试卷22. 2016年7月

一. 1. $\frac{1}{4}$. 至少有一个发生为 $A\cup B\cup C$. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=p$. 则

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=3p-3p^2+0=\frac{9}{16}$

$\Rightarrow p=\frac{1}{4}$ 或 $p=\frac{3}{4}$. $\because P(A)$ 应小于 $P(A\cup B\cup C)$. 则 $p\neq\frac{3}{4}$ $\Rightarrow p=\frac{1}{4}$.

2. $\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}$ 利用密度函数的归一性. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}dx$

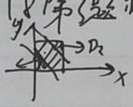
$=Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-(x-\frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}dx=Ae^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}=1$. $\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$ (主要体会利用正态分布计算定积分!)

3. $a=\frac{1}{6}, b=\frac{5}{6}$. 由分布函数归一性: $a+b=1$ ... ①

且 $P\{X=2\}=F(2+0)-F(2)=\frac{1}{3}+a=\frac{1}{2}$ ② $\Rightarrow a=\frac{1}{6}$ $b=\frac{5}{6}$

4. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 根据切比雪夫大数定律. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-Y_i|\xrightarrow{P}E(X_i-Y_i)$.

即收敛于它们相同的数学期望. 与试卷18第3题相同方法.

5. X, Y的联合分布律为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$ 

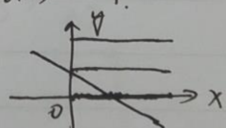
先求分布函数. $z<0$ 时. $F(z)=0$. $z>2$ 时. $F(z)=1$.

$0\le z\le 1$ 时, $F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}z^2$ (算面积)

$1<z\le 2$ 时 $F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=1-\iint_{D_2}f(x,y)dxdy=1-\frac{1}{2}(2-z)^2$

则 $f(z)=F'(z)=\begin{cases}z & z\in(0,1)\\ 2-z & z\in[1,2)\\ 0, & 其它.\end{cases}$

6. B. A: $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2$. C. 积分为2. D. 不能 $f_1(+\infty)f_2(+\infty)$ 不一定 1.

7. D. 用图表示联合分布律为右图 

$P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{6}\cdot\int_0^1 1\,e^{-x}dx=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{e})$

8. D. 分子分母都只有一个字符 (直观看), 或与分母同除 $n\sigma^2$ 化成标准 $F(1,1)$ 分布.

9. C. 样本(总体)原点为 $E(X)=\frac{\theta}{2}$. $\Rightarrow\theta=2E(X)$. $\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}2E(X)$ 是无偏估计量.

10. B. μ与σ均未知. $\alpha^2=1-0.05$ 置信区间为

$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$ 考书上P107. 这个区间是记住的好!

试卷21. 2016年1月

一. 1. $\frac{1}{3}$.　　$P(A|B)=P(AB)/P(B)=\frac{1}{2}$　　$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

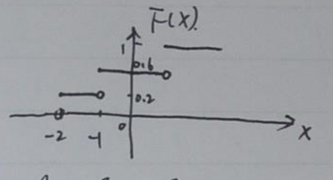
$\Rightarrow P(AB)=\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$　　且 $P(B)=\frac{1}{6}$

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$

2.

X	-2	-1	1
p	0.2	0.4	0.4

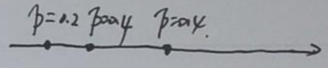
如右图所示为 $F(x)$.



离散型随机变量的分布函数.

在某一点的阶跃值则是这个点的概率.

离散型变量可类比一个一个点的质量点, 如图



3. $P\{X=k\}=(0.2)^{k-1}\times 0.8$　$(k=1,2,\cdots)$　　作题这写. ~~[illegible]~~

4. 0.5.　　Y为离散型分布.　　注: 分布的取值范围一定要写. 连续型的是 $(-\infty,+\infty)$.

Y	1	0
p	0.5	0.5

$\Rightarrow EY=0.5$

5. 0　　$E(X_1X_4-X_2X_3)=E(X_1X_4)-E(X_2X_3)=E(X_1)E(X_4)-E(X_2)E(X_3)=0$

注意: 独立同分布

6. C　　根据~~[illegible]~~大数定律　Y_n收敛于 $E(X^2)$.　　$E(X^2)=E^2(X)+D(X)$

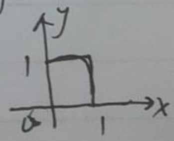
$=(\frac{1}{\lambda})^2+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

7. D.　　先求分布函数.　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3X+2<y\}=P\{X<\frac{y-2}{3}\}$

$=\int_{-\infty}^{\frac{y-2}{3}} f(x)\,dx$　　$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{3}f(\frac{y-2}{3})$

8. B.　　A: $\frac{1}{2}$.　　C: 0.　　D: 错误.

用图理解.



9. D　　利用 $\chi^2(n)$ 的方差为 $2n$ 计算.　　构造统计量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$D(S^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 D(\chi^2(n-1))=\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

10. A.　未讲.

试卷20　2015年7月

一. 1. 0.6. $P(A-B)=P(A)-P(AB) \Rightarrow P(AB)=0.4 \Rightarrow P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$

2. $\frac{2}{9}$. 设第一次取黑球为事件A，第二次取黑球为B. 则有乘法公式

$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{27}{90}$

利用贝叶斯公式 $\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

3.

Y	1	2
P	0.5	0.5

由 $F(x)$ 可写出 X 的分布律为:（注意，跳跃值即为该点的概率）

X	0	2	3
P	0.2	0.3	0.5

由而知 Y 的取值为 1, 2. 并写出分布

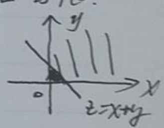
4. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & y\in(0,2)\\ 0, & 其它.\end{cases}$　已知 X 的密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1)\\ 0, & 其它,\end{cases}$　求 Y 的分布函数.

$y<0$ 时. $F_Y(y)=0$.　$y>2$ 时. $F_Y(y)=1$　$y\in(0,2)$ 时. $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X\le y\}$

$=P\{X\le \frac{y}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f(x)\,dx \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2}f_X(x)=\frac{1}{2}$.

5. $f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-z}, & z>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$　X, Y 的密度函数都是 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

则联合分布函数为(因为独立) $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & (x,y)在一象限.\\ 0, & 其他.\end{cases}$



先求分布函数. $z<0$ 时. $F(z)=0$.　$z>0$ 时. $F(z)=P\{Z\le z\}$

$=P\{X+Y\le z\}=\int_0^z dz\int_0^{z-x} e^{-(x+y)}dy=1-e^{-z}-ze^{-z}$

则 $f_Z(z)=F'(z)=ze^{-z}$ $(z>0)$　$f_Z(z)=0$. $(z\le 0)$

6. D.　A 中 $n\bar{X}=(X_1+X_2+\cdots+X_n)\sim(0,n)$　B. $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$

C. 错误.　D. $\frac{X_1^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$. 正确　$\rightarrow \chi^2(n-1)$

7. B. 书上公式. $P_{(6)}$

8 D.　$E(X)=\mu$.　$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\mu^2+\sigma^2$.

具体可参考课本 P_{152}.　令 $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,　$\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　$\cancel{\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}}$

$\Rightarrow \hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$.　$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

D项正确.　A.C 明显错，对于 B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$　$\because E(S^2)=\sigma^2$

$\therefore E(\frac{n-1}{n}S^2)\ne\sigma^2$. 不是无偏估计.

9. B.　大数定律条件(记住) ①切比雪夫: 独立，有相同的 μ 和 σ^2. ②辛钦: 独立同分布. μ 相同 ③伯努利: 独立同分布

④中心极限定理: 独立同分布. 存在 μ 和 σ^2　一个个比较

10. D　相互正态分布的和(差)仍是正态分布.　$X+Y\sim N(1,2)$. $X-Y\sim N(-1,2)$. 选 D.

试卷19　2015年1月

一、1. $\frac{10}{13}$.　$P(A|A\cup B)=\frac{P[A(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{0.4}{0.4+0.2-0.08}=\frac{10}{13}$

2. $1-e^{-1}$.　$X\sim\pi(\lambda)$表示泊松分布.（$X\sim P(\lambda)$也是泊松分布）. 已知泊松分布的结论为:

$E(X)=\lambda$，$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$（用分数知识、最好记住）. 则由题意. $E(X^2+2X-4)=$

$E(X^2)+2E(X)-4=2\lambda^2+2\lambda-4=0\Rightarrow 2(\lambda+2)(\lambda-1)=0$　由于$\lambda=np>0\Rightarrow\lambda=1$.

则 $P\{X\neq0\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{1^0\cdot e^{-1}}{0!}=1-e^{-1}$.

3. $\frac{1}{3}$.　Y是离散型随机变量. 依题意:

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\Rightarrow EY=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

4. $N=4$.　矩估计原理. 总体矩=样本矩. $\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{N}x_kp_k=\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots+\frac{N}{N}=\frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N}$

$=\frac{N+1}{2}$.（总体矩）　样本矩 $\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i=\frac{12+2N}{8}$

$\Rightarrow$ 令 $\frac{N+1}{2}=\frac{12+2N}{8}\Rightarrow N=4$

5. $(4.412, 5.588)$　已知σ^2. 采用正态分布是来估计. 构造. Z统计量

$\{-z_{0.025}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{0.025}\}\Rightarrow\mu\in(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})=(4.412, 5.588)$

二、1. A.　$P_1=P\{X\le\mu-4\}=P\{\frac{X-\mu}{4}\le\frac{\mu-4-\mu}{4}\}=P\{Z\le-1\}$

$P_2=\{X\ge\mu+5\}=P\{\frac{X-\mu}{4}\ge\frac{\mu+5-\mu}{4}\}=P\{Z\ge\frac{5}{4}\}$　$\Rightarrow P_1>P_2$

2. C.　$P\{X=1\}=F(1+0)-F(1)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$.

3. C.　$cov(X_1,Y)=cov(X_1,\frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n})=cov(X_1,\frac{X_1}{n})=\frac{1}{n}DX_1=\frac{\sigma^2}{n}$

对于A: $D(X_1+Y)=DX_1+DY+2cov(X_1,Y)=\frac{n+3}{n}\sigma^2$　　B: $D(X_1-Y)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

4. B.　由 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$　则 B有B项符合

5. D.　先求分布函数. $Y=e^X$　且 $X<0$时 $f(x)=0$　则有 $Y<1$时

$F_Y(y)=0$，　$y\ge1$时 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le\ln y\}$

$=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\ln y}=1-\frac{1}{y}$　$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2} & y\ge1\\ 0, & y<1.\end{cases}$

2014年7月 （试卷18）

一.

1. C、 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.8 \Rightarrow P(AB)=0.8\times P(B)=P(A)P(B) \Rightarrow$ A、B独立.

2. A. 要使方程有根则 $\Delta=k^2-4\geq 0 \Rightarrow k\geq 2$ 或 $k\leq -2$. K服从均匀分布.

则 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & x\in(1,6)\\ 0, & 其它.\end{cases}$ $P=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{5}dx+\int_{6}^{+\infty}0dx=\frac{4}{5}$

3. B. 令 $Z=X-Y$. 则 Z 服从正态分布 $Z\sim(0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=(0,1)$

则 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ 则 $E(|z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)dz$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ze^{-\frac{z^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$

4. A. t分布的定义为. 若随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且X、Y相互独立. 则称

$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为n的t分布.

对于A：分子 $X_1+X_2\sim(0,2\sigma^2) \xRightarrow{标准化} \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}$

分母. $X_3^2+X_4^2 \xRightarrow{对X_3、X_4标准化} (\frac{X_3}{\sigma})^2+(\frac{X_4}{\sigma})^2=\frac{X_3^2+X_4^2}{\sigma^2}$ 再除以自由度2.

为 $\frac{X_3^2+X_4^2}{2\sigma^2}$ 则 $t=\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}/\sqrt{2\sigma^2}}=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim t(2)$

5. A. 分布函数应满足归一性. 即 $F(+\infty)=1$.

即 $aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1 \Rightarrow$ 只有A.

二.1. $P=0.3$. A、B至少一个发生表示为 $A\cup B$, 至少有一个不发生的对立面为两个都发生. 即 AB.

即有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.2$. 且 $1-P(AB)=0.6$

$\Rightarrow P=0.3$.

2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, & y<0\\ 0, & 其它\end{cases}$ 先求分布函数. $Y=2\ln X$. $x\in(0,1)$时 $f(x)$不为0 则

$y\in(-\infty,0)$时 $f(x)$不为0.

当$y\geq 0$时, $F(y)=1$. 当$y<0$时 $F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{2\ln X\leq y\}=P\{X\leq e^{\frac{y}{2}}\}=\int_{-\infty}^{e^{\frac{y}{2}}}f(x)dx=\int_{0}^{e^{\frac{y}{2}}}1dx=e^{\frac{y}{2}}$

则 $f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, & y<0\\ 0, & 其它\end{cases}$

3

Z	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

离散型随机变量的函数的分布.对每个点直接分析即可.

4. $\frac{2}{3}$ 矩估计法的原理是矩相等.即总体矩等于样本矩.

$E(X)=\theta^2\cdot 1+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$

样本矩的观测值为 $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}x_i=\frac{5}{3}$ 令 $3-2\theta=\frac{5}{3}\Longrightarrow\hat{\theta}=\frac{2}{3}$

$\hat{\theta}=\frac{2}{3}$ 就是 θ 的矩估计值.

5. 答 $\frac{1}{5}$, 古典概型问题.由高中知识.n个人围成一圈有 $(n-1)!$ 种坐法.

则此题中有 $(11-1)!=10!$ 种坐法. 甲乙相邻而坐.采用捆绑法

有 $A_2^2\cdot(10-1)!$ 种坐法 则 $P=\frac{A_2^2\cdot 9!}{10!}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

卷1

一、1. $P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$

2. $Y\sim b(3,p)$

$p=P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$.

故 $P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}$

3. 令 $\Delta=16-4X<0$，

则 $X>4$，

即 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$

又 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，故 $\mu=4$.

4. 由 $P\{X_1X_2=0\}=1$ 得 $P\{X_1X_2\ne0\}=0$，可写出 X_1、X_2 联合分布律为：

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

易知，$P\{X_1=X_2\}=0$.

5. $X\sim\pi(\lambda)$，故 $E(X)=D(X)=\lambda$.

$Y=3X^2+2X-1$，$E(Y)=E(3X^2+2X-1)=3E(X^2)+2E(X)-1=3[D(X)+(EX)^2]+2E(X)-1$

$=3(\lambda+\lambda^2)+2\lambda-1=3\lambda^2+5\lambda-1$

6. $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$，

故 $P\{|X-\mu|\ge3\sigma\}\le\dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\dfrac{1}{9}$

7. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$

故 $\dfrac{X_{n+1}-\mu}{S}=\dfrac{\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}}}\sim t(n-1)$

8. $A_1=\mu_1$，

$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$，$\mu_1=E(X)=\int_0^1x(\theta+1)x^\theta dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\Big|_0^1=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

故 $\bar{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$, $\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$

9. $P\{X=-1\}=P\{X\le -1\}-P\{X<-1\}=F(-1)-P\{X<-1\}=\frac{1}{8}$

$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-\frac{12}{16}=\frac{1}{4}$

故 $P\{X^2=1\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

10. Y分布律为

Y	1	0	-1
P	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$E(Y^2)=1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=1.$

$E(Y)=1\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$

故 $D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$

卷2

一、1. $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{5}.$

又 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$, 故 $P(\bar{A})=\frac{2}{3}$, $P(A)=\frac{1}{3}.$

2. $P\{X,白\}=P\{白,白\}+P\{黑,白\}=\frac{10}{30}\times\frac{9}{29}+\frac{20}{30}\times\frac{10}{29}=\frac{1}{3}$

3. 易知 $\alpha\in(0,1)$,

$P(X>\alpha)=P(X<\alpha)$, 即 $\int_\alpha^1 2x\,dx=\int_0^\alpha 2x\,dx$, 即 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{X}{2}\le y\}=P\{X\le 2y\}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \int_0^{2y}dx=2y, & 0<y<\frac{1}{2}\\ 1, & y\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

则 $f(y)=\begin{cases}2, & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$

5. $X_3\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$, 故 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$

$\frac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$, 故 $\frac{X_3^2}{\sigma^2}+\frac{X_4^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(2)$.

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3^2}{\sigma^2}+\frac{X_4^2}{\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{2}}}\sim t(2).$$

6. 设成功次数为随机变量X，则$X\sim b(3,p)$

$$P\{X\le 2\}=1-P\{X=3\}=1-C_3^3p^3=1-p^3$$

~~7.~~ $\cancel{\because Y\sim N(0,1),}$

$$\cancel{故\begin{cases}E(Y)=0=aE(X)+b=\frac{1}{2}a+b\\ D(Y)=1=a^2D(X)=\frac{1}{2}a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}}$$

~~7.~~ $\cancel{Y=\frac{X-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}X-1}$，~~则~~ $\cancel{a=\frac{1}{2},b=-1.}$ $\cancel{2X-1}$

7. $Y=\frac{X-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=aX+b$，则$a=2$，$b=1$

8. 见课本公式

9. $\because D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$，

$\therefore Cov(X,Y)=0$，

则 A). $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，✓

B). $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)$ ✓

C). $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，✓

D). X、Y独立 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $Cov(X,Y)=0$.

10. α增加，$1-\alpha$减少，可靠度降低，区间长度缩短.

卷3

1. $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，$\Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$.

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A|B)P(B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$.

2. $P\{x,白\}=P(黑,白)+P(白,白)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}$

$$=\frac{a(b+a-1)}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a}{a+b}$$

3. $P\{X=k\}=(0.2)^{k-1}\cdot 0.8$, $k=1,2,3,\cdots$

4. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X\le y\}=P\{X\le \frac{y}{2}\}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \int_0^{\frac{y}{2}}dx=\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

则 $f(y)=\begin{cases}0, & 其它\\ \frac{1}{2}, & 0<y<2\end{cases}$

5.

Y \ X	1	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

6. $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$,

$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

故 $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_3+X_4)^2}=\frac{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2/1}{\left(\frac{X_3+X_4}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2/1}\sim F(1,1)$

$\cancel{7.\ \bar{X}\sim N(2,\frac{6}{3}),\ \bar{Y}\sim N(1,\frac{8}{4}),}$

$\cancel{\bar{X}-\bar{Y}\sim N(1,\ [illegible])}$

$\cancel{P\{\bar{X}-\bar{Y}\ge 0\}=P\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{[illegible]}\ge \frac{0-1}{[illegible]}\}}=1-P\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{\sqrt{11}}<\frac{-1}{\sqrt{11}}\}=1-\phi(\frac{-1}{\sqrt{11}})$

$\cancel{=2\phi(0.3)-1}\ \cancel{=\phi(0.3)=}$

7. $\bar{X}\sim N(2,\frac{6}{3})$, $\bar{Y}\sim N(1,\frac{8}{4})$,

$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(1,4)$

$P\{\bar{X}-\bar{Y}\ge 0\}=P\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{2}\ge\frac{-1}{2}\}=1-P\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}-1}{2}<-\frac{1}{2}\}=1-\phi(-0.5)=\phi(0.5)=0.6915$.

8. $P\{X \le x\} = 1 - P\{X > x\} = 1 - \alpha$,

即 $\Phi(x) = 1 - \alpha$,

则 $x = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

9. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$,

$\because D(X \mp Y) = D(X) + D(Y)$,

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$,

A). $\mathrm{Cov}(X,Y) = \cancel{DX}\, E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, ✓

B). $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) + 0 = D(X) + D(Y)$, ✓

C). $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$, ✓

D). X, Y 独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

10. μ, σ^2 未知,

由公式 $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ 得, $L = \frac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$

$E(L^2) = E\left(\frac{4S^2}{n} t^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = \frac{4t^2_{\alpha/2}(n-1)}{n} E(S^2) = \frac{4t^2_{\alpha/2}(n-1) \cdot \sigma^2}{n}$