线性代数模拟试题(I)

一　　填空题

◆1.　设 A 为 3 阶方阵且 $|A|=2$，则 $|3A^{-1}-2A^{*}|=$ ____________；

【分析】只要与 A^{*} 有关的题，首先要想到行列式的展开定理，$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，从中推你要的结论。这里 $A^{*}=|A|A^{-1}=2A^{-1}$ 代入

$$|3A^{-1}-2A^{*}|=|-A^{-1}|=(-1)^{3}|A^{-1}|=\frac{-1}{|A|}$$

注意：　为什么是 $(-1)^{3}$

◆2.　设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，

如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 β_1,β_2,β_3 线性______(相关)

如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 β_1,β_2,β_3 线性______(无关)

【分析】对于此类题，最根本的方法是把一个向量组由另一个向量表示的问题转化为矩阵乘法的关系，然后用矩阵的秩加以判明。参阅教材 P89 例 6

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$，记此为 $B=AK$

如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 是列满秩矩阵，它左乘一个矩阵不改变这个矩阵的秩（可以用这个结论），这里 $r(B)=r(AK)=r(K)$，这样 B 的秩就等于 K 的秩，如果 $=3$（所含向量个数），B 的列向量 β_1,β_2,β_3 就是无关的，否则 K 是相关的。

切不可两边取行列式！！因为矩阵不一定是方阵！！

你来做　下面的三个题：

（1）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（$m\geq 2$）线性无关。设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$$

试讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的线性相关性。（答案：m 为奇数时无关，偶数时相关）

（2）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，试问常数 m,k 满足什么条件时，向量组

$$k\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$$

线性无关？线性相关？（答案：当$mk\neq 1$时，无关；当$mk=1$时，相关）

（3）教材 P110 第 19 题和第 20 题

◆3. 设非齐次线性方程$A_{m\times 4}x=b$，$r(A)=2$，η_1,η_2,η_3是它的三个解，且

$\eta_1+\eta_2=(3,4,6,7)^T,\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T,\eta_3+\eta_1=(2,3,4,5)^T$

求该方程组的通解。(答案：$x=\frac{1}{2}(2,3,5,6)^T+k_1(1,1,1,1)^T+k_2(1,1,2,2)^T$，形式不唯一)

【分析】对于此类题，首先要知道齐次方程组基础解系中向量的个数（也是解空间的维数）是多少，通解是如何构造的。其次要知道下面的结论：

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$是非齐次方程组$Ax=b$的解，则

（1）$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_m\eta_m$是$Ax=0$的解$\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_m=0$

（2）$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_m\eta_m$是$Ax=b$的解$\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_m=1$

你再做 教材 P111 第 29 题

◆4. 当$k=$______时，$\beta=(1,k,5)$能由$\alpha_1=(1,-3,2),\alpha_2=(2,-1,1)$线性表示

（答案$k=-8$）

【分析】一个向量能否用一个向量组表示的问题，可转化为非齐次方程组有无解的问题，再利用矩阵的秩去判别。对于此题，记$A=[\alpha_1,\alpha_2]$，看看$Ax=\beta$是否有解，有解就是能表示，无解就是不能表示，有唯一解就是表示是唯一的。表示系数（组合系数）就是解。这里只要求k使$r(A)=r[A,\beta]=2$的秩即可，这里$[A,\beta]$是方阵，用行列式的方法是方便的$|A,\beta|=3k+24=0$

你来做：设$\beta=(2,-1,t+2)^T$，$\alpha_1=(t+1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,t+1,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,t+1)^T$，问t为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表法唯一；$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表法无穷多并写出所有的表示方法。

注意：关于含参数的方程组求解，如果系数矩阵是方阵，用行列式的方法往往简单，如果不是方阵只有用初等行变换的方法了。

◆5. 设$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，求$\alpha_2,\alpha_3$使$Q=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$为正交矩阵

【分析】求与一个向量正交的问题，就是解方程组的问题

$$\alpha_1^T x = 0$$

当然要根据题之要求，还要使用 Schimidt 正交化，单位化过程（答案：详见教材 P117 例 3，还要再单位化）

你写一写

正交矩阵的充要条件有哪些，如果给你两个正交向量求一个向量与它们都正交你也应该会！

二　选择题

◆1.　设 A,B 为满足 $AB=0$ 的两个非零矩阵，则必有

(A)　A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关

(B)　A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

(C)　A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关

(D)　A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

【分析】遇到 $A_{m\times n}B_{n\times p}=0$，就要想到 $r(A)+r(B)\le n$ 以及 B 的列向量均是线性方程组 $Ax=0$ 的解。

思路 1：$r(A)+r(B)\le n$，又 A,B 为非零矩阵，必有 $0<r(A)<n$，$0<r(B)<n$，所以 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故选(A)。

思路 2：B 的列均为 $Ax=0$ 的解，又 B 为非零矩阵，说明 $Ax=0$ 存在非零解，所以 $r(A)<n$，所以 A 的列向量组线性相关。考虑 $B^TA^T=0$，又知 B^T 的列向量组即 B 的行向量组线性相关，故选(A)。

另外：　遇到 $C=AB$ 要想到 C 的列组都是 A 的列组的线性组合，C 的行组都是 B 的行组的线性组合。从这个角度也可做此题，你来想想。

◆2.　设 $r(A_{m\times n})=m<n$，则（　）（多选）。

（A）$A\xrightarrow{r}[E_m,O]$

（B）$A\xrightarrow{c}[E_m,O]$

（C）对 $\forall b\in R^n$，$Ax=b$ 必有无穷多解

（D）若 $BA=O\Rightarrow B=O$

（E）$\left|A^TA\right|=0$（答案:B,C,D,E）

【分析】

（I）　(A)和(B)是化标准形的问题。这里 A 是行满秩矩阵，必有 m 阶子式非零，这个

m 阶子式所在的行就是 A 的所有的行，只用列变换可把它所在的 m 列调到前面来

$$A \xrightarrow{C} [B_{m\times m}, C]$$

此时 B 是非奇异矩阵，可只用列变换化为单位矩阵，然后用此单位矩阵只用列变换把后面的矩阵 C 消为零。故（B）是对的。（A）不对。

（II） 对于（C）要知道，如果 A 是行满秩矩阵，则 $Ax = b$ 一定是有解的，这是因为 $m = r(A_{m\times n}) \le r(A_{m\times n}, b) \le m \Rightarrow r(A) = r(A,b)$

至于是否有唯一解还是有无穷多解还要把增广矩阵的秩（即独立方程组的个数）与未知数的个数（即 A 的列数比较），由题设 $r(A_{m\times n}) = m < n$，故有无穷多解（C）也是对的。

（III） 对于(D)这是书上定理 $AX = O$ 只有零矩阵解的充要条件是 A 是列满矩阵的变形 $BA = O \Leftrightarrow A^T B^T = O$ 这里 A^T 是列满秩, 故(D)也是对的。

（IV） 对于（E）要了解形如 $A^T A$ 的是一个非常重要的矩阵，你必须知道这两个结论一是 $A^T A$ 是一个对称半正定的矩阵（这用 $x^T(A^T A)x \ge 0$ 是很容易证明的），二是 $r(A) = r(A^T A)$（这是书上的例题）。用第二个结论立即知 $A^T A$ 可逆（实际上是对称正定）的充要条件是 A 是列满秩。这样就（E）是对的。

另外：对于 $A_{m\times n} B_{n\times m}$ 型的矩阵，如果 $m > n$，一定有 $|A_{m\times n} B_{n\times m}| = 0$（这是因为 $r(A_{m\times n} B_{n\times m}) \le r(A) \le n < m$），记忆方法：高的矩阵乘矮的矩阵一定不可逆的（如果是方阵的话）

◆3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n \ge 2)$，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，则（ ）

（A）交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* （B）交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*

（C）交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$ （D）交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

【分析】对于此类题你不仅要熟悉伴随矩阵的运算还要熟悉初等矩阵的性质。交换 A 和第 1 行和第 2 行得 B，则有 $E(i,j)A = B$（左行右列原则），从而 $-|A| = |B|$，由此关系找 A^* 与 B^* 的关系：

$$B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}E(i,j)^{-1} = -|A|A^{-1}E(i,j) = -A^*E(i,j)$$

由此知(C)是对的。

◆4. 设 A 为方阵，α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量，则（ ）是 A 的特征向量

（A）α_1 与 α_2，（B）$\alpha_1+\alpha_2$，（C）$\alpha_1-\alpha_2$，（D）（A）、（B）、（C）都是

【分析】齐次方程组有有两个不的解，当然必有非零解，从而必有特征值 0，对应的特征向量就是其非零解。这里要选（C）才能保证是非零的。把此题变化一下：

设 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个不同的解向量，$r(A_{m\times n})=n-1$，则（　）是 $Ax=0$ 的基础解系。

（A）α_1（B）α_2，（C）$\alpha_1+\alpha_2$，（D）$\alpha_1-\alpha_2$

◆5.　与矩阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是（　）（答案：B）

（A）$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，（B）$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，（C）$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，（D）$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

【分析】首先相似矩阵有相同的特征值，都是 1（二重）和 2（单重），如有不是的就该排除，这里没有。这就要靠矩阵可对角化的充要条件是任一特征值的重数等于它所对应的无关特征向量的个数（也称几何重数）去判别。即 $n_i=n-r(\lambda_i E-A)$ 亦即 $r(\lambda_i E-A)=n=n-n_i$，对于单重的不需要考虑（**这是为什么？**），只需考虑多重的。这里只需考虑　$r(1\cdot E-A)\overset{?}{=}3-2=1$

三　　计算题

◆1.　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$

提示　此行列式特点是对角元不等，其余相等。每一行减第一行。你还有更好的方法吗。

答案　$-2\times(n-2)!$）

评注　关于行列式的计算重点掌握化三角形，以及特殊分块行列式的计算

◆2.　解矩阵方程 $\left[(\frac{1}{2}A)^*\right]^{-1}XA^{-1}=2AX+12E$

其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$，求 X

提示　先化简方程为：　$X(4E-2A)=12E$

答案　$X=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$

评注　关于解矩阵方程一定要先化简，变为如下形式之一

$$AX=B, XA=B, AXB=C$$

主要考察矩阵的基本运算，矩阵求逆等知识。

注意　左乘还右乘的关系，这是同学们最容易错的。

◆3.　设向量组

$$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$$

求此向量组的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

提示　按上课教的方法把向量按列排成矩阵只用行变换化最简阶梯形，参照教材 P94 例 11

答案　最简阶梯形为 $T=\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

注意　不管给的是行向量还是列向量一定要按列排成矩阵只作行变换，一定要化到最简阶梯形。**常见错误**是没有化到最简或中途使用了列变换。

评注　此题变形为下面的题，做法是一样的

下面方程组哪些方程是独立的，哪些是多余的，并把多余方程用独立方程表示出来

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_1+3x_2+4x_3=5\\3x_1+4x_2+5x_3=6\\4x_1+5x_2+6x_3=7\end{cases}$$

◆4.　当 λ,μ 何值时，下面方程组有唯一解，无解，有无穷多解，有无穷多解时求通过解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 & = 4 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 & = \mu \end{cases}$$

提示　对于含参数的方程组，如果系数矩阵是方阵往往采用行列式法较简单，这也是首选的方法，但是如果不是方阵只有一种方法就是行变换的方法。

步骤是：当$|A| \neq 0$时有唯一解，

当$|A| = 0$时（这时参数已经确定了）可能无解也可能有无穷多解，这要分别讨论

如果右端项还有参数，只有用行变换的方法再讨论

答案　$|A| = 3\lambda - 15$，其它你来完成

注意　**常见错误**：求通解时没有化到最简阶梯形，这样自由变量不好区分，很容易出错。所以要记住，一定要化到最简阶梯形，然后再求解。

评注　这类题主要考察学生对方程组解的存在定理掌握如何，并考察求通解的能力。

你来回答下面方程组或矩阵方程有解（唯一解等）的充要条件是什么？

$Ax = b(b \neq 0), Ax = 0, AX = B, AX = O$

◆5.　设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Qy$

化为标准形为 $f = y_1^2 + by_2^2 + 4y_3^2$

（1）求参数 a, b；（2）求正交换矩阵 Q

评注　二次型正交变换化标准的问题实质就是对称矩阵正交对角化的问题，所以要把这类问题转化为矩阵问题来处理。

注意　二次型的矩阵我们规定一定是对称的，如果二次型矩阵写不对的话，该题一分不得。

提示　二次型的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

这里标准形告诉你了，就等于告诉你特征值了

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & b & \\ & & 4 \end{bmatrix} \triangleq \Lambda$$

特征值为$1, b, 4$，为确定参数常用下面方法

$$\begin{cases} |A| = |\Lambda| \\ trA = tr\Lambda \end{cases}，解得 a=1, b=-2。$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$，求得其对应的特征向量分别为

$\alpha_1 = (-2,-1,2)^T$，$\alpha_2 = (2,-2,1)^T$，$\alpha_3 = (1,2,2)^T$

由于特征值互异，它们是正交的，检查一下如果不正交说明你做错了。

答案 $Q = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

提醒 如果只是一般的可逆变换 $x = Py$ 化标准形为 $f = y_1^2 + by_2^2 + 4y_3^2$，这里标准形的系数不再是特征值了，只有正交矩阵既是相似关系又是合同关系 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ$。一般不会出这样的题。

再注 一般二次型用正交变换化标准形的题，最常见的是教材 P127 例 12，P132 例 11 这种题型，**你要好好看看，并完整地做一遍**。

四 证明题

◆1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 n 维列向量，β_1 和 β_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 都正交，证明 β_1，β_2 线性相关。

提示 前面曾经说过，把正交关系看成齐次方程组。由题意 β_1，β_2 都是方程组 $\alpha_1^T x = 0, \alpha_2^T x = 0, \cdots, \alpha_{n-1}^T x = 0$ 的解，其系数矩阵

$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{bmatrix}_{(n-1)\times n}$ 的秩为 $r(A) = n-1$，说明 $Ax = 0$ 只有一个线性无关的解。

评注 这只是方法之一，可以说是最简单的。

◆2. 证明 $r(A) = r(A^T A) = r(AA^T)$

提示 第一个等号见教材 P101 例 15。

第二个等号绝不是同理可证的关系。因为 $Ax = 0$ 与 $AA^T x = 0$ 没有同解的关系，未知数的个数不等。应该这样证：利用第一个结论

$r(AA^T) = r\left[(A^T)^T (A^T)\right] = r(A^T) = r(A)$

评注 以上两个证明题都用到齐次方程组解空间的维数定理，望对这个定理予以重视。

线性代数模拟试题（II）

一　填空题

◆1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，则 x,y 应满足的关系为 $\underline{\ x+y=0\ }$

【提示】按题意 A 是可对角化的，求其特征值，重根的重数应满足什么关系？

参照教材 P125 例 11

◆2. 设 A 是 3 阶实对称矩阵且 $A^3-A^2-A=2E$，则 A 的二次型经正交变换化为标准形为 $\underline{\ f=2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2\ }$

【提示】设 A 的特征值为 λ，它必满足：$\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda+1)=0$，由于实对称矩阵特征值全是实数，故 A 的特征值全是 2。

◆3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$，则 $|A^*-3A+2E|=\underline{\ 637\ }$

【提示】参考教材 P122 例 9

◆4. 设矩阵 A 的各行元素之和都等于 2，则 A 必有特征值为 $\underline{\ 2\ }$，对应的特征向量为 $\underline{\ [1,1,\cdots,1]^T\ }$

【提示】 $A\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\\vdots\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

◆5. 设非齐次方程组 $A_{m\times 4}x=b$ 系数矩阵的秩为 3，且它的三个解向量 η_1,η_2,η_3 满足

$\eta_1=[2,3,4,5]^T,\eta_2+\eta_3=[1,2,3,4]^T$，

则 $Ax=b$ 的通解为 $\underline{\ k[3,4,5,6]^T+[2,3,4,5]^T,k\in R\ }$

【提示】这是教材 P111 的第 29 题

二　选择题

◆1. 设 A,B 都是 n 阶方阵，如果 $AB=O$，必有（C）

（A） $A=O$ 或 $B=O$；（B） $BA=O$；

（C） A 与 B 有一个不可逆；（D） A 与 B 有一个可逆

【提示】取行列式 $|A||B|=0$

◆2. 方阵 A 与 B 相似的充分条件是（C）

(A) $|A|=|B|$；（B） $r(A)=r(B)$；

(C) A 与 B 有相同的特征值且这些特征值互异；（D） A 与 B 有相同的特征值

【提示】注意题中是充分条件，而（A）(B)（D）都是必要条件

如果（C）成立，则 A 与 B 都可对角化到同一个对角矩阵，

$$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}AP_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

◆3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B（C）

(A) 不合同但相似　(B) 合同但不相似

(C) 合同且相似　(D) 既不合同也不相似

【提示】A 是对称矩阵，易求得 A 的特征值为 4 和 0 （三重）[**参见教材 P139 第 21 题**]

A 可正交对角化（既合同又相似），对角矩阵对角元就是其特征值。

◆4. 设 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=b$ 的通解是(C)

（A） $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；（B） $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

（C） $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；（D） $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

【提示】α_1 与 $\alpha_1+\alpha_2$ 线性无关，仍然是 $Ax=0$ 的基础解系。

$\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是 $Ax=b$ 的一个解。虽然（D）有可能是通解，但选择题应选肯定的，故（D）不能选。

◆ 5． 设 $A \xrightarrow{r} B$，则下面说法不对的是(C)

（A） A 的行组与 B 的行组等价　　（B） A 与 B 等价

（C） A 的列组与 B 的列组等价　　（D） A 的列组与 B 的列组有相同的线性关系

【提示】由题设

（A）是对的，[见教材 P 85 最上一段]

（B）是对的，这是矩阵等价的特征例 [见教材 P59 定义]

（D）是对的，[见教材 P95 第 4 行] 这也是我们求最大无关组的依据

三　计算题

◆1.　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$

提示　[这是教材 P28 习题 7（6）]从第 2 列开始每一列减第 1 列得“爪形”行列式

$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1\\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n\end{vmatrix}$，然后再化三角形得 $D_n=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k})$

◆2.　解矩阵方程 $A^*XA=2XA-8E$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ & -2 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}$

提示　$|A|=-2$，A 可逆，化简方程为 $(A+E)X=4E$

$$X=4(A+E)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ & -4 & 0\\ & & 2\end{bmatrix}$$

注意　上三角矩阵的逆矩阵一定是上三角

◆3. 设 3 阶对称矩阵阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，

（1）求正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵；（2）计算 A^n

提示 [这是教材 P139 习题 20]此题是对称矩阵正交对角化的问题，但对应对 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量未知，利用对称矩阵的性质可求之，与 α_1 正交的非零向量必是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量，解方程组 $\alpha_1^T x=0$ 得基础解系（最好直接求得正交的，见下面做法）

$$x_1=-x_2-x_3，\text{取}\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\\mu\end{bmatrix}（\mu\text{ 是待定参数）得}$$

$$\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}，\ \alpha_3=\begin{bmatrix}-1-\mu\\1\\\mu\end{bmatrix}，\text{令 }\alpha_2^T\alpha_3=0\Rightarrow\mu=-2$$

这样就得正交的基础解系，也就是对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量

只要再它们单位化，拼成矩阵即为所求的正交矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{-2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

此时 $P^{-1}AP=P^TAP=\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}=\Lambda$，$A=P\Lambda P^T$，$A^n=P\Lambda^nP^T$

注意 上面 μ 要非零，才能保证两个向量无关，如果求不出要求 μ 再换一种方式。

◆4. 设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$$

（1）求矩阵 B，使得 $A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B$；

（2）求矩阵 A 的特征值；

（3）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

提示 $A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，即 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

上式右边就是要求的得 B

A 的特征值就是 B 的特征值，你来求一下。

◆5. 求一齐次线性方程组，使其基础解系为

$$\xi_1=(0,1,2,3)^T，\ \xi_2=(3,2,1,0)^T$$

提示 [这是教材 P110 习题 24]设所求方程组为 $Ax=0$，由题设 $A[\xi_1,\xi_2]=0$，如果记 $B=[\xi_1,\xi_2]$，则 $AB=0$ 即 $B^TA^T=0$，这说明 A^T 的列都是方程组 $B^Tx=0$ 的解。把 $B^Tx=0$ 的解（只需要基础解系）作为列拼成 A^T 即可。

解方程组 $B^Tx=0$，得基础解系为

$\alpha_1=(1,-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,-3,0,1)^T$

令 $A^T=[\alpha_1,\alpha_2]$，$A=\begin{bmatrix}\alpha_1{}^T\\\alpha_2{}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\2&-3&0&1\end{bmatrix}$

四 证明题

◆1. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$

（1）求 A 的全部特征值；

（2）证明 $E+A$ 是正定矩阵；

（3）证明 $(E+A)^{-1}+\dfrac{1}{n+1}A=E$

提示 （1）$A=\alpha\alpha^T,\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，由教材 P139 习题 21 知其全部特征值，这里再做一下：

由 $A\alpha=(\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha=(\alpha^T\alpha)\alpha$ 知 A 有一个非零特征值 $\lambda=\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2=n$，对

应的特征向量就是α。另外A是对称矩阵且$1\le r(A)\le r(\alpha)\le 1$知$r(A)=1$，从而$A$可对角化，利用秩相等，就知对角矩阵对角元必为一个非零元（即$\alpha^T\alpha$）和$n-1$个零，这说明0是A的$n-1$重特征值。当然也可直接求到此结论。

（2）首先易知$E+A$是对称矩阵，其次特征值为$1+\lambda_i(A)>0$，得证。

也可这样$\forall x\ne 0$，$x^T(E+A)x=x^Tx+x^T\alpha\alpha^Tx=x^Tx+(x^T\alpha)^2>0$

（3）记$B=(E+A)^{-1}+\dfrac{1}{n+1}A-E$，$B$是对称矩阵，可对角化，要证$B=O$，只需证$B$的特征值全是零（**想想这是为什么？**）

易知B的特征值为$\lambda_i(B)=\dfrac{1}{1+\lambda_i(A)}+\dfrac{1}{n+1}\lambda_i(A)-1$，下面继续算一算是否都是零。

了解　你来直接验证结论：设$A=E+\alpha\beta^T$，则A可逆的充要条件是

$1+\beta^T\alpha\ne 0$，此时$A^{-1}=E+\sigma\alpha\beta^T$，$\sigma=\dfrac{-1}{1+\beta^T\alpha}$

◆2.　设n阶矩阵A满足$A^2=A$，证明A必可对角化

提示　这一题实质上就是教材 P110 习题 26：$r(A)+r(A-E)=n$

下面分析一下二者的关系：由$A^2=A$知A的特征值为0或1；对应于特征值0的无关特征向量的个数为$n-r(A)$，对应于特征值1的无关特征向量的个数为$n-r(A-E)$，二者之和

$$n-r(A)+n-r(A-E)=2n-[r(A)+r(A-E)]=2n-n=n$$

说明A有n个无关的特征向量，从而可对角化。

下面再证：$r(A)+r(A-E)=n$

一方面，由$A^2=A$得$A(A-E)=O$，从而$r(A)+r(A-E)\le n$[见教材 P101 例 13]

另一方面，由$E=A+E-A$得，

$$n=r(E)=r(A+E-A)\le r(A)+r(E-A)=r(A)+r(A-E)$$

了解　如果$A^2=E$也有类似的结论，你来试一试。

◆3.　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维的向量，证明它们线性无关的充要条件是：任一$n$维向量都可由它们线性表示。[教材 P110 习题 17]

提示　如果它们线性无关，则对任一n维向量α，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$线性相关（n+1 个 n 维向量），由 P90 定理 5（3），得α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一表示。

反之，设任一n维向量都可由它们线性表示，特别取坐标向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$当然也可由它们表示，这样$n=r(E)=r[e_1,e_2,\cdots,e_n]\le r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\le n$，推得$r[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=n$，说明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关（注：这里秩看成是矩阵的秩或向量组的秩都可以）

提醒　上述每一步的依据你都要想清楚，这会大有好处的。

◆4.　设A是实对称矩阵，如果它既是正交矩阵又是正定矩阵，证明只能是单位矩阵。

提示　A对称，则A可正交对角化，$A=Q\Lambda Q^T$

由A对称正交，得$A^2=E\Rightarrow Q\Lambda^2Q^T=E\Rightarrow\Lambda^2=E$

又A正定，Λ的对角元全正，全是1，即$\Lambda=E$

总评　如遇关于对称矩阵的证明题，首先要想到它可正交对角化，一般都是可以证出来的。

说明　一般考试时，只有大约两道证明题，这里给了四个，只是一种练习而已。

线性代数模拟试题(Ⅲ)

一　填空题

◆1.　设 3 阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\beta_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$|A|=m$，$|B|=n$，

则 $|A+B|=$ ______

提示：　$|A+B|=|\alpha_1+\beta_1,2\alpha_2,2\alpha_3|=|\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3|+|\beta_1,2\alpha_2,2\alpha_3|=4|A|+4|B|$

答案：　$4(m+n)$

◆2.　设 $A^3+A^2-A=E$，且 $|A-E|\neq 0$，则 $A^{-1}=$ ______

提示：　由条件得 $A^2(A+E)-(A+E)=O$，$(A+E)^2(A-E)=O$

由 $A-E$ 可逆，得 $(A+E)^2=O$ 即 $A^2+2A+E=O$ 再变形

$A(A+2E)=-E$ 从而 A 可逆并且有下面答案

答案：　$A^{-1}=-(A+2E)$

◆3.　设 $\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^n=$ ______

提示：　$A^n=\alpha(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)^{n-1}(\alpha\beta^T)$

答案：　$3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{bmatrix}$

◆4.　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$，线性方程组 $Ax=b$ 有解但不唯一，则 $a=$ _____

提示：　$|A|=-(a+2)(a-1)^2=0$，$a=-2$ 或 $a=1$，但 $a=1$ 时无解，应排除。

答案：　$a=-2$

◆5.　设 A 为 n 阶方阵（$n\geq 2$），$|A|=0$，$A^*\neq 0$，则 $Ax=0$ 的基础解系中向量的个数

(即解空间的的维数)是______

提示： 参见教材 P11 0 第 27 题结论：

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)\le n-2 \end{cases}$$

由此得知 $r(A)=n-1$

答案： 1

二 选择题

◆1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则（ ）也是一个基础解系。

（A） $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ （B） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3$；

（C） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ （D） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

提示： 基础解系含 3 个向量，故（A）（B）排除，（C）（D）中向量虽都是解但要找线性无关的，观察知（C）相关，因为组合系数全取 1 则等于零，剩下的只有（D）可选。实际上教材 P 89 例 6 已证明了此结论。在前面的模拟题中重点强调了遇到一个向量组表示另一个向量组的问题要转化为矩阵的乘法关系，这样可处理更复杂而不易观察的问题。比如对于（C）

令 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1$，则

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 是列满秩，最右边的矩阵不可逆，故

$$r[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=r(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix})<3$$，知 β_1,β_2,β_3 线性相关

答案： （D）

◆2. 设 $P_{3\times 3}\ne O$， $Q=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ，且 $PQ=O$，则（ ）。

（A）$t=6$时，必有$r(P)=1$　　（B）$t=6$时，必有$r(P)=2$

（C）$t\neq 6$时，必有$r(P)=1$　　（D）$t\neq 6$时，必有$r(P)=2$

提示：　再次强调，遇到$A_{m\times n}B_{n\times p}=O$要想到$r(A)+r(B)\leq n$

这里$r(P)+r(Q)\leq 3$，由假设$r(P)\geq 1$，$r(Q)\geq 1$，

如果$t=6$，则$r(Q)=1$，此时$r(P)$可以是 1 或 2，故（A）（B）排除

当$t\neq 6$时，此时$r(Q)=2$，故只有$r(P)=1$

答案：　（C）

◆3.　设A与B都是n阶的方阵，则下面不对的是（　　）

(A) $|AB|=|BA|$　　(B) AB与BA有相同的特征值

(C) AB与BA相似　　(D) AB与BA的对角元素之和相等

提示：　由行列式的乘法定理知（A）是对的；

由教材 P138 习题 10 知，AB与BA有相同的非零特征值，又它们是同阶方阵，故零特征值也相同，所以（B）是对的，从而（D）是对的，因为特征值之和等于对角元素之和（见教材 P119），根据排除法只能选（C）。

注意：如果A，B中有一个可逆，则AB与BA一定相似，这是教材 P138 习题 13.。

举个例子吧：$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

显然AB与BA不相似，因为如果$P^{-1}(AB)P=BA=O$，则$AB=O$，矛盾。

答案：　（C）

◆4．　与矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$合同的矩阵是（ ）

（A）$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$

提示： 看一看两个矩阵正的特征值和负的特征值的个数（两正一负）

答案： （B）

◆5． 设 A,B 均为 n 阶对称矩阵，则使 A,B 合同的充要条件是（ ）

（A）A,B 的秩相同 （B）A,B 都合同于对角矩阵

（C）A,B 有相同的特征值 （D）A,B 的二次型有相同的标准形

提示： 两个对称矩阵合同等价地说法是它们的二次型等价（即可以用可逆变换互化）

是否合同由它们的秩和正惯性指数（也是正的特征值的个数）所决定。合同必秩相等但反之不然，故（A）错。

任何对称矩阵都与对角矩阵合同（也就是任何二次型

都可化为标准形），故（B）错。

有相同的特征值一定合同，但合同不一定有相同的特征值，故（C）错。

自己想想为什么（D）对。

答案： （D）

三 计算题

◆1. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$（教材 P27 习题 5（5））

提示 [方法一]按第 1 列展开得递推关系式 $D_n = xD_{n-1} + a_n$

[方法二]从最后一列开始每一列乘 x 加到其前一列上

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & -1 \\ t & \times & \cdots & \times & x+a_1 \end{vmatrix}$$ 其中 $t = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

再按第 1 列展开

$$D_n = t\times(-1)^{n+1}\times\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = t \quad = x^n + a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

◆2. 解矩阵方程 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$，其中

$$A^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$（教材 P55 习题 22）

提示 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$(教材 P55 习题 18)，得 $|A^*|=8$，$|A|=2$，方程两边右乘 A 左乘 A^*

$A^*AX=A^*X+3A^*A$，$|A|X=A^*X+3|A|E$，$(2E-A^*)X=6E$

$X=6(2E-A^*)^{-1}$

$$2E-A^*=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

用教材 P56 习题 29（2）求逆公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

求 $2E-A^*$ 逆，$\left(2E-A^*\right)^{-1}=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \end{array}\right]$

$$X=\begin{bmatrix} 6 & & & \\ 0 & 6 & & \\ 6 & 0 & 6 & \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◆3. 问 a,b 为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2b \end{cases}$$

有解，无解，有解时求通解。

提示 由于该方程组系数矩阵 A 不是方阵，只能用初等变换的方法进行讨论。

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & a & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & 2b \end{array}\right] \xrightarrow{r} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -b \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 1-b \end{array}\right]$$

当 $a\neq -8$ 时，b 任意，$r(A)=r(\tilde{A})=3<4$，方程组有无穷多解；

当 $a=-8$ 且 $b\neq 1$ 时，$r(A)=2, r(\tilde{A})=3, r(A)\neq r(\tilde{A})$，方程组无解；

当 $a=-8$ 且 $b=1$ 时，$r(A)=r(\tilde{A})=2<4$，方程组有无穷多解。

求通解你自己来完成。

◆4. 设向量组 $\alpha_1=(2,1,4,3)^T, \alpha_2=(-1,1,-6,6)^T, \alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T$

$\alpha_4=(1,1,-2,7)^T, \alpha_5=(2,4,4,9)^T$

求此向量组的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

提示 $$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其余的你来完成

◆5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Py$ 化为标准形

$$f=y_1^2+3y_2^2+y_3^2$$

并已知 A 的对应于特征值 $\lambda=3$ 的一个特征向量为 $(1,-1,0)^T$，求原二次型

$f(x_1,x_2,x_3)$。

提示 此题与模拟题（II）第 3 个计算题实质是一样的。

$P^TAP=P^{-1}AP=diag(1,3,1)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=1$ 且 $\lambda_1=3$ 对应的

特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$，要求原二次型相当于求对称矩阵 A

解 $\alpha_1^T x=0$ 即 $x_1-x_2=0$ 即得基础解系（这里直接求得正交的）:

$$\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$$

α_2,α_3 就是属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量，把三个特征向量单位

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\quad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,\quad \beta_3=(0,0,1)^T$$

把它们排成矩阵（注意顺序）即得正交矩阵:

$$P=[\beta_2,\beta_1,\beta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则 $P^T AP=P^{-1}AP=diag(1,3,1)$，由此得

$$A=Pdiag(1,3,1)P^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以原二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$

四　　证明题（1，2，3 任选一个，4 必做）

◆1.　设 x 是 n 维列向量，$x^T x=1$，令 $H=E-2xx^T$，证明 H 是对称正交矩阵。

提示　直接用定义证明（这是教材 P138 习题 3）

◆2.　证明正交的向量组一定是线性无关的。

提示　见教材 P114 定理 1

◆3.　设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 α_1 和 α_2，证明 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（其中 $k_1\neq 0,k_2\neq 0$）不是 A 的特征向量

提示　仿教材 P123 例 10

◆4.　证明二次型 $f=x^T Ax$，在 $\|x\|=1$ 时最大（小）值为 A 的最大（小）特征值。

提示　这是教材 P140 习题 29。

设λ_1,λ_n分别是A的最小，最大的特征值，存在正交变换$x=Qy$使

$$f=x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

再由假设$\lambda_1\le\lambda_i\le\lambda_n$得

$$\lambda_1y^Ty\le f=x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\le\lambda_ny^Ty$$

又$x^Tx=y^TQ^TQy=y^Ty$（正交变换保持向量长度不变），所以

$$\lambda_1x^Tx\le x^TAx\le\lambda_nx^Tx\text{，即}\lambda_1\le\frac{x^TAx}{x^Tx}\le\lambda_n\text{。}$$

由题设$\|x\|=1$，所以$\lambda_1\le x^TAx\le\lambda_n$

下面再证明最大（小）值可达到$\lambda_n(\lambda_1)$。特别地取，λ_n对应的单位特征向量α_n，此时$f=a_n^TA\alpha_n=\lambda_na_n^T\alpha_n=\lambda_n$，同理可证最小值为$\lambda_1$。