

MECÁNICA CLÁSICA

NOTAS A UN NIVEL INTERMEDIO

ELMER HERNÁN BARQUERO CHAVES

Estudiante de bachillerato en física por la Universidad de Costa Rica

GitHub

Estas notas son un documento en proceso por lo que es posible que contengan errores, los cuales agradecería informaran al correo, de preferencia con un asunto: “Notas de mecánica” o algún similar. Para realizar la corrección lo más pronto posible.

elmer.barquero@ucr.ac.cr

Índice

I	Introducción al texto	1
1.	Amplitud de la Mecánica Clásica	1
II	Mecánica Newtoniana	1
2.	Vectores	1
3.	Mecánica Newtoniana para una partícula	2
3.1.	Leyes de Newton	2
3.2.	Trabajo y Energía	3
3.3.	Análogo rotacional de las leyes de Newton	5
3.4.	Teoremas de Conservación	7
3.5.	Complementos de la conservación de la energía	9
3.6.	Problemas resueltos	10
4.	Sistemas de partículas	38
4.1.	Suposiciones iniciales	38
4.2.	Definición de la mecánica de sistemas de partículas	38
4.3.	Problemas resueltos	44
5.	Sistemas no inerciales	51
5.1.	Sistemas de referencia en traslación y rotación	51
5.2.	Segunda Ley de Newton para Sistemas No Inerciales	53
5.3.	Problemas resueltos	53
III	Mecánica Lagrangiana	73
6.	Conceptos Fundamentales	73
6.1.	Grados de Libertad y Coordenadas Generalizadas	73
6.2.	Trabajo Virtual, Fuerzas Generalizadas y Principio de D'Alambert	74
7.	Principio de Hamilton	76
8.	Ecuaciones de la Mecánica de Lagrange	77
8.1.	Deducción del formalismo Lagrangiano	77
8.2.	Ecuaciones de Euler-Lagrange	79
8.3.	Problemas resueltos	80

Introducción al texto

I

SECTION 1

Amplitud de la Mecánica Clásica

Condiciones para la aplicabilidad de la teoría de la Mecánica Clásica:

- Las masas de los cuerpos de interés **deben ser mayores** a las masas de átomos y de partículas subatómicas.
- Las masas de los cuerpos de interés **deben ser pequeñas** en comparación a las masas de cuerpos celestes. Por ejemplo la masa del planeta Mercurio, dado que el estudio de su órbita presenta discrepancias con los datos observacionales si se realiza directamente desde la mecánica clásica ($3,285 \times 10^{23} kg$).
- Las rapideces de los cuerpos de interés **deben ser pequeñas** comparadas a la rapidez de la luz ($299,792,458 km/s$).
- La escala de tiempo en que se realiza el estudio **debe ser pequeña** en comparación a escalas de tiempo que tiendan a las astronómicas.

De lo anterior se puede concluir que la Mecánica Clásica está limitada, en el desarrollo que se le dará aquí, al estudio de fenómenos en escalas humanas. Grossso modo, **la Mecánica Clásica se emplea para estudiar cosas que los seres humanos pueden “ver”, tanto en tamaño como en escala temporal.** Las comillas al “ver” es porque es posible calcular con suficiente presición algunos fenómenos que ocurren por debajo de las escalas de visión humana con bastante presición.

Mecánica Newtoniana

II

SECTION 2

Vectores

Esto ya deberían saberlo y probablemente se actualice de último :)

SECTION 3

Mecánica Newtoniana para una partícula

A continuación se expresará la mecánica de partículas.

SUBSECTION 3.1

Leyes de Newton

Comenzando con algunos conceptos claves para el desarrollo de las leyes de Newton:

Definition 1

(Fuerza) Fuerza es el nombre que se le da a la interacción entre un cuerpo y su entorno, la cual es capaz de afectar el estado del cuerpo. Las fuerzas son cantidades vectoriales, por lo que poseen magnitud y dirección; su magnitud es dada en unidades de newton N .

Definition 2

(Momentum Lineal) Momentum lineal o cantidad de movimiento, ambos se refieren a una cantidad vectorial dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.1)$$

Las leyes de Newton tal y como se expresarán a continuación **son únicamente válidas** para sistemas de referencias **inerciales**, es decir, sistemas de referencia que no poseen ningún tipo de aceleración o rotación respecto a las estrellas fijas.

Un marco de referencia inercial no es más que una construcción teórica, ya que no es posible conseguir un marco completamente inercial. No obstante, *es posible aproximarse a un marco inercial*. Por ejemplo, es posible considerar un marco de referencia en el centro del planeta Tierra, fijo a el mismo planeta (rota junto a él), como un marco inercial en un gran número de ocasiones.

Definition 3

(Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia) Un cuerpo mantiene su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta diferente de cero lo perturbe. Dicho de otra forma, un cuerpo siempre mantendrá su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta llegue a afectarlo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (3.2)$$

Un estado de **equilibrio** se refiere a que el cuerpo o sistema de interés se encuentra moviéndose con velocidad lineal constante (**equilibrio dinámico**) o se encuentra en reposo (**equilibrio estático**).

Definition 4

(Segunda Ley de Newton) Un cuerpo que experimenta una fuerza neta diferente de cero, tendrá como resultado un cambio en su momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad (3.3)$$

Suponiendo que la masa es constante para el cuerpo de interés, la primera ley de Newton también se puede escribir de la forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (3.4)$$

Definition 5

(Tercera Ley de Newton o Ley de Acción-Reacción) Considere dos cuerpos denotados como A y B que presentan algún tipo de interacción entre sí, se dice que: Toda **acción** que realice el cuerpo A sobre el cuerpo B le corresponde una **reacción** que proveniente del cuerpo B. Estas **acciones y reacciones** corresponden a fuerzas

internas del sistema (cuerpos A y B) debido a su interacción, dichas fuerzas poseen la misma magnitud y su dirección es contraria.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (3.5)$$

Para trabajar con esta ley hay que tomar cuenta cierta ambigüedad que nos lleva a los siguientes enunciados de la tercera ley:

- **Enunciado Fuerte:** Los vectores correspondientes a las fuerzas de **acción** y **reacción** se encuentran sobre una misma recta, es decir, si se conocen las direcciones de las fuerzas de **acción** y **reacción** es posible trazar una recta (conocida como **línea de acción**¹) que una los vectores de fuerzas y sea paralela a estos. Ver Figura 1.
- **Enunciado Débil:** No ocurre lo anterior. Es imposible unir los vectores de las fuerzas de **acción** y **reacción** por medio de una recta que sea paralela a ambos vectores. Ver Figura 2.

Además de lo anterior, es preciso destacar que la **Tercera Ley de Newton no es una ley general de la naturaleza** y se puede establecer que toda fuerza que dependa de velocidades no obedecerá esta ley.

SUBSECTION 3.2

Trabajo y Energía

Definition 6

(Trabajo) Corresponde a la cantidad generada al tomar el producto punto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo a lo largo de todo su desplazamiento desplazamiento desde una punto A a un punto B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.6)$$

Definition 7

(Fuerza conservativa) Una fuerza \vec{F} es conservativa si se puede escribir de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (3.7)$$

Es decir, si el potencial que genera la fuerza depende únicamente de la posición de la partícula, será una fuerza conservativa.

A partir de las Ecuaciones (3.3) y (3.6):

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Ejerciendo el producto punto y trabajando por índices:

$$W = \int_A^B \sum_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dt} dr_i$$

Suponiendo que la masa es constante, la derivada temporal del momentum lineal es de la forma: $\frac{dp_i}{dt} = m \frac{dv_i}{dt}$:

¹ La línea de acción está en naranja en la Figura 1 y en la Figura 2.

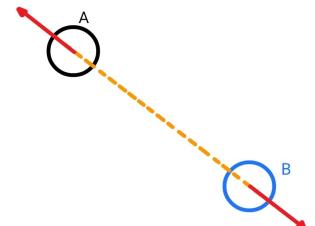


Figura 1. Situación del enunciado fuerte

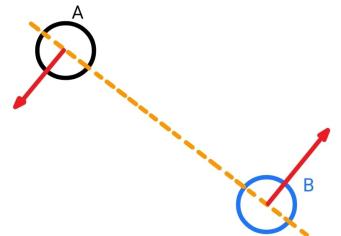


Figura 2. Situación del enunciado débil

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^3 m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i \frac{dt}{dt} \\
 &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B dv_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{=v_i} \frac{dt}{dt} \\
 &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B v_i dv_i = \sum_{i=1}^3 m \int_A^B \frac{1}{2} d(v_i^2) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} mv_i^2 \Big|_A^B = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} mv_{iB}^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} mv_{iA}^2
 \end{aligned}$$

Definition 8

(Energía Cinética Traslacional) Corresponde al trabajo necesario para comenzar a mover un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez v .

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 v_i^2 \quad (3.8)$$

Theorem 1

(Trabajo - Energía Cinética)

$$W = \Delta T \quad (3.9)$$

Regresando a la definición Ecuación (3.6) pero ahora tomando la fuerza que es ejercida sobre el cuerpo como una fuerza conservativa, Ecuación (3.7).

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -V_B + V_A$$

Definition 9

(Energía Potencial) Corresponde a la capacidad de un cuerpo de ejercer trabajo se denomina energía potencial. Ahora se presentan algunos ejemplos de energías potenciales.

$$V = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{-GMm}{r} \\ \frac{-Kq_1q_2}{r} \\ \vdots \end{cases} \quad (3.10)$$

Theorem 2

(Trabajo - Energía Potencial)

$$W = -\Delta V \quad (3.11)$$

Definition 10

(Energía de un sistema) Ante la suposición de que el sistema a tratar tienen masa constante y es un sistema conservativo, la energía total es de la forma:

$$E = T + V \quad (3.12)$$

SUBSECTION 3.3

Análogo rotacional de las leyes de Newton

Ahora se presentarán algunos conceptos importantes y ecuaciones para una descripción sencilla de la mecánica de partículas en rotación. Nuevamente se comenzará por los conceptos básicos análogos a los usados en las leyes de Newton y posteriormente se darán las leyes análogas.

Primero deduciendo una relación entre la velocidad lineal \vec{v} y la velocidad angular $\vec{\omega}$:

- Se sabe que la velocidad angular es por definición

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.13)$$

respecto a un eje instantáneo de rotación. Siempre será posible establecer una velocidad angular para un cuerpo en movimiento arbitrario, ya que en cada instante el cuerpo se mueve con una trayectoria circular respecto a un eje de rotación; esto se puede observar en la Figura 3.

Observando la rotación infinitesimal presente en Figura 4, se puede concluir la siguiente relación ²

$$\delta\vec{r} = \delta\theta \times \vec{r}$$

Dividiendo entre δt :

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{\delta\theta}{\delta t} \times \vec{r}$$

Lo cual, al considerar $\delta t \rightarrow 0$, se convierte en:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \vec{r}$$

Definition 11

(Relación velocidad Lineal - Angular) Para un cuerpo en un movimiento arbitrario se cumple lo siguiente para cada instante del movimiento.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.14)$$

Recuerde que el eje de rotación instantáneo puede cambiar si el movimiento no es una rotación fija.

Definition 12

(Torque) El torque es el análogo de la fuerza para las rotaciones. Por lo que el torque corresponde a una interacción del sistema con su entorno que es capaz de generar un cambio en el estado *rotacional* del sistema, dicha interacción es mediada por la presencia de una o más fuerzas y se define como:

$$\vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.15)$$

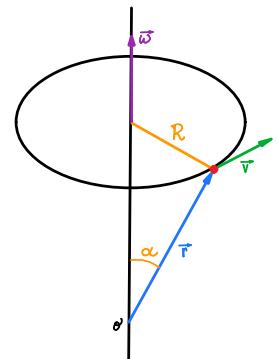


Figura 3. Relación entre \vec{v} , $\vec{\omega}$ y \vec{r}

²Recuerde que antes se era bien conocida la relación $v = \omega R$ para una partícula en un movimiento circular de radio R en un plano.

En este caso, al relacionar con \vec{r} , se tiene:

$$v = w r \operatorname{sen}(\alpha)$$

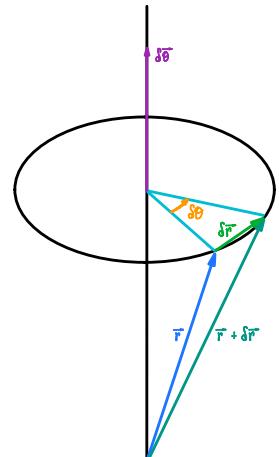


Figura 4. Relación diferencial entre \vec{v} , $\vec{\omega}$ y \vec{r}

Como tal, el torque depende del origen que se este utilizando, debido a su dependencia con el vector posición \vec{r} . Al torque es común llamarlo en algunos campos como: torca, momento de fuerza o simplemente momento.

Definition 13

(Momentum Angular) Corresponde al análogo angular del momentum lineal. Es una cantidad vectorial que para el caso de partículas se define como:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})^3 = m [\vec{r}^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] \quad (3.16)$$

De forma similar al torque, el momentum angular depende del origen desde el que se decida medir.

En la amplia gama de casos en que se trabaja con partículas, se podrá reconocer que el producto $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ y los vectores \vec{r} y $\vec{\omega}$ apuntan en una única dirección, por lo que el momentum angular tomará la siguiente forma:

$$L_{Oq} = mr^2\omega_q \quad (3.17)$$

$${}^3\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Definition 14

(Momentos de Inercia) La inercia es el análogo rotacional de la masa y corresponde a una medida que indica que tan difícil es girar un cuerpo respecto a cada eje (A mayor inercia más complicado es girar el objeto). Girando un cuerpo es posible concluir que se pueden generar rotaciones respecto a 3 ejes y por lo tanto **existen 3 momentos de inercia**, los cuales no necesariamente serán iguales, esto dependerá de la distribución de la masa respecto a cada eje.

En el caso de partículas puntuales, la inercia se define como:

$$I_q = \sum_i m_i r_i^2 \quad (3.18)$$

Donde r_i corresponde a la distancia que hay entre el eje de rotación y la masa puntual.

La **masa inercial** y los **momentos de inercia** están intimamente relacionados, ambos son medidas de que tan difícil es mover un cuerpo de cierta forma.

Definition 15

(Primera Ley de Newton análoga rotacional) De forma similar a la Primera Ley de Newton, este principio análogo estable que un cuerpo en un estado rotacional de equilibrio tenderá a mantener dicho estado hasta que un torque neto diferente de cero lo perturbe.

$$\sum \vec{N}_O = 0 \quad (3.19)$$

El término *inercial* es para hacer una distinción entre la **masa inercial** (La masa dada por la aceleración de un cuerpo al estar bajo el efecto de una fuerza) y la **masa gravitacional** (La masa determinada por las fuerzas gravitacionales entre el cuerpo de interés y otros cuerpos), a pesar de que ambas cantidades **son iguales** por el principio de equivalencia.

Definition 16

(Segunda Ley de Newton análoga rotacional)

$$\sum \vec{N}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O \quad (3.20)$$

Manteniendo la inercia constante, la ecuación se escribe de la forma:

$$\sum N_q = I_q \alpha_q \quad (3.21)$$

Donde el subíndice denota el eje respectivo al cual se está realizando la suma de torques.

Definition 17

(Tercera Ley de Newton análoga rotacional) Este principio se enuncia de forma análoga a la Tercera Ley de Newton original bajo la salvedad de que en vez de trabajar con fuerzas, este trabaja con torques.

$$\vec{N}_{AB} = -\vec{N}_{BA} \quad (3.22)$$

Definition 18

(Energía Cinética Rotacional) Corresponde al trabajo necesario para hacer rotar un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez angular ω .

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_q \omega^2 \quad (3.23)$$

La forma de obtener esta expresión es similar al procedimiento que se realizó con la energía cinética translacional.

SUBSECTION 3.4

Teoremas de Conservación

A continuación se van a enunciar los teoremas de conservación bajo la suposición de masa constante y que el sistema a tratar no posee fuerzas disipativas.

Theorem 3

(Conservación de la Energía) Una vez ya conocida la expresión para la energía del sistema Ecuación (3.12), basta con derivarla con respecto al tiempo para determinar que restricciones se plantean para la conservación de dicha cantidad:

$$\begin{aligned} E = T + V \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}; \text{ A partir de Ecuación (3.8) y suponiendo } V = V(\vec{r}, t) \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}}_{= \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}}} + \frac{\partial V}{\partial t} \stackrel{\text{Sistema}}{\rightarrow} 0; \text{ conservativo} \Rightarrow V = V(\vec{r}) \\ = \frac{1}{2} m (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) + \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}} = [m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V] \cdot \dot{\vec{r}} \\ = [\vec{F} + \vec{\nabla} V] \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

Para que la energía se conserve se cumple:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = [\vec{F} + \vec{\nabla} V] \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{F} + \vec{\nabla} V = 0 \\ \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V \\ \therefore \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V \end{aligned} \quad (3.24)$$

Theorem 4

(Conservación de Momentum Lineal) Conociendo ya la expresión de la Ecuación (3.1), se derivará con respecto al tiempo para determinar las condiciones en que se conserva dicha cantidad:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\frac{dm}{dt}\dot{\vec{r}}}^0 + m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Para que el momentum lineal se conserve se cumple:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} &= m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{0} \\ \therefore \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Theorem 5

(Conservación de Momentum de Angular) A partir de la expresión de la Ecuación (3.16) y derivandola respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} &= \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{\vec{r} \parallel \vec{p}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \ ; \text{ Por la Ecuación (3.3)} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \ ; \text{ Por la Ecuación (3.15)} \\ &= \vec{N}_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

Para que se conserve el momentum angular se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{0} \\ \therefore \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.26)$$

SUBSECTION 3.5

Complementos de la conservación de la energía**Definition 19**

(Condiciones de estabilidad) Al conservarse la energía en un sistema, es posible encontrarse con que la partícula de interés se encuentra en un punto de equilibrio de algún tipo (Estables u Inestables), alrededor de estos puntos es posible obtener mucha información acerca del comportamiento del sistema. Las siguientes son las condiciones para determinar que es un punto de equilibrio y clasificarlo.

- **Punto de equilibrio:** Se define como un punto en algún potencial que cumple con:

$$\vec{\nabla}V \Big|_{\vec{r} = \vec{r}_{eq}} = 0 \quad (3.27)$$

- Punto de Equilibrio **Estable**: De colocar una partícula en reposo en este punto y sin la aparición de fuerzas a su alrededor, la partícula permanecerá en equilibrio en dicho punto por siempre. Ahora, si esta es colocada en reposo en los alrededores de este punto o desde el punto de equilibrio se le ejerce una fuerza que la obligue a moverse, la partícula comenzará un movimiento en dirección a este punto y se moverá perpetuamente a su alrededor siempre que $E = \text{constante}$. La forma de determinar los puntos estables:

$$\vec{\nabla}^2V \Big|_{\vec{r} = \vec{r}_{eq}} > 0 \quad (3.28)$$

- Punto de Equilibrio **Inestable**: De forma similar al anterior, si se coloca una partícula en reposo en este punto y sin la aparición de fuerzas a su alrededor, la partícula permanecerá en equilibrio en dicho punto por siempre. No obstante, de aparecer algún tipo de fuerza o colocarla en los alrededores del punto de equilibrio inestable, la partícula se encontrará en un movimiento únicamente limitado por la cantidad de energía del sistema y es posible que nunca vuelva a pasar por dicho punto. La forma de encontrar los puntos inestables:

$$\vec{\nabla}^2V \Big|_{\vec{r} = \vec{r}_{eq}} < 0 \quad (3.29)$$

- Punto **No concluyente**:

$$\vec{\nabla}^2V \Big|_{\vec{r} = \vec{r}_{eq}} = 0 \quad (3.30)$$

Es necesario comprobar derivadas de orden superior bajo los mismos criterios para determinar estabilidad u inestabilidad de la posición de equilibrio. De obtenerse $\vec{\nabla}^3V \Big|_{\vec{r} = \vec{r}_{eq}} = 0$, es necesario continuar con orden 4 en la derivación, comprobar criterios y, de ser necesario, repetir los pasos en derivaciones superiores.

A continuación se muestra un ejemplo de como se aplican estos conceptos en un caso unidimensional.

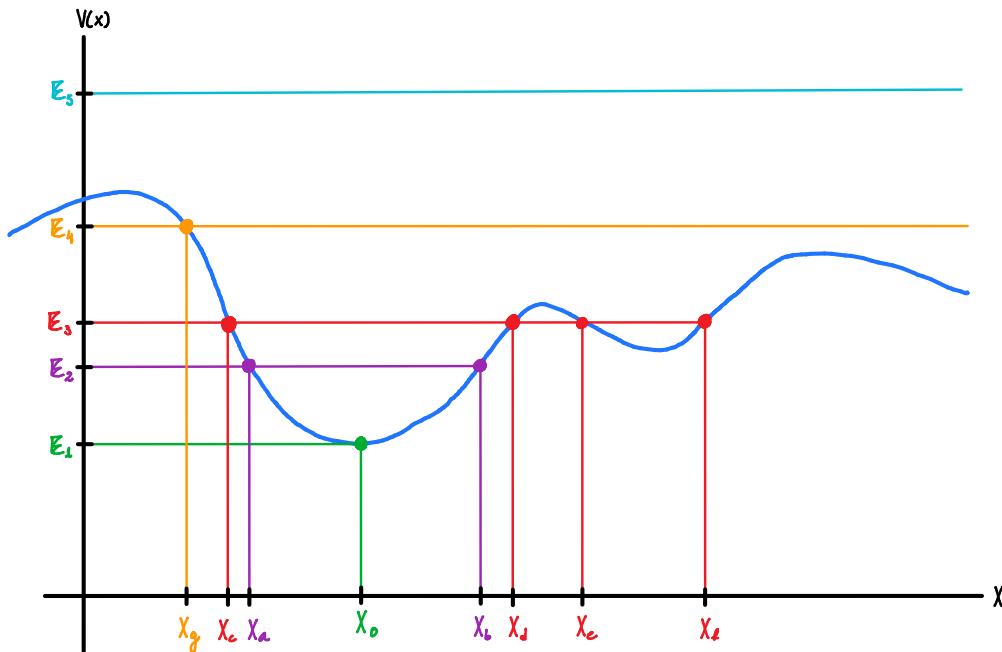


Figura 5. Ejemplo en una dimensión de las condiciones de estabilidad.

La línea azul corresponde a la energía potencial que siente la partícula en cada punto. Se colocan un total de 5 energías totales para el sistema cada una determinada por un color para mayor facilidad. Junto a esto, cada intersección que tienen las rectas de energía con la curva de potencial posee un punto y también su respectiva ubicación en el eje X acorde al color de la energía total.

Al observar la Figura 5, se determina lo siguiente:

- $x = x_0$ corresponde a un punto de equilibrio estable.
- Si se coloca una partícula en $x = x_0$ en energía E_1 , esta permanecerá en reposo.
- Para la energía E_2 , la partícula se moverá de forma periódica en $x_a < x < x_b$.
- Para la energía E_3 , la partícula se moverá de forma periódica en $x_c < x < x_d$ ó $x_e < x < x_f$. Esto es excluyente cabe destacar, la partícula se moverá en uno o en el otro foso.
- Hay un punto de equilibrio inestable entre los puntos x_d y x_e , al igual que entre $x = 0$ y x_g .
- Para la energía E_4 , la partícula se moverá de forma periódica en $x_g < x < +\infty$. La partícula va a $+\infty$, vuelve a x_g y regresa a $+\infty$, completando un ciclo.
- Para la energía E_5 , el movimiento no está limitado por la energía potencial que siente la partícula. Esta se puede mover libremente pero su velocidad va a depender de la posición en la que se encuentre.

SUBSECTION 3.6

Problemas resueltos

Problema 1. (Thornton 2.2)

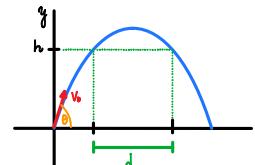
- 2-2. A particle of mass m is constrained to move on the surface of a sphere of radius R by an applied force $\mathbf{F}(\theta, \phi)$. Write the equation of motion.

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - r\ddot{\theta}) \hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta - r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi + (2\dot{\theta}\dot{\phi} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + r\ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \\ &= (-R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - R\ddot{\theta}) \hat{e}_r + (R\ddot{\phi} \sin \theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi + (-R\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + R\ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \\ \sum \vec{F} &= m\vec{a}(t) = -mR(+\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \ddot{\theta}) \hat{e}_r + mR(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi + mR(-\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad ; \vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\phi \hat{e}_\phi + F_\theta \hat{e}_\theta \\ \Rightarrow F_r + F_\phi e_\phi + F_\theta e_\theta &= -mR(+\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \ddot{\theta}) \hat{e}_r + mR(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi + mR(-\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad \text{Respuesta para la pregunta} \\ \Rightarrow \vec{F}(\phi, \theta) &= mR(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_\phi + mR(-\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad \leftarrow \text{Respuesta según el solucionario, buscando la forma de la fuerza desconocida}\end{aligned}$$

Problema 2. (Thornton 2.8)

- 2-8. A projectile is fired with a velocity v_0 such that it passes through two points both a distance h above the horizontal. Show that if the gun is adjusted for maximum range, the separation of the points is

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$



$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{\text{Tiempo de vuelo}} 0 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t \left(\frac{1}{2} g t - v_0 \sin \theta \right) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\text{Rango máximo: } R = v_0 \cos \theta t = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \Rightarrow \frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos(2\theta)}{g} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{Ángulo de máxima alcance}$$

$$h = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = +h - \frac{v_0}{\sqrt{2}} t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} g h}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{2} - \frac{1}{2} g h}}{g}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g h}}{g} \quad \text{Tiempo para alcanzar una misma altura en la parábola}$$

$$d = X(t_+) - X(t_-) = v_0 \cos \theta t_+ - v_0 \cos \theta t_- = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g h}}{g} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g h}}{g} \right) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g h}}{g}$$

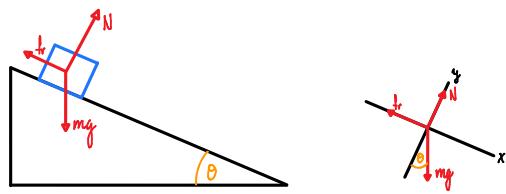
$$\Rightarrow d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2} g h} //$$

Problema 3. (Thornton 2.15)

2-15. A particle of mass m slides down an inclined plane under the influence of gravity. If the motion is resisted by a force $f = kmv^2$, show that the time required to move a distance d after starting from rest is

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{kg \sin \theta}}$$

where θ is the angle of inclination of the plane.



$$\begin{aligned} \sum F_x = mgsen\theta - kmv^2 &= ma_x \Rightarrow gsen\theta - kv^2 = a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = gsen\theta - kv^2 dt \Rightarrow \frac{dv_x}{gsen\theta - kv^2} = dt \\ \Rightarrow \int_0^V \frac{dv_x}{gsen\theta - kv^2} &= \int_0^V \frac{1}{k} \frac{dv_x}{\frac{gsen\theta}{k} - v^2} = \int_0^t \frac{1}{k} dt = t \Rightarrow t = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\frac{gsen\theta}{k}}} \tanh^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{gsen\theta}{k}}}\right) \\ \Rightarrow k\sqrt{\frac{gsen\theta}{k}} t &= \sqrt{gsen\theta} t = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{gsen\theta}{k}}}\right) \Rightarrow \tanh\left(\sqrt{gsen\theta} t\right) = \frac{v}{\sqrt{\frac{gsen\theta}{k}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{gsen\theta}{k}} \tanh\left(\sqrt{gsen\theta} t\right) = v \\ \Rightarrow \int_0^d \sqrt{\frac{gsen\theta}{k}} \tanh\left(\sqrt{gsen\theta} t\right) dt &= \int_0^d dx = d \Rightarrow \frac{1}{k} \ln[\cosh(\sqrt{gsen\theta} t)] = d \Rightarrow \ln[\cosh(\sqrt{gsen\theta} t)] = kd \\ \Rightarrow \cosh(\sqrt{gsen\theta} t) &= e^{kd} \Rightarrow \sqrt{gsen\theta} t = \cosh^{-1}(e^{kd}) \Rightarrow t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{gsen\theta}} // \end{aligned}$$

Problema 4. (Taylor 2.14)

2.14 *** Use the method of Problem 2.7 to solve the following: A mass m is constrained to move along the x axis subject to a force $F(v) = -F_0 e^{v/V}$, where F_0 and V are constants. (a) Find $v(t)$ if the initial velocity is $v_0 > 0$ at time $t = 0$. (b) At what time does it come instantaneously to rest? (c) By integrating $v(t)$, you can find $x(t)$. Do this and find how far the mass travels before coming instantaneously to rest.

$$a) F(v) = -F_0 e^{\frac{v}{V}} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t \frac{F_0}{m} dt = \int_{v_0}^v e^{-\frac{v}{V}} dv \Rightarrow \frac{F_0 t}{m} = -V(e^{\frac{-v}{V}} - e^{\frac{-v_0}{V}}) \Rightarrow \frac{F_0 t}{V m} = e^{\frac{-v}{V}} - e^{\frac{-v_0}{V}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-v}{V}} = \frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \Rightarrow -v = V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \Rightarrow v = -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right)$$

$$b) \text{ Reposo} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} = 1 \Rightarrow \frac{F_0 t}{V m} = 1 - e^{\frac{-v_0}{V}} \Rightarrow t_r = \frac{(1 - e^{\frac{-v_0}{V}}) V m}{F_0}$$

$$c) \frac{dx}{dt} = -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) dt$$

$$* \int_0^t -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) dt \quad u = \frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \quad du = \frac{F_0}{V m} dt \Rightarrow \frac{V m}{F_0} du = dt$$

$$\Rightarrow \int_0^t -V \ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) dt = \int_{e^{\frac{-v_0}{V}}}^{\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}}} -\frac{V}{F_0} \ln(u) du = -\frac{V^2}{F_0} \left[\left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \left[\ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) - 1 \right] - e^{\frac{-v_0}{V}} [\ln(e^{\frac{-v_0}{V}}) - 1] \right]$$

$$= -\frac{V^2}{F_0} \left[\left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \left[\ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) - 1 \right] - e^{\frac{-v_0}{V}} \left[\frac{-v_0}{V} - 1 \right] \right]$$

$$\Rightarrow X = -\frac{V^2}{F_0} \left[\left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \left[\ln \left(\frac{F_0 t}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) - 1 \right] - e^{\frac{-v_0}{V}} \left[\frac{-v_0}{V} - 1 \right] \right]$$

$$\Rightarrow X(t_r) = -\frac{V^2}{F_0} \left[\left(\frac{F_0 (1 - e^{\frac{-v_0}{V}}) V m}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) \left[\ln \left(\frac{F_0 (1 - e^{\frac{-v_0}{V}}) V m}{V m} + e^{\frac{-v_0}{V}} \right) - 1 \right] - e^{\frac{-v_0}{V}} \left[\frac{-v_0}{V} - 1 \right] \right]$$

$$= -\frac{V^2}{F_0} \left\{ 1 \cdot 1 - e^{\frac{-v_0}{V}} \left[\frac{-v_0}{V} - 1 \right] \right\} = +\frac{V^2}{F_0} \left\{ 1 + e^{\frac{-v_0}{V}} \left[\frac{-v_0}{V} - 1 \right] \right\}$$

2.4** The origin of the quadratic drag force on any projectile in a fluid is the inertia of the fluid that the projectile sweeps up. (a) Assuming the projectile has a cross-sectional area A (normal to its velocity) and speed v , and that the density of the fluid is ρ , show that the rate at which the projectile encounters fluid (mass/time) is $\rho A v$. (b) Making the simplifying assumption that all of this fluid is accelerated to the speed v of the projectile, show that the net drag force on the projectile is $\rho A v^2$. It is certainly not true that all the fluid that the projectile encounters is accelerated to the full speed v , but one might guess that the actual force would have the form

$$f_{\text{quad}} = \kappa \rho A v^2 \quad (2.84)$$

where κ is a number less than 1, which would depend on the shape of the projectile, with κ small for a streamlined body, and larger for a body with a flat front end. This proves to be true, and for a sphere the factor κ is found to be $\kappa = 1/4$. (c) Show that (2.84) reproduces the form (2.3) for f_{quad} , with c given by (2.4) as $c = \gamma D^2$. Given that the density of air at STP is $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ and that $\kappa = 1/4$ for a sphere, verify the value of γ given in (2.6).

$$f_{\text{quad}} = cv^2. \quad (2.3)$$

$$c = \gamma D^2 \quad (2.4)$$

$$\gamma = 0.25 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4. \quad (2.6)$$

$$\text{b)} \quad F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \cancel{\frac{dv}{dt}} \xrightarrow{v: \text{constante}} = \frac{dm}{dt} v = \rho v A v = \rho v^2 A \quad //$$

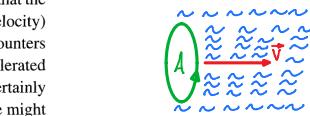
$$\text{c)} \quad f_{\text{quad}} = K \rho v^2 A \xrightarrow{\text{sphere}} \frac{1}{4} \rho v^2 \pi R^2 = \frac{1}{16} \rho v^2 \pi D^2 = c v^2 \Rightarrow c = \frac{\pi D^2}{16} = \gamma D^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{16} \approx 0.25 \quad //$$

Problema 5. (Taylor 2.24)

2.24* Consider a sphere (diameter D , density ρ_{sph}) falling through air (density ρ_{air}) and assume that the drag force is purely quadratic. (a) Use Equation (2.84) from Problem 2.4 (with $\kappa = 1/4$ for a sphere) to show that the terminal speed is

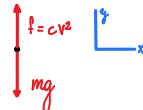
$$v_{\text{ter}} = \sqrt{\frac{8 D g \rho_{\text{sph}}}{3 \rho_{\text{air}}}}. \quad (2.88)$$

(b) Use this result to show that of two spheres of the same size, the denser one will eventually fall faster. (c) For two spheres of the same material, show that the larger will eventually fall faster.



a) Pensando que el área transversal A permanece constante y el fluido se mueve hacia v , se puede plantear

$$\begin{aligned} \cancel{F} &= \iint_S p \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_S p v dA = \cancel{\rho \int_0^R} \rho v r dr db \\ &= \pi r^2 \rho v = \rho v A = \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$



$$m = \rho_{\text{sph}} V = \rho_{\text{sph}} \frac{4}{3} \pi R^3 = \rho_{\text{sph}} \frac{4}{3} \pi D^3$$

$$\text{a)} \sum F_y = \cancel{\rho_{\text{air}} A v^2} - mg = may \Rightarrow \frac{1}{4} \rho_{\text{air}} v^2 \pi R^2 - mg = may \Rightarrow \frac{\rho_{\text{air}} v^2 \pi D^2}{16} - \rho_{\text{air}} \frac{4}{3} \pi D^3 g = \rho_{\text{sph}} \frac{4}{3} \pi D^3 a y$$

$$\text{Velocidad terminal } a_y = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\rho_{\text{air}} v^2 \pi D^2}{16}} - \rho_{\text{air}} \frac{4}{3} \pi D^3 g = 0 \Rightarrow \frac{\rho_{\text{air}} v^2}{16} = \rho_{\text{air}} \frac{D}{6} g \Rightarrow v_{\text{ter}} = \sqrt{\frac{8 D g \rho_{\text{sph}}}{3 \rho_{\text{air}}}} \quad //$$

$$\text{b)} \quad \rho_{\text{sph1}} > \rho_{\text{sph2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\text{ter1}}}{v_{\text{ter2}}} = \sqrt{\frac{\frac{8 D g \rho_{\text{sph1}}}{3 \rho_{\text{air}}}}{\frac{8 D g \rho_{\text{sph2}}}{3 \rho_{\text{air}}}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{sph1}}}{\rho_{\text{sph2}}}} \Rightarrow v_{\text{ter1}} = v_{\text{ter2}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{sph1}}}{\rho_{\text{sph2}}}} \text{ con } \sqrt{\frac{\rho_{\text{sph1}}}{\rho_{\text{sph2}}}} > 1 \text{ ya que } \rho_{\text{sph1}} > \rho_{\text{sph2}} \quad //$$

$$\text{c)} \quad D_1 > D_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\text{ter1}}}{v_{\text{ter2}}} = \sqrt{\frac{\frac{8 D g \rho_{\text{sph1}}}{3 \rho_{\text{air}}}}{\frac{8 D g \rho_{\text{sph2}}}{3 \rho_{\text{air}}}}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \Rightarrow v_{\text{ter1}} = v_{\text{ter2}} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \text{ con } \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} > 1 \text{ ya que } D_1 > D_2 \quad //$$

Problema 6. (Taylor 2.28)

2.28* A mass m has speed v_0 at the origin and coasts along the x axis in a medium where the drag force is $F(v) = -cv^{3/2}$. Use the “ $v \frac{dv}{dx}$ rule” (2.86) in Problem 2.12 to write the equation of motion in the separated form $m v \frac{dv}{F(v)} = dx$, and then integrate both sides to give x in terms of v (or vice versa). Show that it will eventually travel a distance $2m\sqrt{v_0/c}$.

$$\sum F_x = -cv^{\frac{3}{2}} = ma \Rightarrow -\frac{cv^{\frac{3}{2}}}{m} = \frac{dv}{dt} ; \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow -\frac{cv^{\frac{3}{2}}}{m} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow -\frac{c}{m} dx = \frac{v}{v^{\frac{3}{2}}} dv = \frac{1}{\sqrt{v}} dv$$

$$\Rightarrow \int_0^x -\frac{c}{m} dx = \int_{v_0}^v \frac{1}{\sqrt{v}} dv \Rightarrow -\frac{c}{m} x = \int_{v_0}^v \frac{1}{\sqrt{v}} dv$$

$* \int_{v_0}^v \frac{1}{\sqrt{v}} dv = \int_{v_0}^v v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{v^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_{v_0}^v = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{v_0}^v = 2v^{\frac{1}{2}} \Big|_{v_0}^v = 2v^{\frac{1}{2}} - 2v_0^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow -\frac{c}{m} x = 2v^{\frac{1}{2}} - 2v_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -\frac{c}{2m} x = v^{\frac{1}{2}} - v_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{c}{2m} x}^4$$

$$v = \sqrt{v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{c}{2m} x}^4 = 0 \Rightarrow v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{c}{2m} x = 0 \Rightarrow x = \frac{2m\sqrt{v_0}}{c}$$

Problema 7. (Thornton 2.32)

2.32. Two blocks of unequal mass are connected by a string over a smooth pulley (Figure 2-B). If the coefficient of kinetic friction is μ_k , what angle θ of the incline allows the masses to move at a constant speed?

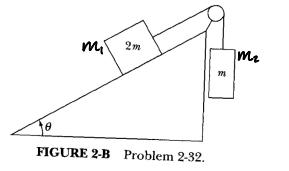
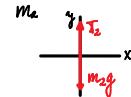
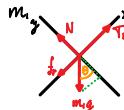


FIGURE 2-B Problem 2.32.

$$m_1 \quad \sum F_{1x} = T_1 - f_r - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x}$$

$$\sum F_{1y} = N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_{1y} \quad \text{no hay movimiento en } y$$

$$\Rightarrow T - f_r - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x}$$

$$N = m_1 g \cos \theta ; f_r = \mu_k N$$

$$m_2 \quad \sum F_{2x} = 0$$

$$\sum F_{2y} = T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$\Rightarrow T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$\Rightarrow T = m_2(g - a)$$

Pulea

$$\sum F_{0z} = -R T_{1z} + R T_{2z} = T a$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2$$

* Condición $a_{1x} = -a_{2y} = a$

$v: \text{constante} \Rightarrow a = 0^*$

$$\Rightarrow T = \mu_k m_1 g \cos \theta - m_1 g \sin \theta + m_1 a$$

$$= m_1(\mu_k g \cos \theta - g \sin \theta + a)$$

Uniendo ecuaciones $\Rightarrow m_1(\mu_k g \cos \theta - g \sin \theta + a) = m_2(g - a)^*$

$$\Rightarrow m_1(\mu_k g \cos \theta - g \sin \theta) = m_2 g$$

$$\Rightarrow \mu_k g \cos \theta - g \sin \theta = \frac{m_2}{m_1} ; \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \Rightarrow \mu_k \sqrt{1 - \sin^2 \theta} - \sin \theta = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\Rightarrow \mu_k^2(1 - \sin^2 \theta) = \left(\frac{m_2}{m_1} + \sin \theta\right)^2 \Rightarrow \mu_k^2 - \mu_k^2 \sin^2 \theta = \frac{m_2^2}{m_1^2} + 2 \frac{m_2}{m_1} \sin \theta + \sin^2 \theta$$

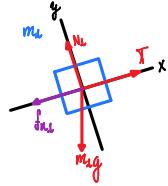
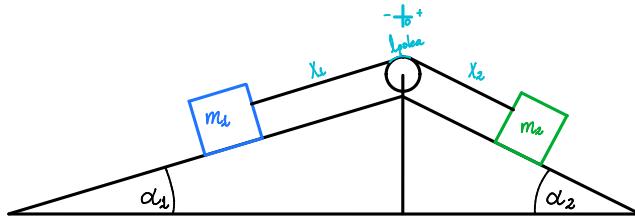
$$\Rightarrow \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - \mu_k^2\right) + 2 \frac{m_2}{m_1} \sin \theta + \sin^2 \theta (1 + \mu_k^2) = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-2 \frac{m_2}{m_1} \pm \sqrt{4 \frac{m_2^2}{m_1^2} - 4(1 + \mu_k^2)(\frac{m_2^2}{m_1^2} - \mu_k^2)}}{2(1 + \mu_k^2)} \quad \text{con } m_1 = 2m_2 = 2m$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{-2 \frac{m_2}{m_1} \pm \sqrt{4 \frac{m_2^2}{m_1^2} - 4(1 + \mu_k^2)(\frac{m_2^2}{m_1^2} - \mu_k^2)}}{2(1 + \mu_k^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + \mu_k^2)(\frac{1}{4} - \mu_k^2)}}{2(1 + \mu_k^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3\mu_k^2 + \frac{1}{4}\mu_k^2}}{2(1 + \mu_k^2)}$$

Problema 8.

Considera dos masas m_1 y m_2 colocadas en un doble plano inclinado, con ángulos α_1 y α_2 , respectivamente. Los cuerpos están unidos por medio de una cuerda y polea completamente ideales y sin masa apreciable.

1. Determine la aceleración de cada bloque sobre el plano, si no existe fricción entre ellos y el doble plano inclinando.
2. Determine la aceleración de cada bloque sobre el plano, si el coeficiente de fricción cinética entre ellos y el doble plano inclinando es el mismo (μ_k).
3. ¿Cómo cambia el resultado si el coeficiente es distinto?



$$\sum F_{1x} = T - f_{1s} - m_1 g \sin \alpha_1 = m_1 a_{1x}$$

$$\sum F_{1y} = N_1 - m_1 g \cos \alpha_1 = m_1 a_{1y}$$



$$\sum F_{2x} = -T - f_{2s} + m_2 g \sin \alpha_2 = m_2 a_{2x}$$

$$\sum F_{2y} = N_2 - m_2 g \cos \alpha_2 = m_2 a_{2y}$$

Aplicando lo anterior se obtiene:

$$N_1 - m_1 g \cos \alpha_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g \cos \alpha_1$$

$$\Rightarrow T - \mu_k m_1 g \cos \alpha_1 - m_1 g \sin \alpha_1 = m_1 a_{1x}$$

$$N_2 - m_2 g \cos \alpha_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \cos \alpha_2$$

$$\Rightarrow -T - \mu_k m_2 g \cos \alpha_2 + m_2 g \sin \alpha_2 = m_2 a_{2x}$$

$$\Rightarrow m_1 a_{1x} + \mu_k m_1 g \cos \alpha_1 + m_1 g \sin \alpha_1 = -\mu_k m_2 g \cos \alpha_2 + m_2 g \sin \alpha_2 - m_2 a_{2x}$$

$$\Rightarrow a_x(m_1 + m_2) = -\mu_k m_2 g \cos \alpha_2 + m_2 g \sin \alpha_2 - \mu_k m_1 g \cos \alpha_1 - m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g(-\mu_k \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) - m_1 g(\mu_k \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{m_2 g(-\mu_k \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) - m_1 g(\mu_k \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$1) \quad \mu_{1s} = \mu_{2s} = 0 \Rightarrow a_x = \frac{m_2 g(-\mu_k \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) - m_1 g(\mu_k \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_2 g \sin \alpha_2 - m_1 g \sin \alpha_1}{(m_1 + m_2)} //$$

$$2) \quad \mu_{1s} = \mu_{2s} = \mu_k \neq 0 \Rightarrow a_x = \frac{m_2 g(-\mu_k \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) - m_1 g(\mu_k \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)} //$$

$$3) \quad \mu_{1s} \neq \mu_{2s} \neq 0 \Rightarrow a_x = \frac{m_2 g(-\mu_k \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2) - m_1 g(\mu_k \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)}{(m_1 + m_2)} //$$

* Largo de la cuerda: $l = \bar{x}_1 + l_{\text{polea}} + \bar{x}_2$, derivando respecto t

$$\Rightarrow 0 = -\dot{\bar{x}}_1 + \dot{\bar{x}}_2 \xrightarrow{\text{derivando}} 0 = -\ddot{\bar{x}}_1 + \ddot{\bar{x}}_2 \Rightarrow \ddot{\bar{x}}_1 = \ddot{\bar{x}}_2$$

* Ninguno de los cuerpos se va a mover en sus ejes y, permanecen en reposo en este eje, por lo que

$$a_{1y} = a_{2y} = 0$$

* La fricción cinética se define como: $f_k = N \mu_k$

* Hay que eliminar la variable T

Problema 9.

Considera una partícula que percibe una fuerza angular solamente, de la forma $F_\theta = 2mr\dot{\theta}$. Demuestra que $r = Ae^\theta + Be^{-\theta}$, donde A y B son constantes, determinadas por las condiciones iniciales.

$$\ddot{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_\theta \Rightarrow \vec{F}_\theta = m\ddot{r} \Rightarrow 2mr\ddot{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow mr\ddot{\theta} = mr\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{constante} = c$$

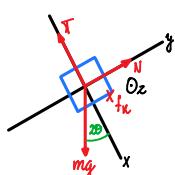
$$\Rightarrow \ddot{r} = (\ddot{\rho} - \rho c^2)\hat{e}_\rho \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho c^2 = 0 \Rightarrow \rho = Ae^{ct} + B^{-ct} \Rightarrow \rho = Ae^{\theta} + B^{-\theta}$$

Aceleración en \hat{e}_ρ igual a cero

$$m^2 - c^2 = 0 \\ m^2 = c^2 \Rightarrow m = \pm c$$

Problema 10.

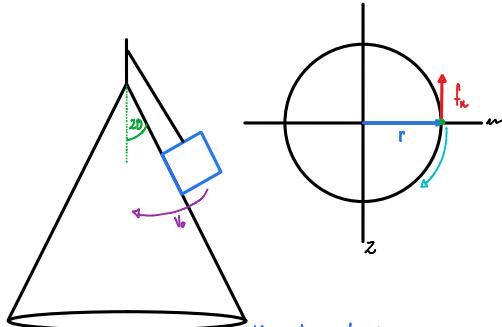
Un cono subtende un ángulo 2θ . Un bloque de masa m está conectado a la punta por una cuerda sin masa y se mueve en un círculo horizontal de radio R alrededor de la superficie externa. Si la rapidez inicial es v_0 , y si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el cono es μ_k , ¿cuánto tiempo tarda el bloque en detenerse?



$$\sum F_x = -T + mg\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow T = mg\cos(2\theta)$$

$$\sum F_y = N - mg\sin(2\theta) = 0 \Rightarrow N = mg\sin(2\theta)$$

$$\sum F_z = -f_n = ma_z \Rightarrow -\mu_k N g \sin(2\theta) = ma_z \Rightarrow a_z = -\mu_k g \sin(2\theta)$$



En el instante en que m se halla en un punto preso

Durante el giro de m , la fricción estará en la dirección tangencial al círculo horizontal por el que se mueve m .

$$\sum \vec{F} = m\ddot{r} \Rightarrow -f_n \hat{e}_\theta = m\ddot{r} \Rightarrow -\mu_k N g \sin(2\theta) \hat{e}_\theta = \ddot{r} \Rightarrow -\mu_k N g \sin(2\theta) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow \dot{\theta} - v_0 = -\mu_k g \sin(2\theta)t$$

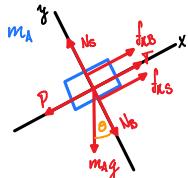
$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\mu_k g \sin(2\theta)t + v_0; \text{ la partícula se detiene cuando } \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\mu_k g \sin(2\theta)t + v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_k g \sin(2\theta)}$$

Problema 11.

El bloque A tiene una masa de 25 kg y el bloque B de 15 kg. El coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto es de 0.15. Sabiendo que el ángulo del plano inclinado es de 25° . Una fuerza horizontal \vec{P} jala al cuadro A hacia abajo del plano inclinado, con una magnitud de 250 N y es capaz de acelerar al bloque B, determine la aceleración de cada bloque.

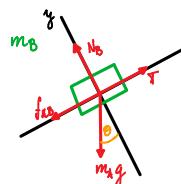
Se supone polea perfecta y cuerda perfecta



Para m_A :

$$\sum F_{Ax} = T - mg \sin \theta + f_{Ax} + f_{Ay} - P = m_A a_{Ax} \quad (1)$$

$$\sum F_{Ay} = N_A - mg \cos \theta - N_B = m_A g \cos \theta \Rightarrow N_A = m_A g \cos \theta + N_B$$



Para m_B : $\Rightarrow N_B = (m_A + m_B) g \cos \theta$

$$\sum F_{Bx} = T - mg \sin \theta - f_{Bx} = m_B a_{Bx} \quad (2)$$

$$\sum F_{By} = N_B - mg \cos \theta = m_B g \cos \theta \Rightarrow N_B = m_B g \cos \theta$$

Despejando T de 1 y 2:

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow T &= mg \sin \theta - f_{Ax} - f_{Ay} + P + m_A a_{Ax} \\ &= mg \sin \theta - \mu_k (m_A + m_B) g \cos \theta - \mu_k m_B g \cos \theta + P + m_A a_{Ax} \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow T = mg \sin \theta + f_{Bx} + m_B a_{Bx} = mg \sin \theta + \mu_k m_B g \cos \theta + m_B a_{Bx}$$

Igualando 1 y 2:

$$mg \sin \theta - \mu_k (m_A + m_B) g \cos \theta - \mu_k m_B g \cos \theta + P + m_A a_{Ax} = mg \sin \theta + \mu_k m_B g \cos \theta + m_B a_{Bx}$$

$$(m_A - m_B) g \sin \theta - \mu_k (m_A + m_B) g \cos \theta - 2\mu_k m_B g \cos \theta + P = m_B a_{Bx} - m_A a_{Ax} = a_B (m_A + m_B)$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{(m_A - m_B) g \sin \theta - \mu_k (m_A + m_B) g \cos \theta - 2\mu_k m_B g \cos \theta + P}{(m_A + m_B)} = 4,95 \text{ m/s}^2 //$$

$$\Rightarrow a_A = -a_B = -4,95 \text{ m/s}^2 //$$

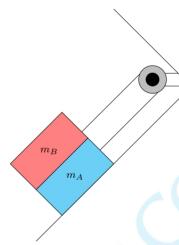


Figura 1: Configuración del problema.

Los bloques no poseen movimiento en el eje y del marco *

La fricción cinética se define como: $f_k = \mu_k N$

$$\Rightarrow f_{Ax} = \mu_k N_B = \mu_k m_B g \cos \theta$$

$$\Rightarrow f_{Ay} = \mu_k N_A = \mu_k (m_A + m_B) g \cos \theta$$

Largo de la cuerda l

$$l = x_B - x_A + c_p$$

$$\text{Derivando respecto a } t \Rightarrow 0 = -\dot{x}_B - \dot{x}_A$$

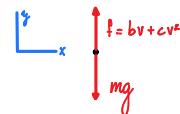
$$\text{De nuevo } \Rightarrow 0 = -\ddot{x}_B - \ddot{x}_A$$

$$\Rightarrow -\ddot{x}_A = \ddot{x}_B$$

Problema 12.

Determine la velocidad terminal cuando la fuerza de resistencia incluye los términos lineal y cuadrático.

$\sum F_y = bv + cv^2 - mg = may$ La velocidad terminal se obtiene cuando $ay = 0$.



$$\Rightarrow bv + cv^2 - mg = 0 \Rightarrow v_{ter} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4mgc}}{2c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4mgc}}{2c}$$

$$\Rightarrow v_{ter} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4mgc}}{2c}$$

Problema 13. (Taylor 2.40)

2.40 ** Consider an object that is coasting horizontally (positive x direction) subject to a drag force $f = -bv - cv^2$. Write down Newton's second law for this object and solve for v by separating variables. Sketch the behavior of v as a function of t . Explain the time dependence for t large. (Which force term is dominant when t is large?)

$$\sum F_x = -bv - cv^2 = max = m \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{-bv - cv^2}{m} \Rightarrow \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{bv + cv^2} dv_x = \int_0^t \frac{-1}{m} dt = \frac{-t}{m}$$

$$\int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{bv + cv^2} dv_x = \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{v(b + cv)} dv_x = \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{A}{v} + \frac{B}{b + cv} dv_x \star \Rightarrow \frac{A}{v} + \frac{B}{b + cv} = \frac{1}{v(b + cv)}$$

$$\Rightarrow \frac{A(b + cv)}{v(b + cv)} + Bv = \frac{1}{v(b + cv)} \Rightarrow A(b + cv) + Bv = 1 \Rightarrow Ab + Acv + Bv = Ab + v(Ac + B) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ab = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{b} \\ Ac + B = 0 \Rightarrow -\frac{1}{b} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{b} \end{cases} \star \Rightarrow \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{\frac{1}{b}}{v} + \frac{\frac{1}{b}}{b + cv} dv_x = \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{bv} - \frac{1}{b(b + cv)} dv_x = \frac{1}{b} \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{v} - \frac{1}{b + cv} dv_x$$

$$= \frac{1}{b} \left[\ln(v_x) \Big|_{v_{ter}}^{v_x} - \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{b + cv} dv_x \right] \star; u = b + cv \Rightarrow du = c dv \Rightarrow \int \frac{1}{b + cv} dv = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + C = \ln(b + cv) + C$$

$$\star \Rightarrow \frac{1}{b} \left[\ln(v_x) \Big|_{v_{ter}}^{v_x} - \int_{v_{ter}}^{v_x} \frac{1}{b + cv} dv_x \right] = \frac{1}{b} \left[\ln(v_x) - \ln(b + cv) \right] \Big|_{v_{ter}}^{v_x} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{v_x}{b + cv} \right) \Big|_{v_{ter}}^{v_x} = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{v_x}{b + cv_{ter}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{v_{ter}}{b + cv_{ter}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \ln \left(\frac{v_x}{b + cv} \right) - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{v_{ter}}{b + cv_{ter}} \right) = \frac{-t}{m} \Rightarrow \ln \left(\frac{v_x}{b + cv} \right) - \ln \left(\frac{v_{ter}}{b + cv_{ter}} \right) = \ln \left[\frac{(b + cv)(v_x)}{v_{ter}(b + cv_{ter})} \right] = \frac{-bt}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{(b + cv)(v_x)}{v_{ter}(b + cv_{ter})} = e^{\frac{-bt}{m}} \Rightarrow \frac{v_x}{b + cv} = \frac{v_{ter}}{b + cv_{ter}} e^{\frac{-bt}{m}} \Rightarrow \frac{b + cv}{V_x} = \frac{b}{V_x} + c = \frac{b + cv_{ter}}{V_{ter}} e^{\frac{-bt}{m}} \Rightarrow \frac{b}{V_x} = \frac{b + cv_{ter}}{V_{ter}} e^{\frac{-bt}{m}} - c$$

$$\Rightarrow \frac{b}{V_x} = \frac{b + cv_{ter}}{V_{ter}} e^{\frac{-bt}{m}} - c \frac{V_{ter}}{V_x} \Rightarrow V_x = \frac{bV_{ter}}{b + cv_{ter} e^{\frac{-bt}{m}} - cV_{ter}}$$

Cuando t es grande V_x va a ser pequeño, restableciendo importancia a " cV_x^{-1} " de la fuerza de arrastre
 $V_x \approx \frac{b}{t}$ en comportamiento

Energía y teoremas de conservación

Problema 1. (Thornton 2.25)

- 2-25. A block of mass $m = 1.62 \text{ kg}$ slides down a frictionless incline (Figure 2-A). The block is released a height $h = 3.91 \text{ m}$ above the bottom of the loop.
- What is the force of the inclined track on the block at the bottom (point A)?
 - What is the force of the track on the block at point B?
 - At what speed does the block leave the track?
 - How far away from point A does the block land on level ground?
 - Sketch the potential energy $U(x)$ of the block. Indicate the total energy on the sketch.

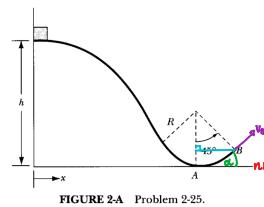


FIGURE 2-A Problem 2-25.

a)

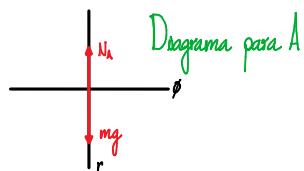


Diagrama para A

$$\sum F_r = mg - N_A = ma_{\text{rad}} \Rightarrow mg - N_A = -m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N_A = mg + m \frac{v^2}{R}$$

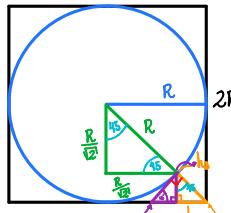
Hay que hallar v en A: $\Delta E = 0 \Rightarrow T_A + U_{g0} = T_A + U_{g1} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow v_A^2 = 2gh \star \Rightarrow N_A = mg \left(1 + \frac{2}{R} h \right)$



$$\sum F_r = m g \cos \theta - N_B = ma_{\text{rad}} \Rightarrow m g \cos \theta - N_B = -m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N_B = m \left(\cos \theta + \frac{v^2}{R} \right) \star$$

$$\sum F_\theta = -mg \sin \theta = ma_\theta$$

Hay que hallar v en B: $\Delta E = 0 \Rightarrow T_A + U_{g0} = T_B + U_{g1} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \Rightarrow v_B^2 = 2g(h - h_B) \star$



$$R = \frac{R}{\sqrt{2}} + h_B \Rightarrow h_B = R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \star \Rightarrow N_B = mg \left(\cos \theta + \frac{2}{R} \left[h - R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \right)$$

$$h_B = b_0 \text{ por triángulo } 45^\circ$$

c) $* v_B^2 = 2g(h - h_B) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g \left[h - R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]} = \sqrt{2gh - gh\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{gh[2-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]} = \sqrt{2gh}$

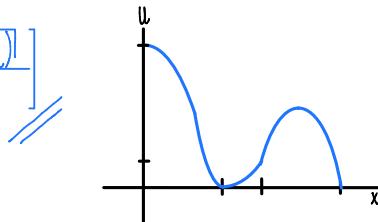
d) $v_B = v_0 \quad \alpha = 45^\circ \Rightarrow y_t = h_B + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{t_{\text{máx}}} h_B + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

Es la solución "+" para $t > 0$

$$\Rightarrow t = \frac{-v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h_B}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} = \frac{+v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_B}}{g} \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh_B}}{g}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}gh \sin \alpha + \sqrt{2}gh \sin^2 \alpha + \sqrt{2}gR(\sqrt{2}-1)}{g} = \frac{\sqrt{2}gh \sin \alpha + \sqrt{2}gh \sin^2 \alpha + \sqrt{2}gR(\sqrt{2}-1)}{g}$$

$$x_t = x_0 + v_0 t = R \sin \alpha + \sqrt{2}gh \cos \alpha \cdot \left[\frac{\sqrt{2}gh \sin \alpha + \sqrt{2}gh \sin^2 \alpha + \sqrt{2}gR(\sqrt{2}-1)}{g} \right]$$



Problema 2. (Thornton 2.27)

- 2-27. A rope having a total mass of 0.4 kg and total length 4 m has 0.6 m of the rope hanging vertically down off a work bench. How much work must be done to place all the rope on the bench?

$$\text{densidad lineal } \rho = \frac{m}{l} \Rightarrow m(l) = \rho l \Rightarrow \vec{F} = -\rho g(l-y)\hat{j}$$

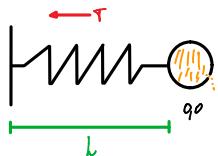
$$\text{Movimiento unidimensional} \Rightarrow d\vec{r} = dy\hat{j}$$

$$\text{Trabajo necesario para subir el extremo de la cuerda: } W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{L_0} -\rho g(l-y) dy = \frac{\rho g(l-y)^2}{2} \Big|_0^{L_0} = -\frac{\rho g L^2}{2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Trabajo por la} \\ \text{gravedad} \end{array}$$

$$\Rightarrow W_e = -W = \frac{\rho g L^2}{2} = 0,18 \text{ J necesarios para levantar la cuerda} //$$

Problema 3.

En $t = 0$, un balde sin masa contiene una masa inicial M de arena. Está conectado a una pared por un resorte sin masa con tensión constante T (es decir, independiente de la longitud). El suelo no tiene fricción y la distancia inicial a la pared es L . El balde se suelta y, en su camino hacia la pared, pierde arena a razón de $dm/dx = M/L$, de tal forma que en un tiempo t la masa es m y x es la distancia con respecto a la pared. Por lo tanto, la tasa con la que pierde masa es constante con respecto a la distancia, no al tiempo. Además considere que el balde termina vacío justo cuando llega a la pared.



a. Determine la energía cinética del balde y la arena, como función de x . ¿Dónde es máxima?

b. ¿Cuál es el momentum lineal del balde? ¿Dónde es máximo?

a) El sistema es (bald + arena dentro) + arena fuera

$$p_T = m_b V_{ba} + m_a V_a \Rightarrow p_T = \cancel{\frac{dm_b}{dt}} V_{ba} + \cancel{m_a} \cancel{\frac{dm_a}{dt}} V_a + \cancel{\frac{dm_a}{dt}} V_a + m_a \cancel{\frac{dm_a}{dt}} \stackrel{\text{En cada instante que es expulsada tiene la velocidad del balde y es constante del acer}}{=} ; \frac{dm_a}{dt} = -\frac{dm_a}{dt} = -\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{p}_T = m_a \cancel{\frac{dV_{ba}}{dt}} = -T ; \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Rightarrow \int_0^m dm = \int_0^x \frac{M}{L} dx \Rightarrow m = \frac{M}{L} x$$

$$\Rightarrow \frac{M}{L} x \cancel{\frac{dV_{ba}}{dt}} = -T = \frac{M}{L} \cancel{\frac{dV}{dt}} \cancel{\frac{dx}{dx}} = \frac{M}{L} X v \cancel{\frac{dv}{dx}} \Rightarrow -T = \frac{M}{L} X v \cancel{\frac{dv}{dx}} \Rightarrow \int_L^X \frac{-T}{X^M} dx = \int_0^x v dv$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{-T}{M} \ln\left(\frac{X}{L}\right) \Rightarrow v = \sqrt{-\frac{2T}{M} \ln\left(\frac{X}{L}\right)} \Rightarrow T_e = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cancel{M} X \cdot \cancel{\frac{-T}{M} \ln\left(\frac{X}{L}\right)} = -T X \ln\left(\frac{X}{L}\right)$$

$$\Rightarrow T_e = -T X \ln\left(\frac{X}{L}\right) //$$

$$\Rightarrow \text{Máximo } \frac{dT_e}{dx} = 0 \Rightarrow -T \ln\left(\frac{X}{L}\right) - T X \cancel{\frac{1}{X}} = -T \ln\left(\frac{X}{L}\right) - T X \cancel{\frac{1}{X}} = -T \ln\left(\frac{X}{L}\right) - T L = 0 \Rightarrow X_{e,\max} = L e^L //$$

$$b) p_{ba} = m_a v = \frac{M}{L} x \cdot \sqrt{-\frac{2T}{M} \ln\left(\frac{X}{L}\right)} = \sqrt{\frac{M^2 X^2}{L^2} \cdot \cancel{\frac{-2T}{M} \ln\left(\frac{X}{L}\right)}} = \sqrt{\frac{2TM}{L}} \cdot \sqrt{-X^2 \ln\left(\frac{X}{L}\right)} //$$

$$\frac{dp_{ba}}{dx} = \sqrt{\frac{2TM}{L}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{-X^2 \ln\left(\frac{X}{L}\right)}} \cdot \left(-2X \ln\left(\frac{X}{L}\right) - X \cancel{\frac{1}{X}} \right) = \sqrt{\frac{2TM}{L}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{-X^2 \ln\left(\frac{X}{L}\right)}} \cdot \left(-2X \ln\left(\frac{X}{L}\right) - X L \right)$$

$$\text{Máximo } \frac{dp_{ba}}{dx} = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2TM}{L}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{-X^2 \ln\left(\frac{X}{L}\right)}} \cdot \left(-2X \ln\left(\frac{X}{L}\right) - X L \right) = 0 \Rightarrow -2X \ln\left(\frac{X}{L}\right) - X L = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{X}{L}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow X_{p,\max} = L e^{-\frac{1}{2}} //$$

Problema 4. (Thornton 2.41)

- 2.41. A train moves along the tracks at a constant speed u . A woman on the train throws a ball of mass m straight ahead with a speed v with respect to herself. (a) What is the kinetic energy gain of the ball as measured by a person on the train? (b) by a person standing by the railroad track? (c) How much work is done by the woman throwing the ball and (d) by the train?

$$a) T_m = \frac{1}{2}mv^2 //$$

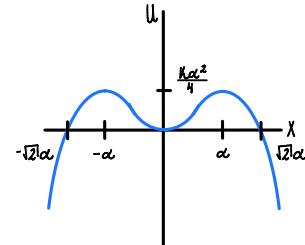
$$b) T_r = \frac{1}{2}m(u+v)^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + muv //$$

$$c) W_m = \Delta T \Rightarrow W_m = \frac{1}{2}mv^2 // \quad d) W_t = W_r + W_m = \frac{1}{2}mv^2 + muv \Rightarrow W_r = \frac{1}{2}mv^2 + muv - \frac{1}{2}mv^2 = muv //$$

Problema 5. (Thornton 2.43)

- 2.43. A particle is under the influence of a force $F = -kx + kx^3/\alpha^2$, where k and α are constants and k is positive. Determine $U(x)$ and discuss the motion. What happens when $E = (1/4)k\alpha^2$?

$$F = -\nabla U \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow -\int_0^x dU = \int_0^x -kx + \frac{kx^3}{\alpha^2} dx \Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{kx^4}{4\alpha^2}$$



Cuando $E = \frac{k\alpha^2}{4}$ es la máxima energía potencial, es un punto de equilibrio inestable. //

Problema 6.

Considera la máquina de Atwood de la Figura 4.15 (ver libro de texto), pero suponga que la polea tiene radio R y momento de inercia I .

- Escriba la energía total de las dos masas y la polea en términos de la coordenada x y \dot{x} . (Recuerde que la energía cinética de un disco es $I\omega^2/2$).
- Demuestre que puede obtener la ecuación de movimiento para la coordenada x derivando la ecuación $E = \text{cte}$. Compruebe que la ecuación de movimiento es la misma que obtendría aplicando la II Ley de Newton por separado a las dos masas y la polea, y luego eliminando las dos tensiones desconocidas de las tres ecuaciones resultantes.

$$a) \text{La polea tiene energía potencial cero} \Rightarrow T_3 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_3^2 \quad y \quad U = m_1g\dot{x}_1 + m_2g\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_3^2 + m_1g\dot{x}_1 + m_2g\dot{x}_2$$

$$b) \frac{dE_s}{dt} = m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + I\dot{\theta}_3\ddot{\theta}_3 + m_1g\dot{x}_1 + m_2g\dot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + I\dot{\theta}_3\ddot{\theta}_3 + m_1g\dot{x}_1 - m_2g\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) + g(m_2 - m_1) = 0 //$$

$$\sum F_1 = T_1 - m_1g = m_1a_1 \Rightarrow T_1 = m_1a_1 + m_1g \quad y \quad \sum F_2 = T_2 - m_2g = m_2a_2 \Rightarrow T_2 = m_2a_2 + m_2g$$

$$\sum T = -T_1R + T_2R = I\alpha \Rightarrow -m_1a_1 - m_2a_2 + m_2g = \frac{I\alpha}{R^2} \Rightarrow -a_1\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) + g(m_2 - m_1) = 0 //$$

$$S = R\theta \\ V = R\dot{\theta}$$

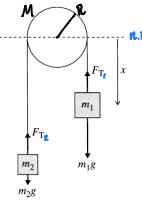


Figure 4.15 An Atwood machine consisting of two masses, m_1 and m_2 , suspended by a massless inextensible string that passes over a massless, frictionless pulley. Because the string's length is fixed, the position of the whole system is specified by the distance x of m_1 below any convenient fixed level. The forces on the two masses are their weights m_1g and m_2g , and the tension forces F_T (which are equal since the pulley and string are massless).

$$a_1 = -a_2 \quad y \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{x}_2}{R} \quad y \quad \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

(Taylor 4.36)

4.36 ** A metal ball (mass m) with a hole through it is threaded on a frictionless vertical rod. A massless string (length l) attached to the ball runs over a massless, frictionless pulley and supports a block of mass M , as shown in Figure 4.27. The positions of the two masses can be specified by the one angle θ . (a) Write down the potential energy $U(\theta)$. (The PE is given easily in terms of the heights shown as h and H . Eliminate these two variables in favor of θ and the constants b and l . Assume that the pulley and ball have negligible size.) (b) By differentiating $U(\theta)$ find whether the system has an equilibrium position, and for what values of m and M equilibrium can occur. Discuss the stability of any equilibrium positions.

$$l = H + d = H + \sqrt{b^2 + h^2} = -X_m + \sqrt{b^2 + X_m^2} = -X_m + \sqrt{b^2 + b^2 \cot^2 \theta} = -X_m + b \csc \theta$$

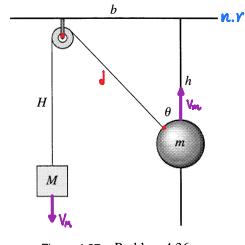


Figure 4.27 Problem 4.36

$$\Rightarrow X_m = b \csc \theta - l \quad y \quad X_m = -b \cot \theta \Rightarrow X_m = -X_m - l$$

$$a) U = U_m + U_M = mgX_m + MgX_m = -mgb \cot \theta + Mg(b \csc \theta - l)$$

$$b) \frac{dU}{d\theta} = mgb \csc^2 \theta - Mg b \csc \theta \cot \theta = 0 \Rightarrow \csc \theta (mg \csc \theta - Mg \cot \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \csc \theta = 0 \vee mg \csc \theta - Mg \cot \theta = 0 \Rightarrow m \csc \theta = M \cot \theta \Rightarrow m = M \cos \theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

$$m = Mh; \text{ con } 0 < h \leq l \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(h) \therefore \text{Hay un punto equilibrio, depende de que tanta sea la diferencia de masa}$$

c) Halle la velocidad del sistema cuando M se mueve $\frac{l}{5}$ de su posición inicial suponiendo que $M > m$

$$X_m = b \csc \theta - l \Rightarrow V_m = -b \cot \theta \csc \theta \cdot \dot{\theta} \quad y \quad X_m = -b \cot \theta \Rightarrow V_m = -b \csc^2 \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{1}{2} m b \csc^4 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M b \cot^2 \theta \csc^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \quad y \quad U_f = mg(-b \cot \theta + \frac{l}{5}) + Mg(b \csc \theta - l - \frac{l}{5})$$

$$\Rightarrow U_i = U_f + T \Rightarrow mg\left(\frac{l}{5}\right) + Mg\left(-\frac{l}{5}\right) + \frac{1}{2} m b \csc^4 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M b \cot^2 \theta \csc^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2mg\left(\frac{l}{5}\right) + 2Mg\left(-\frac{l}{5}\right) + mb \csc^4 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + M b \cot^2 \theta \csc^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2lg(m-M)}{5} + b \csc^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 (m \csc^2 \theta + M \cot^2 \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{-2lg(m-M)}{5b \csc^2 \theta (m \csc^2 \theta + M \cot^2 \theta)} ; \cot^2 \theta = \frac{(h-\frac{l}{5})^2}{b^2} \quad y \quad \csc^2 \theta = \frac{l^2}{b^2} = \frac{b^2 + (h-\frac{l}{5})^2}{b^2}$$

$$= \frac{2lg(M-m)}{\frac{5b^2 \left[b^2 + (h-\frac{l}{5})^2 \right]}{b^2} \left[m \left[\frac{b^2 + (h-\frac{l}{5})^2}{b^2} \right] + M \left(\frac{h-\frac{l}{5}}{b} \right)^2 \right]}$$

$$= \frac{5 \left[b^2 + (h-\frac{l}{5})^2 \right]}{5 \left[b^2 + (h-\frac{l}{5})^2 \right] \left\{ m \left[\frac{b^2 + (h-\frac{l}{5})^2}{b^2} \right] + M \left(\frac{h-\frac{l}{5}}{b} \right)^2 \right\}}$$

Problema 7. (Taylor 4.26)

4.26★ A mass m is in a uniform gravitational field, which exerts the usual force $F = mg$ vertically down, but with g varying with time, $g = g(t)$. Choosing axes with y measured vertically up and defining $U = mgy$ as usual, show that $\mathbf{F} = -\nabla U$ as usual, but, by differentiating $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ with respect to t , show that E is not conserved.

$$U(y, t) = - \oint_y \vec{F}(y, t) \cdot d\vec{y} = - \int_0^y -mg(t) dy = +mg(t)y \Rightarrow \vec{F}(y, t) = - \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mg(t)y \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m2\dot{y}\ddot{y} + m \left[\frac{dg(t)}{dt} y + g(t)\dot{y} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = m(\dot{y} + g(t))\ddot{y} + m \frac{dg(t)}{dt} y \Rightarrow \frac{dE}{dt} = m \frac{dg(t)}{dt} y = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Problema 8. (Thornton 2.52)

- 2-52.** A particle of mass m moving in one dimension has potential energy $U(x) = U_0[2(x/a)^2 - (x/a)^4]$, where U_0 and a are positive constants. (a) Find the force $F(x)$, which acts on the particle. (b) Sketch $U(x)$. Find the positions of stable and unstable equilibrium. (c) What is the angular frequency ω of oscillations about the point of stable equilibrium? (d) What is the minimum speed the particle must have at the origin to escape to infinity? (e) At $t = 0$ the particle is at the origin and its velocity is positive and equal in magnitude to the escape speed of part (d). Find $x(t)$ and sketch the result.

Problema 9.

Un resorte liviano de longitud natural a se coloca sobre un piso horizontal en posición vertical. Cuando un bloque de masa M descansa en equilibrio sobre el resorte, la compresión del resorte es $a/15$. El bloque ahora se levanta a una altura de $3a/2$ sobre el piso y se suelta desde el reposo. Encuentre la compresión del resorte cuando el bloque se detiene por primera vez.

$$E=0 \text{ con } X_0 = a(1 - \frac{1}{15})$$

$$\Rightarrow U_{\text{alto}} = \frac{1}{2}k\left(\frac{3a}{2} - a(1 - \frac{1}{15})\right)^2 + mg\left(\frac{3a}{2} - a(1 - \frac{1}{15})\right) = \frac{1}{2}ka^2 \frac{289}{900} + mga \frac{17}{30}$$

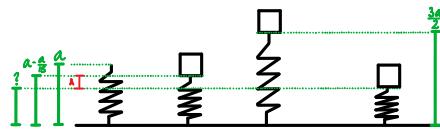
$$y \quad U_{\text{bajo}} = \frac{1}{2}k\left(X - a(1 - \frac{1}{15})\right)^2 + mg\left(X - a(1 - \frac{1}{15})\right) \Rightarrow U_{\text{alto}} = U_{\text{bajo}} \quad ; \quad A = X - a(1 - \frac{1}{15})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ka^2 \frac{289}{900} + mga \frac{17}{30} = \frac{1}{2}kA^2 + mgA \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 + mgA - \frac{1}{2}ka^2 \frac{289}{900} - mga \frac{17}{30} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}k \cdot \frac{(289ka^2 + 1020mga)}{1800}}}{2 \cdot \frac{1}{2}k} = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2k \left(\frac{289ka^2 + 1020mga}{1800} \right)}}{k}$$

La solución buscada es la negativa porque se quiere el resorte comprimido

$$X - a(1 - \frac{1}{15}) = \frac{-mg - \sqrt{m^2g^2 + 2k \left(\frac{289ka^2 + 1020mga}{1800} \right)}}{k}$$



Problema 10.

Una partícula de masa $m = 1.0 \text{ kg}$ se mueve en un campo de fuerza dado por $\vec{F} = [(3t^2 - 4t)\hat{x} + (12t - 6)\hat{y} + (6t - 12t^2)\hat{z}] \text{ N}$. La velocidad en $t = 1.0 \text{ s}$ es $(4\hat{x} - 5\hat{y} + 10\hat{z}) \text{ m/s}$ y en $t = 0$ pasa por el origen.

- Encontrar el cambio de momentum de la partícula desde el tiempo $t = 1.0 \text{ s}$ a 2.0 s .
- ¿Cuál es la velocidad en $t = 2.0 \text{ s}$?
- Determine el torque en $t = 2.0 \text{ s}$, con respecto al origen del sistema de referencia.
- Con respecto al origen, también determine el momentum angular en $t = 2.0 \text{ s}$.

$$a) \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \int_1^2 (3t^2 - 4t)\hat{x} + (12t - 6)\hat{y} + (6t - 12t^2)\hat{z} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} \Rightarrow \Delta\vec{p} = (t^3 - 2t^2)\hat{x} + 6t^2\hat{y} + (3t^2 - 4t^3)\hat{z} \Big|_1^2 \\ = (1\hat{x} + 12\hat{y} - 19\hat{z}) \text{ kg m/s} //$$

b) Primera forma

$$\vec{p}(t=2) = \Delta\vec{p} + \vec{p}(t=1) = (1\hat{x} + 12\hat{y} - 19\hat{z}) \text{ kg m/s} + 1\text{kg} \cdot (4\hat{x} - 5\hat{y} + 10\hat{z}) = (5\hat{x} + 7\hat{y} - 9\hat{z}) \text{ kg m/s} \\ \Rightarrow \vec{v}(t=2) = \frac{\vec{p}(t=2)}{m} = (5\hat{x} + 7\hat{y} - 9\hat{z}) \text{ m/s} //$$

Segunda forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = (3t^2 - 4t)\hat{x} + (12t - 6)\hat{y} + (6t - 12t^2)\hat{z} \Rightarrow \int \vec{v} \, d\vec{v} = \int (3t^2 - 4t)\hat{x} + (12t - 6)\hat{y} + (6t - 12t^2)\hat{z} \, dt \\ \Rightarrow \vec{v} - (4\hat{x} - 5\hat{y} + 10\hat{z}) = (t^3 - 2t^2)\hat{x} + (6t^2 - 6t)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3)\hat{z} \Big|_1^2 = (t^3 - 2t^2)\hat{x} + (6t^2 - 6t)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3)\hat{z} - (-1\hat{x} + 0\hat{y} - 1\hat{z}) \\ \Rightarrow \vec{v} = (t^3 - 2t^2)\hat{x} + (6t^2 - 6t)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3)\hat{z} + (4\hat{x} - 5\hat{y} + 10\hat{z}) - (-1\hat{x} + 0\hat{y} - 1\hat{z}) \\ \Rightarrow \vec{v} = (t^3 - 2t^2 + 5)\hat{x} + (6t^2 - 6t - 5)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3 + 11)\hat{z} \leftarrow \text{Multiplico por } m \text{ y se convierte en vector de momento} \\ \Rightarrow \vec{v}(t=2) = 5\hat{x} + 7\hat{y} - 9\hat{z} //$$

c) Se necesita un vector que conecte el origen con la posición

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (t^3 - 2t^2 + 5)\hat{x} + (6t^2 - 6t - 5)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3 + 11)\hat{z} \Rightarrow \int \vec{r} \, d\vec{r} = \int_0^t (t^3 - 2t^2 + 5)\hat{x} + (6t^2 - 6t - 5)\hat{y} + (3t^2 - 4t^3 + 11)\hat{z} \, dt \\ \Rightarrow \vec{r} = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t \right) \hat{x} + (2t^3 - 3t^2 - 5t) \hat{y} + (t^3 - t^4 + 11t) \hat{z}$$

$$\text{Torque respecto al origen: } \vec{N}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t\right) & \left(2t^3 - 3t^2 - 5t\right) & \left(t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t\right) \\ (3t^2 - 4t) & (12t - 6) & (6t - 12t^2) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_o = [(2t^3 - 3t^2 - 5t) \cdot (6t - 12t^2) - (t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t) \cdot (12t - 6)] \hat{i} + \dots$$

$$\dots - \left[\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t \right) \cdot (6t - 12t^2) - (t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t) \cdot (3t^2 - 4t) \right] \hat{j} + \dots$$

$$\dots + \left[\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t \right) \cdot (12t - 6) - (2t^3 - 3t^2 - 5t) \cdot (3t^2 - 4t) \right] \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_o(t=2) = (-36 \hat{i} - 368 \hat{j} + 180 \hat{k}) \text{ Nm} \quad //$$

$$\text{d) Momento angular: } \vec{L}_o(t=2) = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{26}{3} & -6 & \frac{14}{3} \\ 5 & 7 & -9 \end{vmatrix} = \left(-44 \hat{i} + \frac{148}{3} \hat{j} + 272 \hat{k} \right) \text{ km}^2 \text{s} \quad //$$

Problemas mixtos 1

Problema 1. (Valor: 25 pts.)

Un bote de masa m , se mueve en un lago, con una posición $x(0) = 0$ y una rapidez inicial $v(0) = v_0$. Asociado a la fuerza de fricción del bote con el agua y el viento, experimenta una fuerza de fricción, cuya magnitud está dada por:

$$|\vec{F}| = F_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2,$$

donde F_0 es una constante positiva. Considere que el motor no está encendido.

- a. ¿Cuál es la aceleración del bote?
- b. Encuentre la posición del bote con respecto al tiempo.
- c. Determine el tiempo y la posición donde la velocidad se reduce a la mitad de la velocidad inicial.
- d. ¿Cuándo se detiene el bote?

$$a) \sum \vec{F} = -\vec{F}_x = m \ddot{x} \Rightarrow -F_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{F_0 v^2}{m v_0^2} = \frac{dv}{dt} = a //$$

$$b) -\frac{F_0 v^2}{m v_0^2} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t -\frac{F_0}{m v_0^2} dt = \int_{v_0}^v \frac{1}{v^2} dv \Rightarrow -v^{-1} \Big|_{v_0}^v = \frac{-F_0}{m v_0^2} t \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{F_0}{m v_0^2} t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{F_0}{m v_0^2} t = \frac{m v_0 + F_0 t}{m v_0^2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{m v_0^2}{m v_0 + F_0 t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{m v_0^2}{m v_0 + F_0 t} dt$$

$$\Rightarrow x = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln \left(\frac{m v_0 + F_0 t}{m v_0} \right) //$$

$$\int_0^t \frac{m v_0^2}{m v_0 + F_0 t} dt ; u = m v_0 + F_0 t \Rightarrow du = F_0 dt$$

$$\Rightarrow \int_{m v_0}^{m v_0 + F_0 t} \frac{m v_0^2}{F_0 u} du = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln \left(\frac{m v_0 + F_0 t}{m v_0} \right)$$

$$c) v = \frac{v_0}{2} \Rightarrow \frac{v_0}{2} = \frac{m v_0^2}{m v_0 + F_0 t} \Rightarrow \cancel{\frac{v_0}{2}} (m v_0 + F_0 t) = m v_0^2 \Rightarrow m v_0 + F_0 t = 2 m v_0 \Rightarrow F_0 t = m v_0 \Rightarrow t = \frac{m v_0}{F_0}$$

$$\text{Tiempo en que } v = \frac{v_0}{2} : t_{\frac{v_0}{2}} = \frac{m v_0}{F_0} // \Rightarrow x_{\frac{v_0}{2}} = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln \left(\frac{m v_0 + \cancel{\frac{m v_0}{F_0}}}{m v_0} \right) = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln \left(\frac{2 m v_0}{m v_0} \right) = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln(2)$$

$$\Rightarrow x_{\frac{v_0}{2}} = \frac{m v_0^2}{F_0} \ln(2) //$$

$$d) v = 0 \Rightarrow \frac{m v_0^2}{m v_0 + F_0 t} = 0 \Rightarrow t = +\infty$$

Problema 2. (Valor: 25 pts.)

Una partícula de masa m , se mueve en una dimensión. Sobre la partícula actúa una fuerza, relacionada con una energía potencial:

$$U(x) = -A + a(x - x_1)^2 - b(x - x_1)^3,$$

donde A , a y x_1 son constantes positivas. En la Figura 1 se muestra la forma cómo varía esta energía con respecto a la posición x .

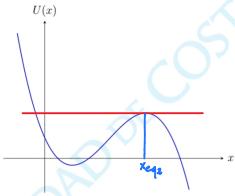


Figura 1: Energía potencial para el problema 2.

- Determine la fuerza que experimenta la partícula.
- Encuentre la posición de los puntos de equilibrio e indique qué tipo de equilibrio en cada punto, justificando su respuesta.
- La velocidad cuando pasa por $x = 0$ es $v_0 > 0$. Si la partícula se mueve en la dirección positiva, determine la velocidad crítica, que mantiene la partícula confinada cerca del origen.

a) Una fuerza conservativa en una dimensión: $F = -\frac{dU}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} = 2a(x - x_1) - 3b(x - x_1)^2 \Rightarrow F = 3b(x - x_1)^2 - 2a(x - x_1)$$

b) Puntos de equilibrio: $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 2a(x - x_1) - 3b(x - x_1)^2 = 0 \Rightarrow [2a - 3b(x - x_1)](x - x_1) = 0$

$$\Rightarrow x - x_1 = 0 \quad \text{y} \quad 2a - 3b(x - x_1) = 0 \Rightarrow x_{eq1} = x_1 \quad \text{y} \quad x_{eq2} = x_1 + \frac{2a}{3b}$$

Clasificación: $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{eq}} \Rightarrow \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{eq}} = 2a - 6b(x - x_1)$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{eq1}} = 2a - 6b(x - x_1) = 2a \Rightarrow x_{eq1} \text{ es un punto de equilibrio estable}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{eq2}} = 2a - 6b(x - x_1) = 2a - 6b\left(\cancel{x_1} + \frac{2a}{3b} - \cancel{x_1}\right) = 2a - 2 \cdot 2a = -2a \Rightarrow x_{eq2} \text{ es un punto de equilibrio inestable}$$

c) La mayor energía que puede poseer la partícula es $E \leq U(x_{eq})$ $U = -A + a(x - x_1)^2 + 3b(x - x_1)^3$

$$\Rightarrow U(x_{eq}) = -A + a\left(\cancel{x_1} + \frac{2a}{3b} - \cancel{x_1}\right)^2 + 3b\left(\cancel{x_1} + \frac{2a}{3b} - \cancel{x_1}\right)^3 = -A + \frac{4a^3}{9b^2} + \frac{8a^3}{9b^2} = -A + \frac{4a^3}{3b^2} \quad \text{y} \quad U(x_{eq}) = -A$$

$$E = T + U_{eq} = U_{eq} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - A = -A + \frac{4a^3}{3b^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{8a^3}{3b^2m}}$$

Problema 3. (Valor: 25 pts.)

Un oscilador subamortiguado tiene una frecuencia angular natural $3\pi/2$ rad/s. Este oscilador es tal que la amplitud disminuye un 25% al transcurrir un período de tiempo.

- a. Determine el período de oscilación.
- b. Encuentre el parámetro de amortiguamiento.
- c. ¿Cuál es la disminución de la amplitud, con respecto a la amplitud inicial, después de haber pasado 2 períodos de tiempo?
- d. Determine el cambio de energía del sistema, con respecto a la energía en $t = 0$, al transcurrir un período de tiempo.

Nota: Se puede suponer el ángulo de desfase como cero. Además se puede considerar que el oscilador se relaciona con una masa m y un resorte de constante de elasticidad k .

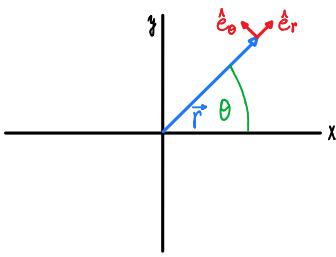
Problema 4. (Valor: 25 pts.)

Un insecto se mueve en una trayectoria en dos dimensiones, descrito por:

$$r = \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t), \quad \theta = \frac{t}{\tau},$$

donde $0 \leq t \leq 2\tau$, b y τ son constantes positivas.

- a. Calcule, para cualquier trayectoria descrita en coordenadas polares, los vectores \hat{e}_r y $\dot{\theta}$.
- b. Determine para cualquier trayectoria descrita en coordenadas polares, la velocidad y la aceleración de una partícula.
- c. A partir de este resultado, encuentre la velocidad y aceleración del insecto.
- d. Encuentre el tiempo cuando la aceleración tangencial del insecto es nula.
- e. Para este tiempo, determine la posición, velocidad y aceleración del insecto.



a) Primero se plantean los vectores unitarios polares: $\hat{e}_r = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$ y $\hat{e}_\theta = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$

$$\text{Para } \hat{e}_r, \text{ hay que hallar } \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) = \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\text{Para } \hat{e}_\theta, \text{ hay que hallar } \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \text{y} \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r //$$

b) Posición en coordenadas polares: $\vec{r} = r \hat{e}_r$

$$\text{Velocidad: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta //$$

$$\text{Aceleración: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_r = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta //$$

$$c) \quad \dot{r} = \frac{b}{\tau^2}(2\tau - t) - \frac{bt}{\tau^2} = \frac{2b}{\tau} - \frac{2bt}{\tau^2} \quad ; \quad \ddot{r} = -\frac{2b}{\tau^2}; \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\tau} \quad y \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\text{res}} = \left(\frac{2b}{\tau} - \frac{2bt}{\tau^2} \right) \hat{e}_r + \frac{bt}{\tau^2} \left(2\tau - t \right) \frac{1}{\tau} \hat{e}_\theta = \left(\frac{2b}{\tau} - \frac{2bt}{\tau^2} \right) \hat{e}_r + \frac{bt}{\tau^3} (2\tau - t) \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\text{res}} = \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{bt}{\tau^2} (2\tau - t) \frac{1}{\tau^2} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{bt}{\tau^2} (2\tau - t) \overset{\theta}{0} + 2 \left(\frac{2b}{\tau} - \frac{2bt}{\tau^2} \right) \frac{1}{\tau} \right] \hat{e}_\theta$$

$$= \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{bt}{\tau^4} (2\tau - t) \right] \hat{e}_r + \frac{2}{\tau} \left(\frac{2b}{\tau} - \frac{2bt}{\tau^2} \right) \hat{e}_\theta$$

Continua....

$$d) \quad a_\theta = \frac{2}{\tau} \left(\frac{2b}{\tau} - 2 \frac{b\tau}{\tau^2} \right), \text{ buscando } a_\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\tau} \left(\frac{2b}{\tau} - 2 \frac{b\tau}{\tau^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2b}{\tau} - 2 \frac{b\tau}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{2b}{\tau}} = \cancel{\frac{2b\tau}{\tau^2}} \Rightarrow \tau = \tau //$$

$$e) \quad \vec{r}_{\text{ins}}(t = \tau) = \frac{b\tau}{\tau^2} (2\tau - \tau) \hat{e}_r = \frac{b}{\tau} (\tau) \hat{e}_r = b \hat{e}_r //$$

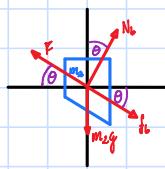
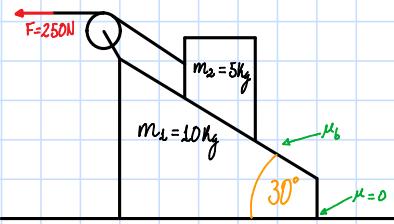
$$\vec{v}_{\text{ins}}(t = \tau) = \left(\cancel{\frac{2b}{\tau}} - 2 \cancel{\frac{b\tau}{\tau^2}} \right) \hat{e}_r + \frac{b}{\tau} (2\tau - \tau) \hat{e}_\theta = 0 \hat{e}_r + \frac{b}{\tau} \hat{e}_\theta = \frac{b}{\tau} \hat{e}_\theta //$$

$$\vec{a}_{\text{ins}}(t = \tau) = \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{b}{\tau} (2\tau - \tau) \right] \hat{e}_r + \frac{2}{\tau} \left(\cancel{\frac{2b}{\tau}} - 2 \cancel{\frac{b\tau}{\tau^2}} \right) \hat{e}_\theta = -\frac{3b}{\tau^2} \hat{e}_r + 0 \hat{e}_\theta = -\frac{3b}{\tau^2} \hat{e}_r //$$

a) Encuentre μ_b tal que los cuerpos se muevan juntos

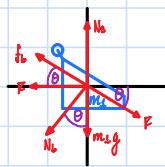
b) Tome la mitad del resultado anterior y calcule la aceleración de ambas masas y la aceleración de m_2 sobre m_1

Considera la polea sin masa y luego con masa $m_p = 2\text{kg}$ y $R = 0,5\text{m}$



$$\sum F_{xy} = N_b \cos \theta + f_b \sin \theta - m_2 g - f_b \cos \theta = m_2 a_{zy}$$

$$\sum F_{zx} = N_b \sin \theta + f_b \cos \theta - F \cos \theta = m_2 a_{zx}$$



$$\sum F_{xy} = N_b - m_1 g + f_b \sin \theta - F \sin \theta - N_b \cos \theta = m_1 a_{zy}$$

$$\sum F_{zx} = F \cos \theta - F - f_b \cos \theta - N_b \sin \theta = m_1 a_{zx}$$

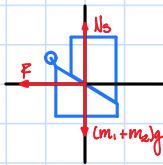
$$\vec{a}_{iz} = \vec{a}_{i1} + \vec{a}_{i2} = (a_{ix} + a_{izx})\hat{i} + a_{izy}\hat{j}$$

la rueda no se mueve en el eje y: $a_{iy} = 0$

a) Como los bloques se mueven juntos, como un solo objeto: $\Rightarrow a_{ix} = a_{zx} \wedge a_{izy} = 0 = a_{iy} ; f = \mu N$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_b \cos \theta + f_b \sin \theta - m_2 g - f_b \cos \theta = m_2 a_{zy} \\ N_b \sin \theta + f_b \cos \theta - F \cos \theta = m_2 a_{zx} \\ N_b - m_1 g + f_b \sin \theta - F \sin \theta - N_b \cos \theta = 0 \\ F \cos \theta - F - f_b \cos \theta - N_b \sin \theta = m_1 a_{zx} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_b \cos \theta + f_b \sin \theta - m_2 g - \mu N_b \sin \theta = 0 \\ N_b \sin \theta + \mu N_b \cos \theta - F \cos \theta = m_2 a_{zx} \\ N_b - m_1 g + \mu N_b \sin \theta - F \sin \theta - N_b \cos \theta = 0 \\ F \cos \theta - F - \mu N_b \cos \theta - N_b \sin \theta = m_1 a_{zx} \end{array} \right.$$



$$\sum F_y = N_b - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_{iy} \Rightarrow N_b = (m_1 + m_2)g$$

$$\sum F_x = -F = (m_1 + m_2)a_{ix} \Rightarrow a_{ix} = -\frac{F}{m_1 + m_2}$$

Aplicando esta consideración al sistema de ecuaciones

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_b \cos \theta + f_b \sin \theta - m_2 g - \mu N_b \sin \theta = 0 \\ N_b \sin \theta + \mu N_b \cos \theta - F \cos \theta = -\frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \\ (m_1 + m_2)g - m_1 g + \mu N_b \sin \theta - F \sin \theta - N_b \cos \theta = 0 \\ F \cos \theta - F - \mu N_b \cos \theta - N_b \sin \theta = -\frac{m_1 F}{m_1 + m_2} \end{array} \right.$$

Continua

SECTION 4

Sistemas de partículas

SUBSECTION 4.1

Suposiciones iniciales

Para trabajar con sistemas de partículas N es necesario realizar ciertas suposiciones respecto a las fuerzas internas al sistema de partículas.

- Para dos partículas α y β se cumple: $\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$.
- Los vectores fuerza están sobre la línea que une a ambas partículas.

Estas dos suposiciones se pueden resumir al aceptar trabajar con el **Enunciado Fuerte de la Tercera Ley de Newton** (Figura 1). De acuerdo a esto, se procederá a construir las expresiones para sistemas de partículas para los conceptos conocidos en la sección anterior y a introducir algunos conceptos nuevos.

Definition 20

(Centro de masa) Corresponde a un punto del espacio en que se encuentra el sistema de partículas (discreto o continuo) en el cual es posible colapsar toda la masa del sistema, de modo que una fuerza arbitraria que interactue con alguna partícula del sistema se podrá transportar a dicho punto para conocer la mecánica del sistema (Figura 6). El centro de masa se define a partir de un promedio ponderado de toda la masa del sistema visto a continuación:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{R} = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm \quad (4.1)$$

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \rightarrow M = \int_M \rho dV \quad (4.2)$$

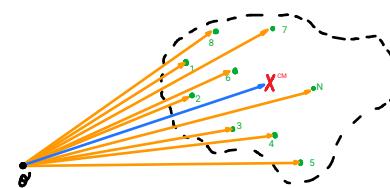


Figura 6. Un sistema arbitrario con su respectivo centro de masa

SUBSECTION 4.2

Definición de la mecánica de sistemas de partículas

Para definir la expresión del momentum lineal de un sistema de partículas hay que construirla a partir del conocimiento de la sección anterior. A partir de esto, se definen las siguientes cantidades para la partícula α del sistema:

- Fuerza neta externa al sistema sobre α : \vec{F}_α^e
- Fuerza neta interna al sistema sobre α : $\vec{f}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta}$

Entonces la fuerza neta que percibe la partícula α es:

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^e + \vec{f}_\alpha$$

De acuerdo a la Segunda Ley de Newton Ecuación (3.3):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_\alpha &= \vec{F}_\alpha = m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \\ \Rightarrow m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha &= \vec{F}_\alpha^e + \vec{f}_\alpha \end{aligned}$$

Hasta este momento se ha estado trabajando únicamente con la partícula α , pero si ahora sumamos la expresión anterior para todas las partículas, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N [m_\alpha \vec{r}_\alpha] &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e + \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_\alpha \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta} \\
 \Rightarrow \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{d^2}{dt^2} [m_\alpha \vec{r}_\alpha]}_{M\vec{r}_{CM}} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^e}_{\vec{F}} + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

De esta última expresión se obtiene ⁴

⁴ El término

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta}$$

Definition 21

(Momentum Lineal y Segunda Ley de Newton para un Sistema) La expresión para el momentum lineal de un sistema de partículas:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad (4.3)$$

y la expresión de la Segunda Ley de Newton para el caso de un sistema de partículas en el caso translacional:

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} \quad (4.4)$$

se hace cero porque se tiene:

$$\sum_{\alpha < \beta=1}^N \vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{f}_{\beta\alpha}$$

y es evidente que estas son fuerzas contrarias de igual magnitud debido a la Tercera Ley de Newton, por lo que el resultado de su suma es cero.

Ahora se resolverá un procedimiento similar para hallar una expresión para el momentum angular de un sistema de partículas respecto a un punto \mathcal{O} :

El momentum angular de una partícula α desde el punto \mathcal{O} (Ver Figura 7) es:

$$\vec{L}_\alpha^{\mathcal{O}} = \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

Si se realiza la suma de todos los momentum angulares individuales, esto da como resultado el momentum angular del sistema:

$$\begin{aligned} \vec{L}^{\mathcal{O}} &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \times (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R} + \vec{r}'_\alpha) \times [m_\alpha (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_\alpha)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha + \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_\alpha + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{r}}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{R}} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \end{aligned}$$

Trabajando por un momento con los términos en azul:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \times \dot{\vec{R}} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_\alpha \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \right) \\ &= \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}'_\alpha \right) \times (\dot{\vec{R}} - \vec{R}) \\ &= \left[\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{R}) \right] \times (\dot{\vec{R}} - \vec{R}) \\ &= \left[\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha - \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \vec{R} \right] \times (\dot{\vec{R}} - \vec{R}) \\ &= \left[M \vec{R} - M \vec{R} \right] \times (\dot{\vec{R}} - \vec{R}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quedando claro que ambos términos en azul son cero por como se definición del centro de masa⁵, se continuará con la expresión trasanterior:

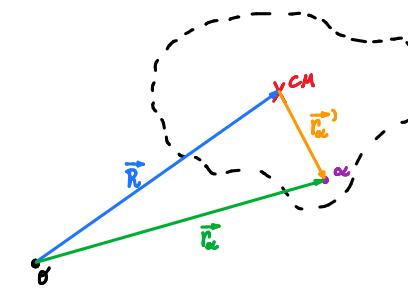


Figura 7. Posición de la partícula α y el centro de masa de un sistema respecto a \mathcal{O}

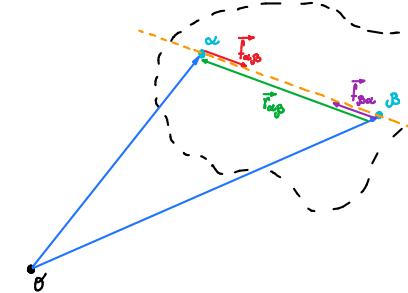


Figura 8. Interacción y posiciones de las partículas α y β de un sistema respecto a \mathcal{O}

⁵La posición del centro de masa respecto al centro de masa siempre será cero.

$$\begin{aligned}
 \vec{L}^{\mathcal{O}} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Momentum Angular alrededor del CM}} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \\
 &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}'_{\alpha}}_{\text{Momentum Angular alrededor del CM}} + \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Momentum Angular del CM alrededor a } \mathcal{O}}
 \end{aligned}$$

Ahora, buscando la expresión para la derivada respecto al tiempo del momentum angular del sistema. Para esto hay que comenzar de forma similar, analizar desde una unica partícula puntual que forme parte del sistema de partículas:

$$\dot{\vec{L}}_{\alpha}^{\mathcal{O}} = \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} \times \left(\vec{F}_{\alpha}^e + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

Sumando para todas las partículas ⁶:

$$\dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^e + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta}$$

De esta última expresión se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^e = \sum_{\alpha=1}^N \vec{N}_{\alpha}^e \\
 \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} &= \vec{N}
 \end{aligned}$$

Definition 22

(Momentum Angular y Análogo Rotacional de la Segunda Ley de Newton para Sistemas) La expresión del momentum angular para un sistema de partículas

$$\vec{L}^{\mathcal{O}} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \vec{r}'_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}'_{\alpha}}_{\text{Momentum Angular alrededor del CM}} + \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Momentum Angular del CM alrededor a } \mathcal{O}} \quad (4.5)$$

La expresión del análogo rotacional para un sistema de partículas de la Segunda Ley de Newton:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} \quad (4.6)$$

El siguiente es el resultado ya conocido del Teorema de Ejes paralelos, el cual puede ser útil para resolver problemas concernientes a este tema.

⁶ Aquí se encuentra una situación similar a la que se tuvo con el momentum lineal, el termino que se canceló, es cero por lo siguiente:

La expresión:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^N \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta}$$

es posible reescribirla como:

$$\sum_{\alpha<\beta=1}^N \left(\vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{r}_{\beta} \times \vec{f}_{\beta\alpha} \right)$$

y aquí tomando que se cumple el **Enunciado Fuerte** de la Tercera Ley de Newton Ecuación (3.5) y la siguiente definición (Ver Figura 8):

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$$

La expresión de interés se convierte en:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\alpha<\beta=1}^N \left(\vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} - \vec{r}_{\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta} \right) \\
 &= \sum_{\alpha<\beta=1}^N \left(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta} \right) \times \vec{f}_{\alpha\beta} \\
 &= \sum_{\alpha<\beta=1}^N \underbrace{\vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta}}_{\vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{f}_{\alpha\beta}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Theorem 6

(Teorema de Ejes paralelos)

$$I_{q'} = I_q^{cm} + Md^2 \quad (4.7)$$

La demostración de este teorema tal y como se encuentra escrito aquí se le dejará al lector y se recomienda verlo como una simplificación del teorema de ejes paralelos real que se desarrollará más adelante.

Ahora hay que estudiar la forma de la energía cinética para un sistema de partículas. Para esto se va a empezar la deducción desde el trabajo de mover la partícula α de un punto a otro para la posterior definición de la energía cinética del sistema:

$$W_{\alpha}^{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha}$$

Sumando para todo el sistema:

$$W_{AB} = \sum_{\alpha=1}^N \int_A^B \vec{F}_{\alpha} \cdot d\vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \int_A^B d \left(\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right)$$

Entonces, en una primera instancia se puede definir la energía cinética del sistema como:

$$T = \sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

Pero se está buscando una expresión que tome en cuenta el centro de masa, entonces hay que continuar trabajando con este último resultado. Recordando de la Figura 7 lo siguiente: $\vec{r}_{\alpha} = \vec{R} + \vec{r}'_{\alpha}$. De aquí se obtiene:

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{R} + \vec{r}'_{\alpha} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 &= \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) \cdot (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) \\ &= \dot{\vec{r}}'^2_{\alpha} + 2\dot{\vec{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}^2 \end{aligned}$$

Con esta expresión y la provisional de la energía cinética, reemplazando en la energía:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\dot{\vec{r}}'^2_{\alpha} + 2\dot{\vec{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'^2_{\alpha} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\vec{R}}}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{R}}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'^2_{\alpha} \end{aligned}$$

Velocidad del CM respecto al CM

Definition 23

(Energía Cinética de un Sistema de Partículas) La expresión de la energía cinética es la siguiente:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\text{T del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha'^2}_{\text{T de las partículas respecto al CM}} \quad (4.8)$$

Por último, falta encontrar la expresión para la energía potencial en el caso de sistemas de partículas. Comenzando desde la expresión del trabajo de todo el sistema:

$$W_{AB} = \sum_{\alpha=1}^N \int_A^B \vec{F}_\alpha^e \cdot d\vec{r}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \int_A^B \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha$$

Será necesario considerar que \vec{F}_α y $\vec{f}_{\alpha\beta}$ son todas fuerzas conservativas por lo que se pueden escribir como ⁷:

$$\vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V_\alpha \quad y \quad \vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{\nabla}_\alpha \bar{V}_{\alpha\beta}$$

Para simplificar el desarrollo de la deducción se van a trabajar los términos del trabajo total del sistema por separado. Entonces, comenzando por la que contiene las fuerzas externas⁸:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \int_A^B \vec{F}_\alpha^e \cdot d\vec{r}_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^N \int_A^B -\vec{\nabla}_\alpha V_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha|_A^B \end{aligned}$$

Como se plantearon fuerzas conservativas, se sabe que $\bar{V}_{\alpha\beta}$ solo depende de las distancias entre las partículas α y β , y por lo tanto depende de 6 cantidades (las posiciones de ambas partículas). Entonces la derivada total de $\bar{V}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} d\bar{V}_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \bar{V}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha,i}} dx_{\alpha,i} + \frac{\partial \bar{V}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) \\ &= \left(\vec{\nabla}_\alpha \bar{V}_{\alpha\beta} \right) \cdot d\vec{r}_\alpha + \left(\vec{\nabla}_\beta \bar{V}_{\alpha\beta} \right) \cdot d\vec{r}_\beta \end{aligned}$$

Recordando que: $\bar{V}_{\alpha\beta} = \bar{V}_{\beta\alpha}$, se tiene lo siguiente:

$$\vec{\nabla}_\alpha \bar{V}_{\alpha\beta} = \vec{\nabla}_\alpha \bar{V}_{\beta\alpha} \rightarrow -\vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{f}_{\beta\alpha}$$

Ahora el segundo término⁹:

⁷ Los subíndices α en los gradientes significa que los gradientes se realizan en las respectivas coordenadas de la partícula α

⁸ Esta expresión ya debería ser familiar de la sección anterior.

⁹ A continuación se usan variedad de definiciones que se establecieron anteriormente

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \int_A^B \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha<\beta=1}^N \int_A^B (\vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_\alpha + \vec{f}_{\beta\alpha} \cdot d\vec{r}_\beta) \\
 &= \sum_{\alpha<\beta=1}^N \int_A^B \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\vec{r}_\alpha - d\vec{r}_\beta) \\
 &= \sum_{\alpha<\beta=1}^N \int_A^B \vec{f}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_{\alpha\beta} \\
 &= - \sum_{\alpha<\beta=1}^N \int_A^B d\bar{V}_{\alpha\beta} \\
 &= - \sum_{\alpha<\beta=1}^N \bar{V}_{\alpha\beta}|_A^B
 \end{aligned}$$

Definition 24

(Energía Potencial de un Sistema de Partículas) La expresión de la energía potencial de un sistema de partículas:

$$V = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N V_\alpha}_{\text{Energía potencial externa}} + \underbrace{\sum_{\alpha<\beta=1}^N \bar{V}_{\alpha\beta}}_{\text{Energía potencial interna}} \quad (4.9)$$

Hay casos, por ejemplo, cuerpos rígidos en los que es posible ignorar la energía potencial interna porque es constante.

Definition 25

(Energía total del Sistema de Partículas) La expresión para el sistema de partículas es la misma que para una única partícula Ecuación (3.12)

$$E = T + V$$

SUBSECTION 4.3

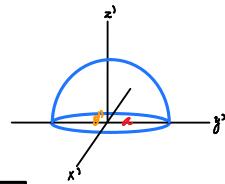
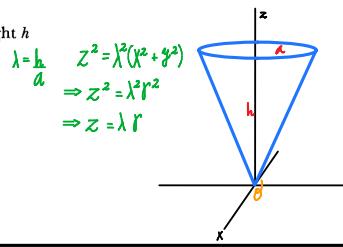
Problemas resueltos

Dinámica de partículas

- 9-3. Find the center of mass of a uniformly solid cone of base diameter $2a$ and height h and a solid hemisphere of radius a where the two bases are touching.

Cilindro

$$M_c = \int_{A_c} dm = \iiint \rho_c dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} \rho_c r dr d\theta dz$$



$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} \rho_c r dr d\theta dz = 2\pi \rho_c \int_0^h r dr dz = 2\pi \rho_c \frac{h}{2} \int_0^h z^2 dz = 2\pi \rho_c \frac{a^2}{2} \frac{h^3}{3} = \rho_c \frac{\pi a^2 h}{3} \Rightarrow M_c = \rho_c \frac{\pi a^2 h}{3}$$

$$M_c \vec{R}_c = \int_{A_c} \vec{r} dm = \iiint \rho_c \vec{r} dV = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} (r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) r dr d\theta dz$$

$$M_c X_{cm-c} = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} r^2 \cos \theta dr d\theta dz = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} 0 dr d\theta dz = 0$$

$$M_c Y_{cm-c} = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} r^2 \sin \theta dr d\theta dz = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} 0 dr d\theta dz = 0$$

$$M_c Z_{cm-c} = \rho_c \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{z}{h}} z r dr d\theta dz = 2\pi \rho_c \int_0^h z r dr dz = 2\pi \rho_c \frac{a^2}{2} \frac{h^3}{3} = 2\pi \rho_c \frac{a^2}{2} \frac{h^4}{4} = \pi \rho_c a^2 \frac{h^4}{4}$$

$$\Rightarrow M_c \vec{R}_c = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + \cancel{\pi \rho_c a^2 \frac{h^4}{4} \hat{k}} = \cancel{\pi \rho_c a^2 \frac{h^4}{3} \hat{k}} \Rightarrow \vec{R}_c = \frac{3h}{4} \hat{k}$$

Hemisferio

$$M_H = \rho_H V_H = \rho_H \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{2} = \rho_H \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$M_H \vec{R}_H = \int_{A_H} \vec{r} dm = \iiint \rho_H \vec{r} dV = \rho_H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^a (r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{Por simetria}$$

$$M_H Z_{cm-H} = \rho_H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^a r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \rho_H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = 2\pi \rho_H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4}{4} \cos \theta \sin \theta d\theta = \cancel{2\pi \rho_H \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \rho_H \frac{\pi a^4}{4}$$

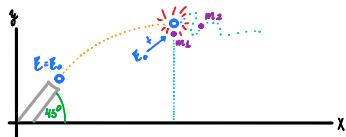
$$\Rightarrow M_H \vec{R}_H = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + \cancel{\rho_H \frac{\pi a^4}{4} \hat{k}} = \cancel{\rho_H \frac{2\pi a^3}{3} \vec{R}_H} \Rightarrow \vec{R}_H = \frac{3a}{8} \hat{k} \Rightarrow \vec{R}_H = \vec{R}_{Hc} + h = \left(\frac{3a}{8} + h \right) \hat{k}$$

$$\text{Sistema } M_{Hc} \vec{R}_{Hc} = M_H \vec{R}_H + M_c \vec{R}_c \Rightarrow \left(\rho_H \frac{2\pi a^3}{3} + \rho_c \frac{\pi a^2 h}{3} \right) \vec{R}_{Hc} = \rho_H \frac{2\pi a^3}{3} \left(\frac{3a}{8} + h \right) \hat{k} + \rho_c \frac{\pi a^2 h}{3} \frac{3h}{4} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{2\pi}{3} (2\rho_H a^3 + \rho_c a^2 h) \vec{R}_{Hc}} = \cancel{\frac{\pi a^2}{3} \left[2\rho_H a \left(\frac{3a}{8} + h \right) + \rho_c \frac{3h^2}{4} \right] \hat{k}} \Rightarrow \vec{R}_{Hc} = \frac{\left[2\rho_H a \left(\frac{3a}{8} + h \right) + \rho_c \frac{3h^2}{4} \right]}{(2\rho_H a^3 + \rho_c a^2 h)} \hat{k}$$

Problema 2. (Thornton 9.9)

- 9.9. A projectile is fired at an angle of 45° with initial kinetic energy E_0 . At the top of its trajectory, the projectile explodes with additional energy E_0 into two fragments. One fragment of mass m_1 travels straight down. What is the velocity (magnitude and direction) of the second fragment of mass m_2 and the velocity of the first? What is the ratio of m_1/m_2 when m_1 is a maximum?



En el punto más alto de la trayectoria, justo antes de la explosión $M = m_1 + m_2$

$$V_{ay} = 0 \quad y \quad V_{ax} = V_0 \cos(45^\circ) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_0} \Rightarrow P_x = MV_{ax} = \frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{2E_0} = \sqrt{ME_0}$$

El momentum lineal se conserva: $P_a = p_{a1} + p_{a2} \Rightarrow P_x = p_{a1} + p_{a2}$

$$\Rightarrow (\sqrt{ME_0}, 0, 0) = m_1(0, V_{ay}, 0) + m_2(V_{2x}, V_{2y}, V_{2z}) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{ME_0} = m_2 V_{2x} \\ 0 = m_1 V_{ay} + m_2 V_{2y} \\ 0 = m_2 V_{2z} \end{cases} \rightarrow m_2 y \text{ todo el sistema se mantiene en el plano } XY$$

Dado que entra energía al sistema tras la explosión se tiene, justo antes y después de la explosión

$$\frac{1}{2}MV_{ax}^2 + E_0 = \frac{1}{2}m_1V_{ay}^2 + \frac{1}{2}m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2) \quad \text{con } * V_{ay} = -\frac{m_2V_{2y}}{m_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2E_0}\right)^2 + E_0 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2V_{2y}^2}{m_1^2}\right) + \frac{1}{2}m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2) = \frac{1}{2}\frac{m_2^2V_{2y}^2}{m_1} + \frac{1}{2}m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2)$$

$$\Rightarrow E_0 + 2E_0 = 3E_0 = \frac{m_2^2V_{2y}^2}{m_1} + m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2) \Rightarrow 3E_0 = m_2V_{2x}^2 + V_{2y}^2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \Rightarrow V_{2y} = \sqrt{\frac{3E_0 - m_2V_{2x}^2}{m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}$$

$$\text{Con } * V_{2x} = \frac{\sqrt{ME_0}}{m_2} \Rightarrow V_{2y} = \sqrt{\frac{3E_0 - m_2\left(\frac{\sqrt{ME_0}}{m_2}\right)^2}{m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} = \sqrt{\frac{3E_0 - \frac{ME_0}{m_2}}{m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} = \sqrt{\frac{3E_0 m_1 m_2 - M E_0 m_1}{m_2^2(m_1 + m_2)}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2 = \frac{\sqrt{ME_0}}{m_2} t + \sqrt{\frac{3E_0 m_1 m_2 - M E_0 m_1}{m_2^2(m_1 + m_2)}} \\ V_1 = -\frac{m_2 V_{2y}}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{3E_0 m_1 m_2 - M E_0 m_1}{m_2^2(m_1 + m_2)}} \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{Si } m_1 \text{ tiene un valor máximo } V_{ay} = 0 = \frac{m_2}{m_1} \\ & \Rightarrow 0 = -\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{3E_0 m_1 m_2 - M E_0 m_1}{m_2^2(m_1 + m_2)}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 3. (Taylor 3.4)

3.4** Two hobos, each of mass m_h , are standing at one end of a stationary railroad flatcar with frictionless wheels and mass m_{fc} . Either hobo can run to the other end of the flatcar and jump off with the same speed u (relative to the car). (a) Use conservation of momentum to find the speed of the recoiling car if the two men run and jump simultaneously. (b) What is it if the second man starts running only after the first has already jumped? Which procedure gives the greater speed to the car? [Hint: The speed u is the speed of either hobo, relative to the car just after he has jumped; it has the same value for either man and is the same in parts (a) and (b).]



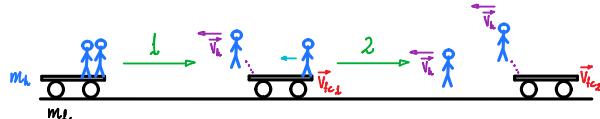
a) Justo antes de saltar: $P_0 = (m_{t_0} + 2m_h)v_{tcf}^0 = 0$

Justo después de saltar: $P_f = m_{t_0}v_{tcf} + 2m_hv_{hf}$

$$\Rightarrow P_0 = P_f \Rightarrow m_{t_0}v_{tcf} + 2m_hv_{hf} = 0 \quad y \quad v_{hf} = v_{tcf} - u \Rightarrow m_{t_0}v_{tcf} + 2m_h(v_{tcf} - u) = 0$$

$$\Rightarrow m_{t_0}v_{tcf} + 2m_hv_{tcf} - 2m_hu = 0 \Rightarrow v_{tcf}(m_{t_0} + 2m_h) = 2m_hu \Rightarrow v_{tcf} = \frac{2m_hu}{m_{t_0} + 2m_h} //$$

b) Hay 2 tráctos, cada uno definido por el salto de los hobos



① Justo antes del primer salto: $P_{01} = (m_{t_0} + 2m_h)v_{tcf}^0 = 0$

$v_{htj} = v_{tcf_j} - u *$

Justo después del primer salto: $P_{t_1} = (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + m_hv_{ht1}$

$$\Rightarrow P_0 = P_{t_1} \Rightarrow 0 = (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + m_hv_{ht1} = (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + m_h(v_{tcf} - u) \Rightarrow (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + m_hv_{tcf} - m_hu = 0$$

$$\Rightarrow (m_{t_0} + 2m_h)v_{tcf_{t_1}} = m_hu \Rightarrow v_{tcf_{t_1}} = \frac{2m_hu}{m_{t_0} + 2m_h}$$

② Justo antes del segundo salto: $P_{02} = (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + \underbrace{m_hv_{ht1}}_{\text{Primer hobo}}$

Justo después del segundo salto: $P_{t_2} = m_{t_0}v_{tcf_{t_2}} + m_hv_{ht2} + \sqrt{m_hv_{ht1}}$

$$\Rightarrow P_0 = P_{t_2} \Rightarrow (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} = m_{t_0}v_{tcf_{t_2}} + m_hv_{ht2} \Rightarrow (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} = m_{t_0}v_{tcf_{t_2}} + m_h(v_{tcf_{t_1}} - u) *$$

$$\Rightarrow (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} = m_{t_0}v_{tcf_{t_2}} + m_hv_{tcf_{t_2}} - m_hu = (m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_2}} - m_hu \Rightarrow v_{tcf_{t_2}} = \frac{(m_{t_0} + m_h)v_{tcf_{t_1}} + m_hu}{(m_{t_0} + m_h)}$$

$$\Rightarrow v_{tcf_{t_2}} = \frac{2m_hu}{m_{t_0} + 2m_h} + \frac{m_hu}{m_{t_0} + m_h} // \leftarrow \text{Mayor velocidad}$$

Problema 4. (Thornton 9.12)

9-12. Astronaut Stumblebum wanders too far away from the space shuttle orbiter while repairing a broken communications satellite. Stumblebum realizes that the orbiter is moving away from him at 3 m/s. Stumblebum and his maneuvering unit have a mass of 100 kg, including a pressurized tank of mass 10 kg. The tank includes only 2 kg of gas that is used to propel him in space. The gas escapes with a constant velocity of 100 m/s. \leftarrow Debe el marco de referencia del cohete = v_g^* \rightarrow $v_a = v_a - v_g^*$

- (a) Will Stumblebum run out of gas before he reaches the orbiter?
 (b) With what velocity will Stumblebum have to throw the empty tank away to reach the orbiter?

a) $P = \text{constante} \rightarrow \text{No hay fuerzas externas} \Rightarrow \dot{P} = 0$

$$P = m_a V_a + m_g V_g \Rightarrow \dot{P} = m_a \dot{V}_a + m_a V_a + m_g V_g + \cancel{m_g \dot{V}_g} \xrightarrow{\text{El gas tiene velocidad constante}} m_a \dot{V}_a + m_a V_a + m_g V_g = 0 ; m_a = -m_g$$

$$\Rightarrow m_a V_a + m_a V_a - m_a V_g = 0 \Rightarrow m_a (V_a - V_g) = -m_a V_a \Rightarrow m_a (V_a - V_a + V_g^*) = -m_a V_a \Rightarrow m_a V_g^* = -m_a V_a$$

$$\Rightarrow dm_a V_g^* = -m_a dV_a \Rightarrow -\int_{m_a}^{m_f} \frac{V_g^*}{m_a} dm_a = \int_{V_a}^{V_f} dV_a \Rightarrow V_f = V_a + V_g^* \ln\left(\frac{m_a}{m_f}\right)$$

$$\Rightarrow V_f = V_a + 100 \ln\left(\frac{100}{98}\right) = 202 \text{ m/s} \quad \leftarrow \text{No puede alcanzar la nave sin antes quedarse sin gas}$$

b) Antes de lanzar el tanque: $P_0 = (m_s + m_{tv}) V_{at}$ Despues de lanzar el tanque: $P_t = m_s V_t + m_{tv} V_{tv}$

$$\Rightarrow P_0 = P_t \Rightarrow (m_s + m_{tv}) V_{at} = m_s V_t + m_{tv} V_{tv} \Rightarrow V_{tv} = \frac{(m_s + m_{tv}) V_{at} - m_s V_t}{m_{tv}}$$

$$V_t > 3 \text{ m/s}, m_s = 90 \text{ kg} \text{ y } m_{tv} = 8 \text{ kg} \Rightarrow V_{tv} \leq -9 \text{ m/s} \quad \leftarrow \text{Velocidad con la que tiene que lanzar el tanque medida por un observador externo}$$

Velocidad con la que tiene que lanzar el tanque prevista por el astronauta

$$V_{tv}^* \leq V_{tv} - V_{ta} \leq -11 \text{ m/s}$$

Problema 5. (Thornton 9.21)

- 9-21. A flexible rope of length 1.0 m slides from a frictionless table top as shown in Figure 9-E. The rope is initially released from rest with 30 cm hanging over the edge of the table. Find the time at which the left end of the rope reaches the edge of the table.

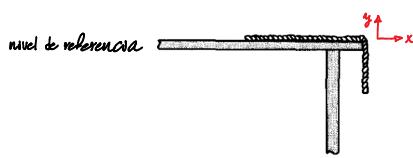


FIGURE 9-E Problem 9-21.

$$p = \frac{m\dot{r}}{L} \Rightarrow m = -p\frac{\dot{y}}{L} = -m\frac{\ddot{y}}{L} \rightarrow 0 \geq \ddot{y} \geq -\frac{L}{g} \quad y(t=0) = l_0 \quad \dot{y}(t=0) = 0$$

$$F = \dot{P} \Rightarrow -mg = p\dot{y} + m_r\dot{v} \Rightarrow -mg = m_r\ddot{y} \Rightarrow +\frac{m_r}{L}\ddot{y}g = m_r\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{g}{L}y = \omega_0^2 y$$

$$\Rightarrow y = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \xrightarrow[\text{condiciones iniciales}]{\text{Aplicando}} \Rightarrow y = \frac{l_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \Rightarrow y = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

$$y(t) = l \Rightarrow l = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{L}{g}} \cosh^{-1}\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

SECTION 5

Sistemas no inerciales

Por ahora se han trabajado solo con sistemas inerciales (los cuales poseen marcos de referencia inerciales respecto a las estrellas fijas, es decir marcos de referencia que no aceleran o rotan respecto a estas o que se considera que no lo hacen) y además se plantearon las Leyes de Newton válidas para estos sistemas, por lo que es posible pensar que los marcos de referencia no inerciales pueden ser un problema catastrófico para la toda física, mas no es así.

En esta sección se desarrollará expresiones que permitirán la generalización de la Mecánica Newtoniana, de modo que se puedan estudiar sistemas inerciales como no inerciales y se mostrarán peculiaridades que poseen los sistemas no inerciales.

SUBSECTION 5.1

Sistemas de referencia en traslación y rotación

Antes de comenzar, se va a establecer la notación presente en Figura 9, entonces:

- \mathcal{O}' : Es el origen del marco de referencia inercial.
- \mathcal{O} : Origen del marco de referencia no inercial, con aceleración translacional y rotación.
- \vec{r}' : Es el radio vector con origen en \mathcal{O}' que da la posición del punto P respecto a dicho origen.
- \vec{R} : Es el radio vector con origen en \mathcal{O}' que une los marcos de referencia **inercial** \mathcal{O}' y **no inercial** \mathcal{O} .
- \vec{r} : Radio vector con el origen en \mathcal{O} que da la posición el punto P respecto a dicho origen.
- ω_{ega} : Es la velocidad angular con que rota el marco de referencia **no inercial** \mathcal{O} .

Hecho esto, el objetivo del siguiente desarrollo es deducir la relación diferencial para la derivada temporal de un vector arbitrario (Por ejemplo, el vector posición) entre vectores con origen inercial y vectores con origen no inercial.

Ahora, por propiedades vectoriales se sabe:

$$\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r} \quad (5.1)$$

Suponga que todos estos vectores son medidos desde el marco de referencia ¹⁰ **inercial** \mathcal{O}' y se aplica la derivada temporal:

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{fijo}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} \quad (5.2)$$

Aquí la pregunta, ¿qué pasa si el observador se encuentra en el marco no inercial y desde este se desea realizar los análisis? Hay que obtener una relación que permita lo siguiente:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{fijo}} \leftrightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\text{rotacional}}$$

Entonces, desarrollando la expresión del vector $\vec{r}_{\text{rotacional}}$ y derivada temporal (Desde el marco no inercial ¹¹):

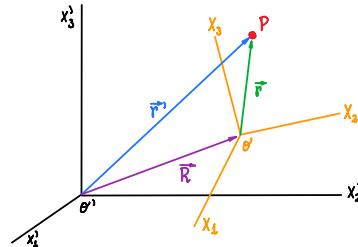


Figura 9. Un sistema de referencia **inercial** \mathcal{O}' y uno **no inercial** \mathcal{O} desde los que se estudia una partícula P .

¹⁰ Para referirse de ahora en adelante al marco de referencia desde el que es medido un vector se usará:

- **fijo** : Al medir desde el marco inercial.
- **rotacional** : al medir desde el marco de referencia no inercial sin importar la naturaleza de la no inercialidad.

¹¹ Para este tema es fundamental entender en qué lugar se encuentra el observador y desde qué ejes se están midiendo los vectores. No necesariamente van a ser los mismos.

$$\vec{r}_{rotacional} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional} = \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i$$

Ahora la velocidad desde una perspectiva inercial ¹²:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fijo} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt} \right)_{fijo} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{dr_i}{dt} \hat{e}_i}_{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional}} + \sum_{i=1}^3 r_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) \\ &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional} + \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 r_i \hat{e}_i \\ &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

¹² Aquí va a ser importante recordar Ecuación (3.14), que se puede reescribir de la siguiente forma para aplicarla al caso actual de estudio:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fijo} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Finalmente se obtuvo la relación de las derivadas temporales entre los sistemas de referencia para el caso de la posición de la partícula P :

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.3)$$

De forma general, dicha relación se puede escribir para cualquier vector:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{rotacional} + \vec{\omega} \times \vec{G} \quad (5.4)$$

Continuando con la Ecuación (5.2), esta expresión se puede reescribir utilizando la Ecuación (5.3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fijo} &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fijo} \\ &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rotacional} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \dot{\vec{R}}_f + \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Definition 26

(Relación entre las velocidades inerciales y no iniciales)

$$\dot{\vec{r}}'_f = \dot{\vec{R}}_f + \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.5)$$

Derivando la Ecuación (5.5) con respecto al tiempo, se llegará a la relación de la

aceleración entre los marcos de referencia.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{r}'_f}{dt} \right)_f &= \left(\frac{d\vec{R}_f}{dt} \right)_f + \left(\frac{d\vec{r}_r}{dt} \right)_f + \left(\frac{d}{dt} \right)_f (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
 &= \ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_f \\
 &= \ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\
 &= \ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{r}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
 \end{aligned}$$

Definition 27

(Relación entre las aceleraciones iniciales y no iniciales)

$$\ddot{\vec{r}}'_f = \ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{r}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.6)$$

SUBSECTION 5.2

Segunda Ley de Newton para Sistemas No Inerciales

A continuación se va a establecer la forma general de la Segunda Ley de Newton y de este modo extender los casos de análisis de este formalismo. A partiendo de la Ecuación (3.4) y posteriormente haciendo uso de la Ecuación (5.6):

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F} &= m \ddot{\vec{r}}'_f \\
 &= m \left[\ddot{\vec{R}}_f + \ddot{\vec{r}}_r + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right] \\
 &= m \ddot{\vec{R}}_f + m \ddot{\vec{r}}_r + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
 \Rightarrow \sum \vec{F} - m \ddot{\vec{R}}_f - m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= m \ddot{\vec{r}}_r
 \end{aligned}$$

Definition 28

(Segunda Ley de Newton No Inercial)

$$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{Fuerzas reales}} - m \ddot{\vec{R}}_f - m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r}_{\text{Fuerza de Coriolis}} - \overbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}^{\text{Fuerza Centrífuga}} = m \ddot{\vec{r}}_r \quad (5.7)$$

Es preciso introducir el concepto de **fuerzas ficticias**, estas son aquellas “fuerzas” que resultan ser introducidas en la Segunda Ley de Newton para generalizar la expresión original (Ecuación (3.4)) de modo que sea capaz de analizar desde marcos de referencia no iniciales. Es decir, estas no son fuerzas o interacciones reales con el entorno; son más bien un artificio que permite ampliar el alcance de la Segunda Ley de Newton.

SUBSECTION 5.3

Problemas resueltos

Sistemas no inerciales

Sin rotación

Problema 1.

Una persona de 70 kg se para en una báscula de resorte de baño mientras viaja en un ascensor. Si el ascensor tiene

- aceleración hacia arriba
- hacia abajo de $g/4$, ¿cuál es el peso indicado en la balanza en cada caso?

S: Ascensor

S': Tierra móvil

$$\text{En } S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow F_s - mg = m\ddot{\vec{r}} ; \text{ Se sabe que } \ddot{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{R} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}}$$

$$\text{Al multiplicar por } m \text{ este último resultado: } m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} + m\ddot{\vec{R}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$$

Reemplazando \vec{F}

$$\Rightarrow F_s - mg - m\ddot{\vec{R}} = m\ddot{\vec{r}} \quad \text{Como la persona está en reposo en el marco } S$$

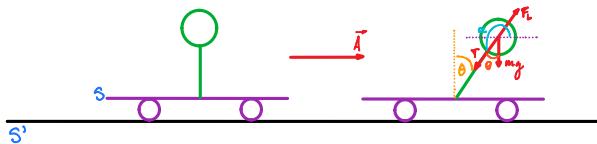
$$\Rightarrow F_s - mg - m\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow F_s = mg + m\ddot{\vec{R}}$$

$$a) \ddot{\vec{R}} = \frac{g}{4}\hat{j} \Rightarrow F_s = mg + m\frac{g}{4} = \frac{5}{4}mg //$$

$$b) \ddot{\vec{R}} = -\frac{g}{4}\hat{j} \Rightarrow F_s = mg - m\frac{g}{4} = \frac{3}{4}mg //$$

Problema 2. (Taylor 9.1)

9.1 * Be sure you understand why a pendulum in equilibrium hanging in a car that is accelerating forward tilts backward, and then consider the following: A helium balloon is anchored by a massless string to the floor of a car that is accelerating forward with acceleration A . Explain clearly why the balloon tends to tilt *forward* and find its angle of tilt in equilibrium. [Hint: Helium balloons float because of the buoyant Archimedean force, which results from a pressure gradient in the air. What is the relation between the directions of the gravitational field and the buoyant force?]



$$\text{En } S: \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_B - \vec{T} - mg\hat{j} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\text{En } S: m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_B + \vec{T} - mg\hat{j} - mAt \quad \text{como el globo termina en reposo } \ddot{\vec{r}} = 0$$

La fuerza boyante es opuesta a la dirección de la gravedad local $\Rightarrow -\vec{F}_B \parallel (-mg\hat{j} - mAt) = m\vec{g}_{local}$; $\tan\theta = \frac{g}{A}$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_B + \vec{T} + m\vec{g}_{local} \Rightarrow \vec{T} = -(\vec{F}_B + m\vec{g}_{local})$$

Problema 3.

- a. Resuelva el problema del cuerpo en caída libre introduciendo un sistema de coordenadas de traslación con una aceleración \vec{g} . Establezca y resuelva las ecuaciones de movimiento en este sistema de coordenadas acelerado y transforme el resultado nuevamente a un sistema de coordenadas fijo en relación con la Tierra. (Desprecie la rotación de la Tierra).
- b. En el mismo sistema de coordenadas aceleradas, establezca las ecuaciones de movimiento para un cuerpo que cae sujeto a una resistencia del aire proporcional a su velocidad (relativa al aire fijo).

a) En S' : $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}} ; m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$

En S : $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0 \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{V} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t \leftarrow$ Ecuación del movimiento desde S'

Transformando esta al marco S

$$\vec{F} - m\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\ddot{\vec{R}} = m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \vec{g} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{g}t \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \leftarrow$$
 Relación buscada

Se va a utilizar la relación $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R}$ *, entonces hay que hallar la ecuación del movimiento del marco S respecto a S' y resolverla

$$\vec{F}_n = m\ddot{\vec{R}} = m\vec{g} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{g} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{V}_0 + \vec{g}t \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad \text{Usando *}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{R} = \vec{r}_0 + \vec{V}t + \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow \vec{r}' = (\vec{r}_0 + \vec{R}_0) + (\vec{V} + \vec{V}_0)t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 ; \text{ se obtuvo una relación de la forma de } *$$

cumpliendo con *

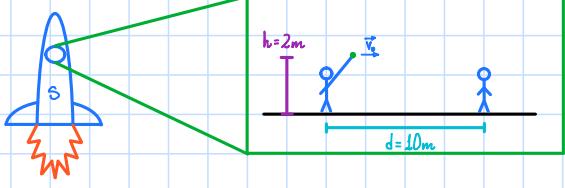
b) En S' : $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\vec{g} - c\vec{V} = m\ddot{\vec{r}} ; m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$

En S : $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - c\vec{V} - m\vec{g} = -c\vec{V} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -c(\vec{V} + \vec{V}) = -c(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}}) \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -c(\dot{\vec{r}} + \vec{V}_0 + \vec{g}t)$

Problema 4.

Dos astronautas están parados en una nave espacial que acelera hacia arriba con una aceleración \vec{A} . Sea la magnitud de \vec{A} igual a g . Dos astronautas están separados una distancia horizontal $d = 10 \text{ m}$. El astronauta 1 lanza una pelota directamente hacia el astronauta 2. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de la pelota si debe alcanzar al astronauta 2 antes de golpear el suelo, es decir la pelota debe llegar a los pies del astronauta? Supongamos que el astronauta 1 suelta la pelota a una altura $h = 2 \text{ m}$ sobre el piso de la nave. Resuelva el problema desde la perspectiva de:

- a. un observador no inercial (dentro de la nave).
- b. un observador inercial (fuera de la nave).



S'

$$\text{Condiciones iniciales } \ddot{y}(0) = \dot{y}_0 = h, \quad \ddot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{x}(0) = v_0$$

$$\ddot{R} = -\vec{g}$$

$$\text{En } S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \Rightarrow m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\text{En } S: m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - m\vec{g} = 2m\vec{g} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = 2m\vec{g} \Rightarrow \ddot{y} = -2g \quad \text{y} \quad \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \dot{y}_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{y} \quad \ddot{x} = v_0 t$$

Despejando t de * e introduciéndolo en *

$$\Rightarrow \ddot{y} = \dot{y}_0 - g \frac{\ddot{x}^2}{v_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{-g \frac{\ddot{x}^2}{\Delta y}} = 7,0 \text{ m/s} ; \Delta y = \dot{y}_0 t - \dot{y}_0 = -\dot{y}_0$$

a) $S: \vec{v}_0 = 7,0 \text{ m/s} \uparrow \diagup$

$$Y = +\frac{1}{2}gt^2$$

b) $\ddot{y} = \dot{y}_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{y} \quad \ddot{x} = v_0 t$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{R}$$

$$\dot{y}_t = \dot{y}_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad x_t = v_0 t$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{R}$$

$$\Delta y_t = -\frac{1}{2}g \frac{x_t^2}{v_0^2}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{1}{2}g \frac{x_t^2}{\Delta y_t}}$$

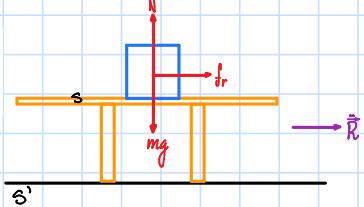
$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r} + \vec{R}$$

$$-g - g$$

Problema 5.

Un bloque de madera descansa sobre una mesa horizontal tosca. Si la mesa se acelera en dirección horizontal, ¿en qué condiciones resbalará el bloque?

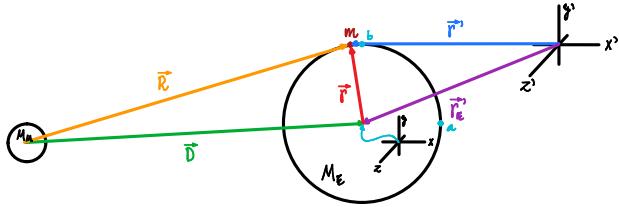
$$\text{En } S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \Rightarrow f_r = m\ddot{x} = \mu mg$$



$$\text{En } S: m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \mu mg - \mu \vec{X} \Rightarrow \ddot{x} = \mu g - \ddot{X} ; \text{ Para que la caja resbale } \ddot{X} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{X} = \mu g \quad \text{Si esto ocurre, la caja va a resbalarse inmediatamente} \quad \diagup$$

Demostración de la fuerza de marea y cálculo del cambio de altura de la marea



$$\text{En } S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_{\text{M}}m}{R^2}\hat{e}_a - \frac{GM_{\text{E}}m}{r^2}\hat{e}_r$$

$$\vec{F} = M_{\text{E}}\ddot{\vec{r}}_E \Rightarrow M_{\text{E}}\ddot{\vec{r}}_E = -\frac{GM_{\text{M}}M_{\text{E}}}{D^2}\hat{e}_0$$

Relación entre S' y S

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{r}_E \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_E \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' - \ddot{\vec{r}}_E = \ddot{\vec{r}} \\ \Rightarrow m\ddot{\vec{r}}' - m\ddot{\vec{r}}_E &= \vec{F} - M_{\text{E}}\ddot{\vec{r}}_E = m\ddot{\vec{r}} \end{aligned}$$

$$\text{En } S: \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_E = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -\frac{GM_{\text{M}}m}{R^2}\hat{e}_a - \frac{GM_{\text{E}}m}{r^2}\hat{e}_r + \underbrace{\frac{GM_{\text{M}}m}{D^2}\hat{e}_0}_{\substack{\text{Atracción gravitatoria} \\ \text{que ejerce la Tierra}}} = m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-\frac{GM_{\text{E}}m}{r^2}\hat{e}_r}_{\substack{\text{Fuerza de marea}}} - GM_{\text{M}}m\left(\frac{\hat{e}_a}{R^2} - \frac{\hat{e}_0}{D^2}\right)$$

$$\Rightarrow F_{\text{marea}} = -GM_{\text{M}}m\left(\frac{\hat{e}_a}{R^2} - \frac{\hat{e}_0}{D^2}\right)$$

Ahora se va a aproximar el resultado de F_{marea} a partir de 2 casos, uno donde m está en "a" y otro en "b"

$$* a: F_{\text{marea}-x} = -GM_{\text{M}}m\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2}\right) = -GM_{\text{M}}m\left(\frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2}\right) = -\frac{GM_{\text{M}}m}{D^2}\left(\frac{1}{(1+\frac{r}{D})^2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{(1+\frac{r}{D})^2} \approx 1 - 2\frac{r}{D}$$

$$\Rightarrow F_{\text{marea}-x} = -\frac{GM_{\text{M}}m}{D^2}\left(1 - 2\frac{r}{D}\right) = \frac{2GM_{\text{M}}mr}{D^3} \Rightarrow F_{\text{marea}-x} = \frac{2GM_{\text{M}}mX}{D^3}$$

$$* b: \hat{e}_0 \approx \hat{e}_r \text{ porque } D \approx R \Rightarrow \hat{e}_r \cdot \hat{e}_0 \approx 0$$

$$\begin{array}{c} \text{Componente en} \\ \text{y de} \\ \hat{e}_r \end{array}$$

$$F_{\text{marea}-y} = -\frac{GM_{\text{M}}m.r}{D^3} \Rightarrow F_{\text{marea}-y} = -\frac{GM_{\text{M}}m.y}{D^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}'_{\text{marea}} = \frac{2GM_{\text{M}}mX}{D^3} \hat{i} - \frac{GM_{\text{M}}m.y}{D^3} \hat{j} \quad \leftarrow \text{Aproximación de las fuerzas que sienten las mareas en un modelo no rotatorio de cuerpo celeste A y B, por ejemplo Tierra-Luna}$$

$$U_{\text{ig}(b)} - U_{\text{ig}(a)} = -W = -\int_r^R F_{\text{marea}-y} dy - \int_0^r F_{\text{marea}-x} dx = -\frac{GM_{\text{M}}m}{D^3}\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = -\frac{3}{2}\frac{GM_{\text{M}}m}{D^3}r^2 = -mgh \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{GM_{\text{M}}m}{D^3}r^2 = mgh$$

Trabajo para mover un punto "b" hasta el centro de la Tierra y de allí al punto "a".

$$\Rightarrow h = \frac{3GM_{\text{M}}r^2}{2gD^3} \quad \leftarrow \text{Diferencia de altura de la marea causada por la luna}$$

Otra forma de probar la diferencia de altura de la marea causada por la luna

En la superficie $U = U_{\text{tg}} + U_{\text{marea}}$ y se cumple que: $U(a) = U(b) \Rightarrow U_{\text{tg}}(a) + U_{\text{marea}}(a) = U_{\text{tg}}(b) + U_{\text{marea}}(b)$

$$\Rightarrow U_{\text{tg}}(a) - U_{\text{tg}}(b) = mgh = U_{\text{marea}}(b) - U_{\text{marea}}(a) ; -\vec{\nabla} U_{\text{marea}} = \vec{F}_{\text{marea}} = -GM_{\text{um}} \left(\frac{\hat{e}_a}{R^2} - \frac{\hat{e}_b}{D^2} \right)$$

$$\Rightarrow U_{\text{marea}} = -GM_{\text{um}} \left(\frac{1}{R} + \frac{X}{D^2} \right)$$

↓ Fuerza gravitacional ↓ Fuerza constante en una dirección precisa → $X \uparrow$

* En el punto b: $X=0$ $R = \sqrt{D^2+r^2}$

$$\Rightarrow U_{\text{marea}}(b) = -GM_{\text{um}} \left(\frac{1}{R} + \frac{X}{D^2} \right) = -GM_{\text{um}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D^2+r^2}} = -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{D^2}}} \approx -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(1 - \frac{r^2}{2D^2} \right)$$

* En el punto a: $X=r$ $R=D+r$

$$\Rightarrow U_{\text{marea}}(a) = -GM_{\text{um}} \left(\frac{1}{R} + \frac{X}{D^2} \right) = -GM_{\text{um}} \left(\frac{1}{D+r} + \frac{r}{D^2} \right) = -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(\frac{1}{1+\frac{r}{D}} + \frac{r}{D} \right) \approx -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(1 - \frac{r}{D} + \frac{r^2}{D^2} + \frac{r}{D} \right)$$

$$\Rightarrow U_{\text{marea}}(b) - U_{\text{marea}}(a) \approx -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(1 - \frac{r^2}{2D^2} \right) - -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(1 + \frac{r^2}{D^2} \right) = -\frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(\cancel{1} - \frac{r^2}{2D^2} \right) + \frac{GM_{\text{um}}}{D} \left(\cancel{1} + \frac{r^2}{D^2} \right)$$

$$\approx \frac{GM_{\text{um}}}{D} \frac{r^2}{2D^2} + \frac{GM_{\text{um}}}{D} \frac{r^2}{D^2} = \frac{GM_{\text{um}}}{D} \frac{3r^2}{2D^2}$$

$$\Rightarrow U_{\text{marea}}(b) - U_{\text{marea}}(a) \approx \frac{GM_{\text{um}}}{D} \frac{3r^2}{2D^2} \approx mgh$$

$$\Rightarrow \frac{GM_{\text{um}}}{D} \frac{3r^2}{2D^2} \approx mgh \Rightarrow h = \frac{GM_{\text{um}}}{gD^3} \frac{3r^2}{2} //$$

Problema 6. (Thorton 5.17)

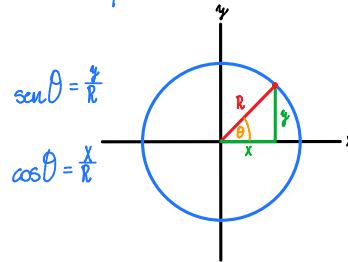
- 5-17. Newton's model of the tidal height, using the two water wells dug to the center of Earth, used the fact that the pressure at the bottom of the two wells should be the same. Assume water is incompressible and find the tidal height difference h , Equation 5.55, due to the Moon using this model. (Hint: $\int_0^{x_{\max}} \rho g_y dy = \int_0^{y_{\max}} \rho g_x dx$; $h = x_{\max} - y_{\max}$, where $x_{\max} + y_{\max} = 2R_{\text{earth}}$, and R_{earth} is Earth's median radius.)

$$h = \frac{3GM_m r^2}{2gD^3} \quad . \quad (5.55)$$

Para comenzar se requiere de g_x y g_y , siendo estos una especie de gres que incluye el campo de la fuerza de marea

$$\Rightarrow g_i = g_0 + \frac{F_{\text{marea}-i}}{m}$$

$$\text{De forma aproximada } F_{\text{marea}} = \frac{2GM_m m X \uparrow}{D^3} - \frac{GM_m m Y \uparrow}{D^3} \uparrow$$



$$\Rightarrow g_x = -\frac{GM \cos \theta}{R^2} + \frac{2GM_m X}{D^3} = -\frac{GM}{R^2} \frac{X}{R} + \frac{2GM_m X}{D^3} = -\frac{GM X}{R^3} + \frac{2GM_m X}{D^3}$$

$$\Rightarrow g_y = -\frac{GM \sin \theta}{R^2} - \frac{GM_m Y}{D^3} = -\frac{GM}{R^2} \frac{Y}{R} - \frac{GM_m Y}{D^3} = -\frac{GM Y}{R^3} - \frac{GM_m Y}{D^3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{x_{\max}} \cancel{\int g_y dy} = \int_0^{x_{\max}} \cancel{\int g_x dx} \Rightarrow \int_0^{x_{\max}} -\frac{GM Y}{R^3} - \frac{GM_m Y dy}{D^3} = \int_0^{x_{\max}} -\frac{GM X}{R^3} + \frac{2GM_m X dx}{D^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{GM \frac{Y^2}{R^3}}{2D^3} - \frac{GM_m \frac{Y^2}{R^3}}{2D^3} = -\frac{GM \frac{X^2}{R^3}}{2D^3} + \frac{GM_m \frac{X^2}{R^3}}{D^3}$$

$$\Rightarrow \frac{GM \frac{X^2}{R^3} - GM \frac{Y^2}{R^3}}{2R^3} = \frac{GM (X^2 - Y^2)}{2R^3} = \frac{GM (X_{\max} - Y_{\max})(X_{\max} + Y_{\max})}{2R^3} = \frac{GM_m \frac{X^2}{R^3} + GM_m \frac{Y^2}{R^3}}{2D^3}$$

$$\Rightarrow \frac{GM (X_{\max} - Y_{\max})(X_{\max} + Y_{\max})}{2R^3 h} = \frac{GM_m \frac{X^2}{R^3}}{D^3} + \frac{GM_m \frac{Y^2}{R^3}}{2D^3} \Rightarrow \frac{M}{2R^2} h \cdot \cancel{2R} = \frac{M}{R^2} h = \frac{M_m R^2}{D^3} + \frac{M_m R^2}{2D^3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3 M_m R^4}{2 M D^3} = \frac{3 G M_m R^2}{2 g D^3} \Rightarrow h = \frac{3 G M_m R^2}{2 g D^3} //$$

Problema 7.

Supongamos que en algún momento la Luna estuvo cubierta por un océano y rotando con respecto a la Tierra. Encuentra la razón entre las alturas de las mareas levantadas en la Luna por la Tierra y en la Tierra por la Luna. (El radio de la Luna es $R_M = 0.27R_E$.) Estima qué tan altas habrían sido las mareas en la Luna cuando la distancia entre la Tierra y la Luna era de $10R_E$.

Utilizando $h = \frac{3 M_{\text{cu}} R^4}{2 M_p D^3}$; donde M_{cu} es la masa del cuerpo que produce la fuerza de marea, M_p y R_p son masa y radio del planeta o cuerpo en que ocurre la marea

$$\Rightarrow h_M = \frac{3 M_E R_M^4}{2 M_u D^3} \quad y \quad h_E = \frac{3 M_M R_E^4}{2 M_E D^3}$$

$$\Rightarrow \frac{h_M}{h_E} = \frac{\frac{3 M_E R_M^4}{2 M_u D^3}}{\frac{3 M_M R_E^4}{2 M_E D^3}} = \frac{\frac{M_E R_M^4}{M_u R_E^4}}{\frac{M_M^2 R_E^4}{M_E^2 D^2}} = \frac{M_E^2 0.27^4 R_E^4}{M_M^2 R_E^4} \Rightarrow \frac{h_M}{h_E} = \frac{M_E^2 0.27^4}{M_M^2} = 35.06; M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_u = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow h_M = \frac{3 M_E R_M^4}{2 M_u D^3} = \frac{3 M_E 0.27^4 R_E^4}{2 M_u 10^3 R_E^4} = \frac{3 M_E R_E 0.27^4}{2 M_u 10^3} = 41.25 \text{ m}$$

Problema 8.

En clase estudiamos los efectos de la Luna y el Sol sobre las mareas terrestres. ¿Puede determinar la influencia en la marea terrestre debido a Marte y Júpiter? Nota: Para ello considere una configuración donde se de la máxima influencia de cada uno

Utilizando $h = \frac{3 M_{\text{cu}} R^4}{2 M_p D^3}$; donde M_{cu} es la masa del cuerpo que produce la fuerza de marea, M_p y R_p son masa y radio del planeta o cuerpo en que ocurre la marea

La máxima influencia de ambos planetas sobre las mareas terrestres ocurriría cuando D_{M-T} y D_{J-T} son las distancias mínimas posibles

$$D_{M-T-m} = 5.46 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad y \quad M_M = 6.39 \cdot 10^{23} \text{ kg} \Rightarrow h_{M_m} = 1.63 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$D_{J-T-m} = 6.29 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad y \quad M_J = 1.90 \cdot 10^{27} \text{ kg} \Rightarrow h_{J_m} = 3.16 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Con Rotación

Problema 1. (Thornton 10.1)

- 10-1. Calculate the centrifugal acceleration, due to Earth's rotation, on a particle on the surface of Earth at the equator. Compare this result with the gravitational acceleration. Compute also the centrifugal acceleration due to the motion of Earth about the Sun and justify the remark made in the text that this acceleration may be neglected compared with the acceleration caused by axial rotation.

$$\omega_r = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \Rightarrow a_{centr} = r_r \omega_r^2 = 3,38 \text{ m/s}^2$$

$$\omega_{s-r} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s} \Rightarrow a_{centr,s} = r_{s-r} \omega_{s-r}^2 = 0,6 \text{ m/s}^2 //$$

Problema 2. (Taylor 9.12)

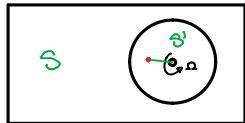
- 9.12* (a) Show that to design a static structure in a rotating frame (such as a space station) one can use the ordinary rules of statics except that one must include the extra "fictitious" centrifugal force.
 (b) I wish to place a puck on a rotating horizontal turntable (angular velocity Ω) and to have it remain at rest on the table, held by the force of static friction (coefficient μ). What is the maximum distance from the axis of rotation at which I can do this? (Argue from the point of view of an observer in the rotating frame.)

a) $S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g$

$S: \vec{F}_{eff} = 0 \leftarrow \text{Se quiere que sea estática}; \vec{F}_{eff} = \vec{F} + *$; la estación va a sentir la fuerza gravitacional de la Tierra, por lo que \vec{F} no puede ser cero y requiere que * sea algo, y debe contrarrestar a \vec{F} en S.

$$\Rightarrow \vec{F}_{eff} = \vec{F}_g - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

b)

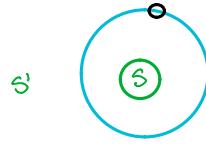


$$S': \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\mu_s mg \uparrow$$

$$S: \vec{F}_{eff} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \cancel{m\vec{\omega} \times \vec{v}_r} = 0 \leftarrow \text{Se busca el radio máximo en que es estático}$$

$$\Rightarrow \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 \Rightarrow -\mu_s mg = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\vec{\omega}^2 \vec{r} \Rightarrow \mu_s mg = \cancel{m\vec{\omega}^2 \vec{r}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\mu_s g}{\omega^2} \Rightarrow r = \frac{\mu_s g}{\Omega^2} //$$



Problema 3. (Thornton 10.16)

10-16. Consider Problem 943 but include the effects of the Coriolis force on the probe. The probe is launched at a latitude of 45° straight up. Determine the horizontal deflection in the probe at its maximum height for each part of Problem 9-63.

$$\omega = 73 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$90^\circ - \text{latitud} = \theta = 45^\circ$$

a) $S' : \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -mg\hat{k} = m\ddot{\vec{r}}$

$$S : \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{r} ; \quad \vec{\omega} = \omega \cos \theta \hat{k} - \omega \sin \theta \hat{i}$$

$$\vec{r} = \hat{x}\hat{i} + \hat{y}\hat{j} + \hat{z}\hat{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\omega \sin \theta & 0 & \omega \cos \theta \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = -\hat{i}\omega \cos \theta \hat{i} - (-\hat{z}\omega \sin \theta - \hat{x}\omega \cos \theta) \hat{j} - \hat{y}\omega \sin \theta \hat{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2[-\hat{i}\omega \cos \theta \hat{i} - (-\hat{z}\omega \sin \theta - \hat{x}\omega \cos \theta) \hat{j} - \hat{y}\omega \sin \theta \hat{k}] \\ = -g\hat{k} + 2\hat{i}\omega \cos \theta \hat{i} - 2(\hat{z}\omega \sin \theta + \hat{x}\omega \cos \theta) \hat{j} + 2\hat{y}\omega \sin \theta \hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \begin{cases} \hat{x} = 2\hat{i}\omega \cos \theta \\ \hat{y} = -2(\hat{z}\omega \sin \theta + \hat{x}\omega \cos \theta) \\ \hat{z} = -g + 2\hat{y}\omega \sin \theta \end{cases}$$

Ahora con la expresión para la aceleración que va a sentir el cohete, hay que aproximar la solución mediante iteración de soluciones comenzando por una solución simple conocida.

1) Suponer $\omega \approx 0 \Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z}^* = \dot{z}_0 - gt, \ddot{y} = 0, \ddot{x} = 0 \leftarrow$ Aproximación de orden cero, caída libre

2) $\omega \neq 0$ y se tiene \star y \ddot{y} en \ddot{y} : $\Rightarrow \ddot{y} = -2(\dot{z}_0 - gt)\omega \sin \theta \Rightarrow \ddot{y}^* = -2\omega \sin \theta \dot{z}_0 t + \omega \sin \theta g t^2$
 $\Rightarrow \dot{z}^* = \dot{z}_0 - gt \quad y \quad \ddot{x} = 0 \quad \leftarrow$ Aproximación de orden 1

3) Con \star y \ddot{y} en \ddot{x} : $\Rightarrow \ddot{x} = 2(-2\omega \sin \theta \dot{z}_0 t + \omega \sin \theta g t^2) \omega \cos \theta \quad \leftarrow$ Aproximación de orden 2
 $\Rightarrow \ddot{x} = \left(-2\omega \sin \theta \dot{z}_0 t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin \theta g t^3 \right) \omega \cos \theta$

En $\ddot{z} : \Rightarrow \ddot{z} = -g + 2(-2\omega \sin \theta \dot{z}_0 t + \omega \sin \theta g t^2) \omega \cos \theta \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}_0 - gt + \left(-2\omega \sin \theta \dot{z}_0 t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin \theta g t^3 \right) \omega \cos \theta$

t hasta $z_{\max} \Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow t = 6.108 \text{ s}$

Usando \star $\ddot{y} = -7.71 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2, \ddot{x} = -1.8 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2 \quad \text{Las otras aproximaciones en computadora}$

9-63. A new projectile launcher is developed in the year 2023 that can launch a 10^4 kg spherical probe with an initial speed of 6000 m/s . For testing purposes, objects are launched vertically.

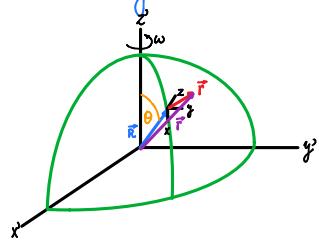
(a) Neglect air resistance and assume that the acceleration of gravity is constant.

Determine how high the launched object can reach above the surface of Earth.

(b) If the object has a radius of 20 cm and the air resistance is proportional to the square of the object's speed with $c_a = 0.2$, determine the maximum height reached. Assume the density of air is constant.

(c) Now also include the fact that the acceleration of gravity decreases as the object soars above Earth. Find the height reached.

(d) Now add the effects of the decrease in air density with altitude to the calculation. We can very roughly represent the air density by $\log_{10}(\rho) = -0.05h + 0.11$ where ρ is the air density in kg/m^3 and h is the altitude above Earth in km . Determine how high the object now goes.



Problema 4. (Thornton 10.21)

10-21. Water being diverted during a flood in Helsinki, Finland (latitude 60°N) flows along a diversion channel of width 47 m in the south direction at a speed of 3.4 m/s. On which side is the water the highest (from the standpoint of noninertial systems) and by how much?

$$S: \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -mg\hat{k} = m\ddot{\vec{r}} ; l = 47\text{m}$$

$$S: \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -w \sin \theta & 0 & w \cos \theta \\ \hat{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{x} w \cos \theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\dot{x} w \cos \theta \hat{j} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\dot{x} w \cos \theta \hat{j} = -g\hat{k} - 4,30 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

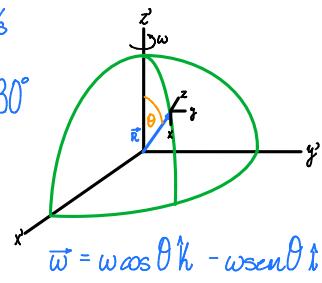
$$\Delta h = l \sin \beta \quad g \sin \beta = \frac{4,30 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{g^2 + (4,30 \cdot 10^{-4})^2}} = 4,38 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \Delta h = 2,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$90^{\circ} - \text{latitud} = \theta = 30^{\circ}$$

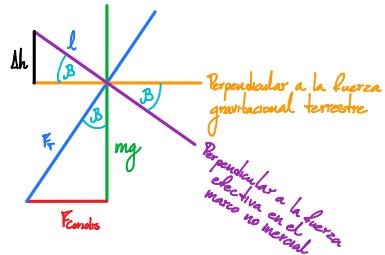
$$\dot{x} = 3,4 \text{ m/s}$$



$$\vec{r} = \dot{x} \hat{i} + \cancel{\dot{y} \hat{j}} + \cancel{\dot{z} \hat{k}} = \dot{x} \hat{i}$$

El agua va hacia el sur

El agua tiene mayor altura hacia el oeste



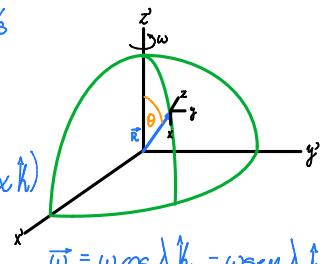
Problema 5.

Un proyectil se dispara en una colatitud λ con una rapidez v_0 dirigida hacia el oeste y formando un ángulo α con la horizontal.

- Determine el tiempo que le toma alcanzar la altura máxima, si se toma en cuenta la rotación de la Tierra.
- ¿Cuál es la altura máxima?
- ¿Qué ocurre con sus resultados si la velocidad angular se hace cero.

$$\omega = 73 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$*\ddot{\vec{r}} = v_0(-\cos\alpha \hat{j} + \sin\alpha \hat{k})$$



$$S' : \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -mg\hat{k} = m\ddot{\vec{r}} ; \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad \vec{\omega} = \omega \sin\lambda \hat{k} - \omega \cos\lambda \hat{i}$$

$$S : \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow -mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\omega \sin\lambda & \hat{j} & \omega \cos\lambda \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{z} \end{vmatrix} = -\hat{j}\omega \cos\lambda \hat{i} - (-\hat{z}\omega \sin\lambda - \hat{x}\omega \cos\lambda) \hat{j} - \hat{y}\omega \sin\lambda \hat{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} - 2[-\hat{j}\omega \cos\lambda \hat{i} - (-\hat{z}\omega \sin\lambda - \hat{x}\omega \cos\lambda) \hat{j} - \hat{y}\omega \sin\lambda \hat{k}]$$

$$= -g\hat{k} + 2\hat{j}\omega \cos\lambda \hat{i} - 2(\hat{z}\omega \sin\lambda + \hat{x}\omega \cos\lambda) \hat{j} + 2\hat{y}\omega \sin\lambda \hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \begin{cases} \hat{x} = 2\hat{j}\omega \cos\lambda \\ \hat{y} = -2(\hat{z}\omega \sin\lambda + \hat{x}\omega \cos\lambda) \\ \hat{z} = -g + 2\hat{y}\omega \sin\lambda \end{cases}$$

Ahora con la expresión para la aceleración que va a sentir el cohete, hay que aproximar la solución mediante iteración de soluciones comenzando por una solución simple conocida.

1) Suponer $\omega \approx 0 \Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z}^* = \dot{z}_0 - gt, \ddot{y} = 0, \ddot{x} = 0 \leftarrow$ Aproximación de orden cero, caída libre

2) $\omega \neq 0$ y se tiene * y * en $\ddot{y} : \Rightarrow \ddot{y} = -2(\dot{z}_0 - gt)\omega \sin\lambda \Rightarrow \ddot{y}^* = \ddot{y}_0 - 2\omega \sin\lambda \dot{z}_0 t + \omega \sin\lambda g t^2$
 $\Rightarrow \dot{z}^* = \dot{z}_0 - gt \quad y \quad \ddot{x} = 0 \quad \text{Aproximación de orden 1}$

3) En \ddot{z} con * : $\Rightarrow \ddot{z} = -g + 2(\ddot{y}_0 - 2\omega \sin\lambda \dot{z}_0 t + \omega \sin\lambda g t^2) \omega \sin\lambda$
 $\Rightarrow \ddot{z} = \ddot{z}_0 - gt + \left(\ddot{y}_0 t - 2\omega \sin\lambda \dot{z}_0 t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin\lambda g t^3 \right) \omega \sin\lambda$

Recordando * :

$$\Rightarrow \dot{z}^* = v_0 \sin\alpha - gt + \left(-v_0 \cos\alpha t - 2\omega \sin\lambda v_0 \sin\alpha t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin\lambda g t^3 \right) \omega \sin\lambda$$

Continua...

Tiempo en la altura máxima $\dot{z} = 0$, despejar el tiempo de esa ecuación puede ser muy complejo por lo que se va a optar por aproximar el tiempo de vuelo a cero y se reemplazara en las potencias de t mayores a 1

$$\Rightarrow v \sin \alpha - gt + \left(-v_0 \cos \alpha t - 2 \omega \sin \lambda v \sin \alpha t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin \lambda g t^3 \right) \omega \sin \lambda = 0 \quad t = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow v \sin \alpha - gt - v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda t + \left(-2 \omega \sin \lambda v \sin \alpha \frac{v^3 \sin^3 \alpha}{g^2} + \frac{2}{3} \omega \sin \lambda g \frac{v^3 \sin^3 \alpha}{g^3} \right) \omega \sin \lambda = 0$$

$$\Rightarrow t(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda) = -v \sin \alpha - \left(-\frac{6 \omega \sin \lambda g v^3 \sin^3 \alpha}{3g^3} + \frac{2}{3} \omega \sin \lambda g \frac{v^3 \sin^3 \alpha}{g^3} \right) \omega \sin \lambda$$

$$\Rightarrow -t(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda) = -v \sin \alpha - \left(-\frac{10 \omega \sin \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{3g^2} \right) \omega \sin \lambda$$

$$\Rightarrow -t(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda) = -v \sin \alpha + \frac{10 \omega^2 \sin^2 \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{3g^2} \Rightarrow -t(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda) = \frac{-3g^2 v \sin \alpha + 10 \omega^2 \sin^2 \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{3g^2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-3g^2 v \sin \alpha + 10 \omega^2 \sin^2 \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{-3g^2(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda)}$$

$$a) t = \frac{-3g^2 v \sin \alpha + 10 \omega^2 \sin^2 \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{-3g^2(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda)}$$

b) Para encontrar z_{\max} primero hay que integrar \dot{z}^* y reemplazar el tiempo en la altura máxima

$$\Rightarrow \dot{z}^* = v \sin \alpha - gt + \left(-v_0 \cos \alpha t - 2 \omega \sin \lambda v \sin \alpha t^2 + \frac{2}{3} \omega \sin \lambda g t^3 \right) \omega \sin \lambda$$

$$\Rightarrow z = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 + \left(-\frac{v_0 \cos \alpha t^2}{2} - \frac{2 \omega \sin \lambda v \sin \alpha t^3}{3} + \frac{2}{12} \omega \sin \lambda g t^4 \right) \omega \sin \lambda \quad \text{Reemplazar } t$$

$$c) \omega = 0 \Rightarrow t = \frac{-3g^2 v \sin \alpha + 10 \omega^2 \sin^2 \lambda v^3 \sin^3 \alpha}{-3g^2(g + v_0 \cos \alpha \omega \sin \lambda)} = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow z = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 + \left(-\frac{v_0 \cos \alpha t^2}{2} - \frac{2 \omega \sin \lambda v \sin \alpha t^3}{3} + \frac{2}{12} \omega \sin \lambda g t^4 \right) \omega \sin \lambda = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

Caida libre normal

Problema 6. (Taylor 9.26)

9.26** In Section 9.8, we used a method of successive approximations to find the orbit of an object that is dropped from rest, correct to first order in the earth's angular velocity Ω . Show in the same way that if an object is thrown with initial velocity v_0 from a point O on the earth's surface at colatitude θ , then to first order in Ω its orbit is

$$\left. \begin{aligned} x &= v_{x0}t + \Omega(v_{z0}\cos\theta - v_{x0}\sin\theta)t^2 + \frac{1}{3}\Omega gt^3 \sin\theta \\ y &= v_{y0}t - \Omega(v_{z0}\cos\theta)t^2 \\ z &= v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 + \Omega(v_{x0}\sin\theta)t^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.73)$$

[First solve the equations of motion (9.53) in zeroth order, that is, ignoring Ω entirely. Substitute your zeroth-order solution for \dot{x} , \dot{y} , and \dot{z} into the right side of equations (9.53) and integrate to give the next approximation. Assume that v_0 is small enough that air resistance is negligible and that g is a constant throughout the flight.]

Pendulo de Foucault

$$S: \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{T} - mg\hat{k} = m\ddot{\vec{r}}; \quad \vec{T} = T\hat{e}_r = m\ddot{\vec{r}}^*$$

$$S: \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{T} - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})]$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi$$

• Hay que pasar el vector de peso " $-mg\hat{k}$ " y " $\vec{\omega}$ " a coordenadas esféricas, por definición

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \\ \hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\phi\hat{k} \\ \hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} \end{cases} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Matriz de transformación de cartesianas a esféricas}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -mg(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\phi\hat{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} w_r \\ w_\theta \\ w_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w\sin\lambda \\ 0 \\ w\cos\lambda \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta \\ -\sin\lambda\cos\theta\cos\phi - \sin\lambda\sin\phi \\ \sin\lambda\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \omega(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta)\hat{e}_r - \omega(\sin\lambda\cos\theta\cos\phi + \cos\lambda\sin\phi)\hat{e}_\theta + \omega\sin\lambda\sin\phi\hat{e}_\phi$$

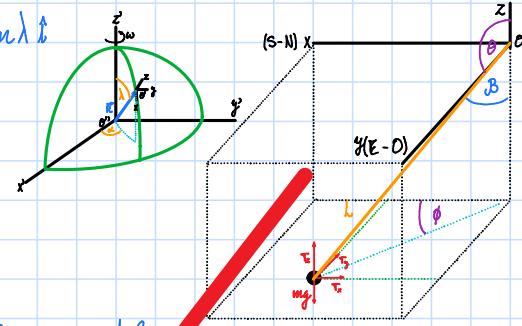
• Ahora, resolviendo los productos

$$* \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ w(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) & -w(\sin\lambda\cos\theta\cos\phi + \cos\lambda\sin\phi) & w\sin\lambda\sin\phi \\ \dot{r} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{vmatrix}$$

$$= [-r\dot{\phi}\sin\theta w(-\sin\lambda\cos\theta\cos\phi + \cos\lambda\sin\phi) - r\dot{\theta}w\sin\lambda\sin\phi]\hat{e}_r + \dots$$

$$\dots - [r\dot{\phi}\sin\theta w(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) - \dot{r}w\sin\lambda\sin\phi]\hat{e}_\theta + \dots$$

$$\dots + [r\dot{\theta}w(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) + \dot{r}w(\sin\lambda\cos\theta\cos\phi + \cos\lambda\sin\phi)]\hat{e}_\phi$$



$$*\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_{\theta} & \hat{e}_{\phi} \\ w(-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) & -w(\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) & w \sin\lambda \sin\theta \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r w \sin\lambda \sin\theta \hat{e}_{\theta} - r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) \hat{e}_{\phi}$$

$$= r w \sin\lambda \sin\theta \hat{e}_{\theta} + r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) \hat{e}_{\phi}$$

$$*\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_{\theta} & \hat{e}_{\phi} \\ w(-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) & -w(\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) & w \sin\lambda \sin\theta \\ 0 & r w \sin\lambda \sin\theta & r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) \end{vmatrix}$$

$$= [-w(\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) - r w \sin\lambda \sin\theta w \sin\lambda \sin\theta] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots - [w(-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)] \hat{e}_{\theta} + \dots$$

$$\dots + [r w \sin\lambda \sin\theta w (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta)] \hat{e}_{\phi}$$

$$\rightarrow = -r w^2 [(\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)^2 + \sin^2\lambda \sin^2\theta] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots - [r w^2 (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)] \hat{e}_{\theta} + \dots$$

$$\dots + [r w^2 \sin\lambda \sin\theta (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta)] \hat{e}_{\phi}$$

Regresando a \star :

$$\left. \begin{aligned} r: T - mg \cos\theta - ml - r \dot{\theta} \sin\theta w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta) - r \dot{\theta} w \sin\lambda \sin\theta \end{aligned} \right] + \dots$$

$$\dots - m - r w^2 [(\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)^2 + \sin^2\lambda \sin^2\theta]$$

$$\left. \begin{aligned} \theta: mg \sin\theta - 2m \cdot -[r \dot{\theta} \sin\theta w (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) - r w \sin\lambda \sin\theta] \end{aligned} \right] + \dots$$

$$\dots - m \cdot -r w^2 (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi: -2m \cdot [r \dot{\theta} w (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta) + r w (\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \sin\theta)] \end{aligned} \right] + \dots$$

$$\dots - m [r w^2 \sin\lambda \sin\theta (-\sin\lambda \cos\theta \cos\phi + \cos\lambda \cos\theta)]$$

Como $r = l$ y la cuerda no se va a cambiar su longitud, entonces $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$

Continua

Aplicando la condición anterior

$$\Rightarrow m\ddot{r} = \begin{cases} \theta : mgsen\theta + 2ml\dot{\theta}sen\theta w(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta) - l\ddot{\theta}wsen\lambda sen\theta + \dots \\ \dots + mlw^2[(sen\lambda cos\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)^2 + sen^2\lambda sen^2\theta] \\ \phi : -2m[l\ddot{\theta}w(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)] - m[lw^2 sen\lambda sen\theta(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)] \end{cases}$$

La aceleración en coordenadas esféricas

$$\ddot{r} = (j^o - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\theta}^2 sen^2\theta)\hat{e}_r + (2\dot{j}\theta + r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 sen\theta cos\theta)\hat{e}_{\theta} + (2\dot{j}\theta sen\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\theta} cos\theta + r\ddot{\theta} sen\theta)\hat{e}_{\phi}$$

$$(-l\ddot{\theta}^2 - l\dot{\theta}^2 sen^2\theta)\hat{e}_r + (l\ddot{\theta} - l\dot{\theta}^2 sen\theta cos\theta)\hat{e}_{\theta} + (2l\dot{\theta}\dot{\theta} cos\theta + l\ddot{\theta} sen\theta)\hat{e}_{\phi}$$

Las ecuaciones del movimiento

$$\begin{cases} 1: m(l\ddot{\theta}^2 - l\dot{\theta}^2 sen^2\theta) = T - mgsen\theta - 2m[l\dot{\theta}wsen\theta(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta) - l\ddot{\theta}wsen\lambda sen\theta] + \dots \\ \dots + mlw^2[(sen\lambda cos\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)^2 + sen^2\lambda sen^2\theta] \\ \Rightarrow 2: m(l\ddot{\theta} - l\dot{\theta}^2 sen\theta cos\theta) = mgsen\theta + 2ml\dot{\theta}sen\theta w(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta) + \dots \\ \dots + mlw^2(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)(sen\lambda cos\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta) \\ 3: m(2l\dot{\theta}\dot{\theta} cos\theta + l\ddot{\theta} sen\theta) = 2m[l\ddot{\theta}w(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)] - m[lw^2 sen\lambda sen\theta(-sen\lambda sen\theta cos\theta + cos\lambda sen\theta)] \end{cases}$$

Problema 7.

¿Cuánto tiempo tarda en dar una revolución completa el plano de oscilación del péndulo de Foucault si está situando en una latitud de 85° ?

Reapareciendo la ecuación 3

$$\begin{aligned} m(2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\phi}\sin\theta) &= -2mr[\dot{\theta}\omega(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta)] - mr[w^2\sin\lambda\sin\phi(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta)] \\ \Rightarrow 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + \ddot{\phi}\sin\theta &= -2\dot{\theta}\omega(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) - w^2\sin\lambda\sin\phi(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) \\ \Rightarrow \ddot{\phi}\sin\theta &= -2\dot{\theta}\omega(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) - w^2\sin\lambda\sin\phi(-\sin\lambda\sin\theta\cos\phi + \cos\lambda\cos\theta) - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \\ \Rightarrow \ddot{\phi} &= -2\dot{\theta}\omega(-\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\cot\theta) - w^2\sin\lambda\sin\phi(-\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\cot\theta) - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta \end{aligned}$$

Ignorando los efectos centrífuga

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -2\dot{\theta}\omega(-\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\cot\theta) - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta$$

$$w_\phi = w\sin\lambda = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \sin 85^\circ = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Problema 8. (Taylor 9.30)

9.30 *** The Coriolis force can produce a torque on a spinning object. To illustrate this, consider a horizontal hoop of mass m and radius r spinning with angular velocity ω about its vertical axis at colatitude θ . Show that the Coriolis force due to the earth's rotation produces a torque of magnitude $m\omega\Omega r^2 \sin\theta$ directed to the west, where Ω is the earth's angular velocity. This torque is the basis of the gyrocompass.



$$\mathbf{F} = -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = -2m\vec{\Omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -2m\Omega r \omega \sin\theta \hat{\mathbf{z}} \quad \Rightarrow \mathbf{N} = r\mathbf{F} = -2m\Omega r^2 \omega \sin\theta \hat{\mathbf{z}}$$

Mecánica Lagrangiana

Este capítulo se va a dedicar a establecer un formalismo alternativo a las Leyes de Newton, el formalismo lagrangiano aplicado a la mecánica clásica. Este nuevo formalismo produce resultados equivalentes al de Newton, como es de esperarse, no obstante permite simplificar de gran manera los análisis.

Aquí se expresará la Mecánica Lagrangiana de forma general, de modo que se aplique a sistemas conservativos (o no) y a sistemas de partículas.

SECTION 6

Conceptos Fundamentales

SUBSECTION 6.1

Grados de Libertad y Coordenadas Generalizadas

Definition 29

(Grados de Libertad) Para un sistema físico cualquiera, el número de grados de libertad corresponde al número más pequeño de cantidades escalares independientes necesarias para dar la posición (Sin contar el tiempo) de un objeto de interés dentro del sistema.

- **Partícula en una dimensión:** 1 grado de libertad, la partícula se encuentra sobre una recta está puede ir hacia adelante o atrás.
- **Partícula en 2 dimensiones:** 2 grados de libertad, la partícula tiene libertad de moverse en un plano.
- **Partícula en 3 dimensiones:** 3 grados de libertad, la partícula tiene puede moverse en un espacio tridimensional (en un ancho, largo y altura respecto a un origen).
- **n-Partículas en 3 dimensiones:** $3n$ grados de libertad, cada partícula individual tiene sus 3 grados de libertad propios y la suma es el total de grados de libertad del sistema.

Definition 30

(Coordenadas Generalizadas) Son el conjunto de cantidades ¹³ que especifican completamente el estado de un sistema.

Ahora, suponiendo que un sistema de estudio está conformado por n partículas y al estar en un espacio tridimensional, en un principio el sistema posee $3n$ grados de libertad. Si el sistema posee ***m* ecuaciones de restricción**¹⁴, tendrá m restricciones en los grados de libertad totales del sistema, entonces los grados de libertad son:

$$s = 3n - m \leftarrow \begin{array}{l} \text{Grados de libertad de un} \\ \text{sistema en forma general} \end{array}$$

Es posible escribir las ecuaciones de transformación entre las coordenadas generalizadas y coordenadas curvilíneas cualesquiera, como se presenta a continuación:

¹³ No necesariamente tienen que ser distancias, pueden ser cantidades adimensionales o incluso con unidades de energía.

¹⁴ Asociadas o no a fuerzas de restricción. Estas pueden ser incluso cortes en la dimensionalidad del espacio en que se encuentra el sistema.

Coordenadas Curvilíneas Coordenadas Generalizadas

$$\begin{cases} x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \\ \dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \\ \dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

Si se tiene el conjunto más pequeño de coordenadas generalizadas, este es conocido como el [conjunto adecuado](#) de coordenadas ¹⁵. En este caso, el conjunto de cantidades (Coordenadas Generalizadas) corresponde a los grados de libertad del sistema.

SUBSECTION 6.2

Trabajo Virtual, Fuerzas Generalizadas y Principio de D'Alambert

A partir de aquí se considerará un sistema compuesto por n partículas, cada una de ellas expuesta a su vector de fuerza neta correspondiente F_α . Siendo F_α la suma de cualquier clase de fuerzas que actúen sobre la partícula α (Fuerzas conservativas, no conservativas, de restricción) y posee sus componentes, por ejemplo, en coordenadas cartesianas F_{α_x} , F_{α_y} y F_{α_z} . Además, la fuerza se puede separar de la forma $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^e + \vec{f}_\alpha$, donde \vec{F}_α^e corresponde a todas las fuerzas externas aplicadas en la partícula α y \vec{f}_α corresponde a todas las fuerzas de restricción que afectan a dicha partícula.

Un trabajo infinitesimal provocado por esta fuerza:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \vec{f}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Limitando el análisis a sistemas tales que las fuerzas de restricción no producen este tipo de trabajo infinitesimal:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \vec{f}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Redefiniendo el vector \vec{F}_α como la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula α , excepto las de restricción, dado que ya se estableció que para este análisis estas no producen trabajo. se introduce el siguiente concepto:

Definition 31 **(Trabajo Virtual)** Corresponde al trabajo producido por un [desplazamiento virtual](#) ¹⁶. Un desplazamiento virtual es un desplazamiento infinitesimal de un sistema, una alteración en la configuración de este, como resultado de un cambio infinitesimal arbitrario de las coordenadas $\delta \vec{r}_\alpha$, que debe ser consistente con las fuerzas y las restricciones impuestas en el sistema en un cierto instante t .

¹⁵ Va a ser común desarrollar un problema tanto con el conjunto adecuado como con un conjunto de cantidades que superen al adecuado.

¹⁶ Al decir "virtual", es para diferenciarlo de un desplazamiento o trabajo real del sistema.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \quad (6.1)$$

A partir de la definición anterior, buscando colocar el trabajo virtual en el conjunto de coordenadas generalizadas:

Es posible desarrollar $\delta \vec{r}_\alpha$ a partir de la regla de la cadena para 3 grados de libertad como:

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

Excluyendo la derivada parcial temporal por la definición del desplazamiento virtual, que solo considera desplazamientos en las coordenadas. Realizando el cambio de $\delta \vec{r}_\alpha$ en la Ecuación (6.1):

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^s \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Lo cual al considerar que tanto \vec{F}_α y \vec{r}_α se encuentran inicialmente en coordenadas curvilíneas:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right)$$

Definition 32

(Fuerzas Generalizadas) Corresponde a un nombre genérico para referirse, en un principio, a fuerzas y torques escritos en las coordenadas generalizadas que describen el sistema. Estas son dadas en los componentes correspondientes a cada coordenada generalizada. Comúnmente las fuerzas o torques son escritas inicialmente en coordenadas curvilíneas en un inicio para luego ser transformadas a fuerzas generalizadas.

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right) \quad (6.2)$$

Para conocer la naturaleza de la fuerza generalizada (Fuerza, Torque, ...), se debe revisar la dimensionalidad del trabajo virtual ejercido por tal fuerza, es decir:

$$\delta W_j = Q_j \delta q_j ; \text{ Debe poseer unidades de energía}$$

Una vez establecidas las coordenadas generalizadas, es sencillo describir a que corresponden las fuerzas generalizadas a partir de lo anterior.

Ahora, en busca de generar una forma alternativa de mecánica, se va a explotar el concepto anterior. Primero, a partir de la Ecuación (3.3):

$$\begin{aligned}\vec{F}_\alpha &= \dot{\vec{p}}_\alpha \\ \Rightarrow \vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha &= 0\end{aligned}$$

Esta expresión enuncia que una partícula expuesta a una fuerza \vec{F}_α , se encontrará en equilibrio si se le ejerce una fuerza efectiva contraria a la original $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Entonces, con esto se puede buscar el trabajo virtual de todas estas fuerzas sobre el sistema, que por lo anterior se sabe que será cero.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

Definition 33

(Principio de D'Alambert) Este principio esta expresando en coordenadas generalizadas.

$$\sum_{\alpha=1}^n (\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \quad (6.3)$$

Un resultado de este principio, es el Principio de Trabajo Virtual ¹⁷:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

¹⁷Es el caso estático del Principio de D'Alambert, ampliamente usado en ingeniería.

SECTION 7

Principio de Hamilton

Este principio puede ser deducido desde el Principio de D'Alambert, no obstante, la deducción no se realizará por ahora.

Definition 34

(Principio de Hamilton Extendido) El movimiento de un sistema desde un tiempo t_1 a un tiempo t_2 es tal que la integral de línea (La llamada Acción o integral de la Acción) de la energía cinética más el trabajo ejercido por las fuerzas del sistema, tenga un valor estacionario para el camino real que sigue el sistema ¹⁸.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T(q_j, \dot{q}_j, t) + W dt \quad (7.1)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T(q_j, \dot{q}_j, t) + W dt = 0 \leftarrow \text{Valor estacionario}$$

¹⁸El Principio de Hamilton original se define de forma similar, donde la Acción es de la forma:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T - V dt$$

SECTION 8

Ecuaciones de la Mecánica de Lagrange

A continuación, en esta sección se va deducir la **ecuación de Euler - Lagrange** a partir del Principio de Hamilton Extendido de modo que sea aplicable a sistemas no conservativos y se introducirán conceptos propios de la Mecánica Lagrangiana.

SUBSECTION 8.1

Deducción del formalismo Lagrangiano

Comenzando con la deducción de la ecuación Euler - Lagrange, se debe optimizar la Acción (Ecuación (7.1)) para conseguir un valor estacionario:

Optimizar la Acción significa, tomar la variación de esta:

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} T(q_j, \dot{q}_j, t) + W dt = 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} T(q_j, \dot{q}_j, t) + W dt &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta T(q_j, \dot{q}_j, t) + \delta W dt &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \right] dt &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

Con este resultado, ahora se tomará el término marcado en azul para transformarlo en una expresión equivalente:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \left(\frac{dq_j}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt \\ &= \sum_{j=1}^s \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt \end{aligned}$$

Resolviendo esta integral por integración por partes para un término arbitrario de la suma ¹⁹:

¹⁹ El término:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

porque los extremos están fijos, de modo que la variación en la coordenada generalizada q_j es igual a 0 cuando se está en el momento inicial t_1 y en el momento final t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \overbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j)}^{\textcolor{brown}{u}} dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt$$

De volviendo esta expresión al interior de la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right) dt = 0 \\ & \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right) dt = 0 \\ & \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

Entonces, para que esta integral sea igual a cero, el contenido de la integral debe ser igual a cero para valores arbitrarios de las variaciones $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$:

$$\sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Dada la arbitrariedad de dichas variaciones, es posible suponer que todas las variaciones de δq 's son cero, excepto un δq_j . Se debe cumplir para ese δq_j :

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j = 0$$

Reescribiendo ²⁰:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Para terminar esta deducción, es necesario separar las fuerzas conservativas (c) de las no conservativas (nc), entonces:

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j^c + Q_j^{nc} \\ &= \sum_{\alpha}^n \vec{F}_{\alpha}^c \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} + \sum_{\alpha}^n \vec{F}_{\alpha}^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Ahora, es necesario recordar la Ecuación (3.7) para fuerzas conservativas, lo que permite:

²⁰ Esta última ecuación ya posee la forma de una ecuación de Euler

Recuerde que Q_j no posee ninguna fuerza de restricción

$$\begin{aligned}
Q_j &= \sum_{\alpha}^n -\vec{\nabla}V_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} + \sum_{\alpha}^n \vec{F}_{\alpha}^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \\
&= -\sum_{\alpha}^n \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right) + Q_j^{nc} \\
&= -\sum_{\alpha}^n \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial q_j} + Q_j^{nc} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{nc}
\end{aligned}$$

El volver a colocar \vec{F}^{nc} como Q_j^{nc} no representa un problema por ahora, debido a que la forma de estas fuerzas puede llegar a depender del problema en que se planteen y no hay ninguna pérdida al dejarlas de forma general.

Con la expresión anterior, se introduce en la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{nc} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) &= Q_j^{nc}
\end{aligned}$$

A esta última ecuación no le hará ningún daño aprovechar encarecidamente de la definición que acompaña a la Ecuación (3.7), diciendo lo siguiente ²¹:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) &= Q_j^{nc} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} &= Q_j^{nc}
\end{aligned}$$

SUBSECTION 8.2

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definition 35

(Lagrangiano) Se define la función \mathcal{L} como el Lagrangiano del sistema, función que para el caso de un sistema conservativo dicta toda la dinámica del sistema al operarlo para cada coordenada generalizada en la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (8.1)$$

²¹ Introducir el término

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

no debe ser un problema, puesto que en un inicio será cero por la limitación de fuerzas conservativas.

No obstante, fuera de la mecánica clásica será común que este término no sea cero en un intento de escribir potenciales para fuerzas que, al menos en el sentido usual, no los poseen. Por ejemplo la fuerza de Lorentz que da lugar a potenciales generalizados $V = V(q_j, \dot{q}_j)$.

Definition 36**(Ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas semi-conservativos)**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (8.2)$$

Al operar esta ecuación sobre el Lagrangiano del sistema y tomando o no las fuerzas disipativas para cada coordenada generalizada, la solución que genera serán s ecuaciones diferenciales de segundo orden que dan las condiciones para que el camino que sigue el sistema en el espacio de configuración sea un valor estacionario para el Principio de Hamilton (Extendido) Ecuación (7.1).

SUBSECTION 8.3

Problemas resueltos

Cálculo Variacional

Problema 1.

Determine las geodésicas de un cono recto de base circular.

$$z = \lambda \rho \Rightarrow dz = \lambda d\rho$$

$$ds^2 = \rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = (1 + \lambda^2) \rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \Rightarrow ds = \sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2} d\phi$$

Primer forma

$$\Rightarrow J = \int_0^{10} ds = \int_0^{10} \sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2} d\phi \Rightarrow f = \sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2} \xrightarrow{\text{No hay dependencia explícita con } \phi} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\rho} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx}$$

$$\text{con } \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\rho} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\rho} + \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} y_x + \frac{df}{dy} y_{xx} = \frac{df}{d\rho} + \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} y_x \right) \Rightarrow 0 = -\frac{df}{d\rho} + \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} y_x \right)$$

$$\Rightarrow 0 = -\cancel{\frac{df}{d\rho}} + \frac{d}{dx} \left(f - \frac{df}{dx} y_x \right) \Rightarrow f - \frac{df}{dx} y_x = \text{constante} \Rightarrow f - \frac{df}{d\rho} \rho_\phi = c_1 \Rightarrow \frac{df}{d\rho} = \frac{(1 + \lambda^2) \rho_\phi}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2} - \frac{(1 + \lambda^2) \rho_\phi^2}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}} = c_1 \Rightarrow \frac{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2 - (1 + \lambda^2) \rho_\phi^2}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}} = c_1 \Rightarrow \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}} = c_1$$

$$\Rightarrow \rho^4 = c_1^2 \rho^2 + c_1^2 (1 + \lambda^2) \rho_\phi^2 \Rightarrow \rho^2 (\rho^2 - c_1^2) = c_1^2 (1 + \lambda^2) \rho_\phi^2 \Rightarrow \frac{d\rho}{d\phi} = \sqrt{\frac{\rho^2 (\rho^2 - c_1^2)}{c_1^2 (1 + \lambda^2)}}$$

$$\Rightarrow \int d\phi = \int \frac{c_1 \sqrt{(1 + \lambda^2)}}{\sqrt{\rho^2 (\rho^2 - c_1^2)}} d\rho \Rightarrow \phi - \phi_0 = c_1 \sqrt{(1 + \lambda^2)} \cos^{-1}\left(\frac{c_1}{\rho}\right)$$

Segunda forma $ds = \sqrt{\rho^2 \dot{\phi}_p^2 + (1 + \lambda^2)} d\rho \Rightarrow f = \sqrt{\rho^2 \dot{\phi}_p^2 + (1 + \lambda^2)} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \frac{df}{d\phi_p} - \cancel{\frac{df}{d\rho}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{df}{d\phi_p} = \frac{\rho^2 \dot{\phi}_p}{\sqrt{\rho^2 \dot{\phi}_p^2 + (1 + \lambda^2)}} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \frac{df}{d\phi_p} = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\phi_p} = \frac{\rho^2 \dot{\phi}_p}{\sqrt{\rho^2 \dot{\phi}_p^2 + (1 + \lambda^2)}} = c_1 \Rightarrow \rho^4 \dot{\phi}_p^2 = c_1^2 \rho^2 \dot{\phi}_p^2 + c_1^2 (1 + \lambda^2)$$

$$\Rightarrow \rho^2 \dot{\phi}_p^2 (\rho^2 - c_1^2) = c_1^2 (1 + \lambda^2) \Rightarrow \dot{\phi}_p = \sqrt{\frac{c_1^2 (1 + \lambda^2)}{\rho^2 (\rho^2 - c_1^2)}} = \frac{d\phi}{d\rho} \Rightarrow \int d\phi = \int \frac{c_1 \sqrt{(1 + \lambda^2)}}{\sqrt{\rho^2 (\rho^2 - c_1^2)}} d\rho$$

$$\Rightarrow \phi - \phi_0 = c_1 \sqrt{(1 + \lambda^2)} \cos^{-1}\left(\frac{c_1}{\rho}\right)$$

Tercera forma $f = \sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \frac{df}{d\phi_p} - \frac{df}{d\rho} = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}}$

$$\Rightarrow \frac{df}{d\phi_p} = \frac{(1 + \lambda^2) \rho_\phi}{\sqrt{\rho^2 + (1 + \lambda^2) \rho^2}} \Rightarrow \frac{d}{d\phi} \frac{df}{d\phi_p} = \text{regla de la cadena}$$

Problema 2. (Thornton 6.7/Taylor 6.4)

- 6-7. Consider light passing from one medium with index of refraction n_1 into another medium with index of refraction n_2 (Figure 6-A). Use Fermat's principle to minimize time, and derive the law of refraction: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Principio de Fermat: La luz recorre el camino que le permite minimizar el tiempo

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow dt = \frac{ds}{v_m}; ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + X_y^2} dy$$

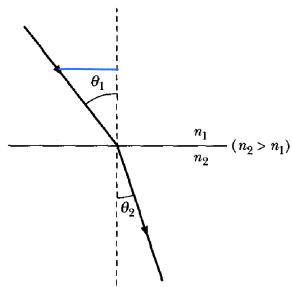


FIGURE 6-A Problem 6-7.

$$\Rightarrow J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + X_y^2}}{v_m} dy \Rightarrow f = \frac{\sqrt{1 + X_y^2}}{v_m} \Rightarrow \frac{d}{dy} \frac{df}{dx} - \cancel{\frac{df}{dx}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \text{constante} = \frac{X_y}{\sqrt{1 + X_y^2}} = \frac{X_y}{V_m \sqrt{1 + X_y^2}} \Rightarrow \frac{X_y}{V_m \sqrt{1 + X_y^2}} = 1; X_y = \tan \theta = \frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{V_m} = 1 = \frac{n \sin \theta}{c} \Rightarrow n \sin \theta = \text{constante} //$$

Problema 3. (Thornton 6.8.a)

- 6-8. Find the dimensions of the parallelepiped of maximum volume circumscribed by

- (a) a sphere of radius R ; (b) an ellipsoid with semiaxes a, b, c .

El paralelepípedo tiene volumen: $V = abc$

$$a) J = \int f(X, Y, Z) dz \Rightarrow \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial q_3} - \frac{\partial f}{\partial q_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_3} = 0 \quad \text{Restricción: } g = a^2 + b^2 + c^2 - 4R^2 = 0$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial V}{\partial q_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_3} = 0 \quad \Rightarrow^* 3a^2 = 4R^2 \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Para } a: - \frac{\partial V}{\partial a} + \lambda \frac{\partial g}{\partial a} = 0 \Rightarrow -bc + \lambda \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{bc}{2\lambda} * \quad \Rightarrow \frac{bc}{2\lambda} = \frac{2\lambda b}{c} \Rightarrow c = 2\lambda *$$

$$\text{Para } b: - \frac{\partial V}{\partial b} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b} = 0 \Rightarrow -ac + \lambda \cdot 2b = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{2\lambda b}{c} ** \quad \Rightarrow \frac{2\lambda b}{c} = \frac{2\lambda c}{b} \Rightarrow b^2 = c^2 *$$

$$\text{Para } c: - \frac{\partial V}{\partial c} + \lambda \frac{\partial g}{\partial c} = 0 \Rightarrow -ab + \lambda \cdot 2c = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{2\lambda c}{b} ** \quad \Rightarrow^* a = 2\lambda$$

$$\Rightarrow a = b = c = 2\lambda^* = \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad y \quad \lambda = \frac{R}{\sqrt{3}} //$$

Problema 4.

Considera el funcional:

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^\pi (2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2) dx.$$

Si $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$ y $z(\pi) = -1$. Determina los extremos de J .

$$J = \int_0^\pi 2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2 dx \Rightarrow f = f(y, z, y_x, z_x) = 2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} = 0$$

$$\text{Para } y: \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} = 0 \quad * \quad \frac{\partial f}{\partial y_x} = 2z - 4y \quad * \quad \frac{\partial f}{\partial z_x} = 2y_x \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 2y_{xx}$$

$$\Rightarrow 2y_{xx} - 2z + 4y = 0 \Rightarrow y_{xx} - z + 2y = 0 *$$

$$\text{Para } z: \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad * \quad \frac{\partial f}{\partial z_x} = -2z_x \quad * \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2y \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z_x} = -2z_{xx}$$

$$\Rightarrow -2z_{xx} - 2y = 0 \Rightarrow z_{xx} + y = 0 *$$

$$\begin{cases} y_{xx} - z + 2y = 0 \\ z_{xx} + y = 0 \end{cases}$$

Problema 5.

Determine los extremos del funcional:

$$Z = X^3 - 2XY^2$$

$$J[z(x, y)] = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

donde:

$$z(x, y) = x^3 - 2xy^2.$$

$$J = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \Rightarrow f(z, z_x, z_y, x, y) = f(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

Problema 6. (Thornton 6.10)

- 6-10. Find the ratio of the radius R to the height H of a right-circular cylinder of fixed volume V that minimizes the surface area A .

$$V = \pi R^2 H \rightarrow A = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R)$$

$$\text{Restricción: } g = V - \pi R^2 H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial R} - \frac{\partial A}{\partial H} + \lambda \frac{\partial g}{\partial H} = 0 \Rightarrow -2\pi R - 2\pi R^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial H} - \frac{\partial A}{\partial R} + \lambda \frac{\partial g}{\partial R} = 0 \Rightarrow -2\pi(H+R) - 2\pi R - \lambda \cdot 2\pi R H = 0 \Rightarrow H+R + R + \lambda RH = 0$$

$$\Rightarrow H + 2R + \lambda RH = 0 \Rightarrow H + 2R - 2H = 0 \Rightarrow -H + 2R = 0 \Rightarrow R = \frac{H}{2}$$

Problema 7. (Thornton 6.11)

- 6-11. A disk of radius R rolls without slipping inside the parabola $y = ax^2$. Find the equation of constraint. Express the condition that allows the disk to roll so that it contacts the parabola at one and only one point, independent of its position.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx \Rightarrow \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = R d\theta$$

$$\text{Radio de curvatura: } r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \Rightarrow r = \frac{(1 + 4a^2 x^2)^{3/2}}{2a}$$

Para que el disco toque la parábola en un único punto, $r > R$, para que el disco no toque ambos lados de la parábola

$$\text{Radio mínimo de la parábola} \Rightarrow r = \frac{1}{2a} \Rightarrow R < \frac{1}{2a}$$

↑
En el vértice

Problema 8.

Para $dy/dx \equiv y_x \neq 0$, muestre la equivalencia de las dos formas de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

$$f = f(y, y_x, x)$$

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx ; \quad y(x_1, \alpha) = y(x_1, 0) + \alpha \eta(x)$$

$$\Rightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial x} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta_x \right] dx ; \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta_x dx = \eta \frac{\partial f}{\partial y_x} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} dx$$

$$\Rightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta - \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \eta dx$$

Para $f = f(y, y_x, x)$, se define

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{dy_x}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} y_x \right) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(f - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_x \right) - \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0$$

Problema 9. (Taylor 6.18)

6.18 ** Show that the shortest path between two given points in a plane is a straight line, using plane polar coordinates.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + r^2 \phi_r^2} dr \Rightarrow J = \int_A^B ds = \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{1 + r^2 \phi_r^2} dr \Rightarrow f = \sqrt{1 + r^2 \phi_r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \frac{df}{d\phi_r} - \cancel{\frac{d^2f}{d\phi^2}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \frac{df}{d\phi_r} = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\phi_r} = \text{constante} = c_1 \Rightarrow \frac{r^2 \phi_r}{\sqrt{1 + r^2 \phi_r^2}} = c_1$$

$$\Rightarrow r^4 \phi_r^2 = c_1^2 + c_1^2 r^2 \phi_r^2 \Rightarrow r^2 \phi_r^2 (r^2 - c_1^2) = c_1^2 \Rightarrow \phi_r = \frac{d\phi}{dr} = \frac{c_1}{r \sqrt{r^2 - c_1^2}} \Rightarrow \int d\phi = \int \frac{c_1}{r \sqrt{r^2 - c_1^2}} dr$$

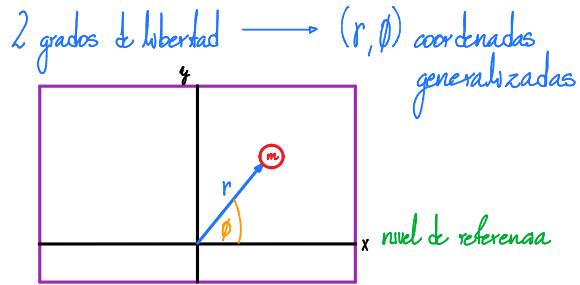
$$\Rightarrow \phi - \phi_0 = c_1 \cos^{-1}\left(\frac{r}{r_0}\right) \Rightarrow r \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{c_1}\right) = r_0$$

Mecánica Lagrangiana

Problema 1. (Thornton 7.5)

7-5. Consider a vertical plane in a constant gravitational field. Let the origin of a coordinate system be located at some point in this plane. A particle of mass m moves in the vertical plane under the influence of gravity and under the influence of an additional force $f = -Ar^{\alpha-1}$ directed toward the origin (r is the distance from the origin; A and α [$\neq 0$ or 1] are constants). Choose appropriate generalized coordinates, and find the Lagrangian equations of motion. Is the angular momentum about the origin conserved? Explain.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad y \quad U = mg r \sin\theta + U_f$$



$$\text{Considerando } f \text{ como conservativa} \Rightarrow U_f = -\int_0^r -Ar^{\alpha-1} dr = \frac{1}{\alpha} r^\alpha$$

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{\alpha}r^\alpha - mg r \sin\theta \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\text{Para } r : \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} * \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{1}{2}m2r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{\alpha}\alpha r^{\alpha-1} - mg \sin\theta \\ * \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2}m2\dot{r} = m\ddot{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{\alpha-1} + mg \sin\theta = 0$$

$$\text{Para } \theta : \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

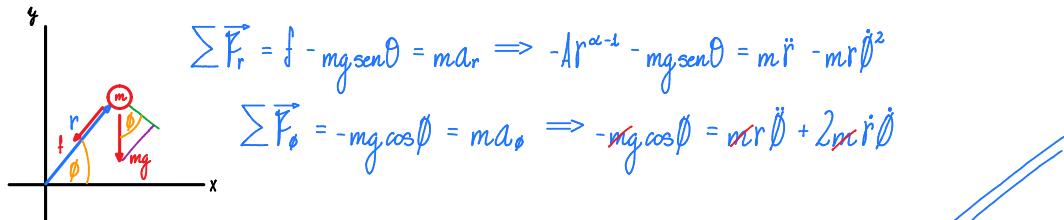
$$\left. \begin{aligned} * \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg r \cos\theta \\ * \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m r^2 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mg r \cos\theta = 0$$

El torque neto no es cero, hay torque por la gravedad

Momento angular

Es igual al torque neto \therefore El momento angular no se conserva //

Por Newton



Problema 2. (Taylor 7.17)

7.17★ Use the Lagrangian method to find the acceleration of the Atwood machine of Example 7.3 (page 255) including the effect of the pulley's having moment of inertia I . (The kinetic energy of the pulley is $\frac{1}{2}I\omega^2$, where ω is its angular velocity.)

Hay un grado de libertad $\rightarrow (y)$ coordenada generalizada ;

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2 + I_p \dot{\theta}^2); \quad \dot{\theta} = R \dot{\phi} \quad l = -y_1 - y_2 + \pi R \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{\dot{y}_1^2}{R^2} + m_2 \frac{\dot{y}_2^2}{R^2} + I_p \frac{\dot{\theta}^2}{R^2} \right)$$

$$\Rightarrow U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \Rightarrow U = (m_1 - m_2) g y_1 - m_2 g l + m_2 g \pi R$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{\dot{y}_1^2}{R^2} + m_2 \frac{\dot{y}_2^2}{R^2} + I_p \frac{\dot{\theta}^2}{R^2} \right) - (m_1 - m_2) g y_1 + m_2 g l - m_2 g \pi R$$

Figure 7.6 An Atwood machine consisting of two masses, m_1 and m_2 , suspended by a massless inextensible string that passes over a massless, frictionless pulley of radius R . Because the string's length is fixed, the position of the whole system can be specified by a single variable, which we can take to be the distance x .

$$*\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = -(m_1 - m_2) g$$

$$*\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = \left(m_1 \frac{\dot{y}_1^2}{R^2} + m_2 \frac{\dot{y}_2^2}{R^2} + I_p \frac{\dot{\theta}^2}{R^2} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2} \right) \ddot{y}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2} \right) \ddot{y}_1 + (m_1 - m_2) g = 0$$

Problema 3. (Taylor 7.20)

7.20 * A smooth wire is bent into the shape of a helix, with cylindrical polar coordinates $\rho = R$ and $z = \lambda\phi$, where R and λ are constants and the z axis is vertically up (and gravity vertically down). Using z as your generalized coordinate, write down the Lagrangian for a bead of mass m threaded on the wire. Find the Lagrange equation and hence the bead's vertical acceleration \ddot{z} . In the limit that $R \rightarrow 0$, what is \ddot{z} ? Does this make sense?

$$\vec{V} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$z = \lambda\phi \implies \dot{z} = \lambda\dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad \text{y} \quad U = mgz$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2}{\lambda^2}\dot{z}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = \frac{m\dot{z}^2(R^2 + \lambda^2)}{2\lambda^2} + mgz \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$* \frac{\partial L}{\partial z} = mg$$

$$* \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \cancel{2} \frac{m\dot{z}(R^2 + \lambda^2)}{2\lambda^2} = \frac{m\dot{z}(R^2 + \lambda^2)}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{m\ddot{z}(R^2 + \lambda^2)}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \cancel{m\ddot{z}(R^2 + \lambda^2)} - \cancel{mg} = 0$$

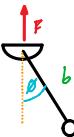
$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{mg}{R^2 + \lambda^2} //$$

Problema 4. (Thornton 7.14)

- 7-14. A simple pendulum of length b and bob with mass m is attached to a massless support moving vertically upward with constant acceleration a . Determine (a) the equations of motion and (b) the period for small oscillations.

a) 1 grado de libertad $\rightarrow (\theta)$ coordenadas generalizada

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad y \quad U = mg\dot{y}$$



$$x = b \sin \theta$$

$$y = \frac{at^2}{2} - b \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m[b^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (at - b \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2] = \frac{1}{2}m(b^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 - 2ab \sin \theta \cdot \dot{\theta} t + b^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 - 2ab \sin \theta \cdot \dot{\theta} t)$$

$$\Rightarrow U = mg\left(\frac{at^2}{2} - b \cos \theta\right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 - 2ab \sin \theta \cdot \dot{\theta} t) - mg\left(\frac{at^2}{2} - b \cos \theta\right)$$

$$* \frac{\partial L}{\partial \theta} = \cancel{\frac{1}{2}m \cdot 2ab \cos \theta \cdot \dot{\theta} t} - mg b \sin \theta$$

$$* \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \cancel{\frac{1}{2}m(b^2 \dot{\theta} - 2ab \sin \theta t)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2 \ddot{\theta} - ab \cos \theta \cdot \dot{\theta} t - ab \sin \theta$$

$$\Rightarrow mb^2 \ddot{\theta} - ab \cos \theta \cdot \dot{\theta} t - ab \sin \theta + mb \cos \theta \cdot \dot{\theta} t + mg \sin \theta = 0$$

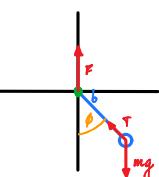
$$\Rightarrow b \ddot{\theta} + a \sin \theta + g \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{a+g \sin \theta}{b} = 0$$

$$b) \text{Oscilaciones pequeñas } \sin \theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{a+g}{b} \theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{a+g}{b}$$

Por Newton

$$\sum \vec{F} = -b m(a+g) \sin \theta \Rightarrow mb^2 \ddot{\theta} = -b m(a+g) \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{a+g}{b} \sin \theta = 0 //$$

$$\sum F_y = T - mg = ma \Rightarrow T = m(a+g) \leftarrow \text{Peso aparente}$$



Problema 5. (Taylor 7.23)

7.23* A small cart (mass m) is mounted on rails inside a large cart. The two are attached by a spring (force constant k) in such a way that the small cart is in equilibrium at the midpoint of the large. The distance of the small cart from its equilibrium is denoted x and that of the large one from a fixed point on the ground is X , as shown in Figure 7.13. The large cart is now forced to oscillate such that $X = A \cos \omega t$, with both A and ω fixed. Set up the Lagrangian for the motion of the small cart and show that the Lagrange equation has the form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t$$

where ω_0 is the natural frequency $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ and B is a constant. This is the form assumed in Section 5.5, Equation (5.57), for driven oscillations (except that we are here ignoring damping). Thus the system described here would be one way to realize the motion discussed there. (We could fill the large cart with molasses to provide some damping.)

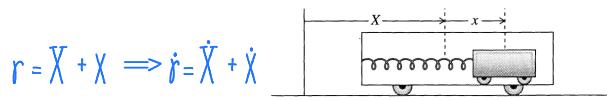


Figure 7.13 Problem 7.23

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{X})^2 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{2} K X^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{X})^2 - \frac{1}{2} K X^2 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$* \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} K X = -K X$$

$$* \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} m 2(\dot{x} + \dot{X}) = m(\dot{x} + \dot{X}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\ddot{x} + \ddot{X}) \Rightarrow m(\ddot{x} + \ddot{X}) + K X = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 //$$

Problema 6. (Taylor 7.29)

7.29** Figure 7.14 shows a simple pendulum (mass m , length l) whose point of support P is attached to the edge of a wheel (center O , radius R) that is forced to rotate at a fixed angular velocity ω . At $t = 0$, the point P is level with O on the right. Write down the Lagrangian and find the equation of motion for the angle ϕ . [Hint: Be careful writing down the kinetic energy T . A safe way to get the velocity right is to write down the position of the bob at time t , and then differentiate.] Check that your answer makes sense in the special case that $\omega = 0$.

$$\vec{r} = (R \cos \theta + l \cos \phi) \hat{e}_x + (R \sin \theta - l \sin \phi) \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = (-R \sin \theta \cdot \dot{\theta} + l \cos \phi \cdot \dot{\phi}) \hat{e}_x + (R \cos \theta \cdot \dot{\theta} + l \sin \phi \cdot \dot{\phi}) \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = (-R \sin \theta \cdot \dot{\theta} + l \cos \phi \cdot \dot{\phi})^2 + (R \cos \theta \cdot \dot{\theta} + l \sin \phi \cdot \dot{\phi})^2 \quad \text{y} \quad U = mg \hat{y} = mg(R \sin \theta - l \cos \phi)$$

$$= R^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 - 2Rl \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi + l^2 \cos^2 \phi \cdot \dot{\phi}^2 + R^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2Rl \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + l^2 \sin^2 \phi \cdot \dot{\phi}^2$$

$$= R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\phi}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\phi}^2) - mg(R \sin \theta - l \cos \phi) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{Para } \theta: * \frac{dL}{d\theta} = -mgR \cos \theta \quad * \frac{dL}{d\dot{\theta}} = \frac{1}{2} m 2R^2 \dot{\theta} = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \ddot{\theta} \Rightarrow mR^2 \ddot{\theta} + mgR \cos \theta = 0$$

$$\text{Para } \phi: * \frac{dL}{d\phi} = -mgl \sin \theta \quad * \frac{dL}{d\dot{\phi}} = \frac{1}{2} m 2l^2 \dot{\phi} = ml^2 \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \ddot{\phi} \Rightarrow ml^2 \ddot{\phi} + mgl \sin \theta = 0 //$$

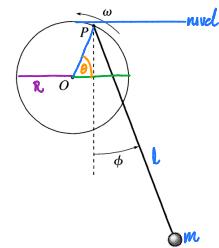


Figure 7.14 Problem 7.29

Mecánica Lagrangiana con Multiplicadores de Lagrange

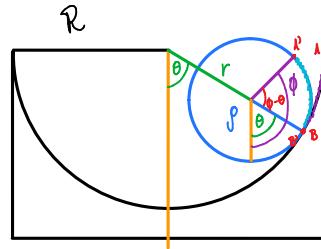
Problema 1. (Thornton 7.3)

7-3. A sphere of radius ρ is constrained to roll without slipping on the lower half of the inner surface of a hollow cylinder of inside radius R . Determine the Lagrangian function, the equation of constraint, and Lagrange's equations of motion. Find the frequency of small oscillations.

$$\vec{r} = (R - \rho) \hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = (\dot{R} - \dot{\rho}) \hat{e}_r + (R - \rho) \dot{\theta} \hat{e}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = (\dot{R} - \dot{\rho})^2 + (R - \rho)^2 \dot{\theta}^2$$

$$I = \frac{2}{5} m \rho^2$$



$$\text{Restricciones: } g_1: R\dot{\theta} - \dot{\rho}(\phi - \theta) = 0 \quad y \quad g_2: r - (R - \rho) = 0$$

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow R\dot{\theta} = \dot{\rho}(\phi - \theta)$$

$$\text{Energía cinética: } T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \quad \text{Energía potencial: } U = mg\dot{\theta} = mg(R - r \cos \theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\phi}^2 - mg(R - r \cos \theta) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial q_i} = 0 \text{ con } q_i = r, \theta, \phi$$

$$\text{Para } \phi: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \phi}} + \lambda_1 \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial \phi}} + \lambda_2 \cancel{\frac{\partial g_2}{\partial \phi}} = 0$$

$$* \cancel{\frac{\partial L}{\partial \phi}} = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{1}{5}} m \rho^2 \dot{\phi} = \frac{1}{5} m \rho^2 \dot{\phi} \Rightarrow \frac{1}{5} m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) \quad * \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial \phi}} = -\rho \xrightarrow{\text{aceleración rotacional}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) - \lambda_2 \rho = 0 \xrightarrow{\substack{\text{Aplicando} \\ \text{restricciones}}} \frac{1}{5} m \rho \cancel{\frac{d}{dt} \dot{\phi}} - \lambda_2 \rho = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{5} m \rho \ddot{\phi} = \cancel{-m \frac{\ddot{\phi}(R + \rho)}{5\rho}} = -\frac{m \ddot{\phi}(R + \rho)}{5\rho}$$

$$\text{Para } r: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial r}} + \lambda_1 \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial r}} + \lambda_2 \cancel{\frac{\partial g_2}{\partial r}} = 0$$

$$* \cancel{\frac{\partial L}{\partial r}} = \cancel{\frac{1}{2}} m \cdot 2r \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad * \frac{\partial g_2}{\partial r} = 1 \quad * \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{\frac{d}{dt} \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \xrightarrow{\text{aceleración radial}}$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - mr \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda_2 = 0 \xrightarrow{\substack{\text{Aplicando} \\ \text{restricciones}}} \cancel{m \ddot{r}} - mr \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = mr \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

$$\text{Para } \theta: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}} + \lambda_1 \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial \theta}} + \lambda_2 \cancel{\frac{\partial g_2}{\partial \theta}} = 0$$

$$* \cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = -mg r \sin \theta \quad * \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial \theta}} = R + \rho \quad * \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}} = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2r^2 \dot{\theta}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr \dot{r} \dot{\theta} + mr^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow 2mr \dot{r} \dot{\theta} + mr^2 \ddot{\theta} + r \sin \theta + \lambda_1 (R + \rho) = 0 \xrightarrow{\substack{\text{Aplicando} \\ \text{restricciones}}} \cancel{2mr \dot{r} \dot{\theta}} + mr^2 \ddot{\theta} + r \sin \theta + \lambda_1 (R + \rho) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{m(R + \rho) \ddot{\theta}} + \cancel{mg(R + \rho) \sin \theta} + \lambda_1 (R + \rho) = 0 \Rightarrow (R + \rho) \ddot{\theta} + g \sin \theta + \frac{\lambda_1}{m} = 0 \quad \text{Algebra y reemplazar.}$$

Problema 2. (Thorton 7.34)

7-34. A particle of mass m slides down a smooth circular wedge of mass M as shown in Figure 7-C. The wedge rests on a smooth horizontal table. Find (a) the equation of motion of m and M and (b) the reaction of the wedge on m .

$$a) \quad g: r - R = 0 \Rightarrow \dot{r} = \dot{r} + r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

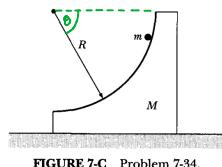


FIGURE 7-C Problem 7-34.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgsen\theta \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\text{Para } r: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = 0 \quad * \frac{\partial g}{\partial r} = 1$$

$$* \cancel{\frac{\partial L}{\partial r}} = \cancel{\frac{1}{2}m2r\dot{\theta}^2} + mgsen\theta = mr\dot{\theta}^2 + mgsen\theta \quad * \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} = \cancel{\frac{1}{2}m2\dot{r}} = m\ddot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} = m\ddot{r}$$

$$\text{Para } \theta: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \quad * \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$



$$* \cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = +mgsr\cos\theta \quad * \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}} = \cancel{\frac{1}{2}m2r^2\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mgsen\theta + \lambda = 0 \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgsr\cos\theta = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Assumiendo que este del reposo en } \theta=0} \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 - mgsen\theta + \lambda = 0 \\ mR\ddot{\theta} - mgsr\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -mR\dot{\theta}^2 - mgsen\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$H = T + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgsr\cos\theta = -mgsr\cos\theta \Rightarrow R\ddot{\theta}^2 - 2g\sin\theta = -2g\sin\theta \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g(\sin\theta - \sin\theta_0)}{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -mR\frac{2g(\sin\theta - \sin\theta_0)}{R} - mgsen\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2mg(\sin\theta - \sin\theta_0) - mgsen\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases} //$$

- 7-37. Use the method of Lagrange undetermined multipliers to find the tensions in both strings of the double Atwood machine of Example 7.8.

Restricciones: $g_1: \dot{x}_1 + \dot{y} - \dot{b}_1 = 0$ $g_2: \dot{x}_3 + \dot{x}_2 - 2\dot{y} - \dot{b}_2 = 0$

$$\Rightarrow g: 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \underbrace{(2\dot{b}_1 + \dot{b}_2)}_{c} = 0 \Rightarrow 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) \quad \text{y} \quad U = -g(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2) + g(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i} = 0 \quad \text{con} \quad q_i = x_1, x_2, x_3$$

Para \dot{x}_1 : $\frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1g \quad * \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2$$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_1} = \cancel{\frac{1}{2}}m_1\dot{x}_1 = m_1\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1$$

Para \dot{x}_2 : $\frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_2} = m_2g \quad * \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1$$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_2} = \cancel{\frac{1}{2}}m_2\dot{x}_2 = m_2\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2$$

Para \dot{x}_3 : $\frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_3} = m_3g \quad * \frac{\partial g}{\partial x_3} = 1$$

$$*\frac{\partial L}{\partial x_3} = \cancel{\frac{1}{2}}m_3\dot{x}_3 = m_3\dot{x}_3 \Rightarrow \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial t}}{\partial \dot{x}_3} = m_3\ddot{x}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 - m_1g + 2\lambda = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - m_2g + \lambda = 0 \quad ; \quad 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - m_3g + \lambda = 0 \quad 4 \text{ ecuaciones, } 4 \text{ variables} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \dot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 & \lambda & \\ m_1 & 0 & 0 & 2 & m_1g \\ 0 & m_2 & 0 & 1 & m_2g \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & m_3g \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[m_1 = \lambda_{11}]{f_1 \rightarrow \frac{1}{m_1}f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

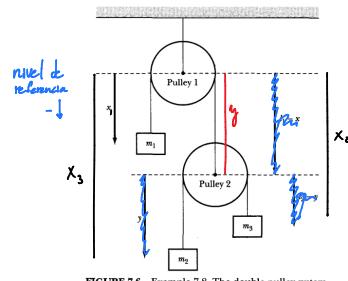


FIGURE 7-6 Example 7.8. The double pulley system.

Recuperando lo anterior

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 \rightarrow f_4 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} & -g - \frac{f_1}{2} - \frac{f_2}{2} \end{array} \right)$$

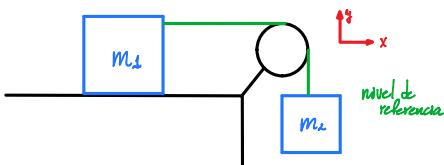
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} & -2g \end{array} \right) \xrightarrow{f_4 \rightarrow \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 - \frac{2}{m_1} f_4 \\ f_2 \rightarrow f_2 - \frac{1}{m_2} f_4 \\ f_3 \rightarrow f_3 - \frac{1}{m_3} f_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & g + \frac{2}{m_1} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g + \frac{1}{m_2} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g + \frac{1}{m_3} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = g + \frac{2}{m_1} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ \ddot{x}_2 = g + \frac{1}{m_2} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ \ddot{x}_3 = g + \frac{1}{m_3} 2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \\ \lambda = -2g \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} \right)^{-1} \end{cases}$$

Problema 4. (Taylor 7.50)

7.50* A mass m_1 rests on a frictionless horizontal table. Attached to it is a string which runs horizontally to the edge of the table, where it passes over a frictionless, small pulley and down to where it supports a mass m_2 . Use as coordinates x and y the distances of m_1 and m_2 from the pulley. These satisfy the constraint equation $f(x, y) = x + y = \text{const}$. Write down the two modified Lagrange equations and solve them (together with the constraint equation) for \ddot{x} , \ddot{y} , and the Lagrange multiplier λ . Use (7.122) (and the corresponding equation in y) to find the tension forces on the two masses. Verify your answers by solving the problem by the elementary Newtonian approach.



$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - m_2g\dot{y} \quad g: \dot{x} + \dot{y} - c = 0 \rightarrow \lambda \Rightarrow \dot{x} + \dot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

Hay que operar: $\frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i} = 0$ con $q_1 = x, q_2 = y$

Para X :

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial X} = 1, \quad , \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m_1\dot{X} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m_1\ddot{X} \Rightarrow m_1\ddot{X} + \lambda = 0$$

Para y :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m_2g, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad , \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2\dot{y} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2\ddot{y} \Rightarrow m_2\ddot{y} + m_2g + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \\ m_1\ddot{X} + \lambda = 0 \\ m_2\ddot{y} + m_2g + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-m_1m_2g}{m_1 + m_2} \\ \ddot{X} = \frac{m_2g}{m_1 + m_2} \\ \ddot{y} = \frac{-m_2g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Problemas varios

Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizamiento hacia abajo en un plano inclinado con un ángulo α respecto a la horizontal. En su eje, el disco tiene una varilla de diámetro, largo y masa despreciables. De la varilla está suspendido un péndulo simple de largo $l < R$ y que tiene una masa m en su extremo. Consideré que el movimiento del péndulo toma lugar en el plano del disco y halle las ecuaciones de Lagrange para el sistema.

Sugerencias: La inercia rotacional del disco es $MR^2/2$; se puede usar la relación $\xi = R\theta$, con θ el ángulo con el que rota el disco sobre el plano inclinado.

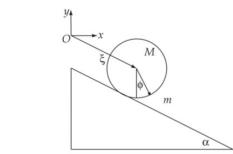
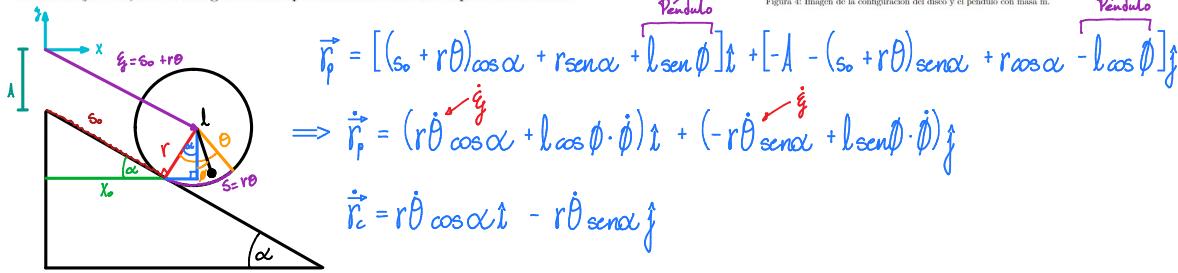


Figura 4: Imagen de la configuración del disco y el péndulo con masa m .

Péndulo:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{r}_p^2 &= r^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\phi + l^2\cos^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\alpha - 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\phi + l^2\sin^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 \\ &= r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi) \\ \Rightarrow T_p &= \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi)] \\ \Rightarrow U_p &= mg\frac{q}{\phi} = mg[-l - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi] \end{aligned}$$

Cilindro:

$$\Rightarrow \dot{r}_c^2 = r^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\alpha = r^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{Mr^2}{4}\dot{\theta}^2 = \frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow U_c = Mg\frac{q}{\theta} = Mg[-l - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha]$$

Sistema:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi)] + \frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta}^2 - mg[-l - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi] + \dots \\ &\quad - Mg[-l - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\alpha + \phi)] + \frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta}^2 - mg[-A - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi] + \dots - Mg[-A - (s_0 + r\theta)\sin\alpha + r\cos\alpha]$$

Las coordenadas generalizadas son $\theta, \phi \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Para ϕ :

$$*\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{2}m[2rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\alpha + \phi) - mglsen\phi] = -mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\alpha + \phi) - mglsen\phi$$

$$*\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2}m[2l^2\dot{\phi} + 2rl\dot{\theta}\cos(\alpha + \phi)] = ml^2\dot{\phi} + mrl\dot{\theta}\cos(\alpha + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} + mrl\ddot{\theta}\cos(\alpha + \phi) - mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\alpha + \phi)$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\phi} + mrl\ddot{\theta}\cos(\alpha + \phi) - \cancel{mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\alpha + \phi)} + \cancel{mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\alpha + \phi)} + mglsen\phi = 0$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\phi} + mrl\ddot{\theta}\cos(\alpha + \phi) + mglsen\phi = 0$$

$$\Rightarrow l\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}\cos(\alpha + \phi) + gsen\phi = 0 //$$

Para θ :

$$*\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg[-r\sin\alpha] - Mg[-r\sin\alpha] = gr\sin\alpha(M + m)$$

$$*\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m[2r^2\dot{\theta} + 2rl\dot{\phi}\cos(\alpha + \phi)] + 2 \cdot \frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta} = m[r^2\dot{\theta} + rl\dot{\phi}\cos(\alpha + \phi)] + \frac{3Mr^2\dot{\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m[r^2\ddot{\theta} + rl\ddot{\phi}\cos(\alpha + \phi) - rl\dot{\phi}^2\sin(\alpha + \phi)] + \frac{3Mr^2\ddot{\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow m[r^2\ddot{\theta} + rl\ddot{\phi}\cos(\alpha + \phi) - rl\dot{\phi}^2\sin(\alpha + \phi)] + \frac{3Mr^2\ddot{\theta}}{2} - gr\sin\alpha(M + m) = 0$$

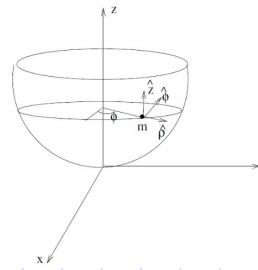
$$\Rightarrow m[r\ddot{\theta} + l\ddot{\phi}\cos(\alpha + \phi) - l\dot{\phi}^2\sin(\alpha + \phi)] + \frac{3Mr\ddot{\theta}}{2} - g\sin\alpha(M + m) = 0 //$$

Considere una partícula de masa m moviéndose sin fricción en un parabolóide dado por $x^2 + y^2 = az$, y cuya restricción por tanto se puede escribir como $2\rho\dot{\rho} - a\dot{z} = 0$.

Sea ϕ el ángulo que forma el vector posición con el eje x , ρ la distancia al eje z y z la coordenada vertical:

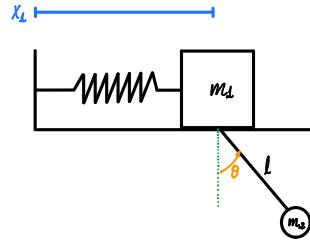
a) Encuentre el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento en términos del multiplicador de lagrange asociado a la restricción.

b) Considerando el caso de que la masa se mueve en un círculo horizontal de altura $z = h$, encuentre la velocidad angular $\dot{\phi}$ en términos de constantes conocidas.



El bloque m_1 está sobre una superficie sin fricción y conectado a un resorte ideal de constante de elasticidad K . Además está conectado a otro bloque de masa m_2 por medio de una cuerda ideal de largo l .

Determine ecuaciones del movimiento y simplifique a oscilaciones pequeñas



$$\vec{r}_1 = X \hat{e}_x \quad y \quad \vec{r}_2 = (X + r \sin \theta) \hat{e}_x - r \cos \theta \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{X} \hat{e}_x \quad y \quad \dot{\vec{r}}_2 = (\dot{X} + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}) \hat{e}_x + r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1^2 = \dot{X}^2 \quad y \quad \dot{\vec{r}}_2^2 = (\dot{X} + r \cos \theta \cdot \dot{\theta})^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} K X^2 + m_2 g r \cos \theta \quad \frac{dL}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$\text{Para } X: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 0$$

$$* \frac{\partial L}{\partial X} = -\frac{1}{2} K X = -K X$$

$$* \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{1}{2} m_1 \cancel{2\dot{X}} + \frac{1}{2} m_2 (\cancel{2\dot{X}} + \cancel{2\dot{\theta}r \cos \theta}) = m_1 \dot{X} + m_2 \dot{X} + m_2 \dot{\theta} r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m_1 \ddot{X} + m_2 \ddot{X} + m_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = (m_1 + m_2) \ddot{X} + m_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{X} + m_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + K X = 0$$

Para θ :

$$* \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 \dot{X} \dot{\theta} \sin \theta - m_2 g r \sin \theta$$

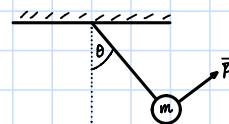
$$* \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m_2 (\cancel{2\dot{X}r \cos \theta} + \cancel{2r^2 \dot{\theta}}) = m_2 (\dot{X} r \cos \theta + r^2 \dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 (\ddot{X} r \cos \theta - \dot{X} \dot{\theta} \sin \theta + r^2 \ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow m_2 (\dot{X} r \cos \theta - \cancel{\dot{X} \dot{\theta} \sin \theta} + r^2 \ddot{\theta}) + m_2 \dot{X} \dot{\theta} \sin \theta + m_2 g r \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow m_2 (\dot{X} r \cos \theta + r^2 \ddot{\theta}) + m_2 g r \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{X} + m_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + K X = 0 \\ \dot{X} r \cos \theta + r^2 \ddot{\theta} + g r \sin \theta = 0 \end{cases}$$



Se muestra un péndulo simple, que además se le aplica una fuerza $\vec{F} = F \hat{e}_\theta$, donde \hat{e}_θ es el vector unitario en la dirección tangencial.



- Plantee el lagrangeano del sistema
- Determine las fuerzas generalizadas de la configuración
- ¿Cuáles son las ecuación(es) de movimiento del sistema?

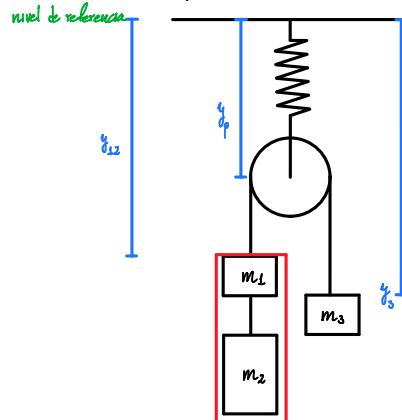
El sistema que se muestra está formado por 2 masas $m_1 + m_2 > m_3$, además de una polea ideal, de masa M , radio R y momento de inercia $J = \frac{1}{2}MR^2$. El centro de la polea y el techo están conectados por medio de un resorte ideal, con una constante de elasticidad K y una longitud sin deformación δ_0 . Considera que el resorte solo se puede mover verticalmente, que la cuerda es ideal, sin que exista fricción entre ella y la polea. En el inicio m_1 y m_3 están a la misma altura con respecto al techo, el resorte está sin deformar y el sistema se suelta desde el reposo.

$$\text{Restricciones: } q_1: \dot{q}_{12} + \dot{q}_3 - 2\dot{\phi} = 0 \quad y \quad q_2: \dot{q}_{12} - R\dot{\phi} = 0$$

$$m_1 + m_2: T_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_{12}^2 \quad y \quad U_{12} = (m_1 + m_2)g\dot{q}_{12}$$

$$M: T_p = \frac{1}{2}M\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \quad y \quad U_p = Mg\dot{\phi} + \frac{1}{2}K\dot{q}_p^2$$

$$m_3: T_3 = \frac{1}{2}m_3\dot{q}_3^2 \quad y \quad U_3 = m_3g\dot{q}_3$$



$$\Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_{12}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{q}_3^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\phi}^2 - (m_1 + m_2)g\dot{q}_{12} - Mg\dot{\phi} - \frac{1}{2}K\dot{q}_p^2 - m_3g\dot{q}_3$$

$$\text{Hay que operar: } \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} + \lambda_1 \frac{dL}{dq_1} + \lambda_2 \frac{dL}{dq_2} = 0 \quad \text{para } q = \dot{q}_{12}, \dot{q}_p, \dot{q}_3 \text{ y } \dot{\phi}$$

$$\text{Para } m_1 + m_2: * \frac{dL}{dq_{12}} = (m_1 + m_2)g * \frac{dL}{dq_1} = 1 * \frac{dL}{dq_2} = 1 * \frac{dL}{dq_{12}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) * \cancel{\frac{dL}{dq_{12}}} = (m_1 + m_2) \cancel{\frac{dL}{dq_{12}}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_{12}} = (m_1 + m_2) \ddot{q}_{12}$$

$$\text{Para } \dot{q}_p: * \frac{dL}{dq_p} = -Mg - \cancel{\frac{1}{2}K\dot{q}_p} = -mg - K\dot{q}_p * \frac{dL}{dq_p} = -2 * \frac{dL}{dq_p} = 0 * \frac{dL}{dq_p} = \frac{1}{2}M\dot{\phi} = M\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_p} = M\ddot{\phi}$$

$$\text{Para } \dot{\phi}: * \frac{dL}{d\dot{\phi}} = 0 * \frac{dL}{d\dot{\phi}} = 0 * \frac{dL}{d\dot{\phi}} = -R * \frac{dL}{d\dot{\phi}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\phi}} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\phi}$$

$$\text{Para } \dot{q}_3: * \frac{dL}{dq_3} = -m_3g * \frac{dL}{dq_3} = 1 * \frac{dL}{dq_3} = 0 * \frac{dL}{dq_3} = \frac{1}{2}m_3\dot{q}_3^2 = m_3\ddot{q}_3 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_3} = m_3\ddot{q}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_{12} + (m_1 + m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{\phi} + Mg + K\dot{q}_p - 2\lambda_1 = 0 \\ MR^2\ddot{\phi} + 2 - R\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{q}_3 + m_3g + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_{12} + (m_1 + m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{\phi} + Mg + K\dot{q}_p - 2\lambda_1 = 0 \\ MR^2\ddot{\phi} - 2R\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{q}_3 + m_3g + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\ddot{\theta}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{\theta}_p + Mg + K\dot{\theta}_p - 2\lambda_1 = 0 \\ M\cancel{\dot{\theta}} - 2\cancel{R}\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{\theta}_3 + m_3g + \lambda_1 = 0 \end{array} \right. ; \Rightarrow \ddot{\theta}_{12} + \ddot{\theta}_3 - 2\ddot{\theta}_p = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\ddot{\theta}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{\theta}_p + Mg + K\dot{\theta}_p - 2\lambda_1 = 0 \\ M\ddot{\theta}_{12} - 2\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{\theta}_3 + m_3g + \lambda_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1+m_2)\ddot{\theta}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{\theta}_p + Mg + K\dot{\theta}_p - 2\lambda_1 = 0 \\ M\ddot{\theta}_{12} - 2\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{\theta}_3 + m_3g + \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{Pasando a forma matricial}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \ddot{\theta}_{12} & \ddot{\theta}_p & \ddot{\theta}_3 & \lambda_1 & \lambda_2 & \\ \hline (m_1+m_2) & 0 & 0 & 1 & 1 & -(m_1+m_2)g \\ M & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - K\dot{\theta}_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3g \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_1 \rightarrow \frac{1}{m_1+m_2}f_1 \\ f_2 \leftrightarrow f_3 \\ f_3 \leftrightarrow f_4 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - K\dot{\theta}_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3g \\ M & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} f_4 \rightarrow f_4 - Mf_1 \\ f_5 \rightarrow f_5 - f_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - K\dot{\theta}_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3g \\ 0 & 0 & 0 & -2 - \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & Mg \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & g \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - K_{dp}^y \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -mg \\ 0 & 0 & 0 & -2 - \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & Mg \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & g \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_2 \rightarrow \frac{1}{M} f_2 \\ f_3 \rightarrow \frac{1}{m_3} f_3 \\ f_5 \rightarrow \frac{1}{2} f_5 \end{array}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{M} & 0 & -\frac{M-K_y^2}{Mm} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & -2 - \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & Mg \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & -\frac{g}{2} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{M} & 0 & -\frac{M-K_y^2}{Mm} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2(m_1+m_2)-M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & Mg \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & -\frac{g}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_4 \rightarrow \frac{m_1+m_2}{-2(m_1+m_2)-M} f_4 \\ f_5 \rightarrow f_5 - f_2 \\ f_6 \rightarrow f_6 + \frac{1}{2} f_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{M} & 0 & -\frac{M-K_y^2}{Mm} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} + \frac{2}{M} - \frac{1}{2m_3} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & -g + \frac{M+K_y^2}{Mm} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{M} & 0 & -\frac{M-K_y^2}{Mm} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} & -g + \frac{M+K_y^2}{Mm} \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 - \frac{1}{m_1+m_2} f_4 \\ f_2 \rightarrow f_2 + \frac{2}{M} f_4 \\ f_3 \rightarrow f_3 - \frac{1}{m_3} f_4 \\ f_5 \rightarrow f_5 - \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} f_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{M} & 0 & -\frac{M-K_y^2}{Mm} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} & -g + \frac{M+K_y^2}{Mm} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} - \frac{1}{m_1+m_2} \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cancel{\frac{2}{M} - \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M}} & -\frac{M-K_y^2}{Mm} + \cancel{\frac{2}{M} \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m_3} \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g - \frac{1}{m_3} \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{M}{m_1+m_2} - \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} & -g + \frac{M+K_y^2}{Mm} - \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} - \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \end{array} \right)$$

Recuperando la matriz y simplificando

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_1+m_2} - \frac{1}{m_1+m_2} - \frac{-M}{2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2(m_1+m_2)+M} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m_3} - \frac{-M}{2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2m_1+m_2} - \frac{M^2m_2+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)m_3[2(m_1+m_2)+M]} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -g - \frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -\frac{Mg-Kg}{\partial M} + \frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -g - \frac{1}{m_3} - \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -g + \frac{Mg+Kg}{\partial M} + g \cdot \frac{M^2m_2+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_1+m_2} - \frac{1}{m_1+m_2} - \frac{-M}{2(m_1+m_2)-M} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2(m_1+m_2)+M} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m_3} - \frac{-M}{2(m_1+m_2)+M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M}{2(m_1+m_2)+M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -g - \frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -\frac{Mg-Kg}{\partial M} + \frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -g - \frac{1}{m_3} - \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\ -g + \frac{Mg+Kg}{\partial M} + g \cdot \frac{M^2m_2+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \left(-g - \frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \right) - \left(\frac{1}{m_1+m_2} - \frac{1}{m_1+m_2} - \frac{-M}{2(m_1+m_2)-M} \right) A \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-Mg-Kg}{\partial M} + \frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M} - \frac{2}{2(m_1+m_2)+M} A \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -g - \frac{1}{m_3} - \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} + \frac{1}{m_3} \frac{M}{2(m_1+m_2)+M} A \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} - \frac{M}{2(m_1+m_2)+M} A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g + \frac{Mg+Kg}{\partial M} + g \cdot \frac{M^2m_2+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]} = 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\gamma}_2 \\ \ddot{\gamma}_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right)$$

Referencias

- [1] John R. Taylor. *Mecánica Clásica*. Reverté, 2013.
 - [2] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Brooks/Cole, 2008.
 - [3] Dale A. Wells. *Schaum's outline of theory and Problems of Lagrangian dynamics: With a treatment of Euler's equations of motion, Hamilton's equations and Hamilton's principles*. McGraw-Hill, 1967.
 - [4] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics*. Pearson, 3 edition, 2002.
 - [5] Robert Resnick, David Halliday, and Kenneth S Krane. *Física Volumen 1*. Continental, 2001.
 - [6] Robert Resnick, David Halliday, and Kenneth S Krane. *Física, Volumen II*. Editorial Continental, 2002.
 - [7] Hugh Young and Roger Freedman. *Sears y Zemansky - Física Universitaria con Física Moderna 1*. Pearson Educación, Ciudad de México, 14th edition, 2018. ISBN 9786073244398.
 - [8] Hugh Young and Roger Freedman. *Sears y Zemansky - Física Universitaria con Física Moderna 2*. Pearson Educación, Ciudad de México, 13th edition, 2013. ISBN 9786073221900.
- [0]