.htm>

<https://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body-movies.htm>



Beispiele von periodischen stabilen Bahnen im Internet

Weitere Erläuterungen findet man ebenfalls in den obigen Links. Im «Simulator» sind einige dieser Szenarien als Konstellationen gespeichert. Insbesondere der Fall dreier Sterne mit gleichen Massen $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ und den Anfangspositionen $\vec{r}_1 = (-1,0), \vec{r}_2 = (1,0), \vec{r}_3 = (0,0)$.

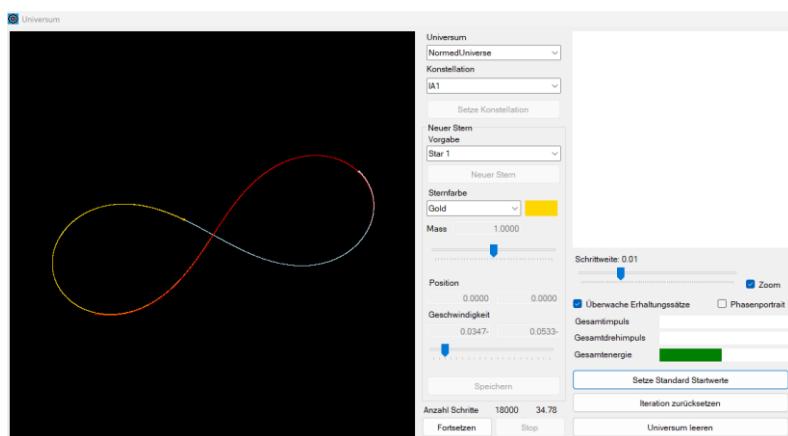
Die Anfangsgeschwindigkeiten sind: $\vec{v}_1 = (c_1, c_2) = \vec{v}_2, \vec{v}_3 = (-2c_1, -2c_2)$ wobei man die Werte von $c_{1,2}$ der folgenden Tabelle entnehmen kann. Beachte, dass der Gesamtimpuls beim Start Null ist.

Implementiert sind einige Beispiele mit niedriger Periode, wobei das Runge Kutta-Verfahren deutlich an seine Grenzen stösst:

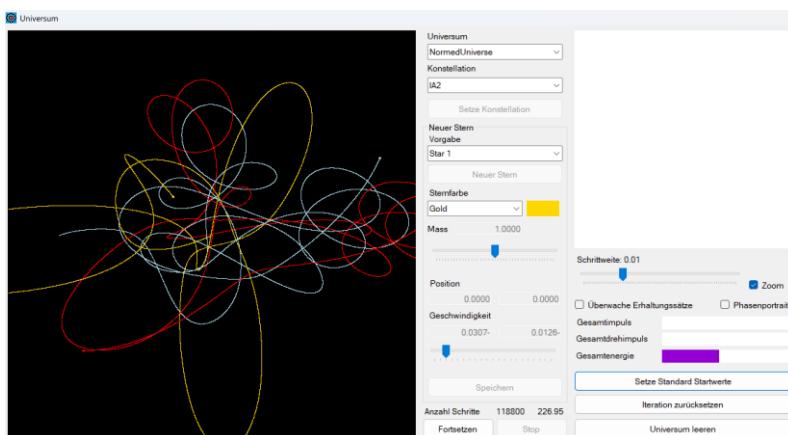
Konstellation	C_1	C_2
IA1	0.3471168881	0.5327249454
IA2	0.3068934205	0.1255065670
IA3	0.6150407229	0.5226158545
IB1	0.4644451728	0.3960600146
IB2	0.4059155671	0.2301631260
IIC1	0.2827020949	0.3272089716

In den letzten Jahrzehnten wurden hunderttausende solcher Bahnen gefunden, auch mit Sternen unterschiedlicher Massen.

Beim normierten Universum ist der Faktor für die Zeiteinheit gesetzt als $\tau = 0.1$.



Die periodisch stabile Bahn IA1



Für die Darstellung der Bahn IA2 ist das Runge Kutta-Verfahren zu wenig präzis

1.15 Übungsbeispiele

1. Zweikörperproblem: Berechne die Bahn der Masse m_1 relativ zur Position der Masse m_2 und vergleiche das Resultat mit der Berechnung der Bahn relativ zum Schwerpunkt.
2. Zweikörperproblem: Berechne die Bahn der Masse m_2 relativ zum Schwerpunkt der Massen.

3. Bestimme aus der Polarform der Kegelschnittgleichung ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.
4. Die Gravitationskonstante ist bekannt. Im Kapitel «Angaben zu unserem Sonnensystem» sind auch die wichtigsten Daten aus diesem System angegeben.
 - a) Berechne aus diesen Angaben die Umlaufdauer T der Erde um die Sonne.
 - b) Berechne den Drehimpuls des Systems Erde – Sonne.
 - c) Berechne die explizite Polargleichung der Erdbahn um sie Sonne.
 - d) Die Umlaufzeit des Mars um die Sonne beträgt 687 Erntage. Bestimme aus dieser Angabe die grosse Halbachse der Marsbahn.
5. Bestimme die Gesamtenergie für ein System mit N Körpern. Zeige, dass die Ableitung der Energie nach der Zeit Null ist, weil sich die zu zwei Körpern gehörenden Summanden paarweise zu Null aufheben.
6. Untersuche im «Simulator» symmetrische Startpositionen. Das heisst, die betrachteten Körper haben alle dieselbe Masse, ihre Startposition sowie die Startgeschwindigkeit ist drehsymmetrisch zum Nullpunkt.
7. Bestimme die Gleichung der Jupiterbahn um die Sonne in astronomischen Einheiten.
8. Ein Körper liegt auf einer Ellipse mit Hauptachse $a = 2$ und Nebenachse $b = 1$. Beim Start befindet sich der Körper in der Position $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0.5176 \\ 1.9318 \end{pmatrix}$ und $\vartheta_0 = 1.309$. Bestimme die Bahngleichung der Ellipse.
9. Bestimme die Bahngleichung des Jupiters in AE. Berechne damit Aphel und Perihel des Jupiters. Vergleiche das Resultat mit Angaben aus dem Internet. Beachte, dass das Resultat lediglich eine Näherung ist.
10. Wenn sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen würde, würden sich Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gerade aufheben. Wie gross wäre dann die Geschwindigkeit der Erde in km/h? Vergleiche das Resultat mit der Geschwindigkeitsangabe in der Tabelle über das Sonnensystem.
11. Beweise die Aussagen im Abschnitt über alternative Universen.
12. Suche weitere Beispiele für stabile periodische Bahnen im Internet und implementiere diese als entsprechende Konstellationen im normierten Universum.

2. 3D Attraktoren

2.1 Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Einführung

Im ersten Kapitel der mathematischen Dokumentation zum «Simulator» haben wir (stetig differenzierbare) Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Wir haben gesehen, dass ein Fixpunkt $f(\xi) = \xi$ genau dann attraktiv ist, wenn gilt $|f'(\xi)| < 1$. Nun wollen wir das auf höhere Dimensionen übertragen. Wenn jemandem die Jacobi-Matrix und die Begriffe der Eigenwerte und Eigenvektoren aus der linearen Algebra bekannt sind, kann er diesen Abschnitt überspringen. Vorausgesetzt werden für das Folgende aber Grundkenntnisse der komplexen Zahlen sowie Kenntnisse der ebenen oder räumlichen Vektorgeometrie.

Wir betrachten eine in allen Variablen stetig differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch je eine Gleichung für jede Komponente:

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} f_1(\vec{r}) \\ f_2(\vec{r}) \\ f_3(\vec{r}) \end{cases}, \vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Diese Funktion ist *vektorwertig*, wir verzichten aber auf die Schreibweise \vec{f} .

Wenn an Stelle des \mathbb{R}^3 Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachtet werden sollen, lässt man einfach die dritte Komponente weg.

Beispiel

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x - 2y + xz \\ 2x + y + yz \\ xy - z \end{cases}$$

Man sieht, dass diese Abbildung auf ganz \mathbb{R}^3 definiert ist und jedem Punkt einen Bildpunkt in \mathbb{R}^3 zuordnet. Zudem ist sie in jeder Variablen stetig differenzierbar.

Im Allgemeinen ist die «Wirkung» einer solchen Abbildung nicht einfach zu diskutieren. Wir beginnen mit den einfachsten derartigen Funktionen, nämlich den linearen.

Die Abbildungsmatrix

Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch eine Abbildungsvorschrift

$$f(x, y, z) = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

Wobei alle Koeffizienten $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$.

Wir führen für diese Abbildungen die Matrixschreibweise ein. Die Abbildungsmatrix A sei gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Das Bild eines Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist dann definiert als:

$$A\vec{r} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

Jede Zeile des Bildvektors ist das Skalarprodukt der entsprechenden Matrixzeile mit dem Vektor \vec{r} .

Man identifiziert oft die Abbildungsmatrix A mit der zugehörigen linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: Man spricht dann von der linearen Abbildung A . Da die Dimension «3» hier keine wesentliche Rolle spielt, weil viele Aussagen für Vektorräume beliebiger Dimension gelten, lassen wir oft « $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ » weg und sprechen nur von der linearen Abbildung A . Wie man leicht prüft, gilt für eine lineare Abbildung:

Satz

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann gilt für beliebige Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A(\lambda\vec{r} + \vec{s}) = \lambda A\vec{r} + A\vec{s}$$

Der Beweis folgt durch direktes Nachrechnen.

Bemerkung: Für diesen Satz gilt auch die Umkehrung: Eine Abbildung f (irgendwie definiert, nicht durch eine Abbildungsmatrix) ist dann linear, wenn für beliebige Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $f(\lambda\vec{r} + \vec{s}) = \lambda f(\vec{r}) + f(\vec{s})$.

Die Linearität von A hat eine erste wichtige Konsequenz: Man kann mit den Basisvektoren arbeiten. Wenn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ Basisvektoren von \mathbb{R}^3 sind (meist gegeben durch Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenachsen), dann lässt sich jeder Vektor als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Wegen der Linearität von A gilt dann:

$$A\vec{r} = xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2 + zA\vec{e}_3$$

Wenn wir nun z.B. den ersten Basisvektor $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachten dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Analoges gilt für die beiden anderen Basisvektoren und man hat den

Satz

Sei f eine lineare Abbildung. Dann ist die zugehörige Abbildungsmatrix gegeben durch die Bilder der Basisvektoren in ihren Kolonnen.

Beispiel

Wir betrachten im Raum eine Drehung D von 120° (im Uhrzeigersinn) um die Achse, welche durch den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Diese Abbildung ist linear, weil es keine Rolle spielt, ob ich Vektoren

zuerst drehe und dann linear kombiniere, oder zuerst linear kombiniere und dann drehe:

$D(\lambda\vec{r} + \vec{s}) = \lambda D\vec{r} + D\vec{s}$. D vertauscht die Basisvektoren zyklisch: $D\vec{e}_1 = \vec{e}_3, D\vec{e}_3 = \vec{e}_2, D\vec{e}_2 = \vec{e}_1$. Somit ist die Abbildungsmatrix von D gegeben durch:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man sieht bei diesem Beispiel auch, dass die Drehachse «stehen» bleibt bzw. invariant ist:

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit eine lineare Abbildung definiert ist, genügt es also, die Bilder der Basisvektoren zu kennen!

Kern und Determinante

Die Frage, welche Vektoren bei einer linearen Abbildung nach $\vec{0}$ überführt werden, wird sich als sehr hilfreich erweisen. Die Menge dieser Vektoren heisst *Kern* der linearen Abbildung A .

Definition

Sei A eine lineare Abbildung. Dann ist: $\text{Kern } A := \{\vec{x}: A\vec{x} = \vec{0}\}$

Beispiel

Sei A eine lineare Abbildung und $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Kern } A$. Dann ist für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \text{Kern } A$. Man kann das leicht nachprüfen: $A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} = \vec{0}$

Folgerung

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann ist der Kern entweder der Nullpunkt, eine Gerade durch den Nullpunkt, eine Ebene durch den Nullpunkt oder der ganze Raum (wenn A die Nullmatrix ist).

Beweis: Siehe Übung.

Der Kern ist also wieder ein Vektorraum, der in \mathbb{R}^3 enthalten ist. Man spricht auch von einem *Unterraum* von \mathbb{R}^3 .

Die Frage ist nun, wie man einfach prüfen kann, ob der Kern vom Nullpunkt verschieden ist. Wenn das der Fall ist, dann gibt es mindestens einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$. Wenn $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, dann ist $A\vec{x} = xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2 + zA\vec{e}_3 = \vec{0}$. Die Bilder der Basisvektoren, bzw. die Kolonnen der Abbildungsmatrix sind also linear abhängig. Wenn zum Beispiel $z \neq 0$, lässt sich der dritte Kolonnenvektor als Linearkombination der ersten beiden darstellen: $A\vec{e}_3 = -\frac{1}{z}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$.

Das Spatprodukt der Kolonnenvektoren $[A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3]$ ist gleich dem Volumen des Spates, der von den drei Vektoren aufgespannt wird, wie man aus der Vektorgeometrie weiss. Wenn diese drei Vektoren linear abhängig sind, also in einer Ebene liegen, dann ist dieses Spatprodukt Null. Das liefert das gewünschte Kriterium. Bei einer linearen Abbildung spricht man nun nicht vom Spatprodukt, sondern von der Determinante, da diese Definition auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Für uns genügt folgende Definition:

Definition

Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Dann ist die *Determinante* von A definiert durch:

$$\det A := [A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3] = (A\vec{e}_1 \times A\vec{e}_2) \cdot A\vec{e}_3$$

Satz

$$\text{Kern } A \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det A = 0$$

«⇒» Siehe Abschnitt weiter oben.

« \Leftarrow » Die Bilder der Basisvektoren sind linear abhängig, z.B. $A\vec{e}_3 = xA\vec{e}_1 + yA\vec{e}_2$. Dann ist $\vec{z} := x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \in \text{Kern } A$ und $\vec{z} \neq \vec{0}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

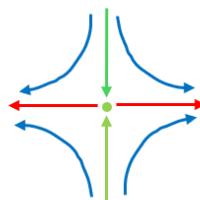
Nun kommen wir zum letzten wichtigen Instrument, um später das Verhalten der Abbildung in der Umgebung von Fixpunkten zu untersuchen.

Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall kann es bei höheren Dimensionen vorkommen, dass ein Fixpunkt in gewissen Richtungen repulsiv und in anderen Richtungen attraktiv ist. In zwei Dimensionen können zum Beispiel folgende Fälle vorliegen:



Links ein attraktiver Fixpunkt (Senke) und rechts ein repulsiver Fixpunkt (Quelle)

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall kann es hier eine «Mischung» geben, nämlich dann, wenn der Fixpunkt in gewissen Richtungen attraktiv und in anderen repulsiv ist. Man spricht dann von einem *homoklinen Fixpunkt*.



Homokliner Fixpunkt (Sattelpunkt)

Entsprechend komplizierter kann es in drei Dimensionen werden.

Der Nullpunkt ist immer ein Fixpunkt einer linearen Abbildung. Wenn es bei der Abbildung gewisse Richtungen gibt, welche invariant sind, können wir untersuchen, ob die Abbildung in diesen Richtungen kontrahierend oder dilatierend ist. Eine Richtung ist invariant, wenn ein Vektor in dieser Richtung lediglich gedehnt oder gestaucht wird. Wenn A eine lineare Abbildung ist, suchen wir also Lösungen der Gleichung:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Wenn die Gleichung eine solche Lösung hat, dann heisst λ *Eigenwert* von A und \vec{x} der zugehörige *Eigenvektor*. Wenn $\lambda = 1$, dann ist jeder Punkt auf der von \vec{x} aufgespannten Geraden ein Fixpunkt. Für $\lambda > 1$ ist die Abbildung dilatierend, für $\lambda < 1$ kontrahierend im Nullpunkt.

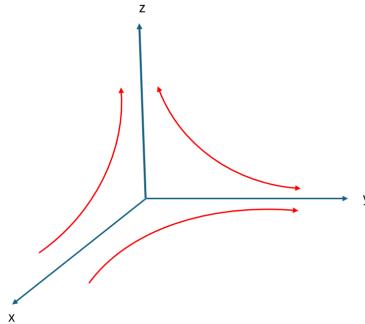
Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fixpunkt dieser Abbildung sind der Nullpunkt. Diese Abbildung ist in Richtung des ersten Basisvektors kontrahierend, in Richtung des zweiten und dritten dilatierend. Weitere Fixpunkte gibt es nicht, denn

die Bedingung $A\vec{x} = \vec{x}$ führt auf $(A - \mathbb{E})\vec{x} = \vec{0}$ wenn $\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ die Einheitsmatrix ist. Also $\vec{x} \in$

$\text{Kern}(A - \mathbb{E})$, aber $\det(A - \mathbb{E}) = \det \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -0.25 \neq 0$, somit ist $\text{Kern}(A - \mathbb{E}) = \vec{0}$.



Das Verhalten obiger Abbildung in der Nähe des Nullpunktes

Nun ist:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{E})\vec{x} = \vec{0}$$

Und es gibt nur eine Lösung, wenn

$$\text{Kern}(A - \lambda\mathbb{E}) \neq \vec{0} \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

Wir suchen also λ so, dass mit den früheren Bezeichnungen für A gilt:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Das zugehörige Polynom

$$p(\lambda) := \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Heisst *charakteristisches Polynom* von A . In unserem Fall hat es den Grad 3. Daraus folgt:

Satz

Eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat entweder drei reelle Eigenwerte oder einen reellen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte.

Insbesondere gibt es immer mindestens eine Richtung, die bei der Abbildung invariant ist.

Beispiel

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wir untersuchen das Verhalten der Abbildung in der Nähe des Nullpunktes. Dazu suchen wir invariante Richtungen, bzw. die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom und setzen dieses gleich Null:

$$p(\lambda) := \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda_{1,2,3} = 1, 2, -1$. Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist im Kern von

$$(A - 1 \cdot \mathbb{E}) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wenn wir z.B. die erste und dritte Zeile betrachten, muss für den Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ gelten:

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{y_1}{2} - \frac{3z_1}{2} = 0 \\ -x_1 + \frac{y_1}{2} - \frac{z_1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = -y_1 \end{cases}$$

Da nur die Richtung von \vec{x}_1 gesucht ist, kann man einen Parameter frei wählen, z.B. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Man kontrolliert: $A\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1$. Analog erhält man die beiden weiteren Eigenvektoren. Für den

Eigenwert $\lambda_2 = 2$ hat man als Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und für den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ den

Eigenvektor $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bezuglich diesen Eigenvektoren als Basis hat die Matrix die Form:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Jeder Punkt auf der von \vec{x}_1 aufgespannten Geraden ist ein Fixpunkt. Jeder Punkt auf der von \vec{x}_3 aufgespannten Geraden ist zyklisch der Ordnung zwei: Er wird bei der Abbildung am Nullpunkt gespiegelt. In Richtung \vec{x}_2 ist die Abbildung dilatierend.

Beachte, dass die Eigenvektoren im Allgemeinen keine orthonormierte Basis bilden.

□

Nun untersuchen wir noch den Fall, dass eine Abbildung einen reellen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte hat. Seien die Eigenwerte $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$. Der zu λ_3 gehörende Eigenvektor sei $\vec{x}_3 \in \mathbb{R}^3$. Die zu $\lambda_{1,2}$ gehörenden Eigenvektoren sind konjugiert komplex.

Angenommen, sie haben die Form: $\vec{x}_{1,2} = \vec{u} \pm i\vec{v}$ mit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Wenn wir $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ als Basis wählen, hat die Matrix Diagonalform:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Wir können aber auch $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}_3$ als Basis wählen, denn $\vec{x}_{1,2}$ lassen sich eindeutig als (komplexe) Linearkombination von \vec{u}, \vec{v} darstellen. Welche Form hat dann die Matrix A bezüglich dieser Basis?

Da \vec{x}_1 ein Eigenvektor ist, gilt:

$$A\vec{x}_1 = (\alpha + i\beta)\vec{x}_1 = (\alpha + i\beta)(\vec{u} + i\vec{v}) = (\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) + i(\beta\vec{u} + \alpha\vec{v})$$

Wenn man die Realteile und Imaginärteile vergleicht, sieht man:

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}, A\vec{v} = \beta\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

Das Bild des ersten Basisvektors \vec{u} unter der Abbildung A ist also $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ und das Bild von \vec{v} ist $\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit hat die Matrix bezüglich der Basis $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}_3$ die Form

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Die Teilmatrix $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ist eine Drehstreckung in der \vec{u}, \vec{v} – Ebene.

Begründung:

Jeder Basisvektor wird um denselben Betrag gestreckt, nämlich um $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Somit wird auch jede Linearkombination derselben, also jeder Vektor, um diesen Betrag gestreckt. Die Basisvektoren sind i.a. kein orthonormiertes System. Wir wollen zeigen, dass der Winkel zwischen \vec{u}, \vec{v} und $\tilde{A}\vec{u}, \tilde{A}\vec{v}$ erhalten bleibt. Dazu führen wir ein orthonormiertes System ein.

Wenn z.B. \vec{u}, \vec{v} ein Rechtssystem bilden, können wir \vec{u} auf die Länge 1 normieren und als ersten Basisvektor \vec{e}_1 diesen normierten Vektor in Richtung \vec{u} wählen. Dann wählen wir den zweiten Basisvektor senkrecht zu \vec{e}_1 , so dass er mit diesem ein Rechtssystem bildet, und normieren ihn auf die Länge 1. In diesem orthonormierten System haben dann \vec{u}, \vec{v} – bei geeigneter Längennormierung von \vec{v} – die Komponenten:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für ein geeignetes $v \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Winkel φ zwischen \vec{u} und \vec{v} gegeben durch:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Der Winkel φ' zwischen $\tilde{A}\vec{u}$ und $\tilde{A}\vec{v}$ ist gegeben durch:

$$\cos\varphi' = \frac{\tilde{A}\vec{u} \cdot \tilde{A}\vec{v}}{|\tilde{A}\vec{u}| |\tilde{A}\vec{v}|} = \frac{\binom{\alpha}{\beta} \cdot \binom{\alpha v - \beta}{\beta v + \alpha}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(1 + v^2)}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

Schliesslich ist das Kreuzprodukt $\binom{\alpha}{\beta} \times \binom{-\beta}{\alpha} > 0$, der Drehsinn bleibt also bei der Abbildung erhalten. Wir haben also keine Streckspiegelung, sondern eine Drehstreckung und $\varphi' = \varphi$.

Wenn $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$ ist, dann ist der Nullpunkt in der \vec{u}, \vec{v} Ebene attraktiv und die Drehung bewirkt, dass sich der Orbit eines Punktes in dieser Ebene auf einer Spirale um den Nullpunkt aufwickelt.

Wenn $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 1$, dann bewegt sich ein solcher Punkt auf einer Spirale vom Nullpunkt weg.

Bei der Implementierung betrachten wir die Matrix:

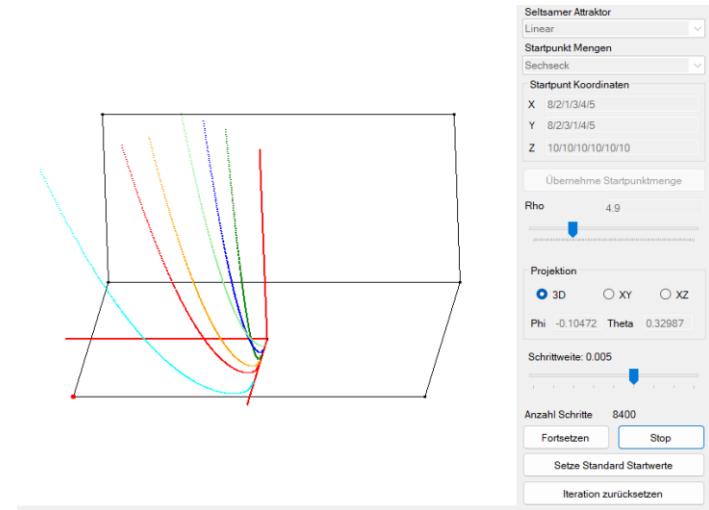
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Und betrachten die Fälle:

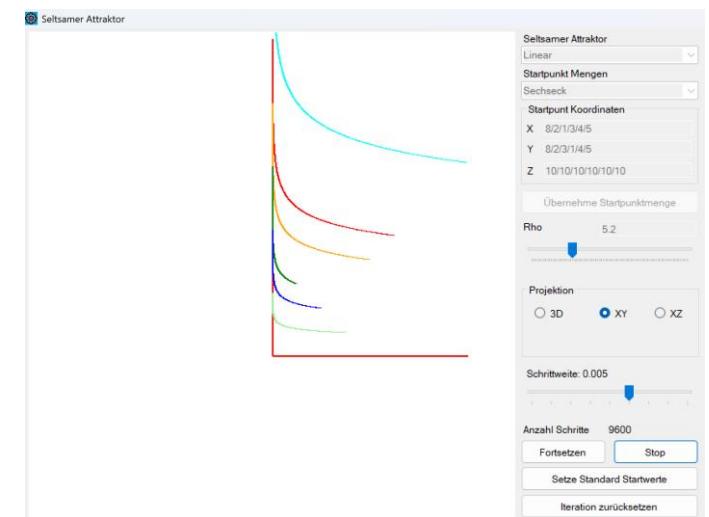
- $\beta = 0, \alpha > 0, \delta > 0, \lambda > 0$. Also alle Eigenwerte sind reell. Je nach Einstellung des Parameters ϱ werden α, δ, λ knapp unterhalb 1 oder knapp oberhalb liegen. Der Nullpunkt ist dann schwach attraktiv oder schwach repulsiv, je nach Richtung.
- $\lambda > 0, \lambda \sim 1$. $\varphi = StepWidth * \pi / 100$. Und $\alpha = a * \cos\varphi, \beta = a * \sin\varphi$ mit $a \sim 1, \delta = \alpha$

Der Winkel φ wird über die *Schrittweite* gesetzt und die Werte von α, δ, λ über den Parameter ϱ und zwar wie folgt:

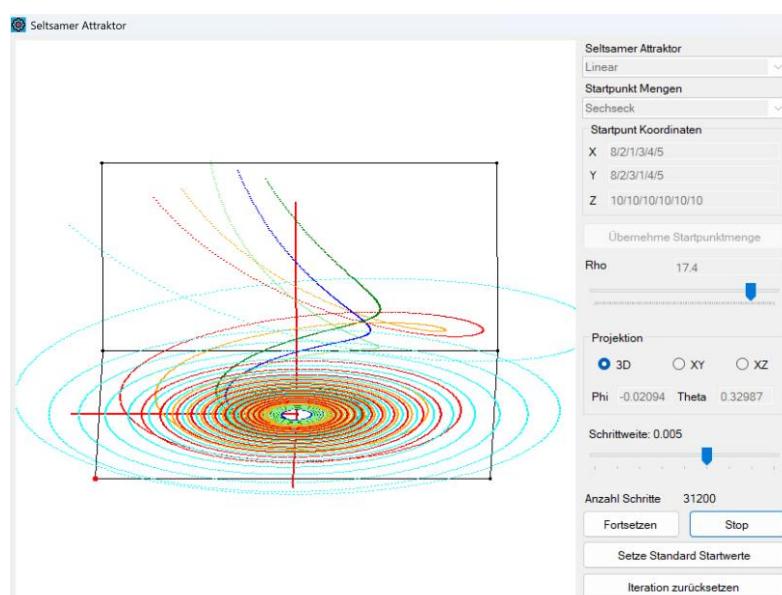
- Der Nullpunkt ist immer attraktiv in z-Richtung, d.h. $\lambda < 1$ für $\varrho \in [0, 20]$
- Für $\varrho \in [0, 10]$ hat man drei reelle Eigenwerte.
 - $\alpha < 1$ für $\varrho < 7.5$. In diesem Bereich ist der Nullpunkt in x-Richtung attraktiv
 - $\delta < 1$ für $\varrho < 5$. In diesem Bereich ist der Nullpunkt in y-Richtung attraktiv.
- Für $\varrho \in]10, 20]$ hat man zwei konjugiert komplexe Eigenwerte und dementsprechend eine Drehstreckung in der x-y Ebene.
 - $\alpha = \delta < 1$ für $\varrho < 17.5$. In diesem Bereich dreht sich die Bahn eines Startpunktes spiralförmig um den Nullpunkt und nähert sich ihm.



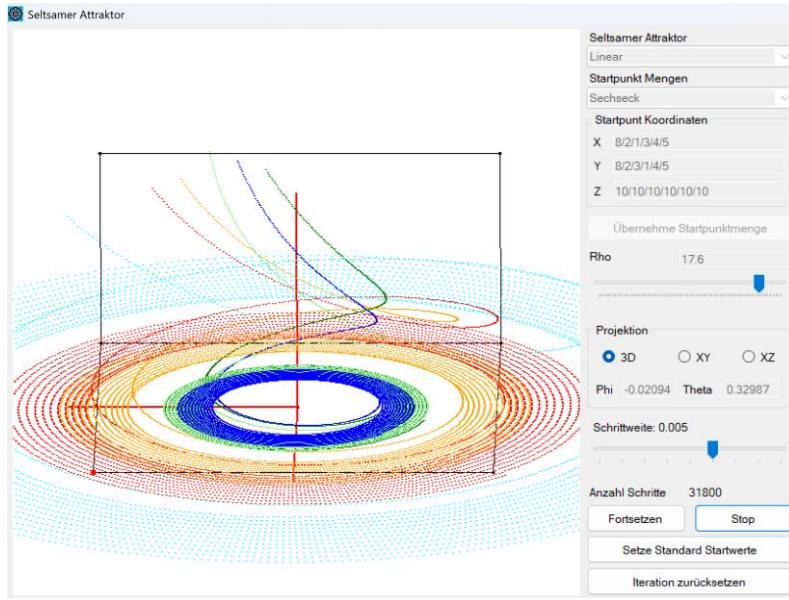
Bahnkurven für $\rho = 4.9$. Der Nullpunkt ist in allen Richtungen attraktiv.



Bahnkurven für $\rho = 5.2$ in der x-y Projektion. Der Nullpunkt ist in y-Richtung repulsiv.



Bahnkurven für $\rho = 17.4$. Der Nullpunkt ist attraktiv und die Bahnkurven sind spiralförmig



Bahnkurven für $\rho = 17.6$. Der Nullpunkt ist nur in z-Richtung attraktiv und in der y-x ebene repulsiv

2.2 Stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Um das Verhalten einer reellen und stetig differenzierbaren Funktion f , welche iteriert wird, in der Nähe eines Fixpunktes ξ zu untersuchen, haben wir im eindimensionalen Fall diese Funktion mit Hilfe der Ableitung dieser Funktion durch eine lineare Funktion «ersetzt»:

$$f(\xi + h) \approx f(\xi) + f'(\xi) \cdot h, h \approx 0$$

Das Resultat war relativ einfach. Der Fixpunkt ist attraktiv, genau dann wenn $|f'(\xi)| < 1$.

Im mehrdimensionalen Fall machen wir dasselbe. Wir betrachten eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Welche in jeder Komponente und jeder Variablen differenzierbar ist. Man nennt f dann auch *partiell differenzierbar*. Ferner sollen die Ableitungen stetig sein. Falls f einen Fixpunkt $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ hat, also einen Punkt mit $f(\vec{\xi}) = \vec{\xi}$, dann wollen wir das Verhalten von f in der Nähe von $\vec{\xi}$ untersuchen. Wie im eindimensionalen Fall machen wir das, indem wir f in der Umgebung von $\vec{\xi}$ durch eine lineare Funktion ersetzen.

Als Vorbereitung dazu haben wir im vorhergehenden Abschnitt die Eigenschaften einer linearen Abbildung in der Umgebung eines Fixpunktes (dem Nullpunkt) untersucht.

Um die passende lineare Näherung im Fixpunkt $\vec{\xi}$ zu finden, müssen wir zuerst abschätzen, wie sich kleine Änderungen der Variablen auf den Funktionswert auswirken. Das führt uns zum Begriff des *totalen Differentials*.

Wir betrachten das komponentenweise. Wir schätzen die Änderung der Funktion $f_1(x, y, z)$ ab, wenn sich die Variablen (x, y, z) ein klein wenig ändern. Wenn (dx, dy, dz) diese (beliebig kleinen) Änderung der entsprechenden Variablen und df_1 die sich daraus ergebende Änderung des Funktionswertes bezeichnen, dann können wir schreiben:

$$df_1 := f_1(x + dx, y + dy, z + dz) - f_1(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&= f_1(x + dx, y + dy, z + dz) - f_1(x, y + dy, z + dz) \\
&\quad + f_1(x, y + dy, z + dz) - f_1(x, y, z + dy) \\
&\quad + f_1(x, y, z + dz) - f_1(x, y, z)
\end{aligned}$$

Bei den Differenzen ändert sich jeweils nur eine Variable und wir können die Annäherung für den eindimensionalen Fall: $f_1(x + dx) - f_1(x) = f_1'(x) \cdot dx$ verwenden. Das ergibt dann:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y + dy, z + dz) \cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z + dz) \cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist: $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y + dy, z + dz) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z + dz) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z)$. Dann haben wir als Resultat das sogenannte *totale Differential*:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz$$

Die analoge Gleichung gilt auch für die anderen Komponenten f_2, f_3 . Im Fixpunkt $\vec{\xi}$ gilt dann:

$$\begin{cases} df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi})dz \\ df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi})dz \\ df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi})dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi})dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi})dz \end{cases}$$

Wir können das auch in Matrixform schreiben:

$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Damit haben wir unsere lineare Annäherungsfunktion gefunden:

$$df = \mathfrak{J}_f(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathfrak{J}_f(\vec{\xi}) d\vec{x}$$

Wobei

$$\mathfrak{J}_f(\vec{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\vec{\xi}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\vec{\xi}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(\vec{\xi}) \end{bmatrix}$$

Die sogenannte Jacobi Matrix ist, benannt nach Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851).

Wenn die partiellen Ableitungen von f stetig sind, gilt dann (ohne dass wir das hier beweisen):

$$\lim_{|d\vec{x}| \rightarrow 0} |df - \mathfrak{J}_f(\vec{\xi})d\vec{x}| = 0$$

Man nennt f dann auch *total differenzierbar*.

Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x^2y + z + \frac{1}{3} \\ xy - yz - 1 \\ x + y^2z - 1 \end{pmatrix}$$

Man kann leicht nachrechnen: $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Fixpunkt von f .

Die Jacobi Matrix ist:

$$\mathfrak{J}_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}xy & \frac{1}{3}x^2 & 1 \\ y & x-z & -y \\ 1 & 2yz & y^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{J}_f(\vec{\xi}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Um das Verhalten der Abbildung in der Umgebung des Fixpunktes zu untersuchen, analysieren wir die lineare Abbildung $\mathfrak{J}_f(\vec{\xi})$ und suchen deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom ist dann:

$$p(\lambda) = \text{Det} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{4}{3}$$

Und wir suchen dessen Nullstellen.

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle. Wenn wir $p(\lambda)$ durch $\lambda - 1$ dividieren, bleibt als Bedingung für die übrigen beiden Nullstellen:

$$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

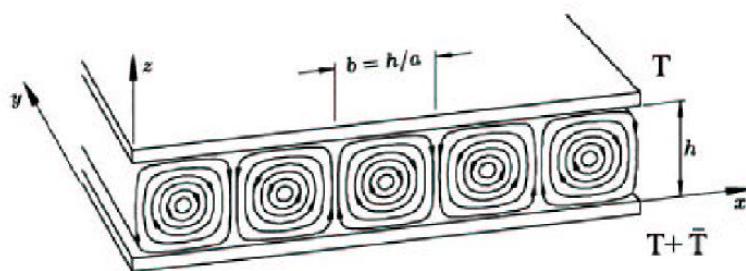
Das liefert die beiden weiteren Nullstellen:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

f ist also in Richtung des ersten Eigenvektors indifferent (weder attraktiv noch repulsiv). In Richtung des zweiten Eigenvektors ist f attraktiv, da $|\lambda_2| \approx 0.609 < 1$ und in Richtung des dritten Eigenvektors repulsiv, da $|\lambda_3| \approx 1.276 > 1$.

2.3 Das Lorenz-System

Anfang des 20. Jahrhunderts haben die Physiker Henri Bénard (1874 – 1939) und der mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Lord Rayleigh (1842 – 1919) Konvektionsströmungen untersucht. Ihr Modell sah folgendermassen aus:



Modell zur Untersuchung von Konvektionsströmungen (Quelle: [3])

Zwischen zwei Platten im Abstand h befindet sich eine viskose (d.h. deformierbare) und inkompressible Flüssigkeit. Zwischen Unter- und Oberseite besteht eine Temperaturdifferenz \bar{T} , welche ab einem kritischen Wert zur Bildung von Konvektionsrollen führt, die oben skizziert sind. Dabei steigen von unten erwärmte Flüssigkeitselemente wegen ihrer geringeren Dichte auf und kältere Flüssigkeitsvolumina sinken ab.

Dieses Modell nahm der amerikanische Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz (1917 – 2008) im Jahre 1963 als Ausgangspunkt für eine Modellierung der Erdatmosphäre mit dem Ziel, eine Langzeit-Wettervorhersage herleiten zu können. Er betonte dabei, dass sein Modell stark vereinfacht ist und nur für begrenzte Parameterwerte realistische Resultate liefert.

Das von ihm entwickelte Lorenz-System besteht aus drei Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

Darin sind σ, β, ρ fixe Parameter, die folgende Bedeutung haben:

σ ist die sogenannte «Prandtl-Zahl», benannt nach dem Ingenieur Ludwig Prandtl (1875 – 1953). Sie beschreibt die Eigenschaften der betrachteten Flüssigkeit hinsichtlich Viskosität und Temperaturleitfähigkeit. Für seine Untersuchungen von atmosphärischen Strömungen arbeitete Lorenz mit dem fixen Wert $\sigma = 10$.

$\beta = \frac{4}{1+a^2}$ ist ein Mass für die Zellgeometrie. Lorenz arbeitete mit dem fixen Wert $a = \frac{h}{b} = \sqrt{2}$, d.h. $\beta = \frac{8}{3}$.

ρ ist die sogenannte Rayleigh-Zahl, welche die auftreibenden und bremsenden Kräfte ins Verhältnis setzt. Diese Zahl ist positiv und von ihr hängt ab, wie sich die Konvektionsströmung verhält. Im «Simulator» kann diese Zahl im Intervall $[0, 30]$ variiert werden. Wir werden später einige kritische Werte von ρ diskutieren.

x ist proportional zur Intensität der Konvektionsströmung. y ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und fallender Strömung. z ist proportional zur Abweichung vom linearen Temperaturprofil entlang der vertikalen Achse.

Eine genauere Beschreibung dieser Parameter übersteigt hier unsere Möglichkeiten. Ebenso eine mathematische Herleitung des Lorenz-Systems. Sie ergeben sich aus drei Erhaltungssätzen:

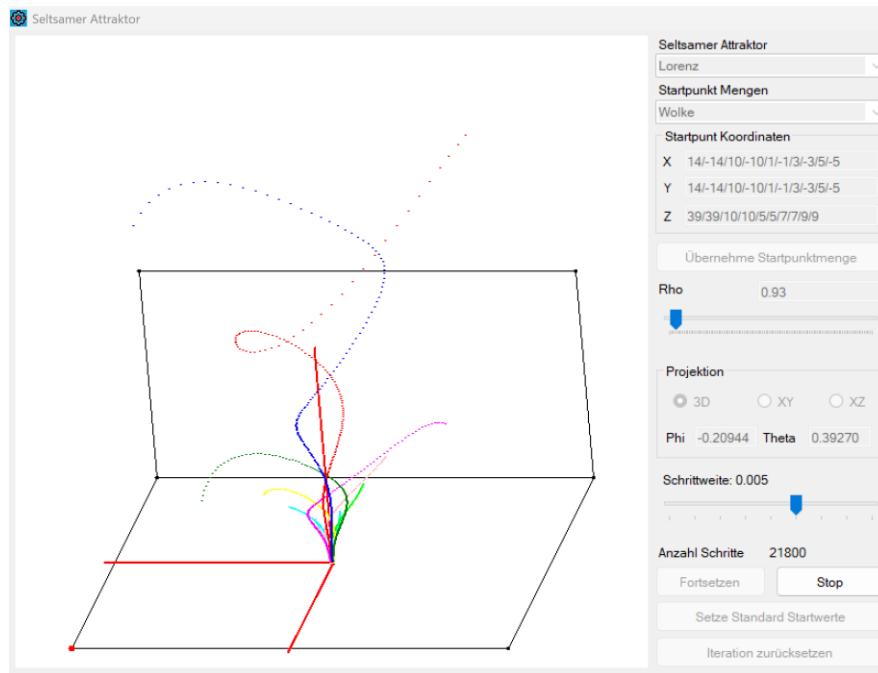
- Massenerhaltung (hier wird die Kontinuitätsgleichung und der Begriff der Divergenz gebraucht)

- Impulserhaltung (hier braucht man die Navier-Stokes Differentialgleichungen)
- Energieerhaltung (hier braucht man die Wärmetransportgleichung)

Ferner werden einige vereinfachende Bedingungen vorausgesetzt, zum Beispiel, dass sich die Konvektionsrollen unabhängig von der geometrischen y-Richtung entwickeln.

Eine genaue Herleitung findet man in [3]. Einige Eigenschaften des Systems lassen sich aber elementar untersuchen.

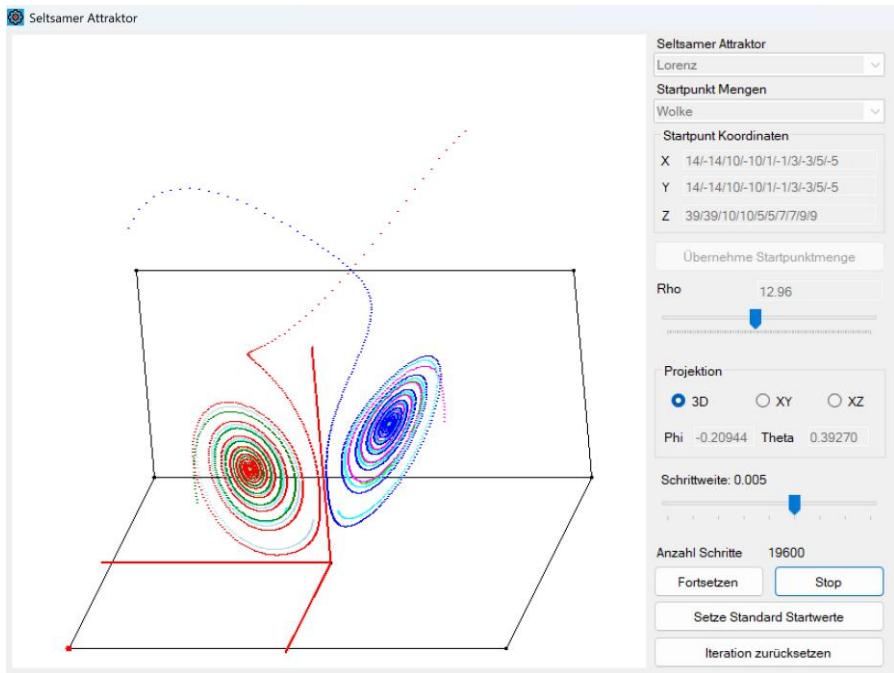
Wir können folgendes feststellen: Das Lorenz-System ist ein sehr stark vereinfachtes Modell für das Wetter. Es gibt darin nur eine (abgesehen von der Konvektionsströmung) ruhende Luftmasse, ohne den Einfluss von seitlichen Winden, topographischen Gegebenheiten usw. *Man könnte deshalb annehmen, dass sich das System gut voraussagen lässt.*



Experiment mit $\rho = 0.93$ und einer Punktfolge als Startmenge

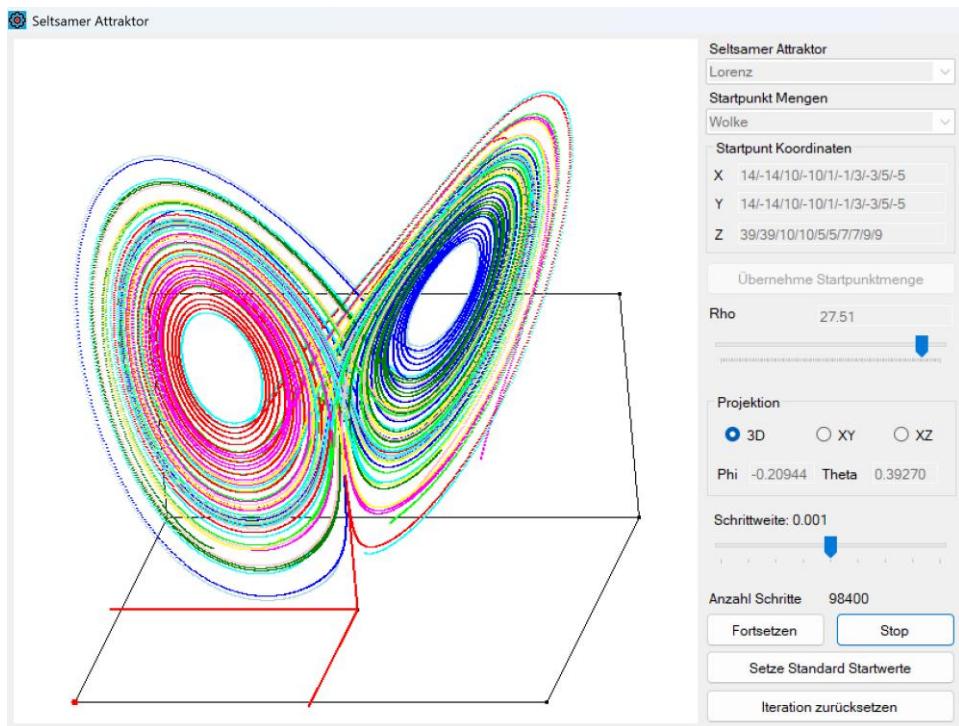
Im diesem ersten Experiment konvergieren alle Punkte der Punktfolge gegen den Nullpunkt.

Für $\rho = 12.96$ streben die einzelnen Punkte derselben Punktfolge offenbar gegen zwei verschiedene Punkte, je nach Startpunkt.



Experiment mit $\rho = 12.96$ und derselben Punktfolge als Startmenge

Wenn man dasselbe Experiment mit $\rho = 27.51$ durchführt, dann scheinen die vorherigen Fixpunkte repulsiv geworden zu sein. Die Punktfolge «verschmiert» über eine Menge, die wie ein Schmetterling aussieht.



Dieselbe Startmenge mit $\rho = 27.51$

Im letzten Fall scheint das System nicht prognostizierbar. Bei der näheren Untersuchung ist Edward Lorenz auf chaotische Eigenschaften des Systems gestossen. Damals war der Begriff des Chaos noch nicht mathematisch präzisiert. Für Lorenz war es eine Überraschung, dass sogar ein sehr stark vereinfachtes Wettermodell Eigenschaften aufweist, welche eine langfristige Prognose

verunmöglichen. Insbesondere reagiert das System sensible auf kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen. Lorenz hält in [4] fest:

«When our results concerning the instability of non-periodic flow are applied to the atmosphere, which is ostensibly non-periodic, they indicate that prediction of the sufficiently distant future is impossible by any method, unless the present conditions are known exactly».

Diese Eigenschaft ist die Sensitivität und die Aussage, dass der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen kann, wird Lorenz zugeschrieben.

Im Folgenden wollen wir nun Eigenschaften des Lorenz Systems untersuchen, soweit sie elementar zugänglich sind.

2.4 Elementare Eigenschaften des Lorenz-Systems

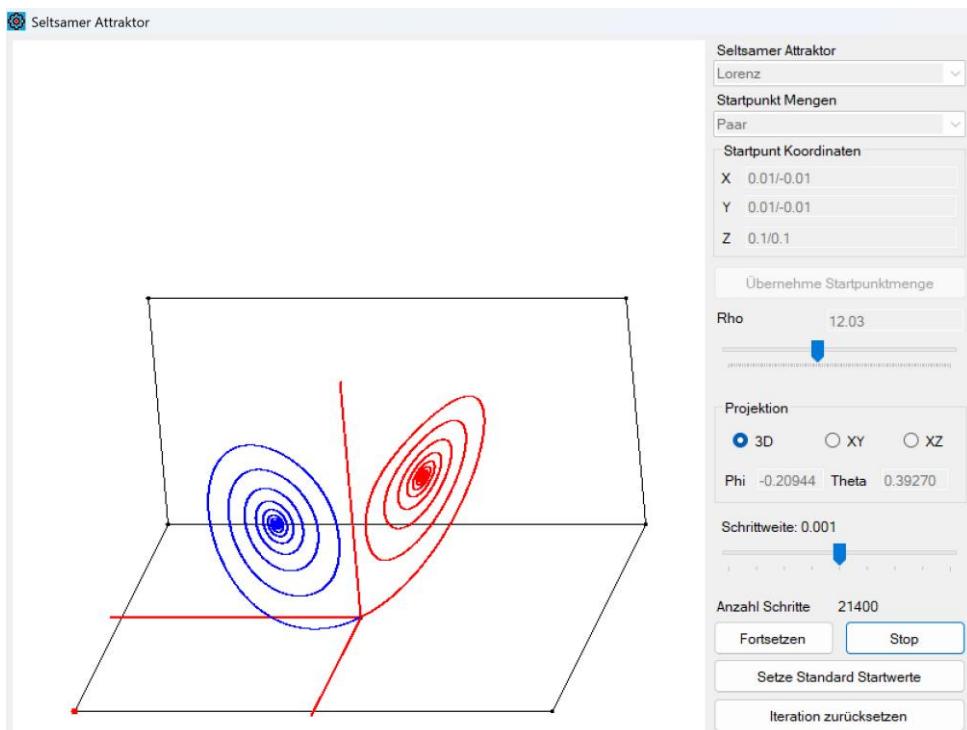
Spiegelsymmetrie relativ zur z-Achse

Wenn man im Gleichungssystem

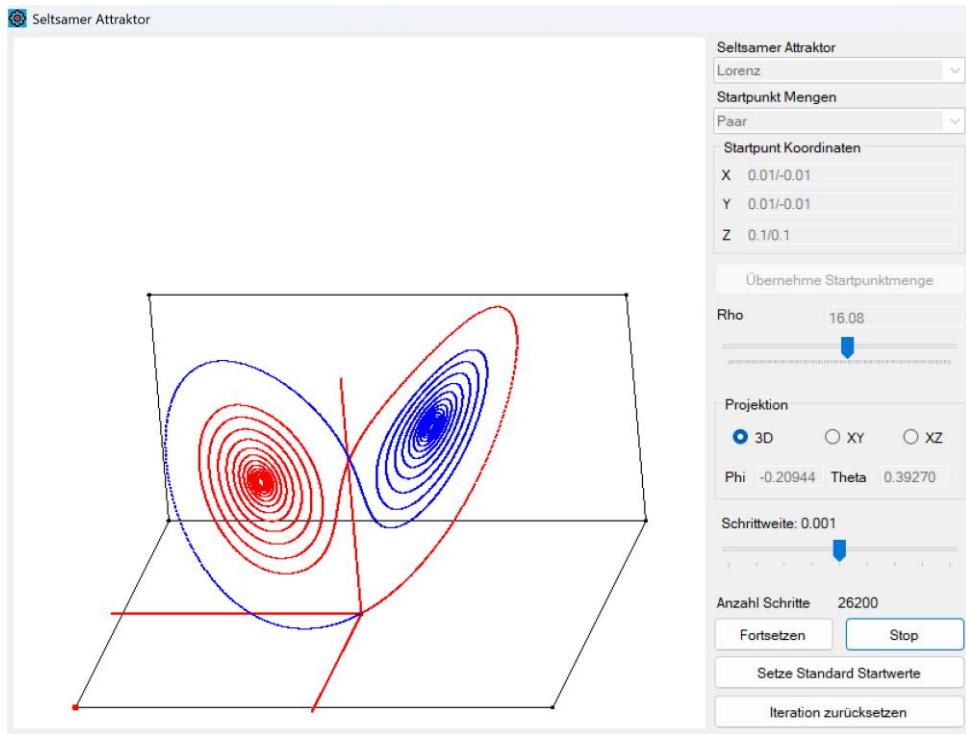
$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzt, ändert es sich nicht. Das heisst, dass an der z-Achse gespiegelte Startpunkte einen ebenfalls spiegelsymmetrischen Orbit erzeugen.

Wir betrachten zwei Startpunkte, die sehr nahe beieinander liegen: $(0.01, 0.01, 0.1)$ (blau) und $(-0.01, -0.01, 0.1)$ (rot). Diese sind symmetrisch zur z-Achse und liefern symmetrische Orbits. Wir setzen $\rho = 12.03$. Wegen der Symmetrie liefern diese Startpunkte symmetrische Orbits und konvergieren gegen unterschiedliche, symmetrisch liegende Fixpunkte.



Symmetrische Orbits für zwei nahe beieinander liegende Startpunkte



Für $\rho = 16.08$ werden die Orbits derselben Startpunkte «vertauscht»

Das deutet schon darauf hin, dass das System empfindlich auf Änderungen reagiert: Wenn sich der Startpunkt minim ändert, kann je nach Situation ein deutlich unterschiedlicher Orbit erzeugt werden.

Invarianz der z-Achse

Ein Startpunkt auf der z-Achse $(0, 0, z)$ bleibt auf der z-Achse, denn

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -\beta z \end{cases}$$

Die z-Achse ist invariant. Ferner ergibt sich – wenn mit t die Zeit bezeichnet wird: $z = Ce^{-\beta t}, C \in \mathbb{R}$. Für $t \rightarrow \infty$ laufen also Orbits auf der z-Achse gegen den Nullpunkt.

Gleichgewichtslagen

Gleichgewichtslagen sind Punkte, bei denen das System sich nicht mehr ändert. Sie entsprechen z.B. den Fixpunkten bei den früher untersuchten Wachstumsmodellen. Das heisst hier, dass alle Ableitungen nach den drei Variablen verschwinden. Es sind Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 0 = -\sigma x + \sigma y \\ 0 = \rho x - y - xz \\ 0 = -\beta z + xy \end{cases}$$

Offenbar ist der Nullpunkt $(0, 0, 0)$ eine Lösung dieses Gleichungssystems und damit eine Gleichgewichtslage.

Nun schliessen wir den Nullpunkt aus. Die erste Gleichung führt auf $x = y$. Wenn $x \neq 0$ führt die zweite Gleichung auf $z = \rho - 1$ und die dritte Gleichung auf $x = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}$ für $\rho > 1$. Somit haben wir zwei weitere Gleichgewichtslagen (bzw. Fixpunkte):

$$C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

Diese beiden sind nur definiert für $\varrho > 1$. Man sieht hier auch wieder die Symmetrie bezüglich der z-Achse.

Wenn ein Startpunkt in der Nähe eines Fixpunktes zu diesem strebt, dann ist diese Gleichgewichtslage *stabil*. Das entspricht einem *attraktiven Fixpunkt*.

Wenn ein Startpunkt in der Nähe eines Fixpunktes zu einem Orbit führt, der sich vom Fixpunkt entfernt, dann ist diese Gleichgewichtslage *instabil*. Das entspricht einem *repulsiven Fixpunkt*.

Der Nullpunkt

Nun untersuchen wir damit das Verhalten des Lorenz Systems in der Nähe des Nullpunktes, also für die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{cases} -\sigma x + \sigma y \\ \varrho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{cases}$$

Und dem Fixpunkt $\vec{\xi}_1 = (0, 0, 0)$.

Die Jacobi Matrix aus dem vorhergehenden Abschnitt lautet dann

$$\mathfrak{J}_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \varrho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Und

$$\mathfrak{J}_f(\vec{\xi}_1) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \varrho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

In der Nähe des Nullpunktes gilt also:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = \varrho x - y \\ \dot{z} = -\beta z \end{cases}$$

In der dritten Komponente haben wir die Gleichung $\dot{z} = -\beta z$ mit der Lösung $z = Ce^{-\beta t}, C \in \mathbb{R}$. Für $t \rightarrow \infty$ laufen also Orbits auf der z-Achse gegen den Nullpunkt

Nun betrachten wir die x-y Ebene und die (lineare) Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ \varrho & -1 \end{bmatrix}$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda - \varrho\sigma$$

Mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(\varrho - 1)} = -\frac{1 + \sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\varrho}$$

Da $\varrho > 0$ ist der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv. Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\vec{e}_{1,2} = \left(\frac{\sigma - 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\varrho} \right)$$

Die Frage ist nun, für welche $\lambda_{1,2}$ das Gleichungssystem in der Umgebung des Nullpunktes zu einer Kontraktion führt. In diesem Fall wäre der Nullpunkt eine Senke bzw. attraktiv.

Wir wählen die Eigenvektoren $\vec{e}_{1,2}$ als Basis für unser Koordinatensystem. Das ist möglich, da $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$. Dann bewegen wir uns entlang \vec{e}_1 . Wir wählen also einen Startpunkt, der bezüglich des neuen Koordinatensystems die Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ hat. Dann lautet die Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x A \vec{e}_1 = x \lambda_1 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oder $\dot{x} = \lambda_1 x$. Diese Differentialgleichung hat die Lösung $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Somit ist die Abbildung in dieser Richtung genau dann kontrahierend, wenn $\lambda_1 < 0$ ist, und für $\lambda_1 > 0$ dilatierend.

Für einen Punkt, der sich entlang \vec{e}_2 bewegt, also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \cdot \vec{e}_2$, erhält man ebenso: $\dot{y} = \lambda_2 y$ mit der Lösung: $y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung ist in dieser Richtung genau dann kontrahierend, wenn $\lambda_2 < 0$ ist und für $\lambda_2 > 0$ dilatierend.

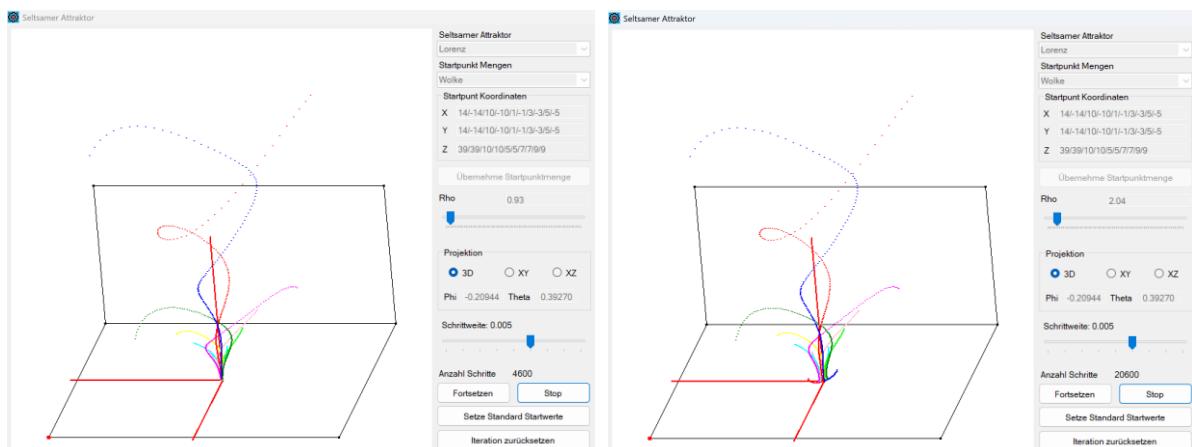
Nun haben wir:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1+\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho} < 0 \Leftrightarrow \rho < 1 \\ \lambda_2 &= -\frac{1+\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho} < 0, \forall \rho \end{aligned}$$

Damit haben wir als Endresultat:

Satz

Der Nullpunkt ist eine Senke für $\rho < 1$ und ein Sattelpunkt für $\rho > 1$.



Links Orbite einer Punktwolke für $\rho = 0.93$ und rechts die entsprechenden Orbite für $\rho = 2.04$. Sie bewegen sich zuerst in Richtung Nullpunkt, aber dann von ihm weg. Das Koordinatensystem ist rot eingezeichnet und der Nullpunkt entsprechend sichtbar.

Weitere Gleichgewichtslagen

Für $\rho > 1$ hat man neben dem Nullpunkt zwei weitere Gleichgewichtslagen, wie wir früher gesehen haben, nämlich

$$C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Für $\varrho = 1$ fallen diese mit dem Nullpunkt zusammen. Wir wollen diese Gleichgewichtslagen näher untersuchen.

2.5 Pitchfork- und Hopf Bifurkation

Wenn ϱ grösser als 1 wird, wird der Nullpunkt zu einem Sattelpunkt und es entstehen zwei neue Gleichgewichtslagen C^\pm . Im Folgenden ist immer $\varrho > 1$.

Das ursprüngliche Gleichungssystem hat die zugehörige Jacobi Matrix

$$\mathfrak{J}_f = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \varrho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

Und an den Stellen $C^\pm = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} \\ \varrho-1 \end{pmatrix}$ wird diese:

$$\mathfrak{J}_f(C^\pm) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\varrho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

Um die Wirkung der Abbildung $A := \mathfrak{J}_f(C^\pm): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu untersuchen, suchen wir wieder die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A . In einer Übung wird gezeigt, dass das zugehörige charakteristische Polynom für beide Gleichgewichtslagen C^\pm lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \varrho)\lambda + 2\sigma\beta(\varrho - 1)$$

Die gesuchten Werte von λ sind die Nullstellen dieses Polynoms.

Um das Polynom weiter zu untersuchen, setzen wir

$$\begin{cases} a = \sigma + \beta + 1 = \frac{41}{3} \\ b = \beta(\sigma + \varrho) = \frac{8}{3}(\varrho + 10) \\ c = 2\sigma\beta(\varrho - 1) = \frac{160}{3}(\varrho - 1) \end{cases}$$

Und haben:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Da der Grad des Polynoms ungerade ist, gibt es mindestens eine reelle Nullstelle. Da sämtliche Koeffizienten des Polynoms positiv sind ($\varrho > 1$), muss *diese reelle Nullstelle negativ sein*.

Wenn diese Nullstelle λ_1 und der zugehörige Eigenvektor \vec{e}_1 ist, dann können wir für einen Startpunkt \vec{x} in der Nähe einer Gleichgewichtslage, z.B. C^+ mit Ortsvektor \vec{c}^+ schreiben:

$$\vec{x} = \vec{c}^+ + h \vec{e}_1$$

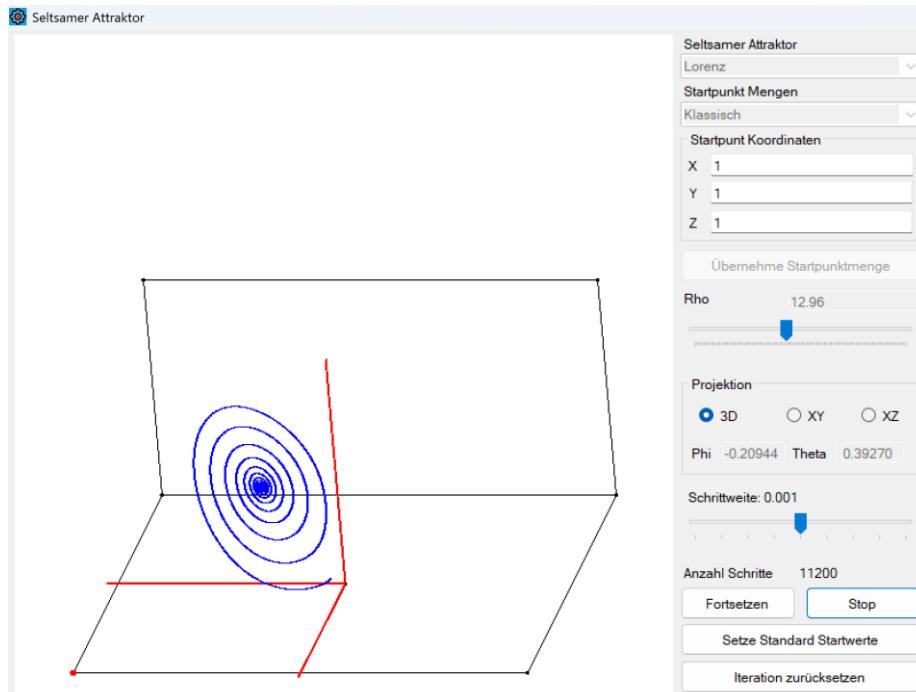
Für ein kleines $h \in \mathbb{R}$. Dann lautet die Abbildungsgleichung:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} = A\vec{c}^+ + hA\vec{e}_1 = \vec{0} + h\lambda_1\vec{e}_1$$

Und wir haben als Lösung: $\vec{x}(t) = hCe^{\lambda_1 t}, C \in \mathbb{R}$. Für $\lambda_1 < 0$ und wachsendes t konvergiert der Startpunkt gegen die Gleichgewichtslage C^+ .

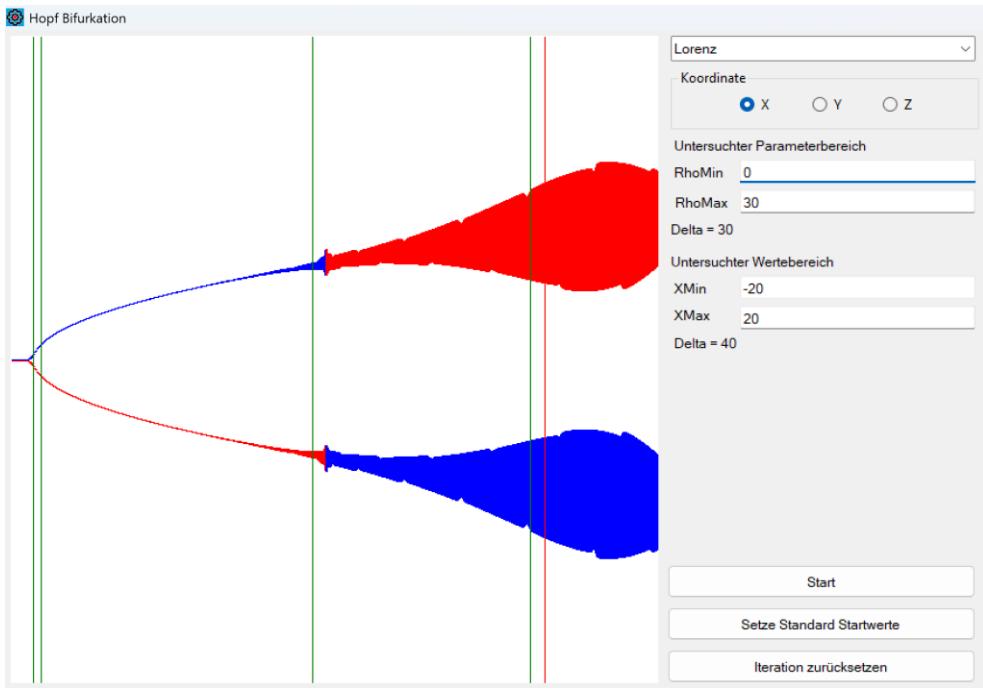
Dasselbe gilt für eine komplexe Nullstelle $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ mit negativem Realteil $\alpha < 0$. Dann ist $\vec{x}(t) = hCe^{\lambda_1 t} = hCe^{\alpha t}(\cos(\beta t) \pm i\sin(\beta t))$.

Das heisst, in Richtung des zugehörigen Eigenvektors ist *die Abbildung kontrahierend*. Es gibt immer eine solche Richtung, da es immer mindestens einen negativen reellen Eigenwert gibt, und das erklärt, warum die Orbits in eine Ebene senkrecht zum zugehörigen Eigenvektor «flachgedrückt» werden.



«Flachgedrückter» Orbit der sich in eine Ebene einpendelt

An der Stelle $\rho = 1$ findet bei wachsendem ρ eine sogenannte *Pitchfork* (oder *Heugabel*) Bifurkation statt. Wie beim Feigenbaum-Diagramm wird der frühere attraktive Fixpunkt Null repulsiv. Er spaltet sich aber nicht in einen attraktiven 2-Zyklus auf, sondern in die zwei (getrennt) attraktiven Punkte C^\pm . Im «Simulator» sieht man dies, wenn man im Fenster für die Hopf-Bifurkation das entsprechende Diagramm erzeugt.



Horizontal: ϱ variiert. Vertikal: Die Werte des Parameters x werden geplottet.

Im Diagramm kann man wählen, welchen Parameter man vertikal plottet, wenn ϱ entlang der horizontalen Achse wächst. Die vertikalen Linien markieren interessante Werte von ϱ . Die erste Linie zeigt $\varrho = 1$, wo der Nullpunkt instabil wird und sich in die stabilen Gleichgewichtslagen C^\pm aufspaltet.

Um das Polynom weiter zu untersuchen und zu vereinfachen, wenden wir eine übliche Transformation $\mu := \lambda + \frac{a}{3}$ an. Das Polynom lautet dann:

$$\left(\mu - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(\mu - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\mu - \frac{a}{3}\right) + c = \mu^3 + p\mu + q$$

Mit

$$\begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} = \frac{8}{3}\varrho - \frac{961}{27} \approx \frac{8}{3}\varrho - 35.5926 \\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{1112}{27}\varrho + \frac{10402}{27^2} \approx 41.1852\varrho + 14.2689 \end{cases}$$

Wie eine einfache Nachrechnung zeigt.

Und es gilt:

$$p_\lambda(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Leftrightarrow p_\mu(\mu) = \mu^3 + p\mu + q = 0$$

Für die Nullstellen des transformierten Polynoms gibt es die Formeln von Gerolamo Cardano (1501 – 1576). Wir wollen diese nicht explizit berechnen, sondern lediglich deren Charakter untersuchen. Gemäss den Cardanischen Formeln bestimmt man die sogenannte Determinante:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \approx 0.7023\varrho^3 + 395.9327\varrho^2 + 669.1938\varrho - 1619.0954$$

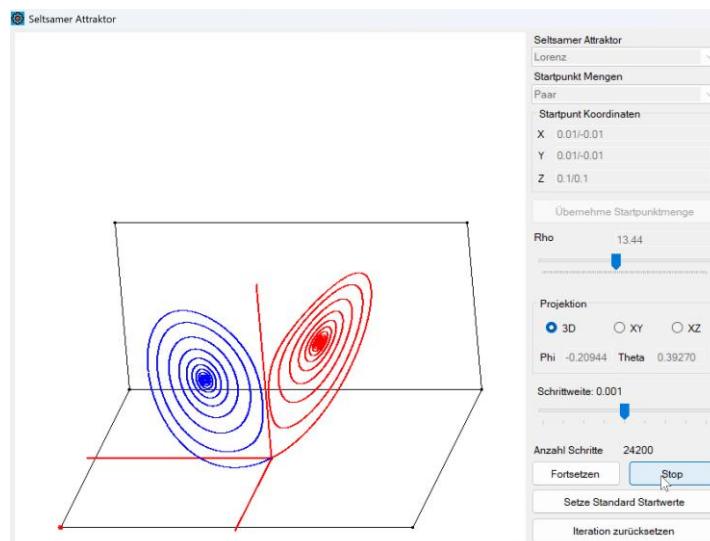
Nun gilt die folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{cases} D > 0: \text{Es gibt eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen} \\ D = 0 \text{ und } p = 0: \text{Dieser Fall tritt hier nicht auf} \\ D = 0 \text{ und } p \neq 0: \text{Es gibt zwei reelle Lösungen} \\ D < 0: \text{Es gibt drei reelle Lösungen} \end{cases}$$

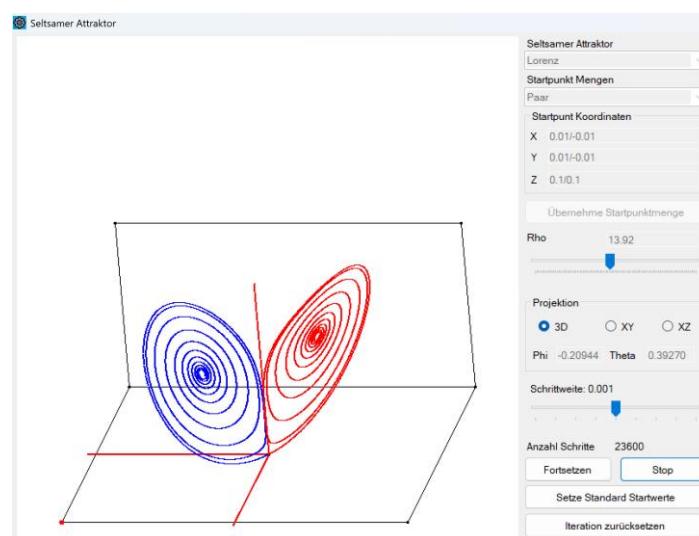
Für $\varrho = 1$ ist $D < 0$. $D(\varrho)$ ist monoton wachsend. Wie man nachprüfen kann, ist $D = 0$ für $\varrho = 1.346 \dots$ Also gibt es im Intervall $\varrho \in [1, 1.346 \dots]$ drei verschiedene reelle Nullstellen bzw. Eigenwerte, welche alle negativ sind. Somit sind C^\pm für ϱ in diesem Bereich attraktive Gleichgewichtslagen. Diese liegen aber so nahe bei Null, dass sie im «Simulator» nicht sichtbar sind.

Den Fall $D = 0$ und $p \neq 0$ untersuchen wir nicht weiter. Wir haben dann zwei reelle Nullstellen und eine davon ist eine doppelte Nullstelle.

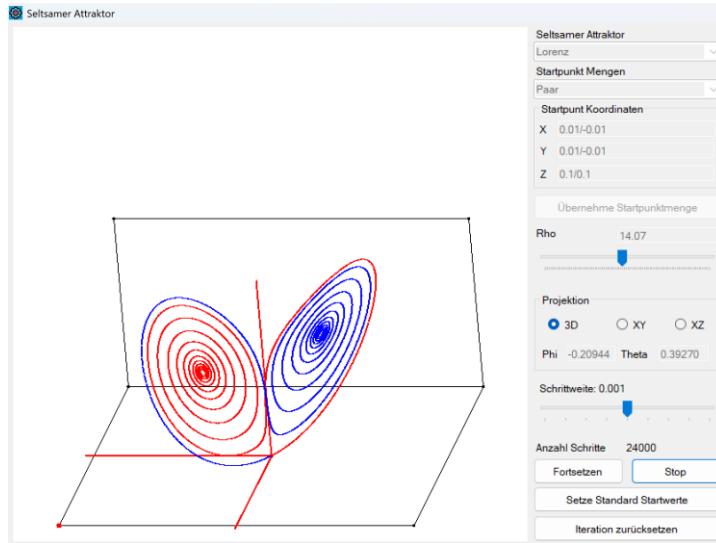
Wenn ϱ weiter wächst, wird $D > 0$. Dann gibt es eine reelle Nullstelle von p_μ , nennen wir sie μ_1 . Diese ist nicht zwingend negativ, denn nur das zugehörige $\lambda_1 = \mu_1 + a/3$ ist zwingend negativ. Ferner gibt es für $D > 0$ zwei konjugiert komplexe Nullstellen.



Stabile Gleichgewichtslagen für $\varrho = 13.44$



Wenn sich ϱ dem Wert 13.926 nähert, berühren sich die Orbits fast



Für $\rho > 13.926$ laufen dieselben Startpunkte zum jeweils anderen Fixpunkt

Nun untersuchen wir den Fall $D > 0$ weiter und definieren:

$$\begin{cases} u := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \\ v := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \end{cases}$$

Die Formeln von Cardano für die gesuchten Nullstellen $\mu_{1,2,3}$ lauten in diesem Fall:

$$\begin{cases} \mu_1 = u + v \\ \mu_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \end{cases}$$

Beispiel $\rho = 20$

Man erhält:

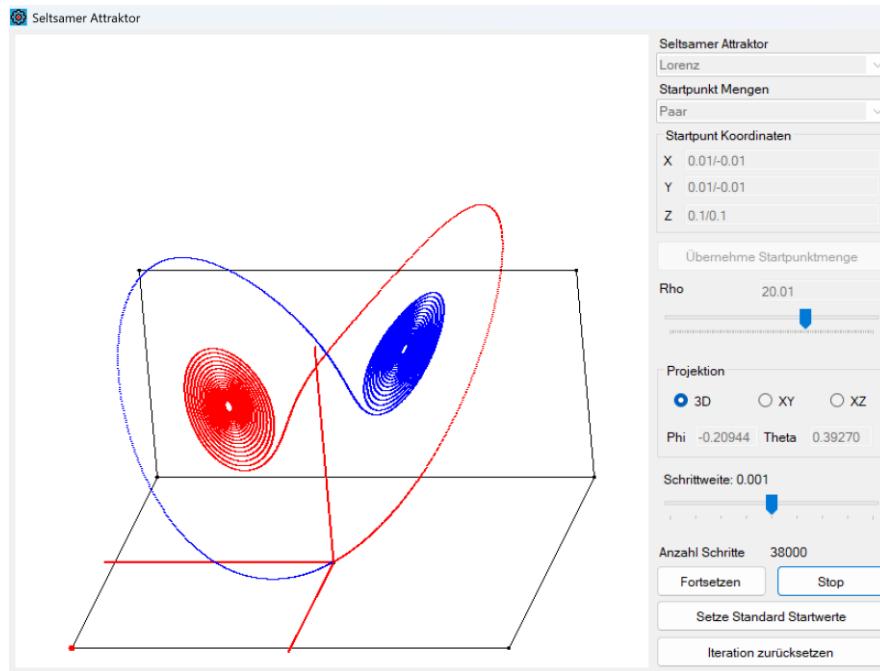
$$q(20) = 837.9729, D(20) = 175705.3602, \sqrt{D(20)} = 419.1722, u = 0.5705, v = -9.4285$$

$$\begin{cases} \mu_1 = -8.8580 \\ \mu_{2,3} = 4.4290 \pm 8.6594i \end{cases}$$

Nach der Rücktransformation erhalten wir:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -13.4136 \\ \lambda_{2,3} = -0.1266 \pm 8.6594i \end{cases}$$

Das heisst, die Gleichgewichtslagen C^\pm sind stabil. Die Abbildung ist in Richtung der Eigenvektoren kontrahierend.



$$\rho = 20.01: C^\pm \text{ sind attraktiv}$$

Beispiel $\rho = 28$

Man erhält:

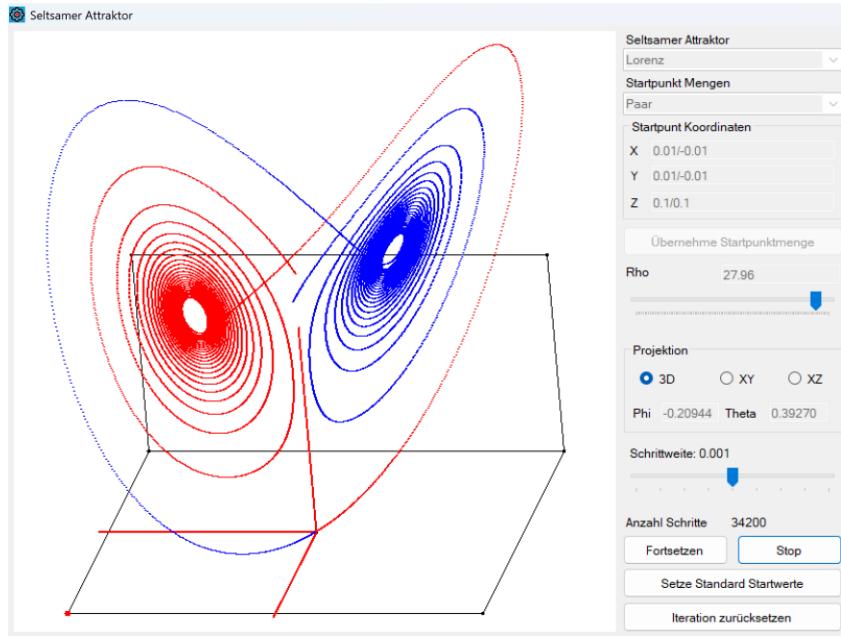
$$q(28) = 1167.4545, D(28) = 342946.4574, \sqrt{D(28)} = 585.6163, u = 1.2362, v = -10.5353$$

$$\begin{cases} \mu_1 = -9.2991 \\ \mu_{2,3} = 4.6496 \pm 10.1944i \end{cases}$$

Nach der Rücktransformation erhalten wir:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -13.8546 \\ \lambda_{2,3} = 0.0940 \pm 10.1944i \end{cases}$$

Das heisst, die Gleichgewichtslagen C^\pm sind instabil. Die Abbildung ist in Richtung des ersten Eigenvektors kontrahierend, aber in Richtung der beiden anderen dilatierend.



$\varrho = 27.96$: Die Orbits bewegen sich von C^\pm weg

Die Frage ist jetzt, wo ist dieser «Kippunkt», für den C^\pm instabil wird. Das ist beim Übergang, wenn der Realteil der komplexen Nullstelle von negativ zu positiv übergeht. Am kritischen Punkt ist der Realteil Null, das heisst, die komplexen Nullstellen sind rein imaginär.

Wir müssten also folgende Gleichung nach ϱ auflösen:

$$Re(\lambda_2) = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{a}{3} = 0$$

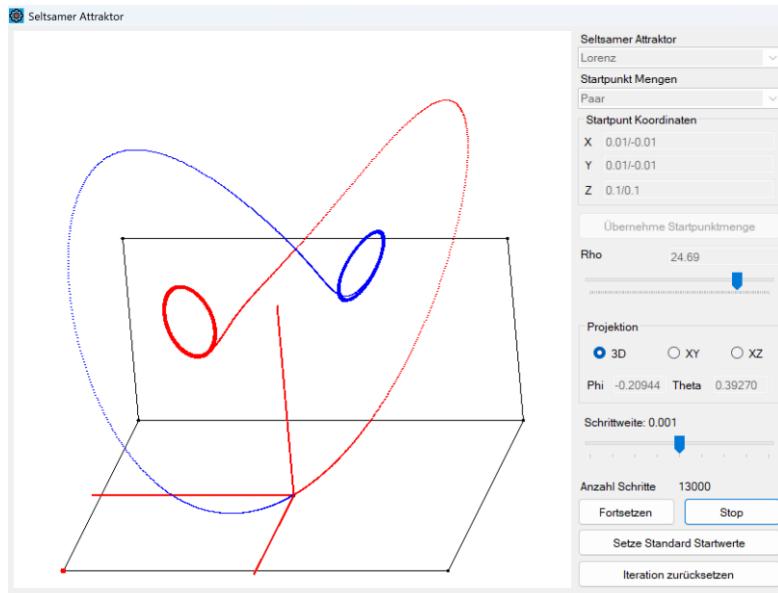
Das scheint aufwendig, da in diesem Ausdruck kubische und quadratische Wurzeln stecken und die Variable ϱ in der Determinante D in der Form eines Polynoms dritten Grades steckt. Wir versuchen es lieber mit einem Ansatz $\lambda_2 = i\eta$ und machen einen Koeffizientenvergleich. Es ist:

$$p_\lambda(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Also

$$\begin{aligned} p_\lambda(\lambda_2) &= -i\eta^3 - a\eta^2 + bi\eta + c = 0 \\ \Rightarrow i\eta(-\eta^2 + b) &= 0 \text{ und } -a\eta^2 + c = 0 \\ \Rightarrow \eta^2 &= b \text{ und } \eta^2 = \frac{c}{a} \\ \Rightarrow ab &= c \\ \Rightarrow \frac{41}{3} \cdot \frac{8}{3}(\varrho + 10) &= \frac{160}{3}(\varrho - 1) \end{aligned}$$

Das liefert die Lösung $\varrho \approx 24.7368$



$\varrho = 24.69$: Die Orbits verharren je fast auf einem stabilen Kreis um C^\pm

An dieser Stelle werden die Gleichgewichtslagen C^\pm in der Ebene senkrecht zum Eigenvektor, welcher zum (negativen) reellen Eigenwert gehört, indifferent. Die Iteration bewegt sich auf einem Kreis rund um die jeweilige Gleichgewichtslage. Wenn ϱ weiter wächst, werden die Gleichgewichtslagen in dieser Ebene repulsiv. Es entstehen aber keine anderen neuen attraktiven Gleichgewichtslagen, sondern die Orbits nähern sich einer kompliziert aussehenden Menge, dem Lorenz-Attraktor, welchen man einen *seltsamen Attraktor* nennt. Man nennt das Verhalten der Dynamik an den Gleichgewichtslagen C^\pm beim Übergang von $\varrho < 24.7368$ nach $\varrho > 24.7368$ eine *Hopf-Bifurkation* nach dem Mathematiker Eberhard Hopf (1903 – 1983).

2.6 Projektion des Lorenz-Attraktors

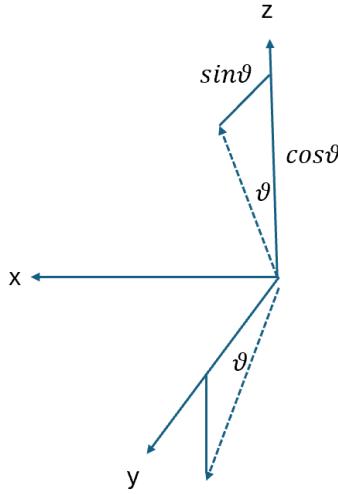
Im «Simulator» haben wir eine zweidimensionale Darstellung des Lorenz-Attraktors. Damit wir verschiedene Ansichten des Attraktors gewinnen, kann man mit der Maus das dreidimensionale Koordinatensystem drehen.

Wenn die Maus vertikal bewegt wird, bewirkt dies eine Drehung des Koordinatensystems um die x-Achse und einen Winkel ϑ , der proportional zur Mausposition wächst oder fällt, aber immer im Bereich $[0.01, 1]$ bleibt (im Bogenmass).

Wenn die Maus horizontal bewegt wird, bewirkt dies eine Drehung um die z-Achse und einen Winkel φ , der ebenfalls proportional zur Mausposition wächst oder fällt, aber immer im Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bleibt.

Wenn $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ein beliebiger Punkt im Raum ist, muss dieser Punkt mitgedreht werden. Dazu müssen wir die entsprechende lineare Abbildung finden. Im Abschnitt über lineare Abbildungen haben wir gesehen, dass diese durch die Bilder der Basisvektoren definiert wird. Diese stehen in den Kolumnen der Abbildungsmatrix.

Betrachten wir zuerst die Drehung um die x-Achse:



Drehung um die x-Achse und den Winkel ϑ

Der ersten Basisvektor (in Richtung x-Achse) bleibt invariant. Der zweite Basisvektor (in Richtung y-Achse) geht über in $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$ und der dritte Basisvektor geht über in $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Somit hat die Drehung um die x-Achse die Matrix:

$$D_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Mit einer analogen Skizze kann man zeigen, dass eine Drehung um die z-Achse und den Winkel φ die Matrix hat:

$$D_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wenn wir beide Drehungen hintereinander ausführen, erhalten wir:

$$D_z(\varphi) \circ D_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cos\vartheta & -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi & \cos\varphi \cos\vartheta & \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Wenn im «Simulator» die Option «Projektion 3D» gewählt wird,



Projektion 3D

Kann mit der Maus das dreidimensionale Koordinatensystem justiert werden. Die Winkel φ und ϑ werden dann angezeigt. Wird jetzt der Orbit eines Startpunktes berechnet, wird jeder Punkt auf dem Orbit nach der Berechnung mit Hilfe obiger Matrix gedreht.

Anschliessend wird der Punkt in die Ebene $y = 1$ projiziert.

```
'Projection to plane y = 1, and the x-direction is inverted
Dim PlanePoint = New ClsMathpoint With {
    .X = -RotatedPoint.X,
    .Y = RotatedPoint.Z
}
```

Wobei im Diagramm die y-Achse nach oben zeigt, also die Rolle der dreidimensionalen z-Achse übernimmt.

Alternativ steht im «Simulator» die Projektion eines Orbits in die xy-Ebene oder xz-Ebene zur Verfügung. Dann erfolgt keine vorhergehende Drehung. Damit der (seltsame) Attraktor optimal sichtbar ist, kann für jedes dynamische System noch eine Korrektur definiert werden, welche die y-Koordinate vertikal schiebt.

2.7 Seltsame Attraktoren

Hier ist eine Bemerkung zum Begriff des seltsamen Attraktors angebracht. Der Lorenz-Attraktor wird auch «seltsamer» Attraktor genannt. Wir haben festgestellt, dass wir bei einfachen Systemen wie dem logistischen Wachstum entweder Fixpunkte oder Zyklen als Attraktoren hatten. Beim Lorenz-System scheint aber eine Punktmenge im Phasenraum attraktiv zu sein. Diese Punktmenge erscheint als Endzustand des Lorenz-Systems: Ein beliebiger Startpunkt innerhalb des definierten Bereichs des Phasenraumes füllt mit seinem Orbit allmählich die ganze Punktmenge des Attraktors auf, falls das Verhalten chaotisch ist, also wenn $\rho > 24.7368$.

Man muss hier also die Definition eines Attraktors aus dem eindimensionalen Fall verallgemeinern. Eine präzise mathematische Definition eines seltsamen Attraktors findet man in [3]. Hier wollen wir die Idee der Definition am Beispiel des Lorenz-Attraktors skizzieren.

Zuerst muss die Punktmenge, die zum Attraktor gehört, invariant sein. Das heisst, Punkte, welche einmal in dieser Menge gelandet sind, sollen sich nicht mehr aus der Menge herausbewegen. Dann sollen Punktmengen, welche in der Nähe des Attraktors liegen, von diesem «angezogen» werden. Damit können wir die Definition für eine attraktive Punktmenge so ausdrücken:

Definition

Sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, und A eine abgeschlossene Teilmenge von X , die unter f invariant ist. Also: $f(A) \subseteq A$. A heisst *attraktiv*, falls eine Umgebung U von A existiert mit der Eigenschaft: Für jede (noch so kleine) Umgebung V von A gilt: $f^n(U) \subset V$ für hinreichend grosses $n \in \mathbb{N}$. \square

Alle Punkte aus U kommen also im Laufe der Iteration der Menge A beliebig nahe.

Nun heisst das noch nicht, dass eine attraktive Punktmenge chaotisches Verhalten oder so etwas wie Sensitivität und Transitivität hat. Für die Transitivität sollten die Punkte in der Umgebung von A oder A selbst beliebig «durchmischt» werden. Wir definieren deshalb:

Definition

Sei (X, f) ein diskretes dynamisches System, und A eine f -invariante Teilmenge von X . f heisst *topologisch transitiv* auf A , wenn es für jedes Paar offener Mengen $\emptyset \neq U, V \subset A$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Im eindimensionalen Fall haben wir für die Transitivität verlangt, dass man im Laufe der Iteration aus der Nähe jedes Startpunktes in die Nähe von jedem beliebigen Zielpunkt kommt. Hier ersetzt U die

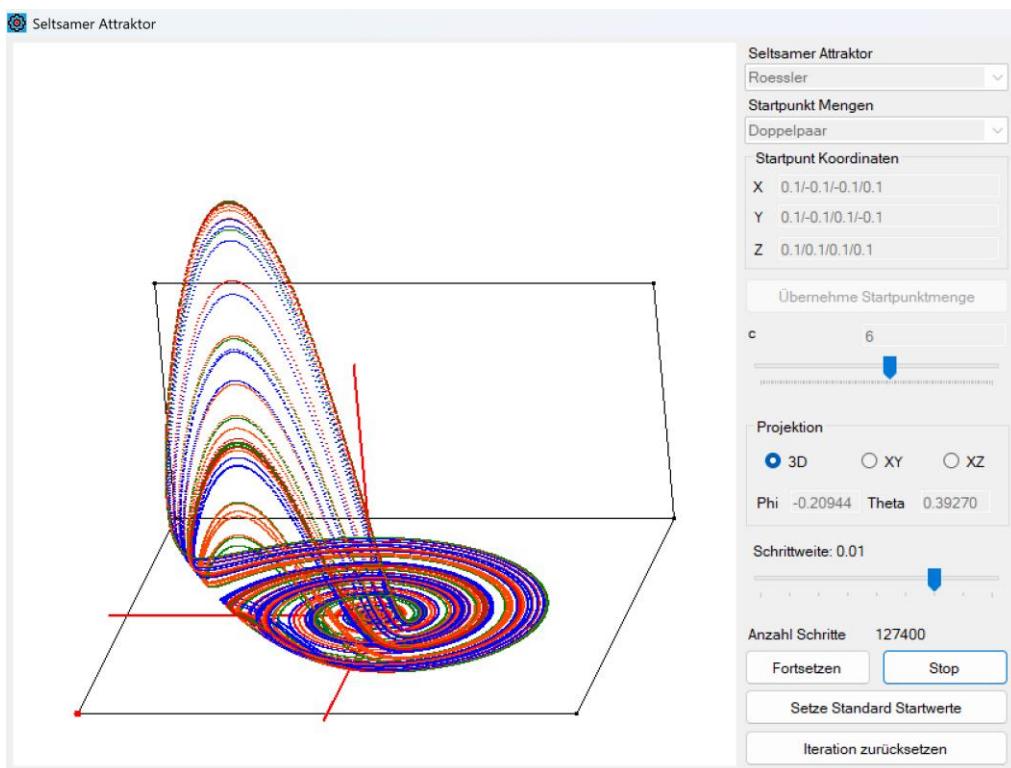
Rolle des Startpunktes und V die Rolle des Zielpunktes. Wenn ich also U beliebig wähle und genügend lange iteriere, dann wird sich $f^n(U)$ mit jeder beliebig vorgegebenen Zielmenge V schneiden.

Wenn nun eine f -invariante Teilmenge $A \subset X$ attraktiv und gleichzeitig topologisch transitiv ist, dann verhält sie sich auch sensitiv gegenüber Anfangsbedingungen. In diesem Fall nennt man A einen *seltsamen Attraktor*.

Im «Simulator» sind neben dem Lorenz-Attraktor zwei weitere seltsame Attraktor implementiert. Der erste ist der sogenannte *Roessler-Attraktor*, benannt nach dem Biochemiker und Chaosforscher Otto Rössler (1940 -) benannt. Das Roessler-System wird definiert durch das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + xz - cz \end{cases}$$

Wobei $a = b = 0.2$ gewählt wird und $c \in [1,10]$. Für $c > 2$ hat man chaotisches Verhalten.

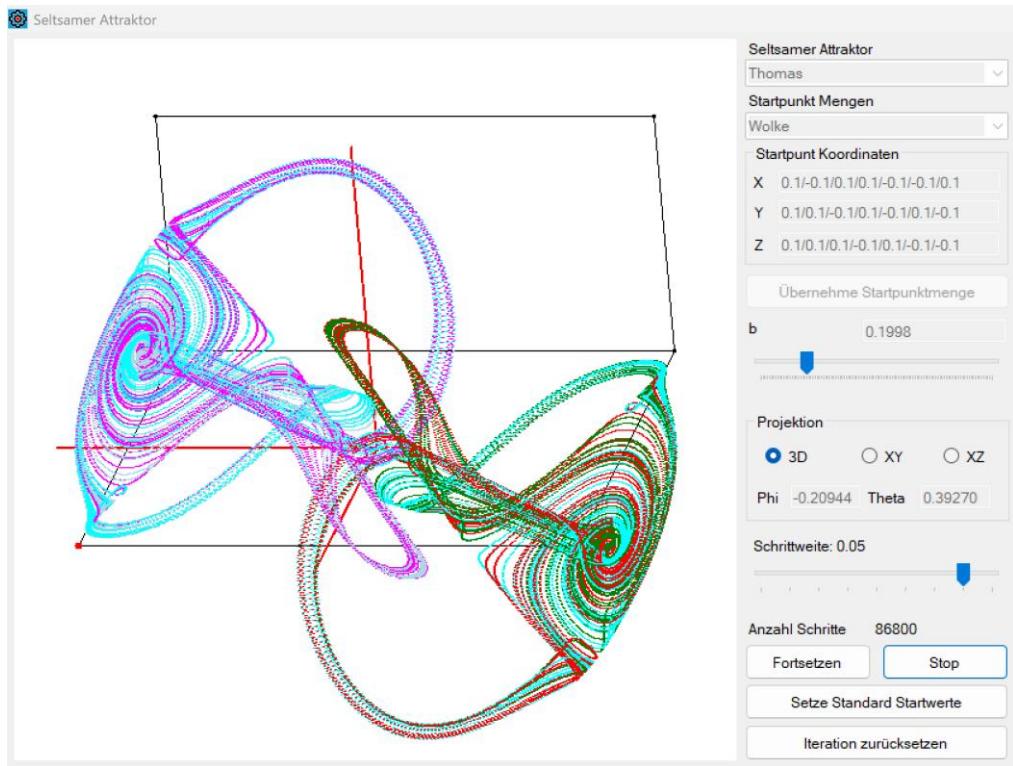


Der Roessler-Attraktor für $c = 6$

Ein weiterer implementierter Attraktor ist der *Thomas-Attraktor*. Er ist benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker René Thomas (1928 – 2017). Das System wurde von ihm für die Modellierung von Rückkopplungsmechanismen in biologischen Netzwerken vorgeschlagen. Das System ist definiert durch das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y - bx \\ \dot{y} = \sin z - by \\ \dot{z} = \sin x - bz \end{cases}$$

Dabei ist der Parameter $b \in]0,1]$ und zeigt für $b < 0.215$ chaotisches Verhalten.



Der Thomas Attraktor für $b = 0.1998$

2.8 Numerische Lösung mit dem Runge Kutta-Verfahren

Implementiert sind im «Simulator» die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das Lorenz-System, der Roessler und der Thomas Attraktor. Die lineare Abbildung kann für jeden Iterationsschritt direkt angewendet werden. Bei den anderen Attraktoren muss aber ein Differentialgleichungssystem durch ein Runge-Kutta Verfahren angenähert werden.

Wir führen für das Runge Kutta-Verfahren die Parameter (u, v, w) ein. In allen Fällen für das Lorenz-System, den Roessler-Attraktor und den Thomas-Attraktor können wir schreiben:

$$\begin{cases} \dot{u} = F(u, v, w) \\ \dot{v} = G(u, v, w) \\ \dot{w} = H(u, v, w) \end{cases}$$

Das entsprechende vierstufige Runge Kutta-Verfahren startet dann mit:

$$\begin{cases} k_1 = F(u, v, w) \\ l_1 = G(u, v, w) \\ m_1 = H(u, v, w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = F\left(u + \frac{h}{2}k_1, v + \frac{h}{2}l_1, w + \frac{h}{2}m_1\right) \\ l_2 = G\left(u + \frac{h}{2}k_1, v + \frac{h}{2}l_1, w + \frac{h}{2}m_1\right) \\ m_2 = H\left(u + \frac{h}{2}k_1, v + \frac{h}{2}l_1, w + \frac{h}{2}m_1\right) \end{cases}$$

Wobei h die Schrittweite des Verfahrens ist. Man setzt dann weiter:

$$\begin{cases} k_3 = F(u + \frac{h}{2}k_2, v + \frac{h}{2}l_2, w + \frac{h}{2}m_2) \\ l_3 = G(u + \frac{h}{2}k_2, v + \frac{h}{2}l_2, w + \frac{h}{2}m_2) \\ m_3 = H(u + \frac{h}{2}k_2, v + \frac{h}{2}l_2, w + \frac{h}{2}m_2) \end{cases}$$

Und

$$\begin{cases} k_4 = F(u + hk_3, v + hl_3, w + hm_3) \\ l_4 = G(u + hk_3, v + hl_3, w + hm_3) \\ m_4 = H(u + hk_3, v + hl_3, w + hm_3) \end{cases}$$

Als Resultat dieses Iterationsschrittes setzt man als nächsten Wert für die Parameter (u, v, w) :

$$\begin{cases} u = h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\ v = h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6 \\ w = h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)/6 \end{cases}$$

2.9 Übungsbeispiele

1. Gegeben ist im Raum \mathbb{R}^3 eine Punktspiegelung am Nullpunkt. Zeige, dass diese Abbildung linear ist und bestimme die zugehörige Abbildungsmatrix.
2. Gegeben ist im Raum \mathbb{R}^3 eine Drehung um die z-Achse und den Winkel φ . Zeige, dass diese Abbildung linear ist und bestimme die zugehörige Abbildungsmatrix.
3. Bestimme den Kern der Abbildung $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
4. Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass der *Kern A* mit $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ von $\vec{0}$ verschieden ist.
5. Sei $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Beweise: Dann ist der Kern von A entweder der Nullpunkt, eine Gerade durch den Nullpunkt, eine Ebene durch den Nullpunkt oder der ganze Raum.
6. Gegeben ist die Abbildung $A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$. Bestimme deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Diskutiere das Verhalten der Abbildung in der Nähe des Nullpunktes.
7. Betrachte das Lorenz-System mit dem Nullpunkt als Fixpunkt. Untersuche verschiedene Wege zum Nullpunkt und unter welchen Bedingungen der Nullpunkt attraktiv ist.
8. Gegeben ist die Abbildung

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\varrho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\varrho-1)} & -\beta \end{bmatrix}$$

an der Stelle der Gleichgewichtslagen C^\pm für das Lorenz-System. Wir suchen Eigenwerte λ

und Eigenvektoren \vec{e} , so dass gilt: $A\vec{e} = \lambda\vec{e}$. Zeige, dass die Bedingung für deren Existenz gegeben ist durch: $p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \varrho)\lambda + 2\sigma\beta(\varrho - 1) = 0$.

9. Untersuche die Nullstellen des transformierten charakteristischen Polynoms des Lorenz-Systems $p(\mu) = \mu^3 + p\mu + q$ für $\varrho > 1$ mit Hilfe der Formeln von Cardano. Erstelle dazu eine Excel Tabelle für die Berechnungen der Nullstellen, wenn verschiedene Werte von ϱ eingegeben werden. Berechne dann die ursprünglichen Eigenwerte $\lambda = \mu + a/3$ und diskutiere die Stabilität.
10. Überprüfe, dass beim Lorenz-System für $\varrho = 24.7368$ der Realteil der komplexen Nullstelle von $p_\lambda(\lambda)$, also der Ausdruck $-\frac{1}{2}(u + v) + \frac{a}{3} \approx 0$ wird.
11. Untersuche den Roessler-Attraktor hinsichtlich Fixpunkte und deren Eigenschaften.
12. Untersuche den Thomas-Attraktor hinsichtlich Fixpunkte und deren Eigenschaften.
13. Beweise: Wenn man den Raum so dreht, dass der Nullpunkt fix bleibt, dann gibt es immer auch eine Achse durch den Nullpunkt, welche fix bleibt.

3. Fraktale Mengen

3.1 Lindenmayer Systeme

Lindenmayer-Systeme (oder L-Systeme) werden nach dem ungarischen Biologen Aristid Lindenmayer (1925 – 1989) genannt, welcher diese für eine axiomatische Theorie biologischer Systeme entwickelte. Wir wollen hier keine abstrakte Definition dieser Systeme geben, sondern sie so beschreiben, wie sie im «Simulator» gebraucht werden.

Ein L-System besteht aus:

- a) Einem *Alphabet* \mathcal{A} . Das ist eine endliche Menge von Zeichen. Im Falle des «Simulator» ist:
$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, \dots, X, Y, Z, f, g, +, -, (,), [], 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
- b) Einem *Axiom* ω . ω ist entweder ein einzelnes Element von \mathcal{A} oder eine Zeichenkette (aus in der Regel wenigen Zeichen), die mit Elementen aus \mathcal{A} gebildet wird.
- c) Einer Liste von Ersatzregeln. Das sind Abbildungen, welche einem Element aus \mathcal{A} (der Quelle) eine Zeichenkette (das Ziel) zuordnet, welche aus Elementen von \mathcal{A} gebildet wird.
- d) Bei einem Iterationsschritt wird dann die Quelle durch das Ziel ersetzt. Dadurch entsteht durch fortlaufende Iteration eine immer längere Zeichenkette. (Wir verwenden auch «String» als Synonym zu «Zeichenkette».)

\mathcal{A} sei im Folgenden immer obiges Alphabet, welches beim «Simulator» verwendet wird.

Beispiel

\mathcal{A} wie oben. $\omega = F$. Ersatzregel: $F \rightarrow F - F + +F - F$

Mit Hilfe der Ersatzregeln wird nun rekursiv ein immer längerer String gebildet, wobei mit dem Axiom gestartet wird. Im Beispiel führt das iterativ zu folgenden Strings in den ersten drei Schritten;

F

$F - F + +F - F$

$F - F + +F - F - F + +F - F + +F - F + +F - F - F - F + +F - F$

Wichtig sind noch folgende Bemerkungen zu den Ersatzregeln:

1. Die Anwendung der Ersatzregeln ist *nicht «distributiv»*. Wenn sie z.B. lautet $X \rightarrow F + F$ mit dem Axiom FX , dann lautet der erste String $FF + F$ und nicht $F(F + F) = FF + FF$.
2. Der Ersatz von Symbolen erfolgt gleichzeitig und nicht hintereinander. Beispiel: Axiom YFX mit Ersatzregeln: $X \rightarrow FX + Y$, $Y \rightarrow X + FY$. Dann ist der erste erzeugte String: $X + FYFFX + Y$ und nicht in zwei Schritten (zuerst alle X ersetzen und dann alle Y)

$YFX \rightarrow YFFX + Y \rightarrow X + FYFFX + X + FY$

Das hat mit der wesentlich einfacheren seriellen Verarbeitung eines Strings zu tun. Für ein konkretes L-System müssen die Regeln entsprechend so formuliert werden, dass man dennoch das gewünschte Ergebnis erzielt.

3. Wenn die Ersatzregeln gleichzeitig angewendet werden, dann spielt ihre Reihenfolge keine Rolle. Beim Durchlaufen des zu ersetzenen Strings wird einfach jedes Mal auf die Regel zugegriffen, welche für das entsprechende Symbol gerade benötigt wird.

Die Schildkröte

Die Idee ist nun, dass diese Zeichenkette eine Schildkröte steuert, welche ihre Bahn aufzeichnet. Dabei sollen die Zeichen im Alphabet gewisse Aufgaben erfüllen, bzw. gewisse Befehle an die Schildkröte übergeben.

Zustand der Schildkröte

Die Schildkröte befindet sich nach jedem Schritt in einem Zustand, welcher auf folgenden Parametern besteht:

- Position in (x,y) Koordinaten
- Winkel relativ zur x-Achse. Der Gegenuhrzeigersinn ist die positive Drehrichtung
- aktuelle Zeichenfarbe
- Schrittlänge. Diese muss laufend verkürzt werden, je länger der steuernde String ist, damit die Bahn der Schildkröte noch im Diagramm Platz hat. Bei Kurven ohne Verzweigung macht es Sinn, die Schrittlänge bei jedem Iterationsschritt um einen konstanten Faktor zu verkleinern, also «Pro Iteration». Bei einer Baumstruktur macht es hingegen Sinn, die Schrittlänge um einen konstanten Faktor zu verkleinern, wenn ein neuer Zweig gezeichnet wird, also «Pro Zweig». Nach der Rückkehr zu seiner Wurzel wird wieder mit der ursprünglichen Schrittlänge weitergefahrene. Der Verkleinerungsfaktor wird global für das L-System eingegeben und entweder rechnerisch oder experimentell bestimmt.

Startposition

Die Koordinaten der Startposition werden für das L-System eingegeben. Beim Start ist die Schildkröte immer parallel zur x-Achse ausgerichtet, das heißt, der Startwinkel ist Null.

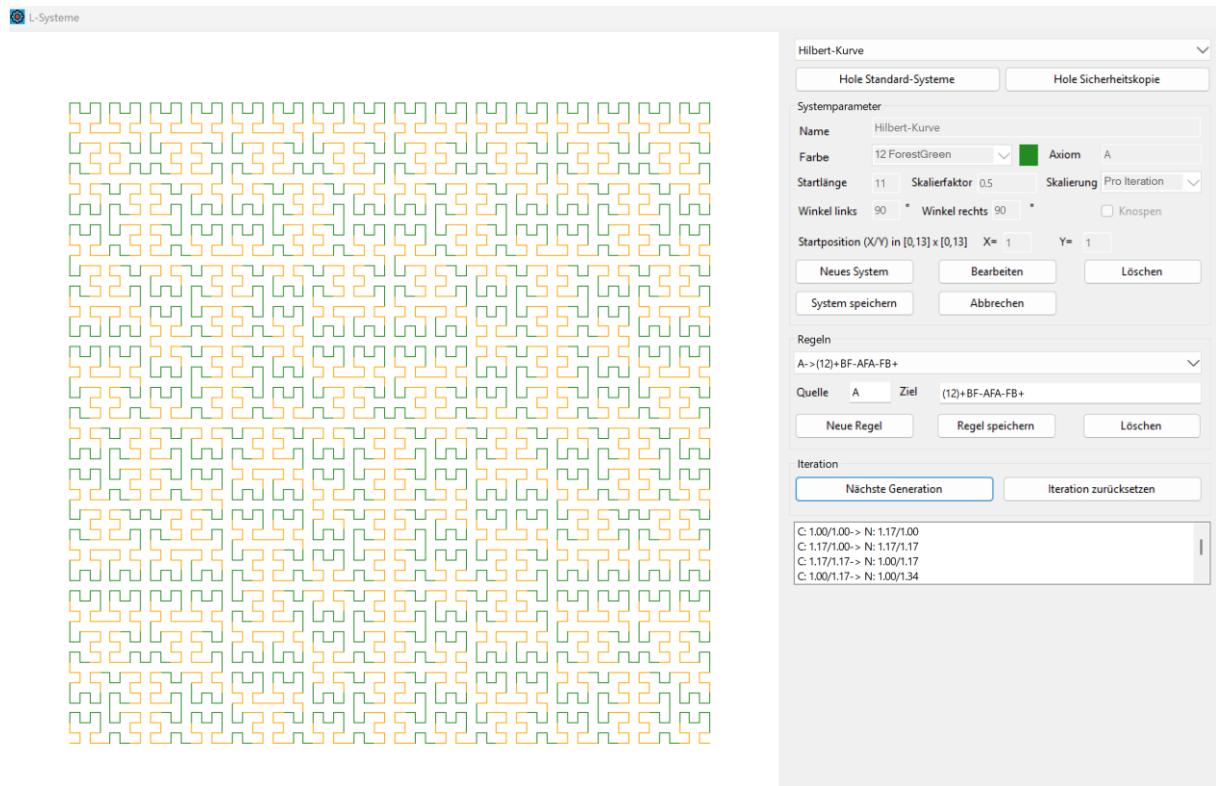
Anweisungen an die Schildkröte

«F», «G»: Mache einen Schritt vorwärts und zeichne deine Bahn auf. (Damit man flexibler ist in den Ersatzregeln, stehen hier zwei Zeichen zur Verfügung).

«f», «g»: Mache einen Schritt vorwärts, ohne deine Bahn aufzuzeichnen.

«+»: Drehe dich um einen fixen Winkel α im Gegenuhrzeigersinn.

- «-»: Drehe dich um einen fixen Winkel β im Uhrzeigersinn. Die Winkel α und β sind für jedes L-System global definiert und bleiben fix.
- (12): In runden Klammern werden die Farbcodes angegeben, in welcher die Bahn gezeichnet werden soll. Wenn die Schildkröte auf einen solchen Code trifft, zeichnet sie alle folgenden Schritte in dieser Farbe. Das heisst auch, dass zwischen runden Klammern nur natürliche Zahlen im Bereich 0 bis 25 stehen dürfen. Das sind die im «Simulator» angebotenen Farben. Wenn keine solchen Klammern auftreten, verwendet die Schildkröte eine global für jedes L-System definierte Farbe. Umgekehrt dürfen Zahlen nur in diesem Zusammenhang verwendet werden. Ohne runde Klammern treten keine Zahlen auf.
- «[]» Eckige Klammern markieren einen Zweig in einer Baumstruktur. [wird verwendet, um die Wurzel zu markieren. An dieser Stelle speichert die Schildkröte ihren Zustand und legt ihn in einen Stack ab. Das Ende des Zweiges wird mit] markiert. Dann holt die Schildkröte den letzten gespeicherten Zustand aus dem Stack und arbeitet dort weiter. Da der Stack ein FILO (=First in last out) Speicher ist, sind auch verschachtelte Strukturen möglich.
- {A, ..Z} Alle übrigen Grossbuchstaben ausser «F, G» haben keine Wirkung auf die Steuerung der Schildkröte. Sie dienen dazu, um grössere Strukturen zusammenzufassen und einer Ersatzregel für diesen Buchstaben wird die Struktur aufgeschlüsselt.



Beispiel: Hilbert-Kurve

Man erkennt im rechten oberen Bereich des Benutzeroberflächenfensters die Eingaben der globalen Parameter wie Startlänge, Skaliefaktor, Drehwinkel und Startposition. Weiter unten erkennt man eine Ersatzregel für das Axiom «A».

Für die Benutzung des obigen Fensters sei auf das Benutzerhandbuch verwiesen.

Viele Beispiele und schöne Animationen inklusive der Ersatzregeln findet man in [5].

3.2 Historischer Exkurs: Vom anschaulichen zum abstrakten Denken

Die L-Systeme, wie sie im vorliegenden Abschnitt beschrieben wurden, sind mehr als nur dekorative Fraktale – sie stehen exemplarisch für einen tiefgreifenden Wandel in der Geschichte der Mathematik. Im 19. Jahrhundert begann die Mathematik, sich von der rein anschaulichen Geometrie und der informellen Analysis zu einer streng axiomatisch begründeten Wissenschaft zu entwickeln. In dieser Zeit wurden zahlreiche grundlegende Fragen aufgeworfen, die das intuitive Verständnis von Raum, Funktion und Dimension radikal infrage stellten.

So stellte sich etwa die Frage, ob es Funktionen geben könne, die zwar überall stetig, aber dennoch nirgends differenzierbar sind – ein Widerspruch zum damaligen Empfinden von «glatten» Kurven. Karl Weierstraß beantwortete diese Frage 1872 mit der expliziten Konstruktion einer solchen Funktion.

Kurz darauf entdeckte man Kurven, die eine endliche Fläche vollständig ausfüllen, obwohl sie durch eine stetige Abbildung einer eindimensionalen Strecke erzeugt wurden – sogenannte raumfüllende Kurven, etwa von Peano (1890) oder Hilbert (1891). Diese Objekte widersprachen dem klassischen Verständnis der Dimension und führten zu einer Neubewertung grundlegender Begriffe wie «Länge», «Fläche» oder «Stetigkeit».

Auch in der Analysis wurden neue Fragen formuliert: Können überall unstetige Funktionen integrierbar sein? Wie verhalten sich unendliche Reihen bei nicht «glatten» Funktionen? Welche Arten von Konvergenz müssen unterschieden werden? Und wie geht man mit «pathologischen» Objekten wie sogenannte «Monsterkurven» um, die allen gewohnten Vorstellungen zu widersprechen scheinen, aber dennoch mathematisch korrekt definiert sind? Beispiele sind etwa Kurven, die sich selbst unendlich oft schneiden oder Funktionen, die in jedem Intervall beliebig viele Extrema besitzen.

Die Entstehung dieser sogenannten pathologischen Beispiele führte zur Entwicklung neuer Konzepte: verschiedene Konvergenzbegriffe, Maßtheorie, Mengenlehre, und schließlich zur Idee der fraktalen Geometrie – einem Begriff, der erst im 20. Jahrhundert von Benoît Mandelbrot geprägt wurde, aber seine Wurzeln tief in die Mathematik des 19. Jahrhunderts zurückverfolgen lässt.

In diesem Kontext sind L-Systeme zu verstehen: Sie erzeugen geometrische Objekte, die oft eine nicht-ganzzahlige fraktale Dimension besitzen, wie wir in einem späteren Abschnitt sehen werden. Sie stehen damit zwischen den klassischen Dimensionen. Ihre rekursive, formale Definition ist typisch für die moderne Mathematik, deren Objekte nicht mehr anschaulich sein müssen, sondern logisch konsistent und exakt definiert.

Die L-Systeme schlagen somit eine Brücke zwischen historischen Fragestellungen und moderner mathematischer Praxis. Sie demonstrieren auf anschauliche Weise, wie einfache Regeln zu komplexen Strukturen führen können – ein zentrales Thema der Mathematik seit dem 19. Jahrhundert.

In diesem Licht sind auch die im folgenden Abschnitt beschriebenen, implementierten L-Systeme zu verstehen.

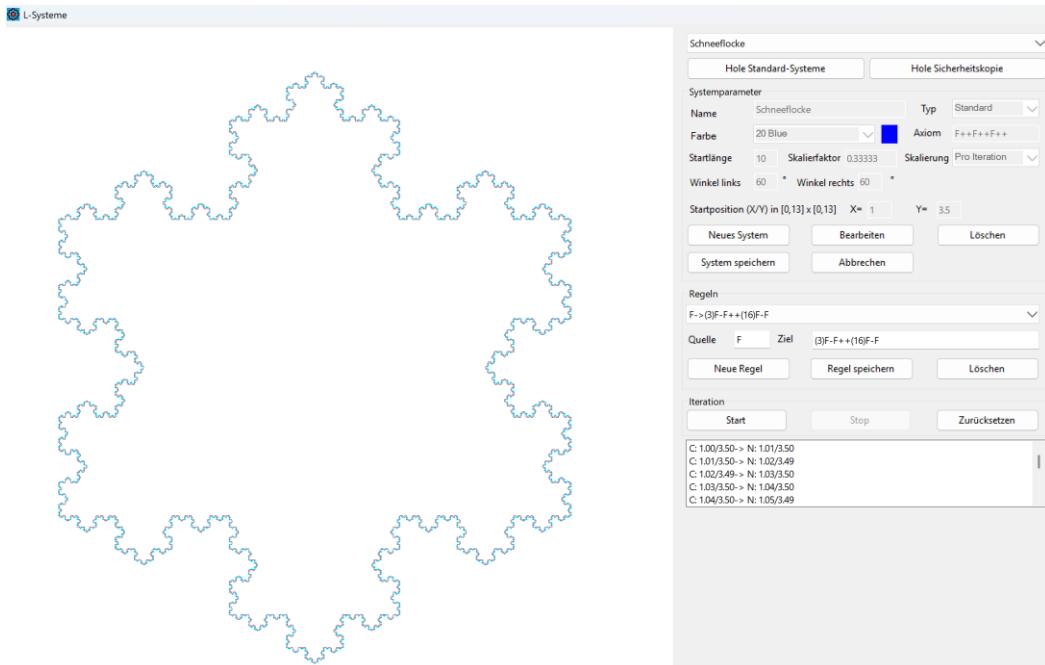
3.3 Die Koch Kurve (oder Schneeflockenkurve)

Eines der einfachsten L-Systeme ist die sogenannte Koch Kurve, Sie ist benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch (1870 – 1924). Es ist das Beispiel einer Kurve, die

- Innerhalb einer endlichen Fläche liegt, aber deren Länge unendlich gross ist

- Die überall stetig aber nirgends differenzierbar ist

Sie kann als L-System beschrieben werden und es gibt dafür verschiedene Varianten. Insbesondere baut die sogenannte Schneeflockenkurve auf der Koch-Kurve auf. Im Simulator ist diese Variante implementiert.



Schneeflocken-Kurve der sechsten Generation

Als Koch-Kurve wird oft nur die Kurve bezeichnet, wenn man als Axiom nur die Grundlinie eines Dreiecks nimmt und dann diese Strecke iterativ ersetzt. Man erhält dann als Kurve nur den untersten Teil obiger Figur. Wenn man als Ausgangsmenge ein gleichseitiges Dreieck wählt, spricht man von der Schneeflockenkurve.

Die globalen Parameter können aus dem rechten Bereich des obigen Benutzerfensters entnommen werden.

Axiom: $F + +F + +F + +$ (für die Koch-Kurve ist es F).

Mit diesem Axiom hat man ein Dreieck als Ausgangsmenge. Oft wird auch nur eine gerade Strecke als Ausgangsmenge genommen. Dann lautet das Axiom einfach *F*.

Ersatzregel (ohne Farbsteuerung): $F \rightarrow F - F + +F - F$

Das führt zu folgenden Zeichenketten in den ersten drei Generationen:

Schneeflocken-Kurve der ersten drei Generationen

Im «Simulator» ist die Länge des ersten Schrittes gleich zehn. Bei jedem Iterationsschritt wird die Schritt länge um einen Drittel verkleinert. Wenn das Ausgangsdreieck die unteren beiden Ecken A und B hat, bleibt die Distanz zwischen A und B bei jedem Iterationsschritt konstant. Somit liegt die Kochkurve im Umkreis des Ausgangsdreiecks, also innerhalb einer begrenzten Fläche.

Die Anzahl der Schritte wächst bei jedem Iterationsschritt um das Vierfache, aber die Schrittlänge nimmt nur um das Dreifache ab. Somit wächst die Länge der Kurve bei jedem Iterationsschritt um den Faktor $4/3$ und strebt gegen unendlich.

Die Kurve ist ferner stetig, denn die Ersatzregel ersetzt jedes gerade Kurvenstück «F» wieder durch ein zusammenhängendes Kurvenstück «F-F++F-F». Wenn man die Anzahl Iterationen gegen unendlich gehen lässt, befindet sich in jeder noch so kleinen Umgebung eines Kurvenpunktes ein «Knick», an dessen Stelle die Kurve nicht differenzierbar ist.

Weitere Eigenschaften der Schneeflocken-Kurve werden in Form einer Übungsaufgabe bewiesen:

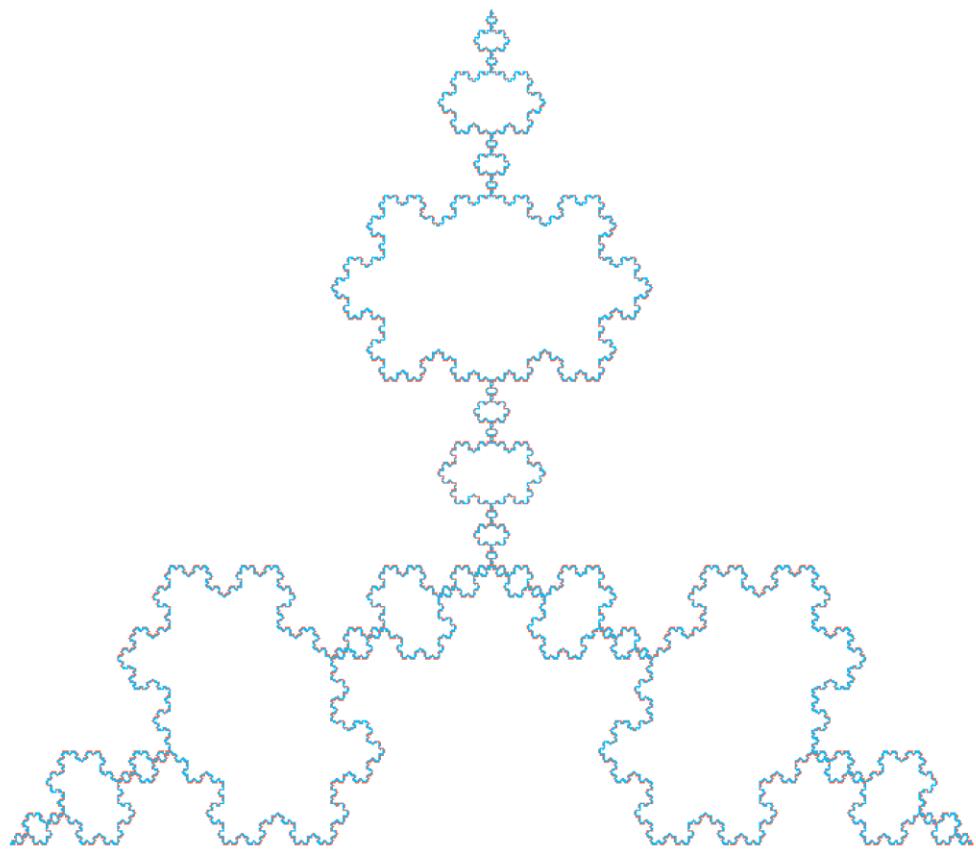
- Drei aufeinanderfolgende Punkte auf der Schneeflocken-Kurve bilden immer ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkeln von entweder 30° oder 60° .
 - Die Schneeflocken-Kurve liegt vollständig im Sechseck, das von der Schneeflocken-Kurve der ersten Generation aufgespannt wird.
 - Die Schneeflocken-Kurve hat 6 Spiegelsymmetriechsen
 - Die Schneeflocken-Kurve ist drehsymmetrisch mit Drehwinkel von 60°
 - Die Fläche der Schneeflocken-Kurve in der Version des «Simulator» beträgt $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Die inverse Schneeflocken-Kurve

Wenn man die neu hinzugefügten Dreiecke bei der Schneeflocken-Kurve statt «ausspringen» «einspringen» lässt, dann erhält man die «inverse Schneeflocken -Kurve». Die Ersatzregel lautet dann:

$$F \rightarrow F + F - - F + F$$

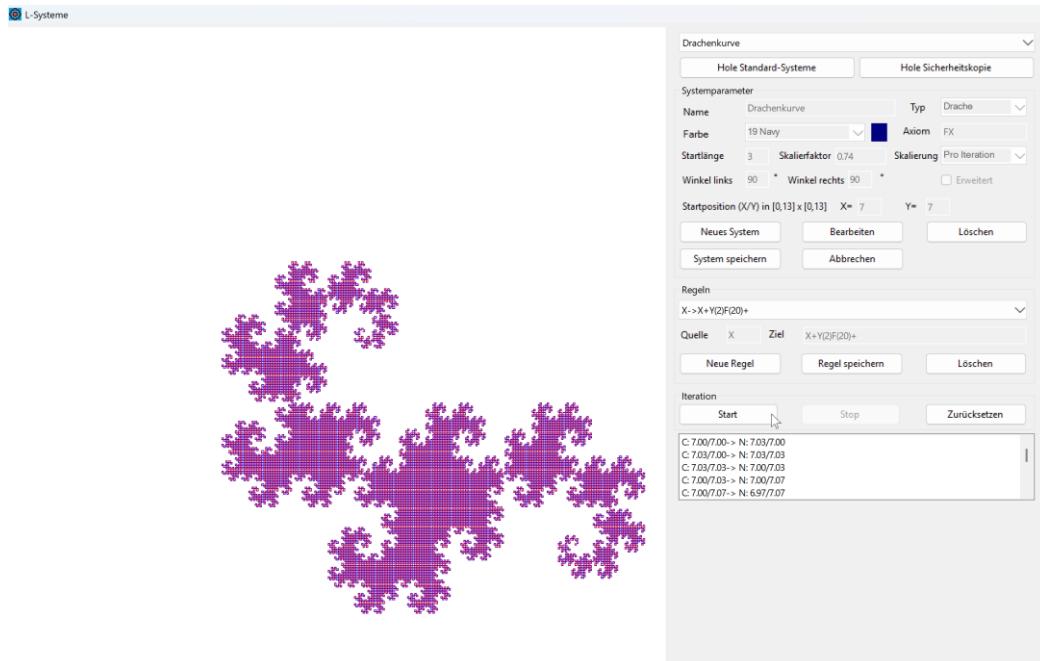
Während die übrigen Parameter unverändert bleiben.



Inverse Schneeflocken-Kurve der siebten Generation

3.4 Die Drachenkurve

Die Drachenkurve wurde 1966 vom NASA Physiker John Heighway (biographische Daten scheinen nicht verfügbar) gefunden.



Die Drachenkurve der fünfzehnten Generation

Die globalen Parameter sind rechts im Benutzerfenster ersichtlich. Der Skalierfaktor ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Axiom: FX

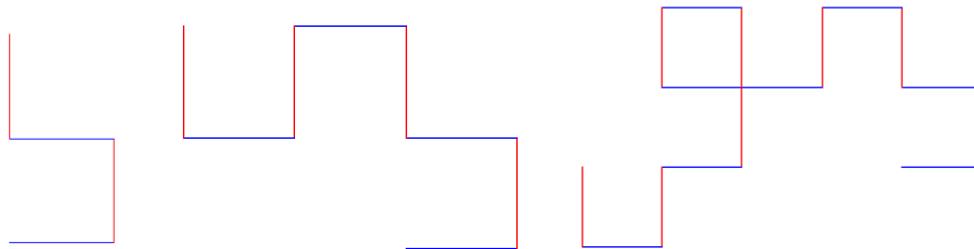
Ersatzregeln (ohne Farbcodes):

$$X \rightarrow X + YF +$$

$$Y \rightarrow -FX - Y$$

Die erzeugten Zeichenketten sind in folgender Liste dargestellt (+- heben sich auf und werden nicht notiert):

Generation	Zeichenkette	Relevant für Schildkröte
Axiom	FX	F
1	$FX+YF+$	$F+F+$
2	$FX+YF+FX-YF+$	$F+F+F-F+$
3	$FX+YF+FX-YF+FX+YF-FX-YF$	$F+F+F-F+F+F-F-F$
4	$FX+YF+FX-YF+FX+YF-FX-YF+FX+YF-FX-YF$	$F+F+F-F+F+F-F-F$ $F+F+F+F-F-F+F-F-F$

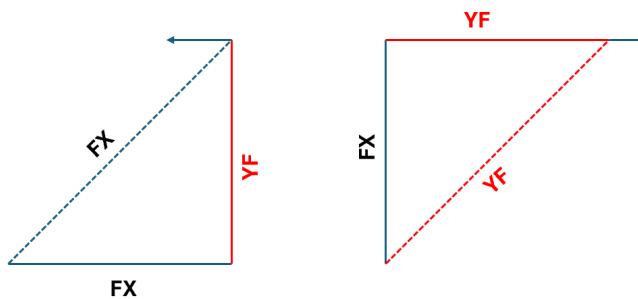


Die Drachenkurve der Generation zwei, drei und vier

Der Startpunkt ist immer der Punkt rechts oder unten. Die Farbe wechselt bei jedem Segment.

Wir wollen nun genauer verstehen, welche Rolle die Platzhalter «X» und «Y» bei dieser Konstruktion spielen. «X» dient dazu, ein Liniensegment zu markieren, welche in der nächsten Generation durch rechts von ihm liegende neue Segmente ersetzt werden (in Laufrichtung der Schildkröte). «Y» markiert ein Segment, welches durch links von ihm liegende Segmente ersetzt werden.

Betrachten wir ein Segment «FX» und dann das zugehörige Exemplar der nächsten Generation, ist dieses «FX+YF+». Ein Segment «YF» wird ersetzt durch «-FX-YF». Die zugehörigen Bilder sind:

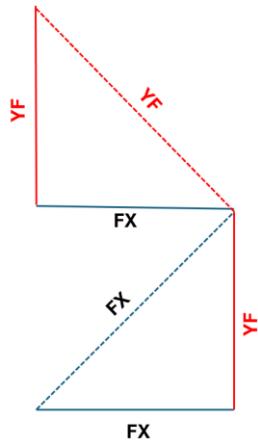


$$FX \rightarrow FX + YF +$$

$$YF \rightarrow -FX - YF$$

In der Zeichnung ist zum besseren Verständnis die Schildkrötenrichtung für die Ersatzsegmente um 45° verdreht. Eigentlich startet die Schildkröte immer in Richtung des ursprünglichen Segmentes.

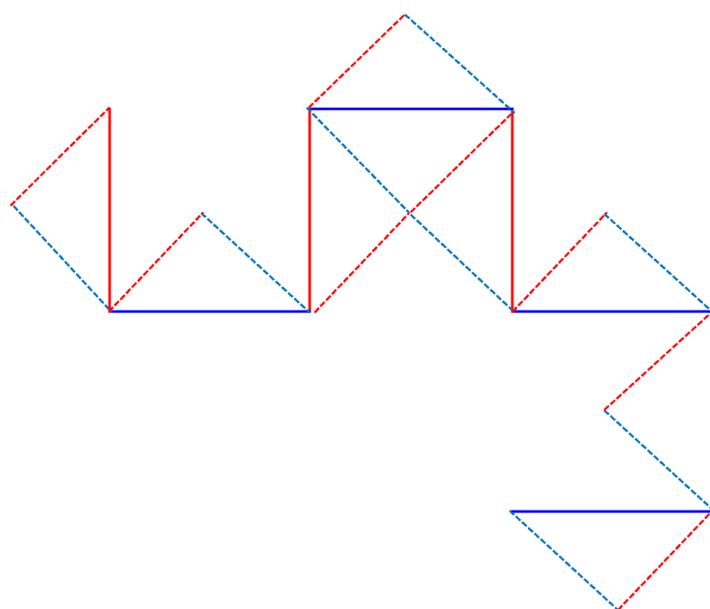
Schauen wir noch an, wie das zusammengesetzte Teilstück ersetzt wird:



$$FX + YF + \rightarrow FY + YF + FX - YF +$$

Man sieht aus dieser Skizze auch, wieso der Skalierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gewählt wurde. Dann wird die Schrittänge der nächsten Generation so angepasst, dass die Länge der ersetzen Strecke konstant bleibt.

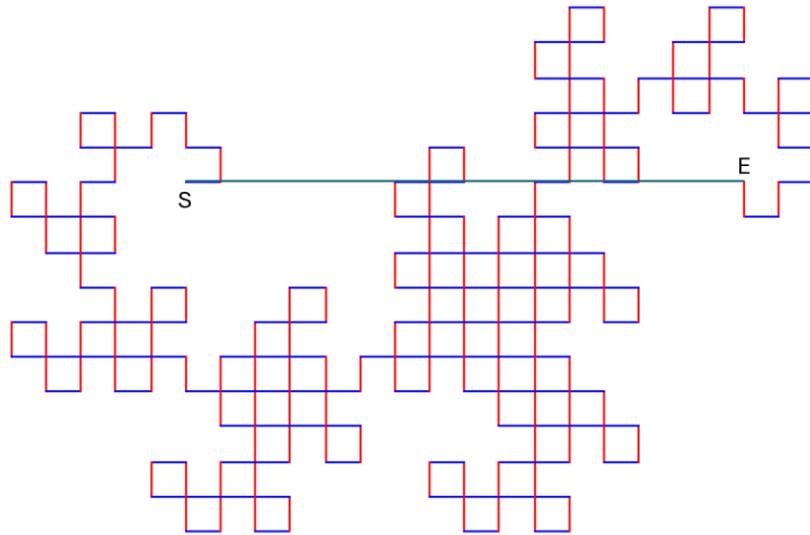
Wenn die Schildkröte bei einer gegebenen Kurve einer bestimmten Generation jedes Segment ersetzt, dann folgt dies obigem Schema. Die Schildkröte ersetzt jedes Segment durch zwei kleinere Segmente, welche ein gleichschenkliges und rechteckiges Dreieck auf dem ersetzen Segment bilden. Dabei «wackelt» die Schildkröte und die neuen Segmente liegen abwechselnd rechts oder links vom ersetzen Segment (in Laufrichtung).



Übergang von der dritten zur vierten (gestrichelten) Generation durch Segmentersatz

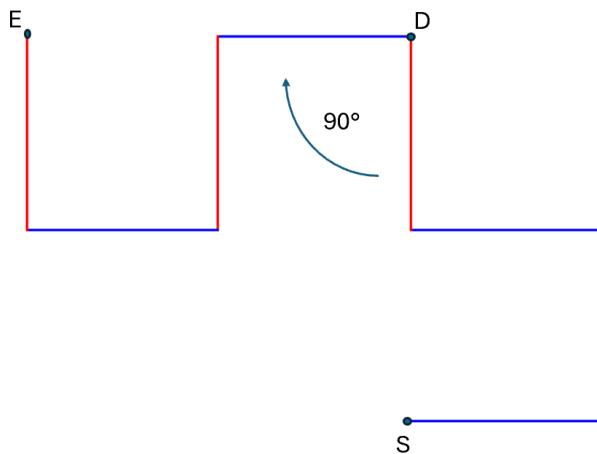
Die Segmente werden ersetzt, ohne dass deren Start- und Endpunkte verschoben werden. Somit ist die Distanz zwischen Startpunkt und Endpunkt des gesamten Schildkrötenweges bei jeder Iteration konstant und entspricht der ersten Schrittlänge.

Das heisst, dass der jeder Endpunkt jeder Iteration auf einem Kreis um den Anfangspunkt liegt und zwar mit Radius der ersten Schrittlänge. Das heisst auch, dass die ganze Kurve in einem begrenzten Ebenen Bereich liegt, zum Beispiel in einem Kreis mit Radius von 1.5 mal der ersten Schrittlänge.



Startpunkt und Endpunkt der achten Generation sind auch Startpunkt und Endpunkt des Axioms

Wenn man die Kurve der n-ten Generation um ihren Endpunkt um 90° im Uhrzeigersinn dreht und die ursprüngliche Kurve zusätzlich stehen lässt, erhält man die Kurve der (n+1)-ten Generation.

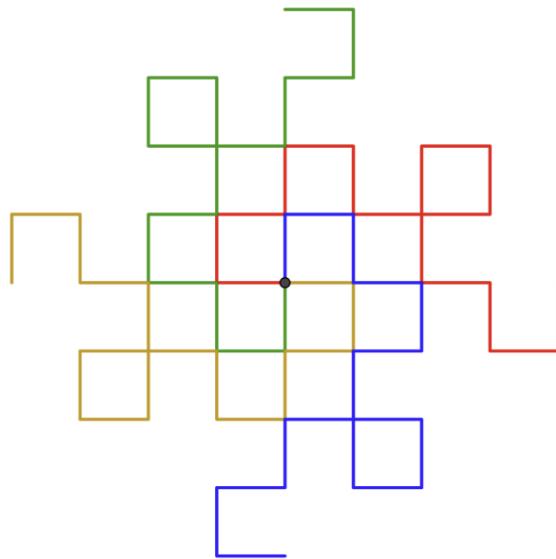


Übergang von der zweiten zur dritten Generation

Das lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen. Die Behauptung ist richtig für die erste, die zweite oder wie man oben sieht, die dritte Generation. Die Anzahl der Schildkrötenschritte ist immer gerade. Das heisst, es gibt immer einen Punkt D, welcher genau nach der halben Anzahl Schritte erreicht wird. Nehmen wir nun an, dass bei der n-ten Generation der zweite Teil des Schildkrötenweges (zwischen D und E) eine um 90° gedrehte Kopie des ersten Teiles des

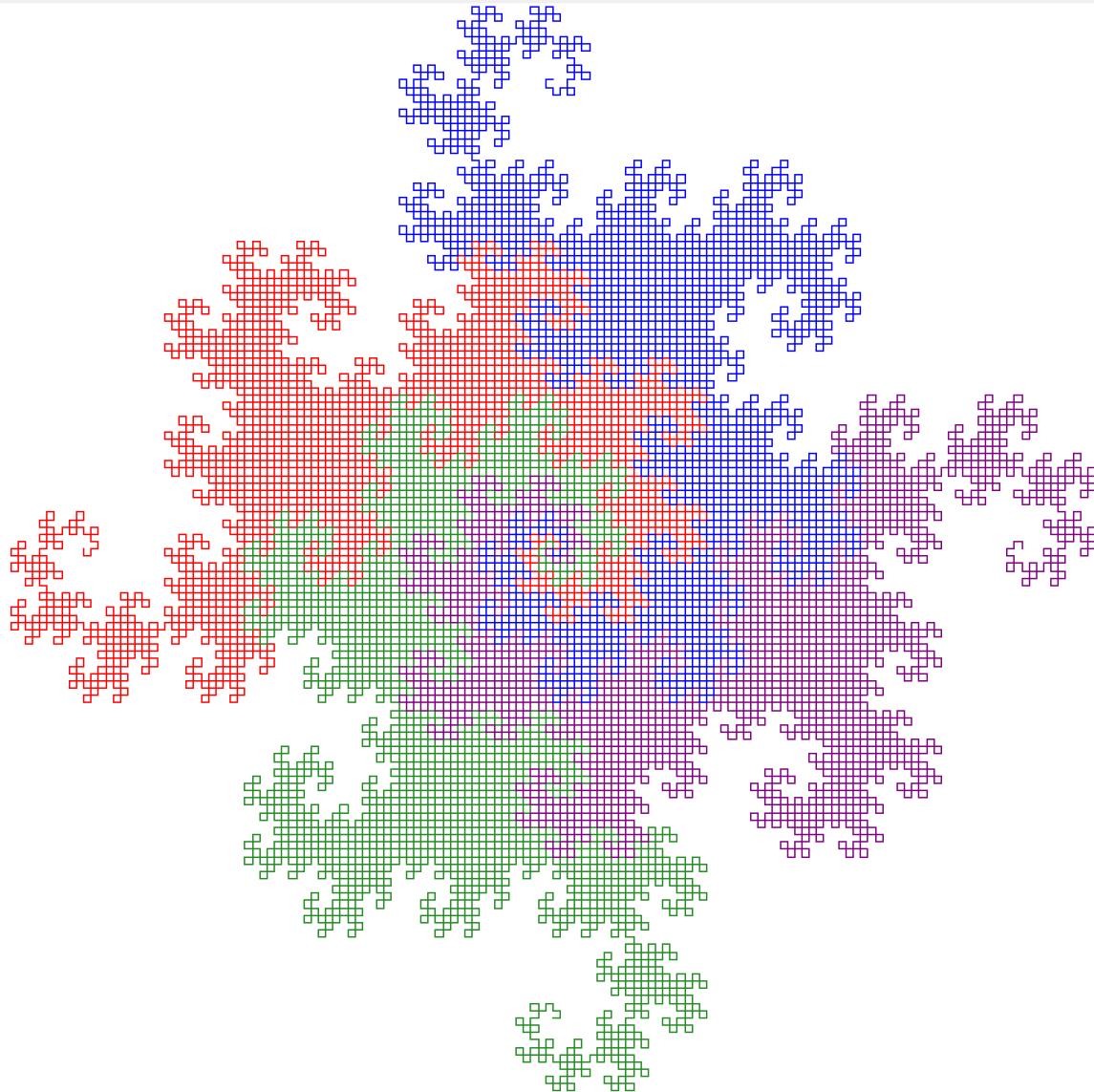
Schildkrötenweges ist (zwischen S und D). Bei der nächsten Generation wird jedes Segment des ersten Teiles und der um 90° gedrehten Kopie auf die genau gleiche Weise ersetzt, weil in D wieder ein «FX» Segment startet. Somit ist auch bei der $(n+1)$ -ten Generation der zweite Teil des Schildkrötenweges (zwischen D und E) eine um 90° gedrehte Kopie des ersten Teiles (zwischen S und D).

Interessant ist, ohne dass wir hier das beweisen, dass ein Teil der Ebene rund um den Startpunkt mit der Drachenkurve parkettiert werden kann. Dabei nimmt man vier Exemplare der Drachenkurve mit demselben Startpunkt, aber mit jeweils um 90° gedrehten Startwinkel der Schildkröte. Für die vierte Generation der Drachenkurve erhält man dann dieses Bild:



Vier Kopien der Drachenkurve der vierten Generation, jeweils um 90° verdreht

Im «Simulator» kann man für die Drachenkurve die Option «erweitert» aktivieren. Dann werden vier Schildkröten auf die Reise geschickt mit einem jeweils um 90° gedrehten Startwinkel.

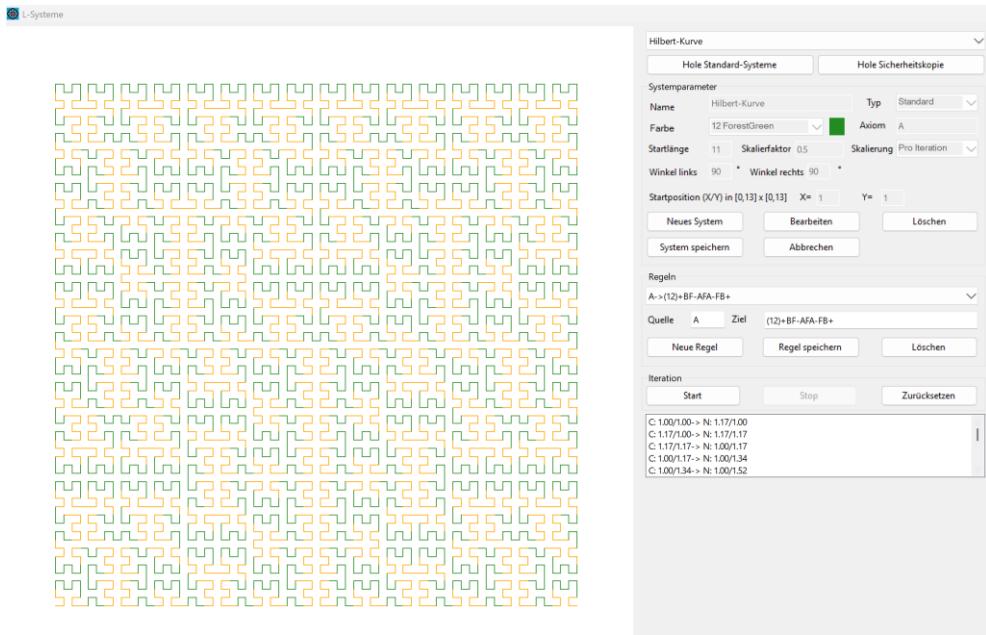


Vier Kopie der Drachenkurve der zwölften Generation, jeweils um 90° gedreht

3.5 Die Hilbert- und die Peano-Kurve

Eine Frage, welche die Mathematiker im 19. Jahrhundert beschäftigte, war, ob es möglich ist, Abbildung zwischen einem endlichen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einem Quadrat $J \times J \subset \mathbb{R}^2$ zu finden, so dass diese Abbildung stetig ist und ihr Bild das Quadrat beliebig dicht «auffüllt». Das heisst, dass es in jeder beliebig kleinen Umgebung eines beliebigen Quadratpunktes einen Punkt gibt, welcher Bild der Abbildung ist.

David Hilbert (1862 - 1943) hat eine solche Kurve gefunden, welche nach ihm benannt ist.



Hilbert-Kurve der fünften Generation

Die Hilbert-Kurve ist als L-System folgendermassen definiert:

Axiom *A*

Ersatzregeln (ohne Farbsteuerung)

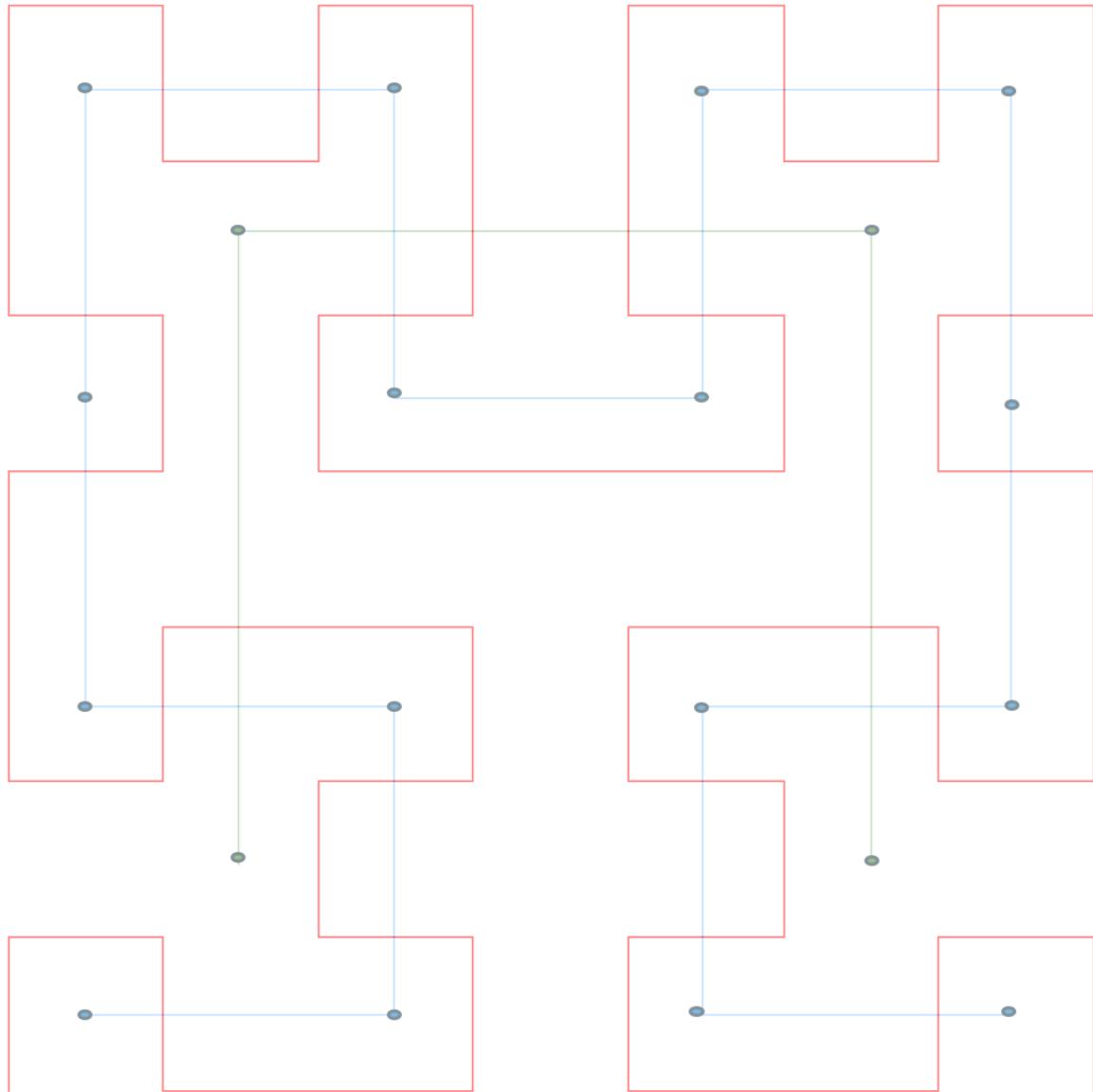
$$A \rightarrow +BF - AFA - FB +$$

$$B \rightarrow -AF + BFB + FA -$$

Die ersten zwei Generationen sind:

Generation	Zeichenkette	Relevant für Schildkröte
Axiom	A	-
1	+BF-AFA-FB+	+F-F-F+
2	AF+BFB+FA-FBF-AFA-FB+F+BF-AFA-FBF-AF+BFB+FA	F+F+F-FF-F-F+F+F-F-FF-F+F+F

Folgendes Schema zeigt das Konstruktionsprinzip der Hilbert-Kurve:



Konstruktionsprinzip der Hilbert-Kurve

Das Axiom ist grün dargestellt. Seine Eckpunkte ebenfalls.

Erste Generation: Man zeichnet nun rund um jeden grünen Eckpunkt ein blaues Quadrat, aber jeweils nur die ersten drei Seiten. Anschliessend geht man zum nächsten grünen Eckpunkt. Die so entstehende blaue Linie ist die erste Generation der Hilbert-Kurve. Die entsprechenden Eckpunkte der blauen Quadrate sind ebenfalls blau markiert.

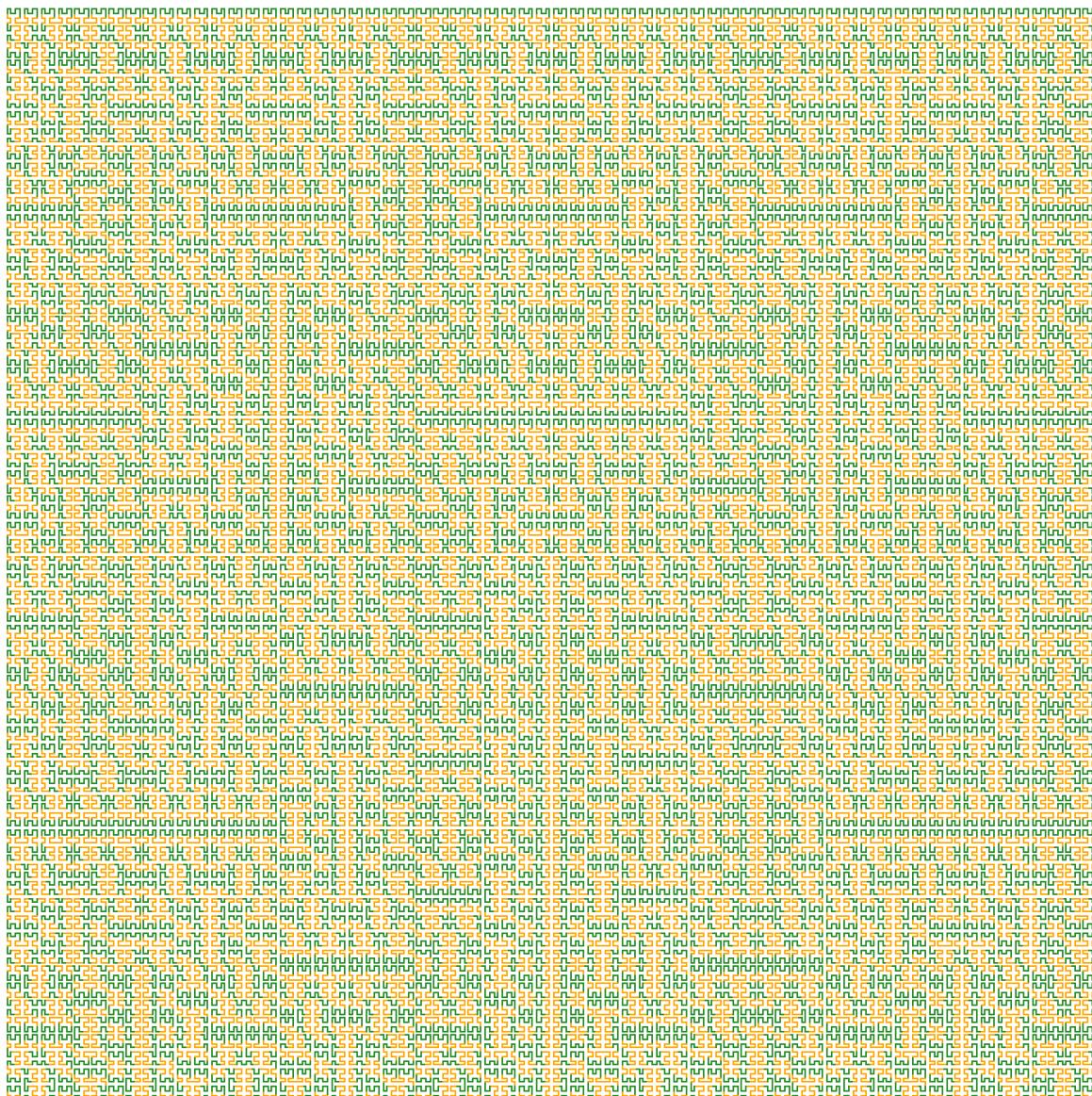
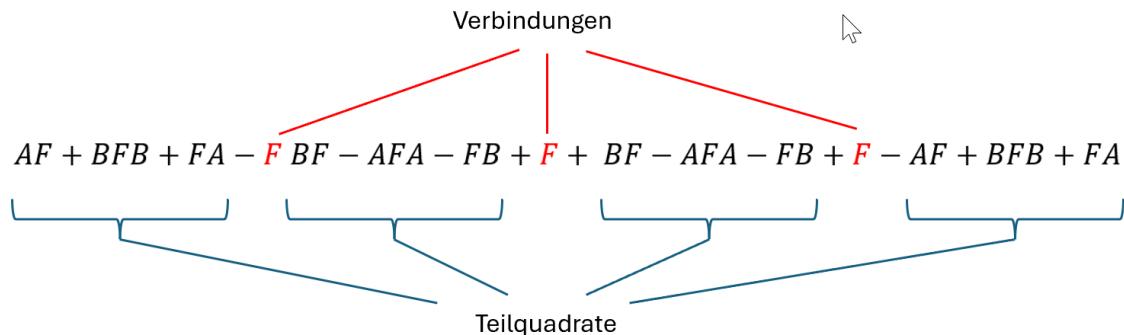
Zweite Generation: Nun wiederholt man das Verfahren. Man zeichnet um jeden blauen Eckpunkt ein rotes Quadrat, aber nur die ersten drei Seiten. Anschliessend geht man zum nächsten blauen Eckpunkt über. Die so entstehende rote Linie ist die Hilbert-Kurve der zweiten Generation.

Bei den Ersatzregeln steht die Kette $+BF - AFA - FB +$ für ein nach unten geöffnetes Teilquadrat und die Kette $-AF + BFB + FA -$ für ein nach aussen geöffnetes Teilquadrat. Die «F» in diesen Ketten zeichnen die Teilquadrate der aktuellen Generation und stellen gleichzeitig die Verbindung zwischen den späteren Ersatzquadrate her.

Beispiel: Übergang von der ersten zur zweiten Generation

Erste Generation: +BF-AFA-FB+

Zweite Generation:



Hilbert-Kurve der siebten Generation

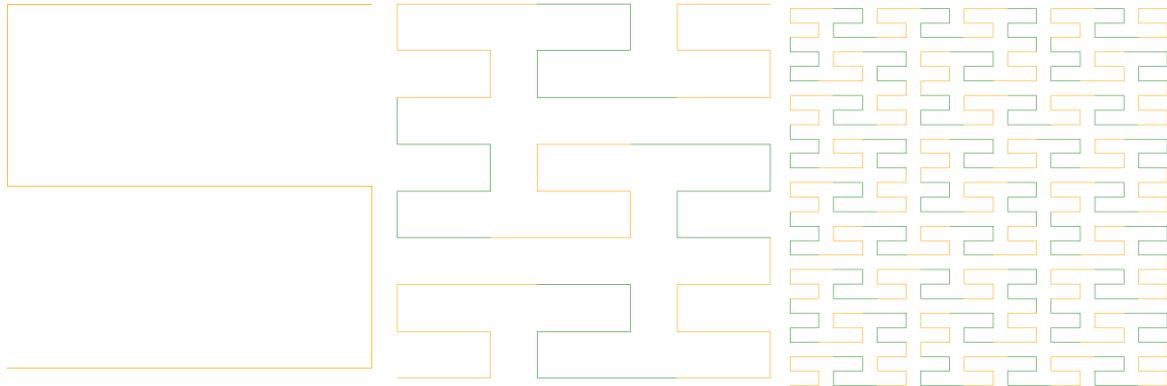
Ein weiteres Beispiel einer stetigen quadratfüllenden Kurve ist die Peano-Kurve, benannt nach Giuseppe Peano (1858 - 1932), wohl am bekanntesten durch die Peano Axiome für die natürlichen Zahlen. Als L-System ist die Peano-Kurve definiert durch:

Axiom: X

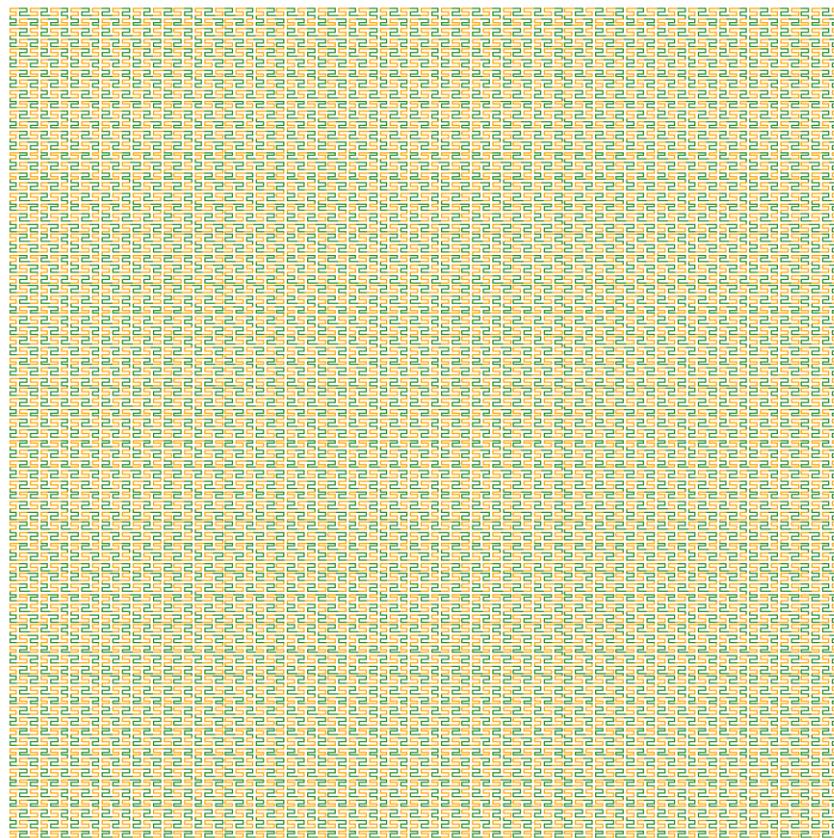
Ersatzregeln:

$$X \rightarrow XYFX + F + YFXFY - F - XYFX$$

$$Y \rightarrow YFXFY - F - XYFX + F + YFXFY$$

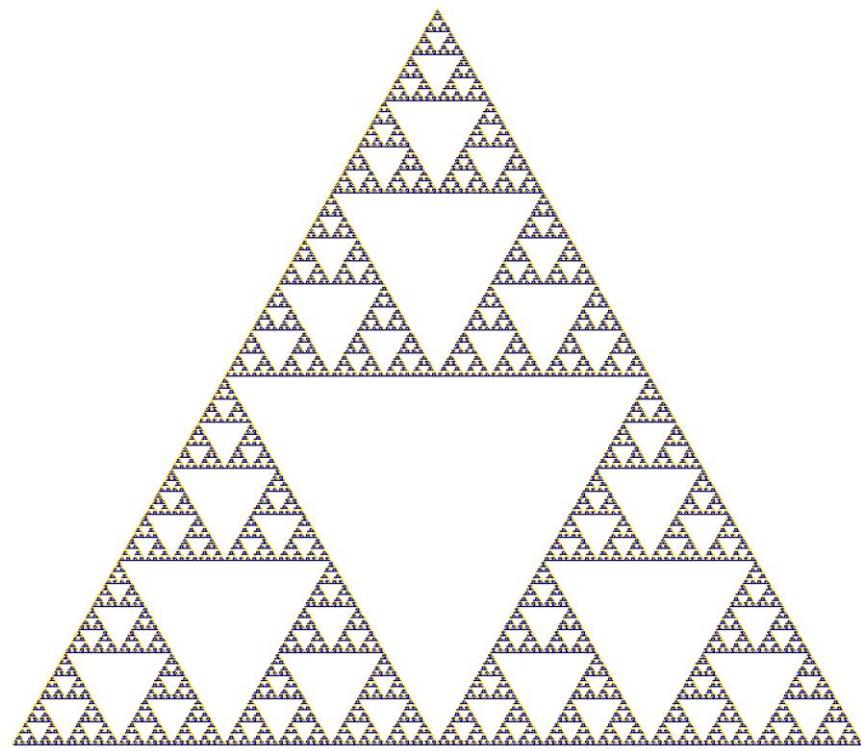


Peano-Kurve: Axiom. Erste und zweite Generation

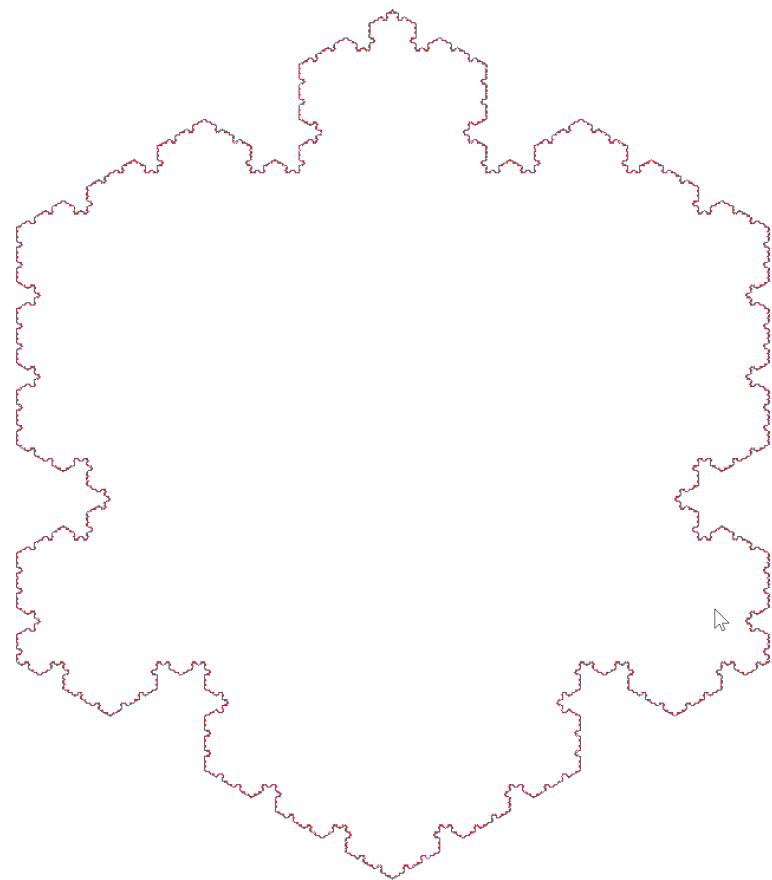


Peano-Kurve der Generation vier

Eine weitere Analyse überlassen wir dem Leser. Ebenso die Analyse der Sierpinski-Kurve und des Sierpinski-Dreiecks (Waclaw Sierpinski 1882 – 1962).



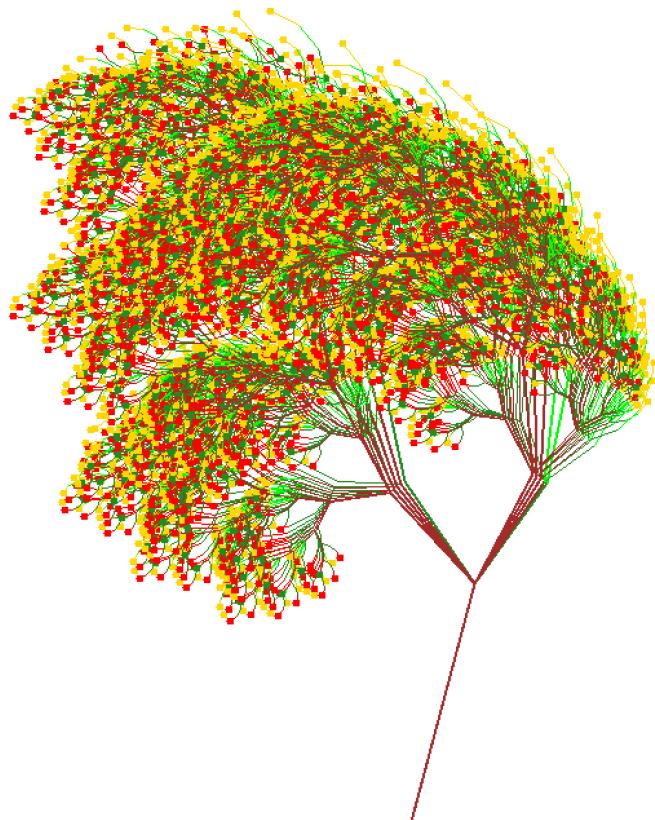
Achte Generation des Sierpinski Dreiecks



Sierpinski-Kurve der Generation fünf

3.6 Baumstrukturen

Bis jetzt haben wir Kurven ohne Abzweigungen kennengelernt. Bei L-Systemen lassen sich aber auch Abzweigungen modellieren, und zwar durch die Klammern [und]. Die Klammer [bedeutet, dass sich die Schildkröte ihren Status (Position, Winkel gegenüber der x-Achse, aktuelle Schrittlänge) merken soll. Anschliessend läuft die Schildkröte die Zeichenkette weiter ab, bis sie auf eine] Klammer trifft. Dann kehrt sie zur gespeicherten Position zurück und übernimmt den dortigen Status. Im Simulator wird bei einer] Klammer eine Knospe gezeichnet, wenn diese Option aktiviert ist. Dies ist nur bei L-Systemen vom Typ «Baum» sinnvoll.



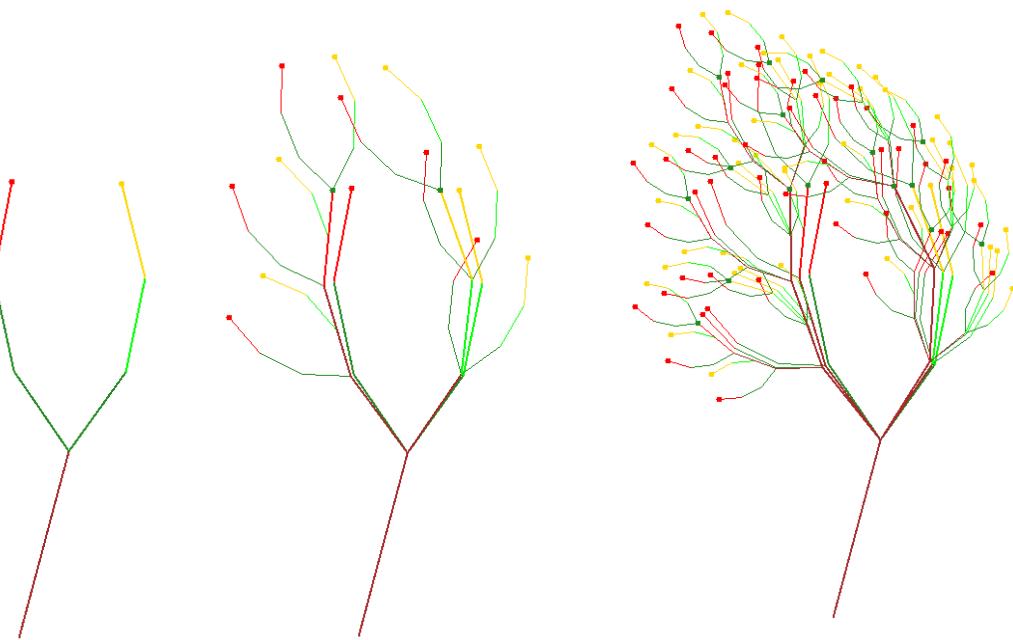
Baumstruktur mit Knospen

Obiger Baum ist als L-System definiert durch:

Axiom: + + +F

Ersatzregel: $F \rightarrow F + [+F - F - F] - [-F + F + F]$

Bei jedem Schritt bleibt ein Element «F» der Baumstruktur stehen, wird aber um zwei dreiteilige «Äste» erweitert. Dabei ist der Winkel «+» nach rechts mit 25° etwas grösser als der zu «-» gehörende Winkel mit 23° . Daraus erklärt sich die nach links hängende Lage des Baumes.



Die ersten drei Generationen des Baumes.

Eine Pflanze, gebildet nach den Regeln:

Axiom: + + +F

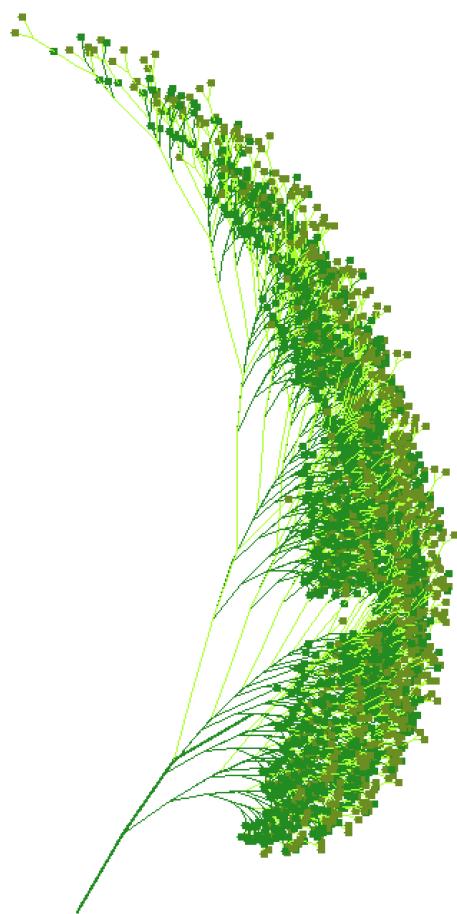
Ersatzregel: $F \rightarrow F[--F+F+F][+F-F-F]$

Ist folgende:



Die fünfte Generation der Pflanze

Weitere Beispiel, die implementiert sind:



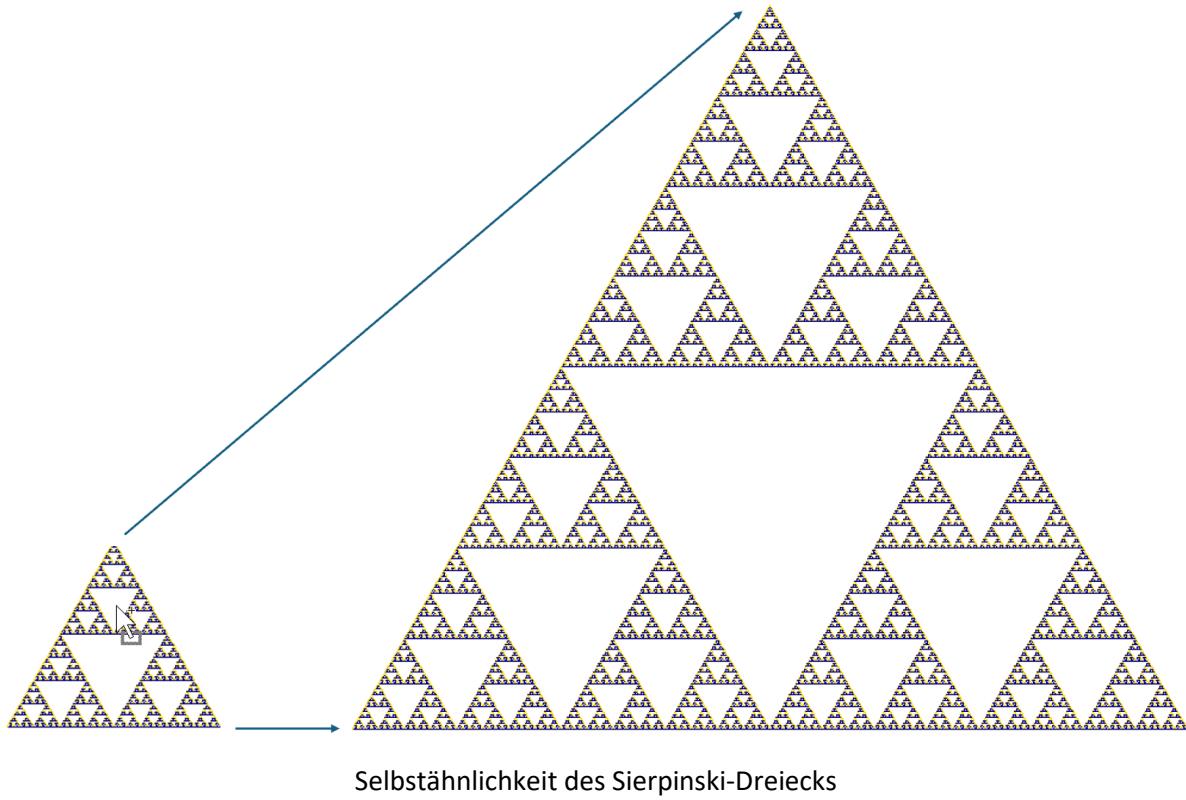
Der «Farn»



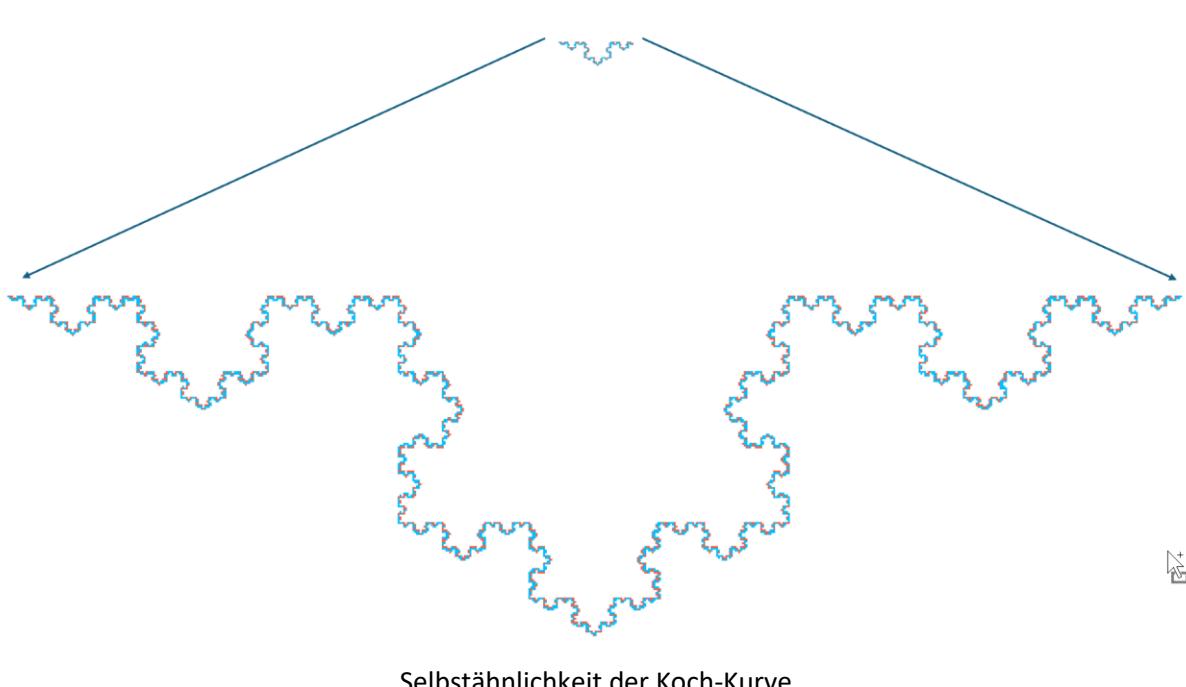
Der «Strauss»

3.7 Selbstähnlichkeit

Wenn wir das Sierpinski-Dreieck betrachten, stellen wir fest, dass wir wieder das ursprüngliche ganze Dreieck erhalten, wenn wir zum Beispiel ein Teildreieck links unten entsprechend vergrößern.



Dasselbe Phänomen sehen wir auch bei Ausschnitten der Koch-Kurve:

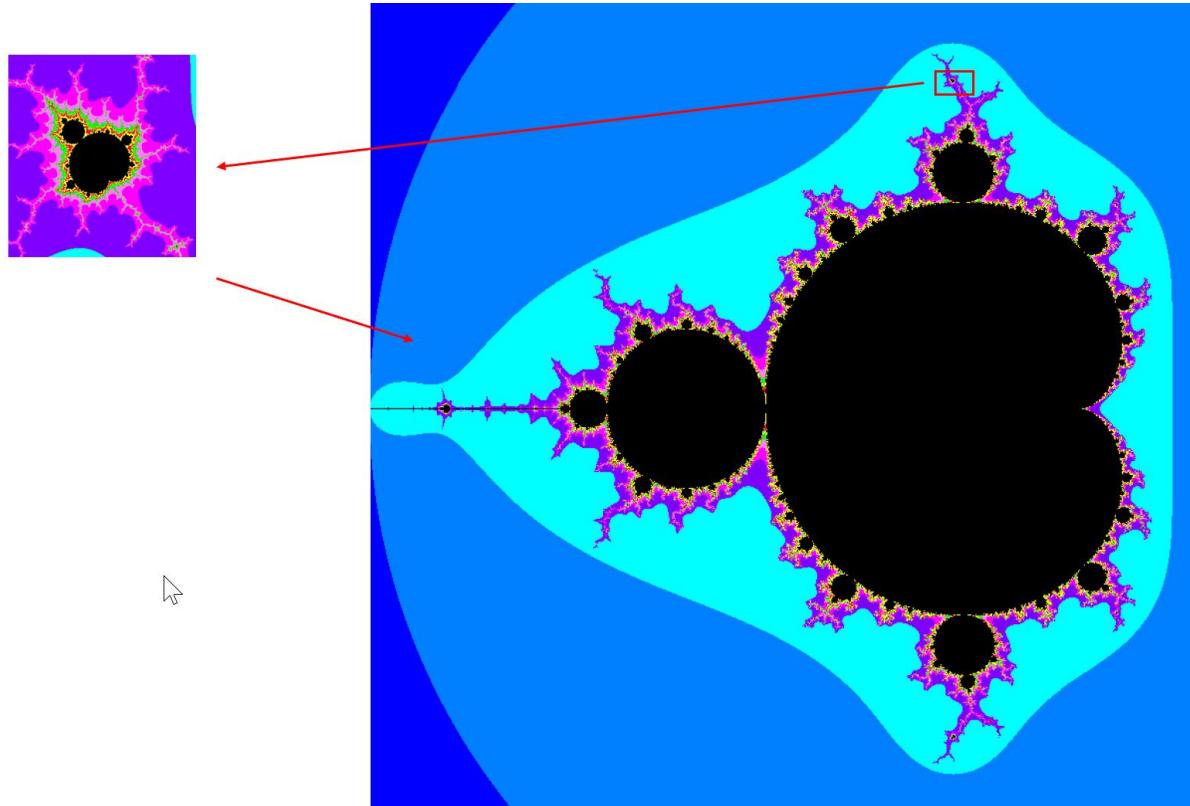


Auch bei den anderen implementierten L-Systemen stellen wir fest, dass sie entweder strikt selbstähnlich sind (wie das Sierpinski-Dreieck) oder mindestens ausschnittsweise (wie die Koch-

Kurve). Bei den Baumstrukturen ist das weniger klar ersichtlich, denn die strikte Selbstähnlichkeit gilt überall erst, wenn die Nummer der Generation gegen unendlich strebt.

Bereits früher sind wir auf selbstähnliche Objekte gestossen, nämlich bei der Iteration in der komplexen Ebene. Dort zum Beispiel sind es die Bassins der n-ten Einheitswurzeln und dem Newton-Verfahren, oder die Julia- und Mandelbrotmenge.

Ein Objekt nennen wir *selbstähnlich*, wenn bei iterativer Vergrösserung bis ins Unendliche immer wieder dieselbe Struktur erscheint. Man kann das mathematisch abstrakter und präziser ausdrücken, aber das Wesentliche ist hier gesagt.



Selbstähnlichkeit der Mandelbrotmenge

Selbstähnliche Objekte nennt man auch *Fraktale*.

Die Selbstähnlichkeit spielt eine wichtige Rolle im nächsten Abschnitt, wenn es um die fraktale Dimension geht.

3.8 Fraktale Dimension

Wenn man glaubt, in einem euklidischen Raum zu leben, dann ist der Begriff der Dimension unproblematisch. Die Dimension ist dann gleich der Anzahl der Basisvektoren, welche den zugehörigen linearen Raum aufspannen. Unser Raum hat dann die Dimension drei und um die Lage eines Punktes in einem räumlichen Koordinatensystem anzugeben, braucht man drei Koordinaten (Länge, Breite, Höhe).

Man spricht dann auch von der *Dimension eines Vektorraumes* oder der *euklidischen Dimension*.

Wenn man die komplexe Ebene betrachtet, dann hat diese als euklidische Ebene die Dimension zwei. Wenn man sie aber als Raum über den komplexen Zahlen betrachtet, dann hat sie «nur» die

Dimension eins, weil «eine Koordinate», nämlich *eine* komplexe Zahl ausreicht, um die Lage eines Punktes in der komplexen Ebene festzulegen.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$$

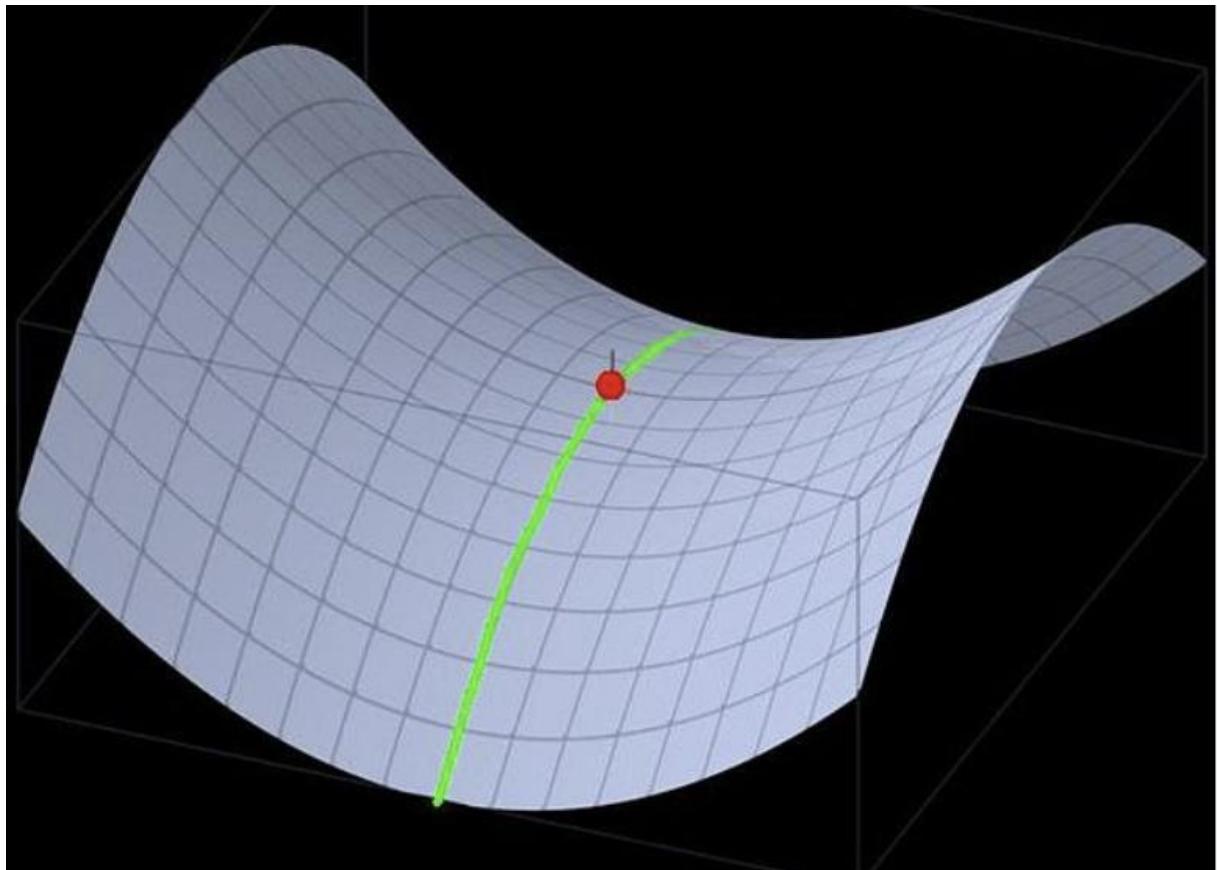
Hier sieht man also eine erste Komplizierung: Wenn man von der Dimension eines Vektorraumes spricht, spielt es eine Rolle, *über welchem Körper dieser Vektorraum betrachtet wird*.

In der realen Welt befinden wir uns aber meist *nicht* in einem euklidischen Raum. Die Kugeloberfläche und damit unser Lebensumfeld auf der Erdkugel ist *nicht euklidisch*. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugel ist nicht eine Gerade, sondern ein Grosskreis. Dennoch spüren wir nichts davon, wenn wir spazieren gehen. Weil wir nur einen sehr kleinen Ausschnitt der Erdkugel in unserem unmittelbaren Umfeld sehen, können wir dieses als euklidische Ebene auffassen und das ist völlig ausreichend für unseren Alltag.

Man kann sagen, dass die *Kugeloberfläche lokal euklidisch* ist. Das heisst, dass sie sich wir ein euklidischer Raum verhält, wenn man nur den Ausschnitt auf der Kugeloberfläche klein genug gegenüber der gesamten Kugeloberfläche wählt. Die Dimension der Kugeloberfläche ist dann gleich der Dimension des lokal euklidischen Ausschnittes, nämlich zwei.

Eine Menge, welche überall lokal euklidisch ist und in jedem Punkt dieselbe lokale euklidische Dimension hat, heisst auch *Mannigfaltigkeit*. Diese lokale euklidische Dimension ist dann die *Dimension der Mannigfaltigkeit*.

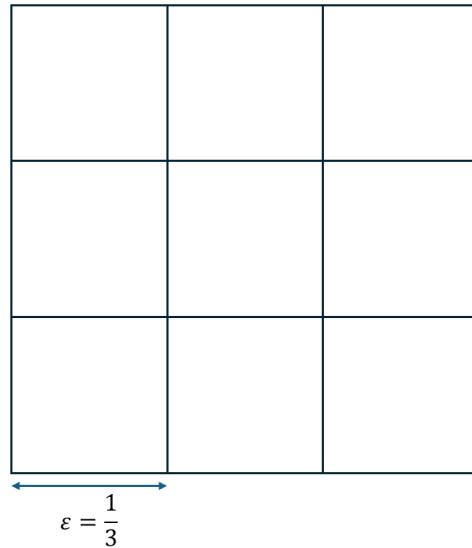
Zum Beispiel ist eine Sattelfläche eine Mannigfaltigkeit der Dimension zwei.



Sattelfläche (Quelle: anthrowiki.at)

Wenn man irgendwelche Punktmengen oder andere abstrakt definierte Objekte betrachtet, dann wird die Vorstellung einer Dimension rasch kompliziert und es wird schwierig, den Begriff entsprechend zu verallgemeinern, wenn das überhaupt sinnvoll möglich ist. Bei ebenen Punktmengen könnte man zum Beispiel die Ebene mit einem Gitter belegen, wobei die Gitterbreite ε beträgt. Dann zählt man die Anzahl der Boxen, in welchen sich Punkte aus der betrachteten Menge befinden: $N(\varepsilon)$. Dann lässt man ε gegen Null streben und schaut, wie sich $N(\varepsilon)$ entwickelt.

Nehmen wir als Beispiel ein Quadrat (welches in unserer Welt die Dimension zwei hat) und zwar mit der Seitenlänge eins und als Punktmenge das gesamte Innere des Quadrates.



Wenn $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ist, dann ist offenbar $N(\varepsilon) = 9$. Das heisst, 9 Boxen der Seitenlänge ε enthalten Punkte aus der Gesamtmenge. Für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ist $N(\varepsilon) = 16$. Allgemein sieht man, dass gilt:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

Wobei der Exponent 2 die Dimension ist.

Bei einem Würfel ergibt eine analoge Überlegung, dass gilt:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$$

Wenn man das verallgemeinert, erhält man:

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D$$

Wobei D die Dimension ist. Man kann dann auch schreiben:

$$D = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

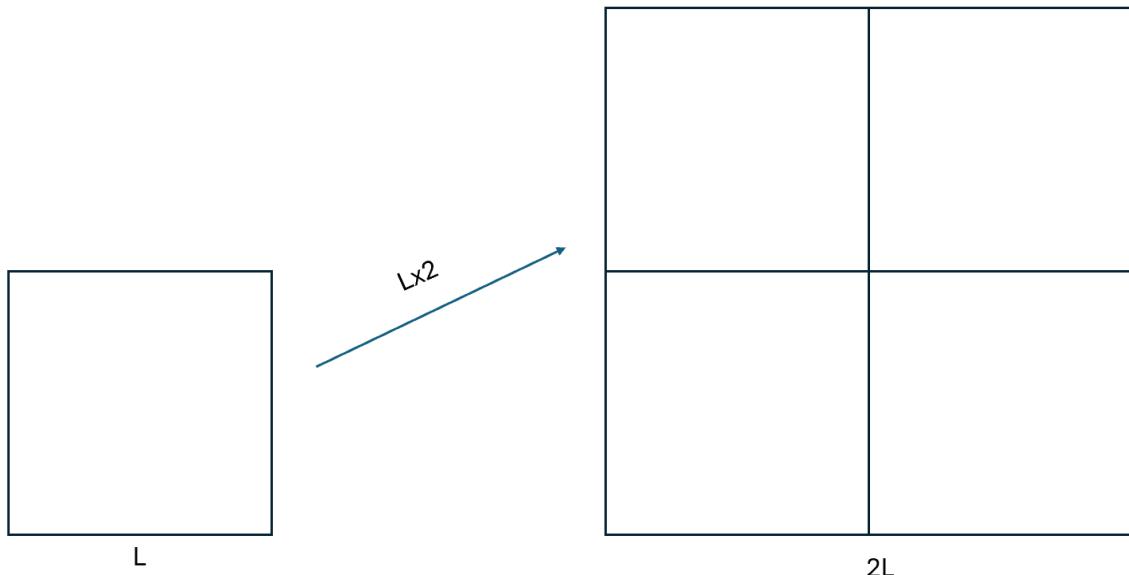
Nun war beim Quadrat und beim Würfel D unabhängig von der Grösse von ε . Wenn das nicht der Fall ist und man ε gegen Null streben lässt, kann man die Dimension als Limes definieren (falls dieser existiert):

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

Das ist gerade die Definition der sogenannten *Boxdimension*.

Ein ähnliches Vorgehen hat man beim Begriff der *fraktalen Dimension* (manchmal auch *Ähnlichkeitsdimension* genannt). Dabei geht man von der Selbstähnlichkeit aus und der Tatsache, dass man bei der Vergrösserung eines Ausschnittes eines Fraktales wieder das gesamte Fraktal erhält.

Beginnen wir zuerst wieder mit dem euklidischen Begriff der Dimension. Ein Quadrat ist ein ebenes Objekt und hat euklidisch gesehen die Dimension zwei.



Wir verdoppeln die Seitenlänge, wächst die Fläche um das Vierfache

Wenn wir die Seitenlänge des Quadrates um den Faktor λ vergrössern, wächst seine Fläche um den Faktor λ^2 . Das heisst, wir brauchen λ^2 Exemplare des ursprünglichen Quadrates, um das grössere Quadrat auszufüllen.

Wenn wir den Würfel betrachten und seine Seitenlänge um den Faktor λ vergrössern, wächst sein Volumen um den Faktor λ^3 . Wir brauchen λ^3 ursprüngliche Würfel, um den neuen Würfel auszufüllen. Die Dimension des Würfels ist drei.

In beiden Fällen war:

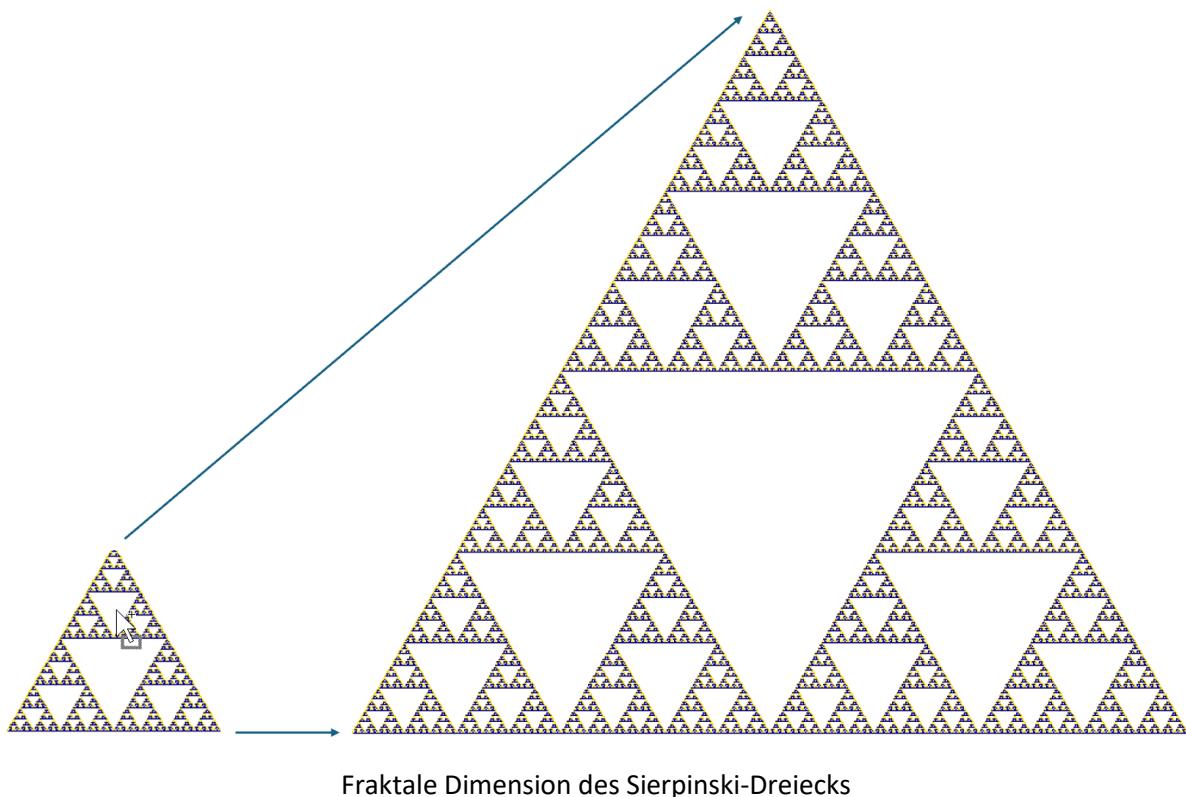
$$\lambda^D = N(\lambda)$$

Wobei λ der Streckfaktor ist und $N(\lambda)$ die Anzahl der Ausschnitte die nötig sind, um das neue Objekt auszufüllen. D ist dann die Dimension. So kann man die *fraktale Dimension* einer fraktalen Menge definieren als:

$$D = \frac{\log N(\lambda)}{\log \lambda}$$

Wenn das für geeignete Ausschnitte Menge, welche durch Streckung um den Faktor λ wieder mit der gesamten Menge zur Deckung kommen, konsistent immer denselben Wert D ergibt.

Wenn wir das Sierpinski-Dreieck nehmen und einen Ausschnitt davon wie auf dem Bild:



Dann sehen wir: Wenn wir den Ausschnitt um den Faktor 4 strecken, dann brauchen wir 9 Exemplare des Ausschnittes, um das neue grössere Sierpinski-Dreieck auszufüllen. Somit ist die fraktale Dimension des Sierpinski-Dreiecks

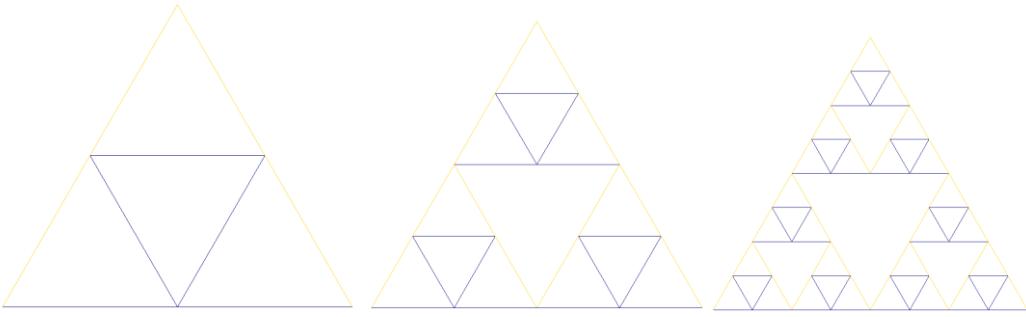
$$D = \frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.58496 \dots$$

Hätten wir einen anderen Ausschnitt, z.B: das erste grosse Teildreieck links unten als Ausschnitt genommen, dann würde eine Streckung um den Faktor zwei wieder das ursprüngliche Sierpinski-Dreieck ergeben und andererseits bräuchten wir drei Exemplare des Ausschnittes, um dieses zu überdecken. Wir hätte dann wieder:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58496 \dots$$

Man kann sich überlegen, dass dies für jeden geeigneten Ausschnitt gilt, welcher durch Streckung das ursprüngliche Sierpinski-Dreieck gilt, Somit ist dessen Dimension gleich 1.58496.., also eine gebrochene Zahl. Daher kommt auch die Bezeichnung *Fraktal*.

Wenn wir die euklidische Länge des Sierpinski-Dreiecks (also die Summe der Längen aller Streckenzüge in der Dimension eins) messen, dann gehen wir von einer Einheit aus, z.B. dass die Grundlinie des Ausgangsdreiecks (also das Axiom des L-Systems) die Länge eins hat. Das Ausgangsdreieck (das Axiom) hat dann die Länge 3. Im ersten Schritt kommt ein inneres Dreieck mit dem Umfang $\frac{3}{2}$ dazu.



Die ersten drei Generationen des Sierpinski-Dreiecks

In der zweiten Generation kommen drei Dreiecke mit dem Umfang $\frac{3}{4}$ dazu. In der dritten 9 Dreiecke mit Umfang $\frac{3}{8}$. Bei jedem weiteren Schritt wird die Anzahl der Dreiecke verdreifacht und der Umfang eines einzelnen Dreiecks halbiert. Das gibt am Ende als Gesamtlänge aller Strecken die Summe:

$$L = 1 \cdot 3 + \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{3}{8} + 27 \cdot \frac{3}{16} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{2^n} = \infty$$

Wenn wir den Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks berechnen, dann hat das Axiom, also das Ausgangsdreieck, den Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Dann wird im ersten Schritt ein inneres Dreieck ausgeschnitten, welches den Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2^2}$ hat. Im zweiten Schritt werden drei Dreiecke ausgeschnitten mit dem Flächeninhalt von je $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4^2}$. Bei jedem Schritt wird die Anzahl der ausgeschnittenen Dreiecke verdreifacht. Deren Seitenlänge s wird halbiert und somit ist deren Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{s^2}$. Das ergibt für den Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks die Summe:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{4^2} - \frac{9}{8^2} - \dots \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{4^n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right)$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe und damit ist:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - 1) = 0$$

Das Sierpinski-Dreieck hat also in der euklidischen Dimension 1 eine unendliche Länge (wenn man die Summe aller Teilstrecken bildet). In der euklidischen Dimension 2 ist der Flächeninhalt 0.

Als weiteres Beispiel untersuchen wir die fraktale Dimension der Drachenkurve.

Wir haben bei der Erzeugung der Drachenkurve als Skalierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gewählt. Dann bleibt die Distanz zwischen Startpunkt und Endpunkt der Kurve konstant. Gleichzeitig haben wir gesehen, dass die Drachenkurve auch erzeugt wird, indem man bei einem Iterationsschritt die Kurve um diesen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkleinert und dann eine Kopie der Kurve in einem rechten Winkel anfügt.

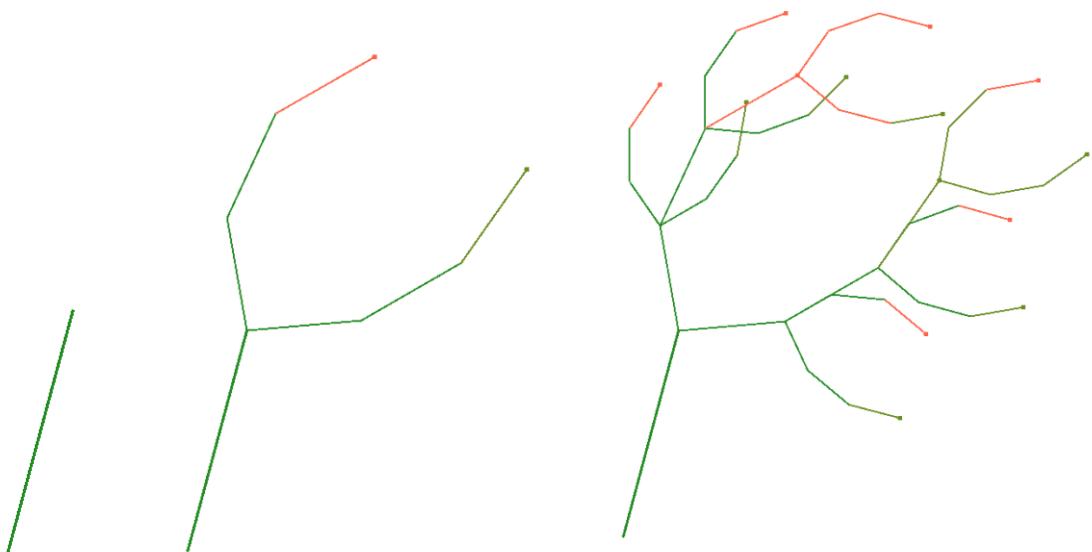
Umgekehrt bedeutet eine Streckung der Kurve um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dass man dieselbe Kurve erhält, wie wenn man 2 Kopien von ihr aneinandergefügt hätte. Somit ist die fraktale Dimension der Drachenkurve:

$$D = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = 2$$

Das bedeutet auch, dass die Drachenkurve Teile der Ebene vollständig ausfüllt.

Die Anzahl der Strecken verdoppelt sich bei jedem Iterationsschritt, wobei ihre Länge um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkleinert wird. Die Gesamtlänge aller Strecken wächst also bei jedem Iterationsschritt um den Faktor $\sqrt{2}$ und geht gegen unendlich.

Wir betrachten noch die «Pflanze» im «Simulator».



Axiom und die ersten zwei Generationen der Pflanze

Wie man aus der Ersatzregel $F \rightarrow F[--F+F+F][+F-F-F]$ sieht, bleibt das Ausgangselement bei der Iteration stehen. Es «wachsen» aber weitere sechs Elemente nach, welche aber nur noch die halbe Länge haben. Somit nimmt die Gesamtlänge aller Strecken bei jedem Iterationsschritt um 3 zu und sie wächst im Laufe der Iteration gegen unendlich.

Bei dieser Konstruktion ist die Pflanze nicht strikt selbstähnlich. Man kann aber als Näherung wagen, dass – wenn man eine um den Faktor 2 verkleinerte Version der Pflanze nimmt – man 6 dieser Elemente braucht, um die ursprüngliche Pflanze auszufüllen (abgesehen vom Stiel). Somit hat diese Pflanze als Näherung die Dimension:

$$D = \frac{\log 6}{\log 2} \approx 2.58496$$

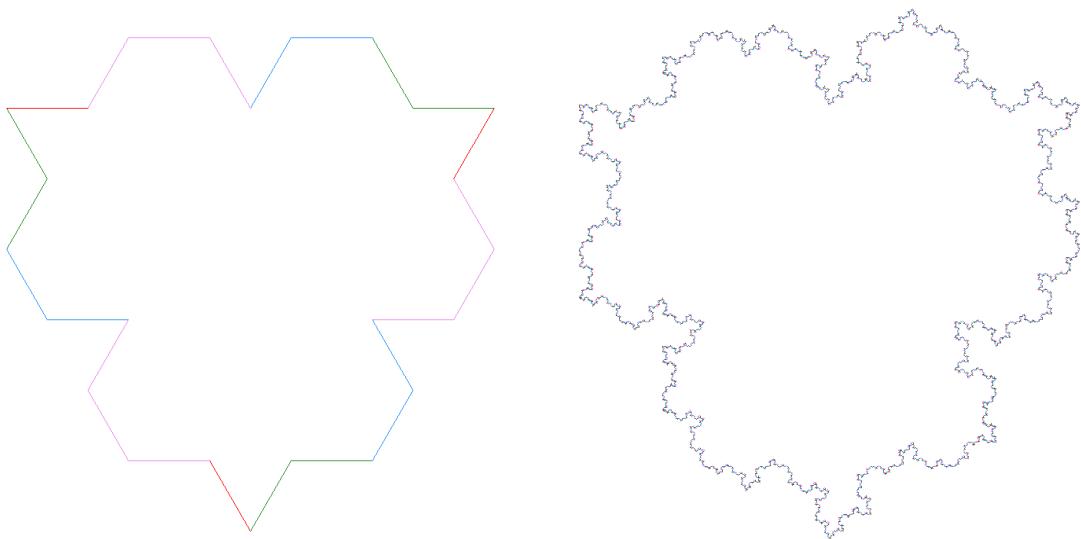
Weitere Beispiele findet man in [6].

3.9 Übungsbeispiele

1. Beweise für die Schneeflocken-Kurve:

- a) Drei aufeinanderfolgende Punkte auf der Schneeflocken-Kurve bilden immer ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkeln von entweder 30° oder 60° (mit vollständiger Induktion).
- b) Die Schneeflocken-Kurve liegt vollständig im Sechseck, das von der Schneeflocken-Kurve der ersten Generation aufgespannt wird.

- c) Die Schneeflocken-Kurve hat 6 Spiegelsymmetrieeachsen
 - d) Die Schneeflocken-Kurve ist drehsymmetrisch mit Drehwinkel von 60°
 - e) Die Fläche der Schneeflocken-Kurve in der Version des «Simulator» beträgt $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
2. Untersuche die inverse Schneeflocken-Kurve hinsichtlich Länge, Fläche, Symmetrieeachsen und Typen der auftretenden Dreiecke. Erstelle die Zeichenketten für die ersten paar Iterationen. Beweise auch, dass sich zwei Strecken der inversen Schneeflocken-Kurve nicht im Inneren schneiden.
3. Erstelle ein L-System, das eine Kombination der Schneeflocken- und der inversen Schneeflocken-Kurve ist. Das Axiom besteht aus einem Sechseck. Anschliessend wird jede Seite wie bei der Schneeflocken-Kurve ersetzt, aber die erste ausspringend wie bei der Schneeflocken-Kurve, die nächste einspringend wie bei der inversen Schneeflocken-Kurve. Verwende für die Ersatzregeln dieselbe Technik wie bei der Drachenkurve mit Platzhaltern «X» und «Y» für Strecken zu unterscheiden, die bei der nächsten Generation durch ausspringende bzw. einspringende Strecken ersetzt werden. Das folgende Bild zeigt, wie das aussehen sollte (Generation eins und fünf).



4. Analysiere das Sierpinski-Dreieck und die Sierpinski-Kurve.
5. Experimentiere mit eigenen Kurven, definiert durch L-Systeme.
6. Analysiere die Baumstrukturen «Farn» und «Strauss».
7. Experimentiere mit eigenen Baumstrukturen.
8. Untersuche die im «Simulator» implementierten fraktalen Mengen auf Selbstähnlichkeit.
9. Bestimme die fraktale Dimension der Koch-Kurve und der Sierpinski-Kurve. Bestimme auch ihre euklidische Länge.

10. Bestimme die fraktale Dimension der Hilbert-Kurve und der Peano-Kurve.

11. Bestimme die fraktale Dimension weiterer Baumstrukturen im «Simulator».

Weiterführende Literatur

- [1] Orbital Motion, Archie E. Roy, Taylor & Francis Group, 2005
- [2] Celestial Mechanics, John M.A. Danby, Willmann-Bell Inc., 1992
- [3] Das Lorenz-System, Seminar über gewöhnliche Differentialgleichungen, Uni Hamburg, Uwe Jönck und Florian Prill, Februar 2003
- [4] Deterministic Nonperiodic Flow, Edward N. Lorenz, Journal of the Atmospheric Sciences, MIT, 1963
- [5] Classic Iterated Function Systems, Larry Riddle, Agnes Scott College, Website:
<https://www.larryriddle.agnesscott.org/ifs/ifs.htm>
- [6] Fraktale Geometrie und ihre Anwendungen, Florian Daikeler, Seminar im WS 2006/2007