Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno – matematički fakultet

Matematički odsjek

Statistički praktikum 1

Seminar - 36. zadatak

Student:
Hermina Petric Maretić
e-mail:
hpetricmaretic@gmail.com

Mentori:
Prof.dr.sc. Miljenko Huzak
Dipl.ing. Snježana Lubura

Zagreb, 22. siječnja 2014.

Tekst zadatka

List indijanske penjačice Pharabitis nil može biti šaren ili jednoličan, te istovremeno blijed ili normalne boje. Postavljeno je pitanje jesu li te dvije karakteristike nezavisne. Prijašnji eksperimenti su pokazali da ce prilikom križanja dviju biljaka određenog tipa lišća mladica s vjerojatnosti $1/4$ biti blijeda (a normalne boje s vjerojatnosti $3/4$). Isto tako lišće mladica ce s vjerojatnosti $1/4$ biti šareno (a s vjerojatnosti $3/4$ jednolično). Na slučajan način prikupljen je uzorak od 290 mladica indijske penjačice. Rezultati opažanja dviju spomenutih karakteristika nalaze se u tablici (N.T.J. Bailey Mathematical Theory of Genetic Linkage, Clarendon Press, Oxfrord).

	normalne boje	blijedo
jednolično	187	35
šareno	37	31

(a) Neka je X stanje prve karakteristike (šareno ili lišće jednolične boje), a Y stanje druge karakteristike (blijedo lišće ili normalne boje). Na osnovi danog uzorka, procijenite zajedničku razdiobu varijabli X i Y, tj. procijenite razdiobu vektora (X,Y) i grafički je predstavite. Također, graficki je usporedite s razdiobom u kojoj su X i Y nezavisne, a marginalne razdiobe su u skladu s prijašnjim saznanjima.

(b) Testirajte da li su X i Y nezavisne s pretpostavljenim marginalnim razdiobama kao u tekstu zadatka.

(c) Odredite jakost testa iz (b) uz značajnost 5%

(d) Prema jednoj drugoj teoriji, razdioba od (X,Y) je oblika

X Y	normalne boje	blijedo
jednolično	$9/16 + \theta$	$3/16 - \theta$
šareno	$3/16 - \theta$	$1/16 + \theta$

gdje je H nepoznati parametar. Odredite parametarski prostor i pomoću χ^2-testa testirajte tu hipotezu, pri čemu nepoznati parametar procjenite minimum χ^2-metodom.

(e) Procijenite nepoznati prametar iz modela u (d) metodom maksimalne vjerodostojnosti i usporedite ga s minimum χ^2-procjenom

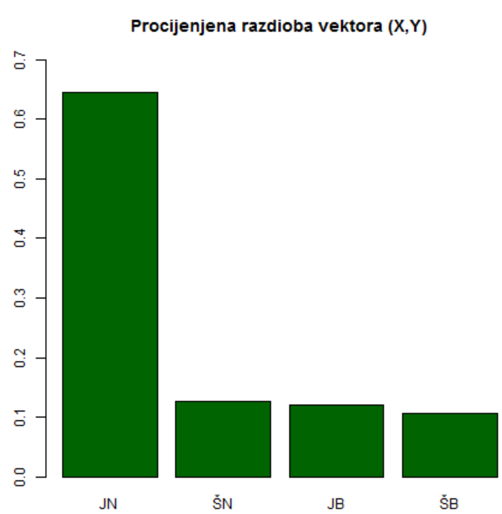
Rješenje

(a) Na osnovu danog uzroka želimo procijeniti razdiobu vektora (X,Y). Da bismo dobili procijenjenu razdiobu, podijelit ćemo opažene frekvencije s veličinom uzorka.

```
podaci=matrix(c(187,37,35,31),2,2)
> n=sum(podaci)
> f=c(podaci)
> pkapa=podaci/n
> pkapa
          [,1]      [,2]
[1,] 0.6448276 0.1206897
[2,] 0.1275862 0.1068966
```

Procijenjenu razdiobu možemo i grafički prikazati:

```
pkapa=c(pkapa)
png('1.png')
barplot(c(pkapa),names.arg=c("JN","ŠN","JB","ŠB"),ylim=c(0,0.7),
col="darkgreen",main="Procijenjena razdioba vektora (X,Y)")
dev.off()
```



Iz teksta zadatka vidimo da su dosadašnja mjerenja pokazala sljedeće marginalne distribucije:

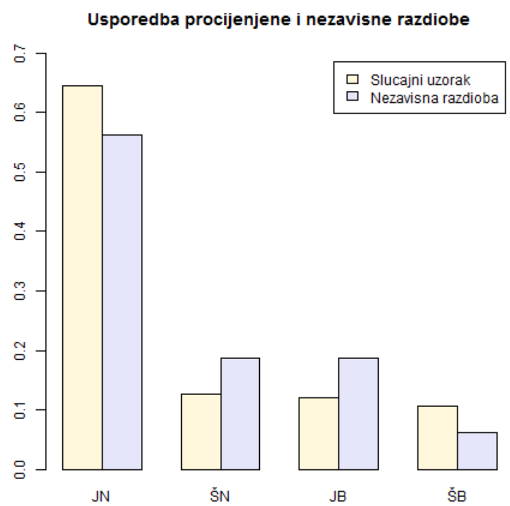
```
> x1=c(3/4,1/4)
> y1=c(3/4,1/4)
> x1
[1] 0.75 0.25
> y1
[1] 0.75 0.25
```

U slučaju nezavisnosti slučajnih varijabli, distribucija cijelog slučajnog vektora određena je marginalnim distribucijama, jer tada vrijedi jednakost $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y)$.

```
> nez1=x1%*%t(y1)
> nez1
       [,1]   [,2]
[1,] 0.5625 0.1875
[2,] 0.1875 0.0625
```

Sada možemo grafički usporediti te dvije razdiobe.

```
> lista=matrix(numeric(0),2,4)
> lista[1,]=pkapa
> lista[2,]=c(nez1)
> png('2.png')
> barplot(lista,beside=TRUE,names.arg=c("JN","ŠN","JB","ŠB"),
ylim=c(0,0.7),col=c("cornsilk", "lavender"),
main="Usporedba procijenjene i nezavisne razdiobe",
legend.text=list("Slucajni uzorak","Nezavisna razdioba"))
> dev.off()
```



(b) Postavljamo hipoteze:
H_0= X i Y su nezavisne s pretpostavljenim marginalnim razdiobama
H_0= X i Y nisu neazavisne s pretpostavljenim marginalnim razdiobama
Za testiranje koristimo Pearsonov χ^2-test o pripadnosti distribuciji s testnom statistikom $H = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \dfrac{(f_{i,j} - f'_{i,j})^2}{f'_{i,j}} \sim \chi^2(r * c - d - 1)$, gdje je d = broj procijenjenih parametara = 0.
Računamo kritično područje i p-vrijednost:

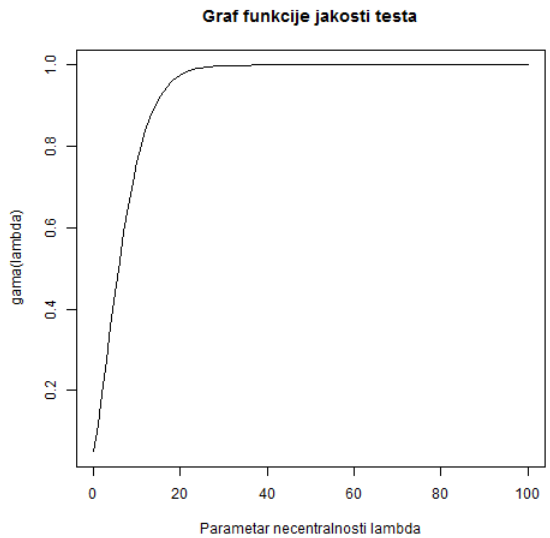
```
> fnez=nez1*n
> fnez
        [,1]   [,2]
[1,] 163.125 54.375
[2,]  54.375 18.125
> fnez=c(fnez)
> h=sum(((f-fnez)^2)/fnez)
> h
[1] 25.09579
> c=qchisq(0.95,3)
> c
[1] 7.814728
> pv=1-pchisq(h,3)
```

```
> pv
[1] 1.474459e-05
```

Kritično područje je $[7.815, \infty\rangle$, a vrijednost testne statistike h=25.096. Jasno je da testna statistika upada u kritično područje, pa odbacujemo nultu hipotezu, odnosno na razini značajnosti od 5% zaključujemo da X i Y nisu nezavisne. P vrijednost od $1.47 * 10^{-5}$ nam govori da bismo nultu hipotezu odbacili na svim razinama značajnosti većim od tog broja, odnosno gotovo uvijek.

(c) Želimo odrediti jakost testa iz (b) uz razinu značajnosti α=5%. Postavljamo hipoteze:
$H_0 : p = p^{(0)}$
$H_1 : p = p^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{n}}\delta$, za neki $\delta \neq 0$
Testna statistika je $H = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \dfrac{(f_{i,j} - f'_{i,j})^2}{f'_{i,j}} \sim \chi^2(r * c - d - 1)$
Ako vrijedi hipoteza H_1, tada je $H \sim A_{\chi^2}(k-1, \lambda)$, gdje je $\lambda = \sum_{k=1}^{k} \dfrac{\delta_i^2}{p_i^0}$ parametar necentralnosti.
Tada funkciju jakosti Pearsonovog χ^2-testa možemo prikazati ovako:
$\gamma(\lambda) = P(H \geq \chi^2(k-1) | p = p^0 - \frac{1}{\sqrt{n}} * \delta) = 1 - P_{\chi^2(k-1,\lambda)}(\chi^2_\alpha(k-1))$
Iz definicije koeficijnta necentralnosti λ jasno je da je $lambda \geq 0$. Definiramo funkciju jakosti testa u R-u i prikazujemo njezin graf:

```
> hi=qchisq(0.95,3)
> hi
[1] 7.814728
> gama=function(lambda){
+ return(1-pchisq(hi,3,lambda))
+ }
> png('3.png')
> plot(gama,type="l",xlim=c(0,100),main="Graf funkcije jakosti
testa",xlab="Parametar necentralnosti lambda",ylab="gama(lambda)")
> dev.off()
```



Tražimo minimum i točku u kojoj se on postiže:

```
> optim(0,gama,method=c("L-BFGS-B"),lower=0,upper=0.05)
$par
[1] 0

$value
[1] 0.05

$counts
function gradient
       1        1

$convergence
[1] 0

$message
[1] "CONVERGENCE: NORM OF PROJECTED GRADIENT <= PGTOL"
```

Vidimo da se minimum postiže u točki 0 i da iznosi 0.05. To proizlazi iz činjenice da hipoteza H_0 govori upravo da je $\lambda = 0$ i iz činjenice da test ima razinu značajnosti 5%.

(d) Poznato je da sve vrijednosti u distribuciji moraju biti između 0 i 1. Da bi predloženi model to zadovoljavao, moramo uvesti ograničenja na parametar θ:
$^9/_{16} + \theta \in [0, 1]$
$^3/_{16} - \theta \in [0, 1]$
$^1/_{16} + \theta \in [0, 1]$
Ovim smo uvjetima zapravo konstruirali sustav nejednadžbi. Njegovim rješavanjem dobivamo $\theta \in [-{}^1/_{16}, {}^3/_{16}]$
Taj interval nazivamo parametarskim prostorom.
Procijenimo sada parametar θ minimum χ^2-metodom. Metoda se temelji na tome da za funkciju $h(\theta) : \Theta \to R$, $h(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c} \dfrac{(f_{i,j} - f'_{i,j}(\theta))^2}{f'_{i,j}(\theta)}$
tražimo vrijednost $\hat{\theta}$ u kojoj ona postiže minimum.
Definiramo funkciju h:

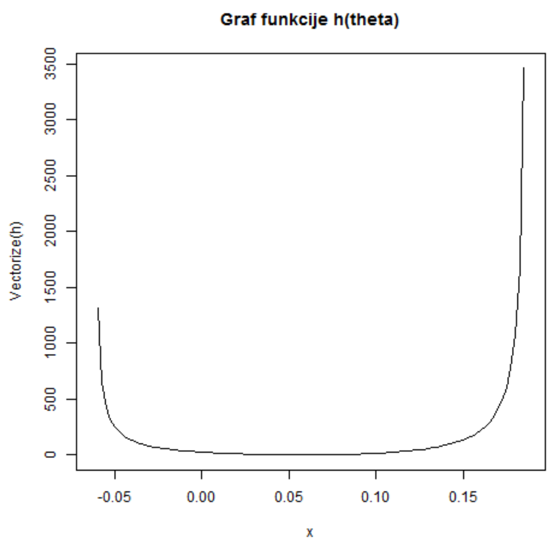
```
> h=function(theta){
+ p2=c(9/16+theta,3/16-theta,3/16-theta,1/16+theta)
+ n2=p2*290
+ return(sum(((f-n2)^2)/n2))
+ }
```

Prikazujemo je grafički u ovisnosti o parametru θ i tražimo minimum:

```
> png('4.png')
> plot(Vectorize(h),type="l",xlim=c(-1/16,3/16),
main="Graf funkcije h(theta)")
> dev.off()
> optim(0.05,h,method="L-BFGS-B",lower=0,upper=0.15)
$par
[1] 0.05861457

$value
[1] 0.9015172

$counts
function gradient
       9        9

$convergence
[1] 0
```

```
$message
[1] "CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F <= FACTR*EPSMCH"

> theta1=optim(0.05,h,method="L-BFGS-B",lower=0,upper=0.15)$par
> theta1
[1] 0.05861457
```

Kao što i otprilike vidimo na grafu, minimum se postiže u točki 0.0586, pa je baš to naš $\hat{\theta}$.



Sada testiramo hipotezu da je razdioba našeg slučajnog vektora iz zadanog modela. Iskoristimo procijenjeni parametar θ i provodimo χ^2-test s k-d-1=r*c-1-1=2 (d=1 jer imamo jedan procijenjeni parametar) stupnja slobode.

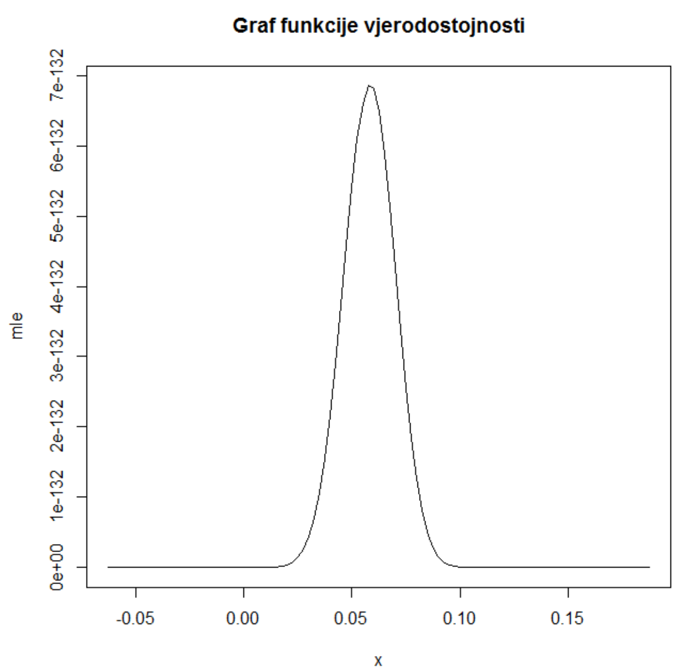
```
> f2=matrix(c(9/16+theta1,3/16-theta1,3/16-theta1,1/16+theta1),2,2)
> f2

          [,1]      [,2]
[1,] 0.6211146 0.1288854
[2,] 0.1288854 0.1211146
> hop=h(theta1)
> hop
[1] 0.9015172
```

```
> pv=1-pchisq(hop,2)
> pv
[1] 0.6371446
```

P-vrijednost je velika, pa ne možemo odbaciti hipotezu o pripadnosti zadanom modelu.

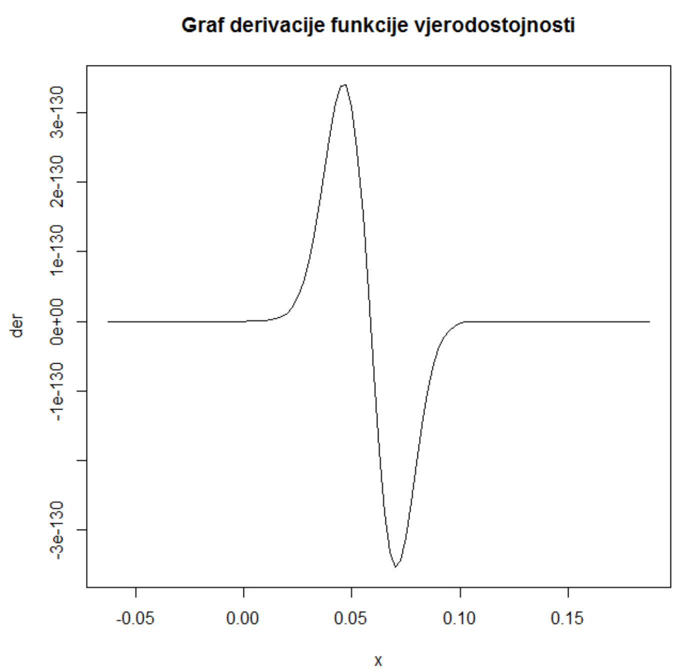
(e) Želimo procijeniti nepoznati parametar θ iz (d) metodom maksimalne vjerodostojnosti. Definiramo funkciju vjerodostojnosti $L : \Theta \to R$, sa $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$. Tražimo θ koji maksimizira ovu funkciju i zovemo ga procjenom metodom maksimalne vjerodostojnosti.
Definiramo funkciju L(u kodu mle) i prikazujemo njen graf:

```
> mle=function(theta){
+ return ((9/16 + theta)^187 * (3/16 - theta)^35 *
(3/16 - theta)^37 * (1/16+ theta)^31)
+ }
> plot(mle,type="l",xlim=c(-1/16,3/16),
main="Graf funkcije vjerodostojnosti")
```



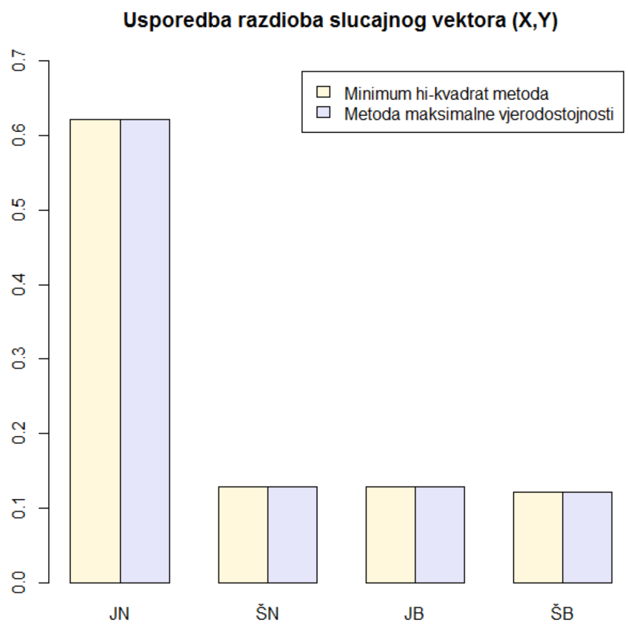
Kako bismo našli maksimum, deriviramo funkciju i prikazujemo graf derivacije.

```
> D(expression((9/16 + theta)^187 * (3/16 - theta)^35 *
(3/16 - theta)^37 * (1/16+ theta)^31),"theta")
((187 * (9/16 + theta)^186 * (3/16 - theta)^35 - (9/16 + theta)^187 *
    (35 * (3/16 - theta)^34)) * (3/16 - theta)^37 - (9/16 + theta)^187 *
    (3/16 - theta)^35 * (37 * (3/16 - theta)^36)) * (1/16 + theta)^31 +
    (9/16 + theta)^187 * (3/16 - theta)^35 * (3/16 - theta)^37 *
        (31 * (1/16 + theta)^30)
> der=function(theta){
+ ((187 * (9/16 + theta)^186 * (3/16 - theta)^35 - (9/16 + theta)^187 *
+ (35 * (3/16 - theta)^34)) * (3/16 - theta)^37 - (9/16 + theta)^187 *
+ (3/16 - theta)^35 * (37 * (3/16 - theta)^36)) * (1/16 + theta)^31 +
+ (9/16 + theta)^187 * (3/16 - theta)^35 * (3/16 - theta)^37 *
+ (31 * (1/16 + theta)^30)
+ }
> plot(der,type="l",xlim=c(-1/16,3/16),
main="Graf derivacije funkcije vjerodostojnosti")
```



Sada otprilike znamo gdje je nultočka, pa tražimo nultočku na tom području. Time smo pronašli $\hat{\theta}$. Sad dobivene podatke uvrštavamo u model i i uspoređujemo distribucije dobivene procjenom nepoznatog parametra metodom maksimalne vjerodostojnosti i minimum χ^2-procjenom.

```
> theta2=uniroot(der,c(0,0.1))$root
> theta2
[1] 0.05840407
> f3=matrix(c(9/16+theta2,3/16-theta2,3/16-theta2,
1/16+theta2),2,2)
> f3
          [,1]      [,2]
[1,] 0.6209041 0.1290959
[2,] 0.1290959 0.1209041
> usporedba=matrix(numeric(8),2,4)
> usporedba[1,]=c(f2)
> usporedba[2,]=c(f3)
> usporedba
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
[1,] 0.6211146 0.1288854 0.1288854 0.1211146
[2,] 0.6209041 0.1290959 0.1290959 0.1209041
> barplot(usporedba,beside=TRUE,names.arg=c("JN","ŠN","JB","ŠB"),
ylim=c(0,0.7),col=c("cornsilk", "lavender"),
main="Usporedba razdioba slucajnog vektora (X,Y)",
legend.text=list("Minimum hi-kvadrat metoda",
"Metoda maksimalne vjerodostojnosti"))
```



Kao što smo vidjeli i iz ispisa dviju različitih procjena parametra θ, procjene su vrlo slične.