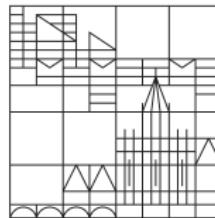


Landau-Niveaus und Quanten-Hall-Effekt in Graphen

Hermann Böttcher

Universität
Konstanz



22/11/2018

Landau-Niveaus

Energieaufspaltung durch Quantisierung der
Ladungsträgerbewegung im Magnetfeld.

Graphen - Einführung

Graphen - Einführung

- 2D Monoschicht aus Kohlenstoffatomen in Bienenwabenstruktur

Graphen - Einführung

- 2D Monoschicht aus Kohlenstoffatomen in Bienenwabenstruktur
- Grundbaustein aller andersdimensionalen Graphitstrukturen

Graphen - Einführung

- 2D Monoschicht aus Kohlenstoffatomen in Bienenwabenstruktur
- Grundbaustein aller andersdimensionalen Graphitstrukturen
- Zunächst für "akademisches Material gehalten"
(thermodynamisch instabil)

Graphen - Einführung

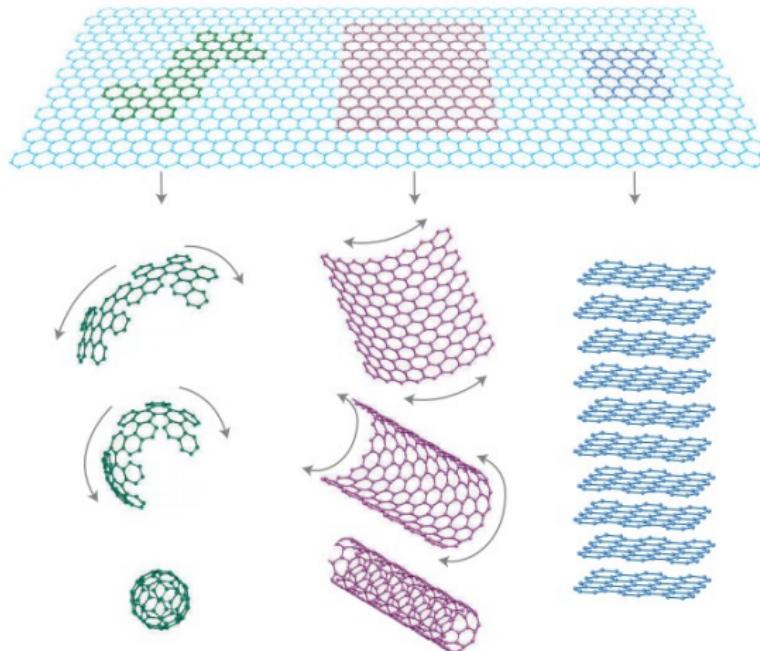
- 2D Monoschicht aus Kohlenstoffatomen in Bienenwabenstruktur
- Grundbaustein aller andersdimensionalen Graphitstrukturen
- Zunächst für "akademisches Material gehalten"
(thermodynamisch instabil)
- 2004 als stabile Strukturen entdeckt

Graphen - Einführung

- 2D Monoschicht aus Kohlenstoffatomen in Bienenwabenstruktur
- Grundbaustein aller andersdimensionalen Graphitstrukturen
- Zunächst für "akademisches Material gehalten"
(thermodynamisch instabil)
- 2004 als stabile Strukturen entdeckt
- Exceptionell hohe kristalline und elektronische Qualität

Graphitstrukturen

[2]



Produktion

Produktion

Abspalten mithilfe von Klebeband

Produktion

Abspalten mithilfe von Klebeband

20-100 Lagen

Produktion

Abspalten mithilfe von Klebeband

20-100 Lagen

Chemische Dampfablagerung auf Metallsubstraten

Produktion

Abspalten mithilfe von Klebeband

20-100 Lagen

Chemische Dampfablagerung auf Metallsubstraten

- Monolage
- Erhitztes Metallsubstrat ($T > 1000^\circ\text{C}$) wird Dampf (z. B. C_2H_4) ausgesetzt
- Moleküle spalten auf, C-Atome werden gebunden, H-Atome verdampfen

Quantenelektrodynamik in Graphen I

Quantenelektrodynamik in Graphen I

Besonderheiten in Graphen

Besonderheiten in Graphen

- Gebundene e^- im C-Atom → nicht relativistisch

Besonderheiten in Graphen

- Gebundene e^- im C-Atom → nicht relativistisch
- e^- im periodischen Potential der Kristallstruktur von Graphen
→ **relativistisch**

Besonderheiten in Graphen

- Gebundene e^- im C-Atom → nicht relativistisch
- e^- im periodischen Potential der Kristallstruktur von Graphen
→ **relativistisch**
- Masselose relativistische Teilchen als Ladungsträger (bei kleinen Energien!)

Besonderheiten in Graphen

- Gebundene e^- im C-Atom → nicht relativistisch
- e^- im periodischen Potential der Kristallstruktur von Graphen
→ **relativistisch**
- Masselose relativistische Teilchen als Ladungsträger (bei kleinen Energien!)
- Quasiteilchen; durch Dirac-Gleichung beschrieben

Besonderheiten in Graphen

- Gebundene e^- im C-Atom → nicht relativistisch
- e^- im periodischen Potential der Kristallstruktur von Graphen
→ **relativistisch**
- Masselose relativistische Teilchen als Ladungsträger (bei kleinen Energien!)
- Quasiteilchen; durch Dirac-Gleichung beschrieben
- v_F statt c

Quantenelektrodynamik in Graphen II

Der Hamiltonian für eine Monolage

Quantenelektrodynamik in Graphen II

Der Hamiltonian für eine Monolage

e^- entstammen einem der beiden Sub(-dreiecks-)gitter der Bienenwabenstruktur

Quantenelektrodynamik in Graphen II

Der Hamiltonian für eine Monolage

e^- entstammen einem der beiden Sub(-dreiecks-)gitter der Bienenwabenstruktur
→ *Pseudospin* wird eingeführt

Quantenelektrodynamik in Graphen II

Der Hamiltonian für eine Monolage

e^- entstammen einem der beiden Sub(-dreiecks-)gitter der Bienenwabenstruktur

→ *Pseudospin* wird eingeführt

$$\hat{H}_1 = \hbar v_F \begin{bmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0 \end{bmatrix} = \hbar v_F \vec{\sigma} \vec{k}$$

Quantenelektrodynamik in Graphen II

Der Hamiltonian für eine Monolage

e^- entstammen einem der beiden Sub(-dreiecks-)gitter der Bienenwabenstruktur

→ *Pseudospin* wird eingeführt

$$\hat{H}_1 = \hbar v_F \begin{bmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0 \end{bmatrix} = \hbar v_F \vec{\sigma} \vec{k}$$

Wert von Graphen für die Forschung

Quantenelektrodynamische Phänomene $\frac{c}{v_F} \approx 300$ mal stärker in Graphen als bisher in anderen Materialien observiert!

Chiralität

Definition

Zerlegung von Dirac-Spinoren in orthogonale Zustände, die unter Paritätsoperationen ineinander übergehen.

Chiralität

Definition

Zerlegung von Dirac-Spinoren in orthogonale Zustände, die unter Paritätsoperationen ineinander übergehen.

Von Graphen

Definition

Zerlegung von Dirac-Spinoren in orthogonale Zustände, die unter Paritätsoperationen ineinander übergehen.

Von Graphen

- Projektion von $\vec{\sigma}$ auf \vec{k}

Chiralität

Definition

Zerlegung von Dirac-Spinoren in orthogonale Zustände, die unter Paritätsoperationen ineinander übergehen.

Von Graphen

- Projektion von $\vec{\sigma}$ auf \vec{k}
- Positiv für Elektronen, negativ für Löcher

Chiralität

Definition

Zerlegung von Dirac-Spinoren in orthogonale Zustände, die unter Paritätsoperationen ineinander übergehen.

Von Graphen

- Projektion von $\vec{\sigma}$ auf \vec{k}
- Positiv für Elektronen, negativ für Löcher
- Kontext: k Elektronen, $-k$ Löcher

Landauniveaus I

Landau-Niveaus I

- Energiequantelung von Ladungsträgern im Magnetfeld

Landau-Niveaus I

- Energiequantelung von Ladungsträgern im Magnetfeld
- Bewegung orthogonal zum Magnetfeld auf Kreisbahnen

Landauniveaus I

- Energiequantelung von Ladungsträgern im Magnetfeld
- Bewegung orthogonal zum Magnetfeld auf Kreisbahnen
- Quantisierte Kreisbahnen wegen quantisiertem Spin

Landauniveaus I

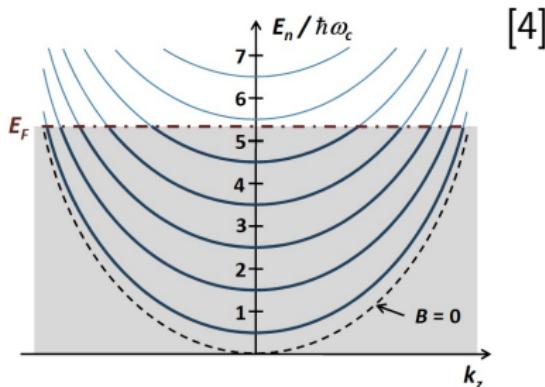
- Energiequantelung von Ladungsträgern im Magnetfeld
- Bewegung orthogonal zum Magnetfeld auf Kreisbahnen
- Quantisierte Kreisbahnen wegen quantisiertem Spin

$$E_n^{\text{Landau}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

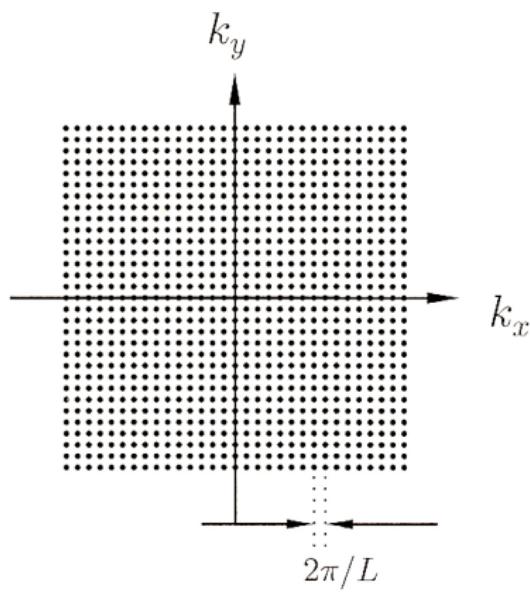
Landauniveaus I

- Energiequantelung von Ladungsträgern im Magnetfeld
- Bewegung orthogonal zum Magnetfeld auf Kreisbahnen
- Quantisierte Kreisbahnen wegen quantisiertem Spin

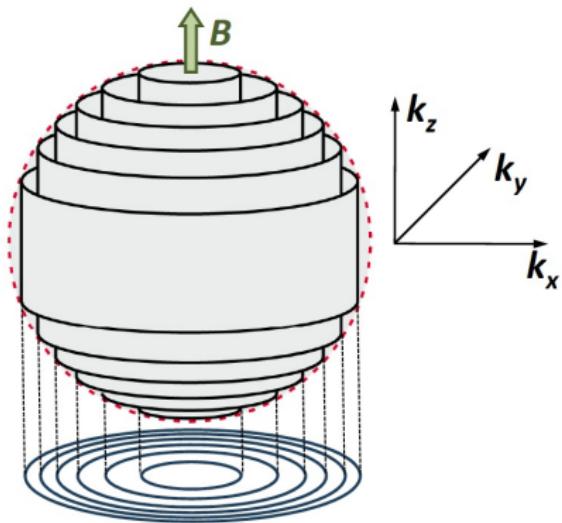
$$E_n^{\text{Landau}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$



Landauniveaus II



[4]



[4]

Landauniveaus in Graphen I

Normale Landauniveaus

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c$$

Monolage

$$E_n = \text{sgn}(n) \sqrt{2e\hbar v_f^2 |n| B}$$

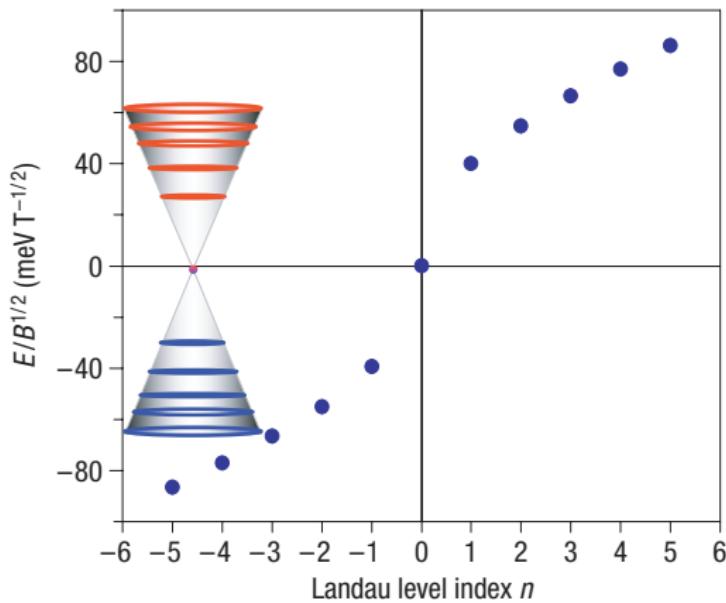
Doppellage

$$E_n = \text{sgn}(n) \hbar\omega_c \sqrt{|n|(|n| + 1)}$$

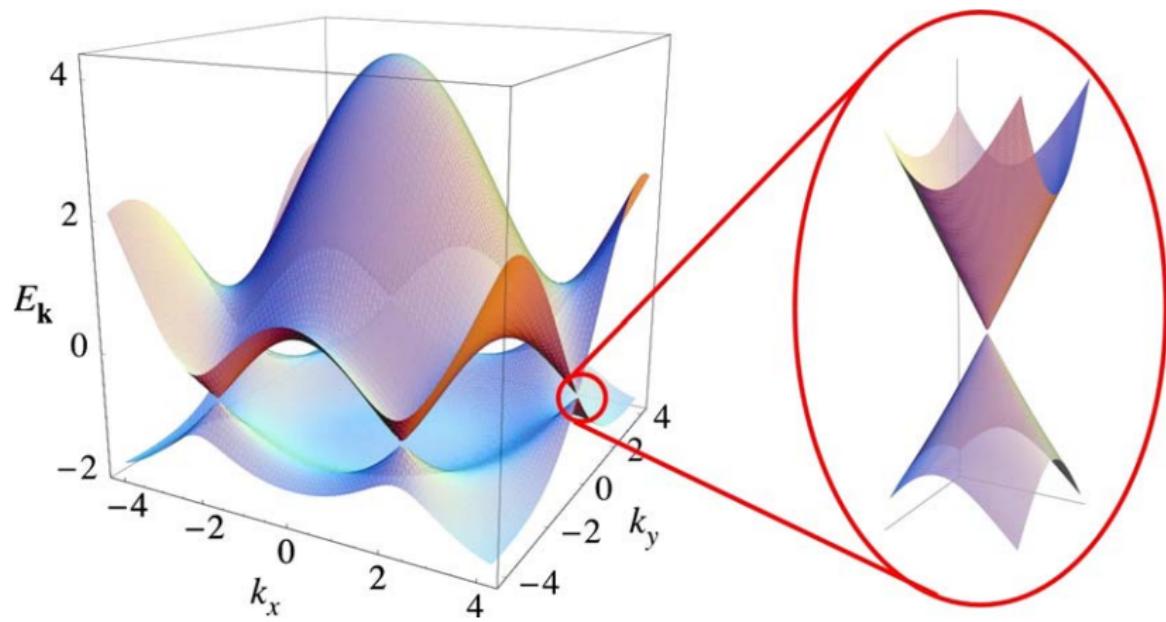


Landauniveaus in Graphen II

[3]



Landauniveaus in Graphen III



[1]

Entartung der Landauniveaus in Graphen

- Landauniveaus auf gegenüberliegenden Dirac-Punkten haben das gleiche Spektrum
- Jedes Landauniveau ist damit zweifach entartet
- Das null Energie Landauniveau teilen sich Elektronen und Löcher

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen I

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen I

Leitfähigkeitstensorkomponenten

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$\sigma_{xx}(\rho_{xx})$ -longitudinale Komponente, $\sigma_{xy}(\rho_{xy})$ -Hall Komponente

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen I

Leitfähigkeitstensorkomponenten

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$\sigma_{xx}(\rho_{xx})$ -longitudinale Komponente, $\sigma_{xy}(\rho_{xy})$ -Hall Komponente

Chemisches Potential in Region von

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen I

Leitfähigkeitstensorkomponenten

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$\sigma_{xx}(\rho_{xx})$ -longitudinale Komponente, $\sigma_{xy}(\rho_{xy})$ -Hall Komponente

Chemisches Potential in Region von

- lokalisierten Zuständen $\rightarrow \sigma_{xx} = 0 \rightarrow \rho_{xx} = 0, \rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}}$

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen I

Leitfähigkeitstensorkomponenten

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

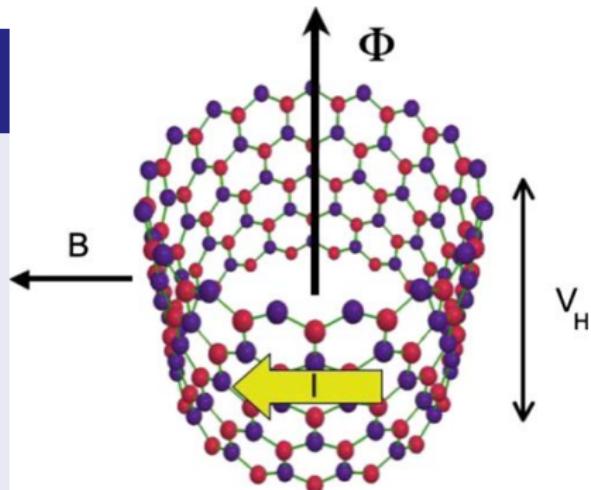
$\sigma_{xx}(\rho_{xx})$ -longitudinale Komponente, $\sigma_{xy}(\rho_{xy})$ -Hall Komponente

Chemisches Potential in Region von

- lokalisierten Zuständen $\rightarrow \sigma_{xx} = 0 \rightarrow \rho_{xx} = 0, \rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}}$
- delokalisierten Zuständen $\rightarrow \sigma_{xx} \neq 0$

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Laughlins Gedankenexperiment
für lokalisierte Zustände



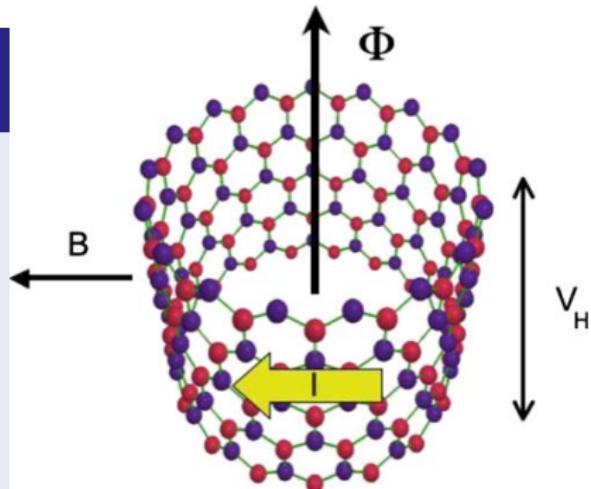
[1]

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Laughlins Gedankenexperiment
für lokalisierte Zustände

$$I = c \frac{\delta E}{\delta \Phi},$$

E -Gesamtenergie des Systems,
 Φ -Magnetischer Fluss



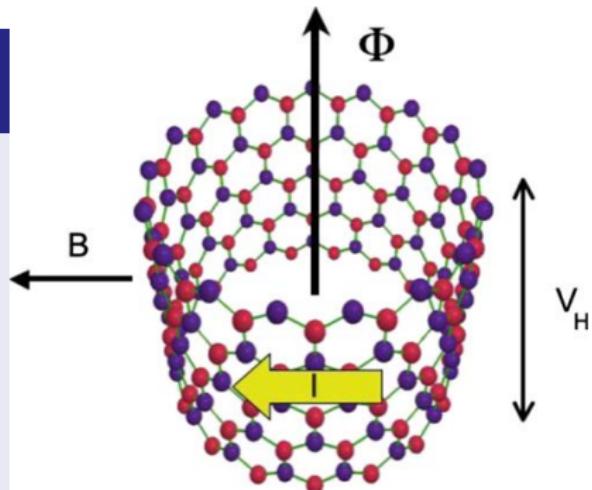
[1]

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Laughlins Gedankenexperiment
für lokalisierte Zustände

$$I = c \frac{\delta E}{\delta \Phi},$$

E -Gesamtenergie des Systems,
 Φ -Magnetischer Fluss
→ betrachte Flussänderung
 $\delta \Phi = hc/e$ (eine Flussquante)



[1]

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

- Alle Landau niveaus beteiligt

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

- Alle Landau niveaus beteiligt

$$\rightarrow \delta E_{\text{inc}} = \pm 4neV_H$$

$$\rightarrow I_{\text{inc}} = \pm 4(e^2/h)V_H$$

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

- Alle Landau niveaus beteiligt

$$\rightarrow \delta E_{\text{inc}} = \pm 4neV_H$$

$$\rightarrow I_{\text{inc}} = \pm 4(e^2/h)V_H \rightarrow \sigma_{xy,\text{inc}} = \frac{I}{V_H} = \pm 4ne^2/h$$

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

- Alle Landau niveaus beteiligt
 - $\delta E_{\text{inc}} = \pm 4neV_H$
 - $I_{\text{inc}} = \pm 4(e^2/h)V_H \rightarrow \sigma_{xy,\text{inc}} = \frac{I}{V_H} = \pm 4ne^2/h$
- ⚡ Hall-Plateau bei $n = 0$, wenn μ auf dem Dirac-Punkt liegt

Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

- Alle Landau-Niveaus beteiligt
 - $\delta E_{\text{inc}} = \pm 4neV_H$
 - $I_{\text{inc}} = \pm 4(e^2/h)V_H \rightarrow \sigma_{xy,\text{inc}} = \frac{I}{V_H} = \pm 4ne^2/h$
- ⚡ Hall-Plateau bei $n = 0$, wenn μ auf dem Dirac-Punkt liegt

Richtiger Ansatz

- Berücksichtigung des null-Energie-Niveaus



Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II

Falscher Ansatz

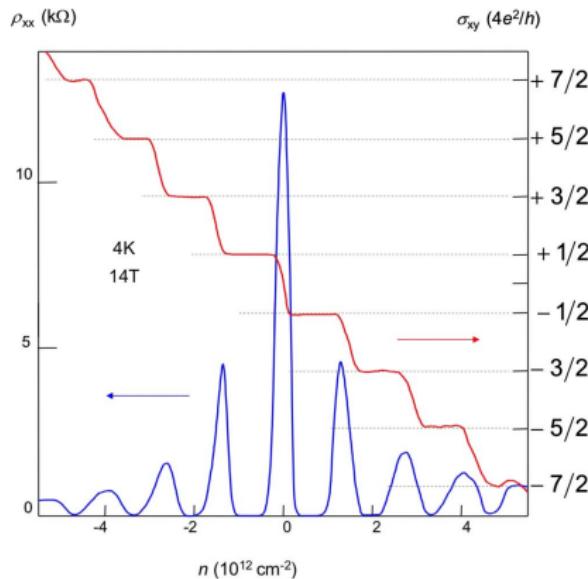
- Alle Landau niveaus beteiligt
 - $\delta E_{\text{inc}} = \pm 4neV_H$
 - $I_{\text{inc}} = \pm 4(e^2/h)V_H \rightarrow \sigma_{xy,\text{inc}} = \frac{I}{V_H} = \pm 4ne^2/h$
- ⚡ Hall-Plateau bei $n = 0$, wenn μ auf dem Dirac-Punkt liegt

Richtiger Ansatz

- Berücksichtigung des null Energie Niveaus
 - $\delta E = \pm 2(2n + 1)eV_H$
 - $\sigma_{xy} = \pm 2(2n + 1)\frac{e^2}{h}$



Annormaler ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in Graphen II



[2]

Zur Erinnerung

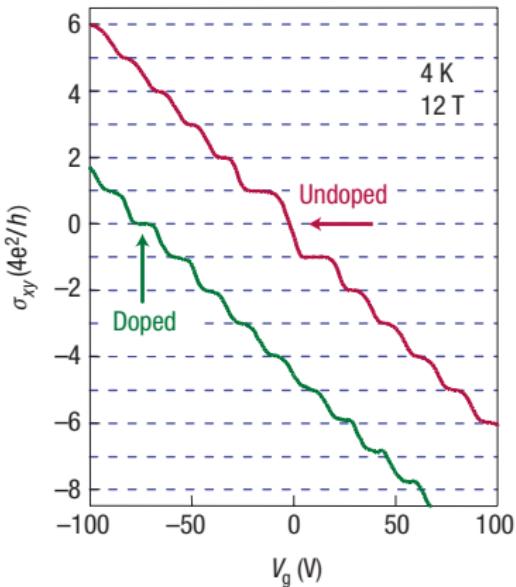
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{xy} = \pm 2(2n+1) \frac{e^2}{h}$$

Ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in bischichtigem Graphen I

- Chirale Quasiteilchen ($m \approx 0,05m_e$)
- Massive Dirac-Teilchen mit Pseudospin
- $$\delta E = \pm \hbar\omega \sqrt{n(n-1)}$$
- Zwei entartete Landau niveaus: $n = 0, n = 1$
-

Ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in bischichtigem Graphen II

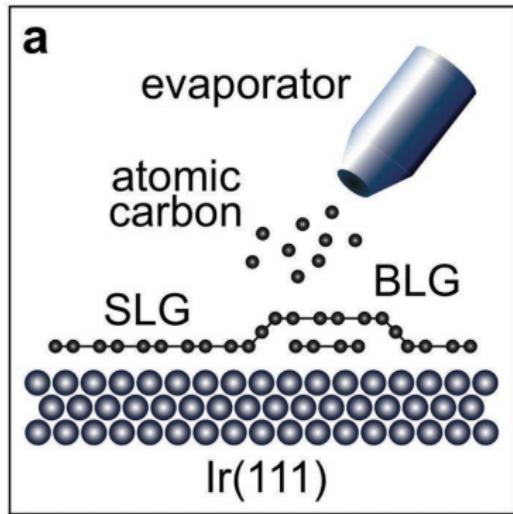


[2]

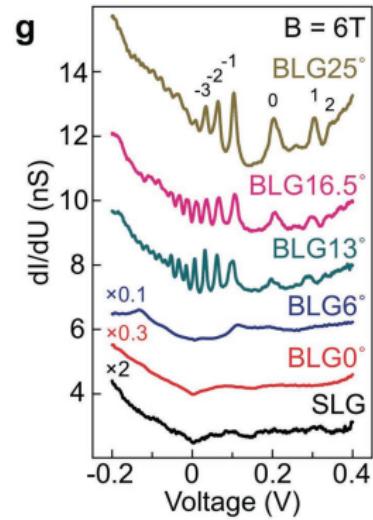
Electrischer Feld Effekt

- Durch *dopen* wird der Dirac-Punkt verschoben
- Entartung wird aufgehoben und die Doppelstufe verschwindet

Bischichtiges Graphen auf Metallsubstraten



[5]



[5]

Ganzzahliger Quanten Hall Effekt (QHE) in bischichtigem Graphen II