PART

I

Mecánica Lagrangiana

Este capítulo se va a dedicar a establecer un formalismo alternativo a las Leyes de Newton, el formalismo lagrangiano aplicado a la meċanica clásica. Este nuevo formalismo produce resultados equivalentes al de Newton, como es de esperarse, no obstante permite simplificar de gran manera los análisis.

Aquí se expresará la Mecánica Lagrangiana de forma general, de modo que se aplique a sistemas conservativos (o no) y a sistemas de partículas.

Section 1

Conceptos Fundamentales

Subsection 1.1

Grados de Libertad y Coordenadas Generalizadas

Definition 1 (**Grados de Libertad**) Para un sistema físico cualquiera, el número de grados de libertad corresponde al número más pequeño de cantidades escalares independientes necesarias para dar la posición (Sin contar el tiempo) de un objeto de interés dentro del sistema.

- **Partícula en una dimensión:** 1 grado de libertad, la partícula se encuentra sobre una recta está puede ir hacia adelante o atrás.
- **Partícula en 2 dimensiones:** 2 grados de libertad, la partícula tiene libertad de moverse en un plano.
- **Partícula en 3 dimensiones:** 3 grados de libertad, la partícula tiene puede moverse en un espacio tridimensional (en un ancho, largo y altura respecto a un origen).
- **n-Partículas en 3 dimensiones:** 3n grados de libertad, cada partícula individual tiene sus 3 grados de libertada propios y la suma es el total de grados de libertad del sistema.

Definition 2 (**Coordenadas Generalizadas**) Son el conjunto de cantidades [1] que especifican completamente el estado de un sistema.

Ahora, suponiendo que un sistema de estudio está conformado por n partículas y al estar en un espacio tridimensional, en un principio el sistema posee $3n$ grados de libertad. Si el sistema posee m ecuaciones de restricción[2], tendrá m restricciones en los grados de libertad totales del sistema, entonces los grados de libertad son:

$$s = 3n - m \leftarrow \begin{array}{l}\text{Grados de libertad de un}\\ \text{sistema en forma general}\end{array}$$

Es posible escribir las ecuaciones de transformación entre las coordenadas generalizadas y coordenadas curvilíneas cualesquiera, como se presenta a continuación:

[1] *No necesariamente tienen que ser distancias, pueden ser cantidades adimensionales o incluso con unidades de energía.*

[2] *Asociadas o no a fuerzas de restricción. Estas pueden ser incluso cortes en la dimensionalidad del espacio en que se encuentra el sistema.*

Coordenadas Curvilíneas ↔ Coordenadas Generalizadas

$$\begin{cases} x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}\left(q_j, t\right) \\ \dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} q_j = q_j\left(x_{\alpha,i}, t\right) \\ \dot{q}_j = \dot{q}_j\left(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1, 2, ..., n \\ i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, ...s \end{cases}$$

Si se tiene el conjunto más pequeño de coordenadas generalizadas, este es conocido como el conjunto adecuado de coordenadas [3]. En este caso, el conjunto de cantidades (Coordenadas Generalizadas) corresponde a los grados de libertad del sistema.

[3] *Va a ser común desarrollar un problemas tanto con el conjunto adecuado como con un conjunto de cantidades que superen al adecuado.*

Subsection 1.2

Trabajo Virtual, Fuerzas Generalizadas y Principio de D'Alambert

A partir de aquí se considerará un sistema compuesto por n partículas, cada una de ellas expuesta a su vector de fuerza neta correspondiente F_α. Siendo F_α la suma de cualquier clase de fuerzas que actuen sobre la partícula α (Fuerzas conservativas, no conservativas, de restricción) y posee sus componentes, por ejemplo, en coordenadas cartesinas F_{α_x} , F_{α_y} y F_{α_z}. Además, la fuerza se puede separar de la forma $\vec{F}_\alpha = \vec{F}^e_\alpha + \vec{f}_\alpha$, donde $\vec{F}^e_\alpha$ corresponde a todas las fuerzas externas aplicadas en la partícula α y $\vec{f}_\alpha$ corresponde a todas las fuerzas de restricción que afectan a dicha partícula.

Un trabajo infinitesimal provocado por esta fuerza:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}^e_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{f}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Limitando el análisis a sistemas tales que las fuerzas de restricción no producen este tipo de trabajo infinitesimal:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}^e_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha + \cancelto{0}{\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{f}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}^e_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Redefiniendo el vector $\vec{F}_\alpha$ como la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula α, excepto las de restricción, dado que ya se establecio que para este análisis estas no producen trabajo. se introduce el siguiente concepto:

Definition 3 (**Trabajo Virtual**) Corresponde al trabajo producido por un desplazamiento virtual [4]. Un desplazamiento virtual es un desplazamiento infinitesimal de un sistema, una alteración en la configuración de este, como resultado de un cambio infinitesimal arbitrario de las coordenadas $\delta\vec{r}_\alpha$, que debe ser consistente con las fuerzas y las restricciones impuestas en el sistema en un cierto instante t.

[4] *Al decir "virtual", es para diferenciarlo de un desplazamiento o trabajo real del sistema.*

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \tag{1.1}$$

A partir de la definición anterior, buscando colocar el trabajo virtual en el conjunto de coordenadas generalizadas:

Es posible desarrollar $\delta \vec{r}_\alpha$ a partir de la regla de la cadena para 3 grados de libertad como:

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

Excluyendo la derivada parcial temporal por la definición del desplazamiento virtual, que solo considera desplazamientos en las coordenadas. Realizando el cambio de $\delta \vec{r}_\alpha$ en la Ecuación (1.1):

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j
\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Lo cual al considerar que tanto $\vec{F}_\alpha$ y $\vec{r}_\alpha$ se encuentran inicialmente en coordenadas curvilíneas:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right)$$

Definition 4 (**Fuerzas Generalizadas**) Corresponde a un nombre genérico para referirse, en un principio, a fuerzas y torques escritos en las coordenadas generalizadas que describen el sistema. Estas son dadas en los componentes correspondientes a cada coordenada generalizada. Comúnmente las fuerzas o torques son escritas inicialmente en coordendas curvilíneas en un inicio para luego ser transformadas a fuerzas generalizadas.

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right) \tag{1.2}$$

Para conocer la naturaleza de la fuerza generalizada (Fuerza, Torque, ...), se debe revisar la dimensionalidad del trabajo virtual ejercido por tal fuerza, es decir:

$$\delta W_j = Q_j \delta q_j \quad \text{; Debe poseer unidades de energía}$$

Una vez establecidas las coordenadas generalizadas, es sencillo describir a que corresponden las fuerzas generalizadas a partir de lo anterior.

Ahora, en busca de generar una forma alternativa de mecánica, se va a explotar el concepto anterior. Primero, a partir de la Ecuación (**??**):

$$\begin{aligned} \vec{F}_\alpha &= \dot{\vec{p}}_\alpha \\ \Rightarrow \vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Esta expresión enuncia que una partícula expuesta a una fuerza $\vec{F}_\alpha$, se encontrará en equilibrio si se le es ejercida una fuerza efectiva contraria a la original $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Entonces, con esto se puede buscar el trabajo virtual de todas estas fuerzas sobre el sistema, que por lo anterior se sabe que será cero.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

Definition 5 (**Principio de D'Alambert**) Este principio esta expresando en coordenadas generalizadas.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \tag{1.3}$$

Un resultado de este principio, es el Principio de Trabajo Virtual [5]:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

[5] *Es el caso estático del Principio de D'Alambert, ampliamente usado en ingeniería.*

Section 2

Principio de Hamilton

Este principio puede ser deducido desde el Principio de D'Alambert, no obstante, la deducción no se realizará por ahora.

Definition 6 (**Principio de Hamilton Extendido**) El movimiento de un sistema desde un tiempo t_1 a un tiempo t_2 es tal que la integral de línea (La llamada Acción o integral de la Acción) de la energía cinética más el trabajo ejercido por las fuerzas del sistema, tenga un valor estacionario para el camino real que sigue el sistema [6].

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + W dt \tag{2.1}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + W dt = 0 \leftarrow \text{Valor estacionario}$$

[6] *El Principio de Hamilton original se define de forma similar, donde la Acción es de la forma:*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T - V dt$$

Section 3

Ecuaciones de la Mecánica de Lagrange

A continuación, en esta sección se va deducir la ecuación de Euler - Lagrange a partir del Principio de Hamilton Extendido de modo que sea aplicable a sistemas no conservativos y se introducirán conceptos propios de la Mecánica Lagrangiana.

Comenzando con la deducción de la ecuación Euler - Lagrange, se debe optimizar la Acción (Ecuación (2.1)) para conseguir un valor estacionario:
Optimizar la Acción significa, tomar la variación de esta:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} T\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + W dt = 0$$

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{t_1}^{t_2} T\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + W dt = 0 \\
\Rightarrow &\int_{t_1}^{t_2} \delta T\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \delta W dt = 0 \\
\Rightarrow &\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right) + \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j\right] dt = 0 \\
\Rightarrow &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j\right) dt = 0
\end{aligned}$$

Con este resultado, ahora se tomará el terminó marcado en azul para transformarlo en una expresión equivalente:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta\left(\frac{dq_j}{dt}\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) dt \\
&= \sum_{j=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) dt
\end{aligned}$$

Resolviendo esta integral por integración por partes para un término arbitrario de la suma [7]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\overbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}^{u} \frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) dt}_{dv} = \cancelto{0}{\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j \; dt$$

De volviendo esta expresión al interior de la ecuación inicial:

[7] *El término:*

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

porque los extremos están fijos, de modo que la variación en la coordenada generalizada q_j es igual a 0 cuando se está en el momento inicial t_1 y en el momento final t_2

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j+Q_j\delta q_j\right)dt=0$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j+-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j+Q_j\delta q_j\right)dt=0$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j\right]\delta q_j\right\}dt=0$$

Entonces, para que esta integral sea igual a cero, el contenido de la integral debe ser igual a cero para valores arbitrarios de las variaciones δq_1 , δq_2 , ... , δq_s:

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j\right]\delta q_j=0$$

Dada la arbitrariedad de dichas variaciones, es posible suponer que todas las variaciones de δq's son cero, excepto un δq_j. Se debe cumplir para ese δq_j:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j=0$$

Reescribiendo [8]:

[8] *Esta última ecuación ya posee la forma de una ecuación de Euler*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$$

Para terminar esta deducción, es necesario separar las fuerzas conservativas (c) de las no conservativas (nc) , entonces:

Recuerde que Q_j no posee ninguna fuerza de restricción

$$\begin{aligned}Q_j&=Q_j^c+Q_j^{nc}\\&=\sum_{\alpha}^{n}\vec{F}_\alpha^c\cdot\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_j}+\sum_{\alpha}^{n}\vec{F}_\alpha^{nc}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\end{aligned}$$

Ahora, es necesario recordar la Ecuación (**??**) para fuerzas conservativas, lo que permite:

$$\begin{aligned}Q_j&=\sum_{\alpha}^{n}-\vec{\nabla}V_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_j}+\sum_{\alpha}^{n}\vec{F}_\alpha^{nc}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\\&=-\sum_{\alpha}^{n}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{1,\alpha}}\frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j}+\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{2,\alpha}}\frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j}+\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{3,\alpha}}\frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j}\right)+Q_j^{nc}\\&=-\sum_{\alpha}^{n}\frac{\partial V_\alpha}{\partial q_j}+Q_j^{nc}\\&=-\frac{\partial V}{\partial q_j}+Q_j^{nc}\end{aligned}$$

El volver a colocar $\vec{F}^{nc}$ como Q_j^{nc} no representa un problema por ahora, debido a que la forma de estas fuerzas puede llegar a depender del problema en que se planteen y no hay ninguna pérdida al dejarlas de forma general.

Con la expresión anterior, se introduce en la ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{nc}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = Q_j^{nc}$$

A esta última ecuación no le hará ningún daño aprovechar encarecidamente de la definición que acompaña a la Ecuación (**??**), diciendo lo siguiente [9]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = Q_j^{nc}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = Q_j^{nc}$$

[9] *Introducir el término*

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

no debe ser un problema, puesto que en un inicio será cero por la limitación de fuerzas conservativas.
No obstante, fuera de la mecánica clásica será común que este término no sea cero en un intento de escribir potenciales para fuerzas que, al menos en el sentido usual, no los poseen. Por ejemplo la fuerza de Lorentz que da lugar a potenciales generalizados $V = V(q_j, \dot{q}_j)$.

Definition 7 (**Lagrangiano**) Se define la función $\mathcal{L}$ como el Lagrangiano del sistema, función que para el caso de un sistema conservativo dicta toda la dinámica del sistema al operarlo para cada coordenada generalizada en la ecuación de Euler-Lagrange.

$$\mathcal{L} = T - V \tag{3.1}$$

Definition 8 (**Ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas semi-conservativos**)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad ; \; j = 1, 2, ..., s \tag{3.2}$$

Al operar esta ecuación sobre el Lagrangiano del sistema y tomando o no las fuerzas disipativas para cada coordenada generalizada, la solución que genera serán s ecuaciones diferenciales de segundo orden que dan las condiciones para que el camino que sigue el sistema en el espacio de configuración sea un valor estacionario para el Principio de Hamilton (Extendido) Ecuación (2.1).

Subsection 3.1
Problemas resueltos

Cálculo Variacional

Problema 1.

Determine las geodésicas de un cono recto de base circular. $z = \lambda\rho \Longrightarrow dz = \lambda d\rho$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \Longrightarrow ds^2 = (1+\lambda^2)d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \Longrightarrow ds = \sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}\, d\phi$$

Primera forma

No hay dependencia explícita con ϕ

$$\Longrightarrow J = \int_A^B ds = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}\, d\phi \Longrightarrow f = \sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2} \Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{dy_x}{dx}$$

$$\text{con } \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x} y_x\right) \Longrightarrow 0 = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x} y_x\right)$$

$$\Longrightarrow 0 = -\cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial x}} + \frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_x\right) \Longrightarrow f - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_x = \text{constante} \Longrightarrow f - \frac{\partial f}{\partial \rho_\phi}\rho_\phi = c_1 \qquad \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho_\phi} = \frac{(1+\lambda^2)\rho_\phi}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2} - \frac{(1+\lambda^2)\rho_\phi^2}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}} = c_1 \Longrightarrow \frac{\rho^2 + \cancel{(1+\lambda^2)\rho_\phi^2} - \cancel{(1+\lambda^2)\rho_\phi^2}}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}} = c_1 \Longrightarrow \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}} = c_1$$

$$\Longrightarrow \rho^4 = c_1^2\rho^2 + c_1^2(1+\lambda^2)\rho_\phi^2 \Longrightarrow \rho^2(\rho^2 - c_1^2) = c_1^2(1+\lambda^2)\rho_\phi^2 \Longrightarrow \frac{d\rho}{d\phi} = \sqrt{\frac{\rho^2(\rho^2 - c_1^2)}{c_1^2(1+\lambda^2)}}$$

$$\Longrightarrow \int d\phi = \int \frac{c_1\sqrt{(1+\lambda^2)}}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - c_1^2)}}\, d\rho \Longrightarrow \phi - \phi_0 = c_1\sqrt{(1+\lambda^2)}\cos^{-1}\left(\frac{c_1}{\rho}\right)$$

Segunda forma $\quad ds = \sqrt{\rho^2\phi_\rho^2 + (1+\lambda^2)}\, d\rho \Longrightarrow f = \sqrt{\rho^2\phi_\rho^2 + (1+\lambda^2)} \Longrightarrow \frac{d}{d\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi_\rho} - \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial \phi}} = 0$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi_\rho} = \frac{\rho^2\phi_\rho}{\sqrt{\rho^2\phi_\rho^2 + (1+\lambda^2)}} \Longrightarrow \frac{d}{d\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi_\rho} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi_\rho} = \frac{\rho^2\phi_\rho}{\sqrt{\rho^2\phi_\rho^2 + (1+\lambda^2)}} = c_1 \Longrightarrow \rho^4\phi_\rho^2 = c_1^2\rho^2\phi_\rho^2 + c_1^2(1+\lambda^2)$$

$$\Longrightarrow \rho^2\phi_\rho^2(\rho^2 - c_1^2) = c_1^2(1+\lambda^2) \Longrightarrow \phi_\rho = \sqrt{\frac{c_1^2(1+\lambda^2)}{\rho^2(\rho^2 - c_1^2)}} = \frac{d\phi}{d\rho} \Longrightarrow \int \phi = \int \frac{c_1\sqrt{(1+\lambda^2)}}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - c_1^2)}}\, d\rho$$

$$\Longrightarrow \phi - \phi_0 = c_1\sqrt{(1+\lambda^2)}\cos^{-1}\left(\frac{c_1}{\rho}\right)$$

Tercera forma $\quad f = \sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2} \Longrightarrow \frac{d}{d\phi}\frac{\partial f}{\partial \rho_\phi} - \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 \qquad \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho_\phi} = \frac{(1+\lambda^2)\rho_\phi}{\sqrt{\rho^2 + (1+\lambda^2)\rho_\phi^2}} \Longrightarrow \frac{d}{d\phi}\frac{\partial f}{\partial \rho_\phi} = \text{regla de la cadena}$$

Problema 2. (Thornton 6.7/Taylor 6.4)

6-7. Consider light passing from one medium with index of refraction n_1 into another medium with index of refraction n_2 (Figure 6-A). Use Fermat's principle to minimize time, and derive the law of refraction: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.

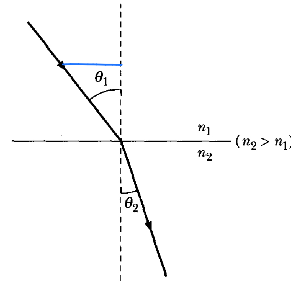


FIGURE 6-A Problem 6-7.

Principio de Fermat: La luz recorre el camino que le permita minimizar el tiempo

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt \longrightarrow dt = \frac{ds}{V_m} \quad ; \quad ds^2 = dX^2 + dy^2 \implies ds = \sqrt{dX^2 + dy^2} = \sqrt{1 + X_y^2}\, dy$$

$$\implies J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + X_y^2}}{V_m}\, dy \implies f = \frac{\sqrt{1 + X_y^2}}{V_m} \implies \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial X_y} - \overset{0}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial X}}} = 0$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial X_y} = \text{constante} = \frac{\frac{X_y}{\sqrt{1+X_y^2}}}{V_m} = \frac{X_y}{V_m\sqrt{1 + X_y^2}} \implies \frac{X_y}{V_m\sqrt{1 + X_y^2}} = A \quad ; \quad X_y = \tan\theta = \frac{dX}{dy}$$

$$\implies \frac{\operatorname{sen}\theta}{V_m} = A = \frac{n_1 \operatorname{sen}\theta}{c} \implies n \operatorname{sen}\theta = \text{constante} \;//$$

Problema 3. (Thornton 6.8.a)

6-8. Find the dimensions of the parallelepiped of maximum volume circumscribed by **(a)** a sphere of radius R; **(b)** an ellipsoid with semiaxes a, b, c.

El paralelepípedo tiene volumen: $V = abc$

a) $J = \int f(X, Y, Z)\, dz \implies \frac{d}{dz}\overset{0 \text{ no hay derivadas}}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial q_s'}}} - \frac{\partial f}{\partial q_s} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_s} = 0$

Restricción: $g = a^2 + b^2 + c^2 - 4R^2 = 0$

$\overset{*}{\implies} 3a^2 = 4R^2 \implies a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

$$\implies -\frac{\partial V}{\partial q_s} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_s} = 0$$

Para a: $-\frac{\partial V}{\partial a} + \lambda \frac{\partial g}{\partial a} = 0 \implies -bc + \lambda \cdot 2a = 0 \implies a = \frac{bc}{2\lambda}\,*$ $\overset{*}{\implies} \frac{\cancel{b}c}{2\lambda} = \frac{2\lambda \cancel{b}}{c} \implies c = 2\lambda\,*$

Para b: $-\frac{\partial V}{\partial b} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b} = 0 \implies -ac + \lambda 2b = 0 \implies a = \frac{2\lambda b}{c}\,**$ $\overset{*}{\implies} \frac{\cancel{2\lambda} b}{c} = \frac{\cancel{2\lambda} c}{b} \implies b^2 = c^2\,*$

Para c: $-\frac{\partial V}{\partial c} + \lambda \frac{\partial g}{\partial c} = 0 \implies -ab + \lambda 2c = 0 \implies a = \frac{2\lambda c}{b}\,**$ $\overset{*}{\implies} a = 2\lambda$

$$\implies a = b = c = 2\lambda^{*} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad y \quad \lambda = \frac{R}{\sqrt{3}} \;//$$

Problema 4.

Considere el funcional:

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi} \left(2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2\right) dx.$$

Si $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$ y $z(\pi) = -1$. Determine los extremos de J.

x independiente

$$J = \int_0^{\pi} 2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2 \, dx \implies f = f(y_x, z_x, y, z) = 2yz - 2y^2 + y_x^2 - z_x^2 \implies \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial q_{ax}} - \frac{\partial f}{\partial q_a} = 0$$

Para y : $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\qquad$ * $\frac{\partial f}{\partial y} = 2z - 4y$ $\qquad$ * $\frac{\partial f}{\partial y_x} = 2y_x \implies \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 2y_{xx}$

$$\implies 2y_{xx} - 2z + 4y = 0 \implies y_{xx} - z + 2y = 0 \, *$$

Para z : $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z_x} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ $\qquad$ * $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y$ $\qquad$ * $\frac{\partial f}{\partial z_x} = -2z_x \implies \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z_x} = -2z_{xx}$

$$\implies -2z_{xx} - 2y = 0 \implies z_{xx} + y = 0 \, *$$

$$\begin{cases} y_{xx} - z + 2y = 0 \\ z_{xx} + y = 0 \end{cases}$$

Problema 5.

Determine los extremos del funcional:

$$J[z(x,y)] = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy,$$

donde:

$$z(x,y) = x^3 - 2xy^2.$$

$Z = X^3 - 2Xy^2$

$J = \iint \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}\, dxdy \implies f(Z, Z_x, Z_y, X, y) = f(Z_x, Z_y) = \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}$

Problema 6. (Thornton 6.10)

6-10. Find the ratio of the radius R to the height H of a right-circular cylinder of fixed volume V that minimizes the surface area A.

$V = \pi R^2 H \longrightarrow A_T = 2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R)$

Restricción: $g = V - \pi R^2 H = 0$

$\implies \cancel{\frac{d}{dR}\frac{\partial A}{\partial H_R}} - \frac{\partial A}{\partial H} + \lambda \frac{\partial g}{\partial H} = 0 \implies -2\cancel{\pi} \cancel{R} - \lambda \cancel{\pi} R^{\cancel{2}} = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{R}$

$\implies \cancel{\frac{d}{dH}\frac{\partial A}{\partial R_H}} - \frac{\partial A}{\partial R} + \lambda \frac{\partial g}{\partial R} = 0 \implies -\cancel{2\pi}(H+R) - \cancel{2\pi} R - \lambda \cdot \cancel{2\pi} R H = 0 \implies H + R + R + \lambda R H = 0$

$\implies H + 2R + \lambda R H = 0 \implies H + 2R - 2H = 0 \implies -H + 2R = 0 \implies R = \frac{H}{2}$

Problema 7. (Thornton 6.11)

6-11. A disk of radius R rolls without slipping inside the parabola $y = ax^2$. Find the equation of constraint. Express the condition that allows the disk to roll so that it contacts the parabola at one and only one point, independent of its position.

Condición de rodar sin deslizar: $v = R\dot{\phi} \Longrightarrow ds = R\,d\phi$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx = R\,d\phi$$

Radio de curvatura: $r = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \Longrightarrow r = \dfrac{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}{2a}$

Para que el disco toque la parábola en un único punto, $r > R$, para que el disco no toque ambos lados de la parábola

Radio mínimo de la parábola $\Longrightarrow r = \dfrac{1}{2a} \Longrightarrow R < \dfrac{1}{2a}$

En el vertice

Problema 8.

Para $dy/dx \equiv y_x \neq 0$, muestre la equivalencia de las dos formas de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0.$$

$f = f(y, y_x, x)$

$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)\,dx \quad ; \quad y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x)$$

$$\Longrightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial \alpha}\right]dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y_x}\eta_x\right]dx \; ; \; \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y_x}\eta_x\,dx = \cancelto{0}{\eta\frac{\partial f}{\partial y_x}\Big|_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\,dx$$

$$\Longrightarrow \delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta - \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right]dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right]\eta\,dx$$

Para $f = f(y, y_x, x)$, se define

$$\Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{dy_x}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x}y_{xx} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}$$

$$\Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x}y_{xx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}y_x\right) \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y_x}y_x\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Problema 9. (Taylor 6.18)

6.18 ⋆⋆ Show that the shortest path between two given points in a plane is a straight line, using plane polar coordinates.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \implies ds = \sqrt{1 + r^2 \phi_r'^2}\, dr \implies J = \int_A^B ds = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \phi_r'^2}\, dr \implies f = \sqrt{1 + r^2 \phi_r'^2}$$

$$\implies \frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial \phi_r} - \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial \phi}} = 0 \implies \frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial \phi_r} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \phi_r} = \text{constante} = c_1 \implies \frac{r^2 \phi_r}{\sqrt{1 + r^2 \phi_r^2}} = c_1$$

$$\implies r^4 \phi_r^2 = c_1^2 + c_1^2 r^2 \phi_r^2 \implies r^2 \phi_r^2 (r^2 - c_1^2) = c_1^2 \implies \phi_r = \frac{d\phi}{dr} = \frac{c_1}{r\sqrt{r^2 - c_1^2}} \implies \int d\phi = \int \frac{c_1}{r\sqrt{r^2 - c_1^2}}\, dr$$

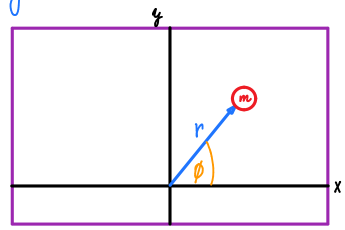
$$\implies \phi - \phi_0 = c_1 \cos^{-1}\left(\frac{c_1}{r}\right) \implies r \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{c_1}\right) = c_1$$

Mecánica Lagrangiana

Problema 1. (Thornton 7.5)

7-5. Consider a vertical plane in a constant gravitational field. Let the origin of a coordinate system be located at some point in this plane. A particle of mass m moves in the vertical plane under the influence of gravity and under the influence of an additional force $f = -Ar^{\alpha-1}$ directed toward the origin (r is the distance from the origin; A and α [$\neq 0$ or 1] are constants). Choose appropriate generalized coordinates, and find the Lagrangian equations of motion. Is the angular momentum about the origin conserved? Explain.

2 grados de libertad $\longrightarrow$ (r, ϕ) coordenadas generalizadas



$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$ y $U = mgr\,\text{sen}\theta + U_f$

Considerando f como conservativa $\Longrightarrow U_f = -\int_0^r -Ar^{\alpha-1}dr = \frac{A}{\alpha}r^\alpha$

$\Longrightarrow L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{A}{\alpha}r^\alpha - mgr\,\text{sen}\phi$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$

Para r: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m2r\dot{\phi}^2 - \frac{A}{\alpha}\alpha r^{\alpha-1} - mg\,\text{sen}\phi$

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}m\,2\dot{r} = m\dot{r} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$

$\Longrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + Ar^{\alpha-1} + mg\,\text{sen}\phi = 0$

Para ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

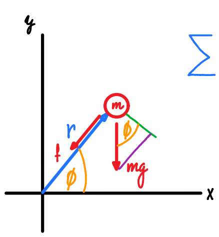
★ $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr\cos\phi$

★ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2}mr^2\cdot 2\dot{\phi} = \underbrace{mr^2\dot{\phi}}_{\text{Momento angular}} \Longrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}}_{\text{Es igual al torque neto}} = 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi}$

$\Longrightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\ddot{\phi} + 2\cancel{m}\cancel{r}\dot{r}\dot{\phi} + \underbrace{\cancel{m}g\cancel{r}\cos\phi}_{\text{El torque neto no es cero, hay torque por la gravedad}} = 0$

$\therefore$ El momento angular no se conserva

Por Newton



$\sum \vec{F}_r = f - mg\,\text{sen}\theta = ma_r \Longrightarrow -Ar^{\alpha-1} - mg\,\text{sen}\theta = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2$

$\sum \vec{F}_\phi = -mg\cos\phi = ma_\phi \Longrightarrow -\cancel{m}g\cos\phi = \cancel{m}r\ddot{\phi} + 2\cancel{m}\dot{r}\dot{\phi}$

Problema 2. (Taylor 7.17)

7.17 ⋆ Use the Lagrangian method to find the acceleration of the Atwood machine of Example 7.3 (page 255) including the effect of the pulley's having moment of inertia I. (The kinetic energy of the pulley is $\frac{1}{2}I\omega^2$, where ω is its angular velocity.)

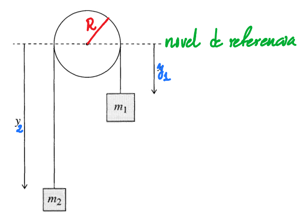


Figure 7.6 An Atwood machine consisting of two masses, m_1 and m_2, suspended by a massless inextensible string that passes over a massless, frictionless pulley of radius R. Because the string's length is fixed, the position of the whole system can be specified by a single variable, which we can take to be the distance x.

Hay un grado de libertad $\longrightarrow$ (y) coordenada generalizada ;

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2 + I_p\dot{\phi}^2\right) \; ; \; \dot{y} = R\dot{\phi} \qquad l = -y_1 - y_2 + \pi R \Longrightarrow \dot{y}_1 = -\dot{y}_2$$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_1^2 + I_p\frac{\dot{y}_1^2}{R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \Longrightarrow U = (m_1 - m_2) g y_1 - m_2 g l + m_2 g \pi R$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_1^2 + I_p\frac{\dot{y}_1^2}{R^2}\right) - (m_1 - m_2) g y_1 + m_2 g l - m_2 g \pi R$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$$

$$* \; \frac{\partial L}{\partial y_1} = -(m_1 - m_2) g$$

$$* \; \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \left(m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_1 + I_p\frac{\dot{y}_1}{R^2}\right) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)\ddot{y}_1$$

$$\Longrightarrow \left(m_1 + m_2 + \frac{I_p}{R^2}\right)\ddot{y}_1 + (m_1 - m_2) g = 0$$

Problema 3. (Taylor 7.20)

7.20 ⋆ A smooth wire is bent into the shape of a helix, with cylindrical polar coordinates $\rho = R$ and $z = \lambda\phi$, where R and λ are constants and the z axis is vertically up (and gravity vertically down). Using z as your generalized coordinate, write down the Lagrangian for a bead of mass m threaded on the wire. Find the Lagrange equation and hence the bead's vertical acceleration $\ddot{z}$. In the limit that $R \to 0$, what is $\ddot{z}$? Does this make sense?

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}\hat{e}_r}^{\,0} + r\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$z = \lambda\phi \implies \dot{z} = \lambda\dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) \quad \text{y} \quad U = mgz$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2\dot{z}^2}{\lambda^2} + \dot{z}^2\right) + mgz = \frac{m\dot{z}^2}{2\lambda^2}\left(R^2+\lambda^2\right) + mgz$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

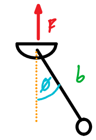
$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = mg$$

$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = \cancel{2}\,\frac{m\dot{z}}{\cancel{2}\lambda^2}\left(R^2+\lambda^2\right) = \frac{m\dot{z}}{\lambda^2}\left(R^2+\lambda^2\right) \implies \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = \frac{m\ddot{z}}{\lambda^2}\left(R^2+\lambda^2\right) \implies \frac{\cancel{m}\ddot{z}}{\lambda^2}\left(R^2+\lambda^2\right) - \cancel{m}g = 0$$

$$\implies \ddot{z} = \frac{g\lambda^2}{R^2+\lambda^2}$$

Problema 4. (Thornton 7.14)

7-14. A simple pendulum of length b and bob with mass m is attached to a massless support moving vertically upward with constant acceleration a. Determine **(a)** the equations of motion and **(b)** the period for small oscillations.



$$X = b\,\text{sen}\,\phi$$

$$y = \frac{at^2}{2} - b\cos\phi$$

a) 1 grado de libertad $\longrightarrow (\phi)$ coordenadas generalizada

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{y}^2) \quad y \quad U = mgy$$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}m\left[b^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi^2 + (at - b\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot\phi)^2\right] = \frac{1}{2}m\left(b^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi^2 + a^2t^2 - 2ab\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot\phi\, t + b^2\text{sen}^2\phi\cdot\dot\phi^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(b^2\dot\phi^2 + a^2t^2 - 2ab\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot\phi\, t\right)$$

$$\Longrightarrow U = mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\phi\right) \quad \Longrightarrow L = \frac{1}{2}m\left(b^2\dot\phi^2 + a^2t^2 - 2ab\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot\phi\, t\right) - mg\left(\frac{at^2}{2} - b\cos\phi\right)$$

$$* \; \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cdot -\cancel{2}ab\cos\phi\cdot\dot\phi\, t - mgb\,\text{sen}\,\phi$$

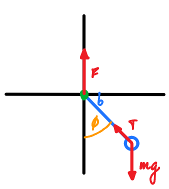
$$* \; \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \frac{1}{\cancel{2}}m(\cancel{2}b^2\dot\phi - \cancel{2}ab\,\text{sen}\,\phi\, t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mb^2\ddot\phi - ab\cos\phi\cdot\dot\phi\, t - ab\,\text{sen}\,\phi$$

$$\Longrightarrow \cancel{m}b^{\cancel{2}}\ddot\phi - \cancel{mab\cos\phi\cdot\dot\phi\, t} - \cancel{m}a\cancel{b}\,\text{sen}\,\phi + \cancel{mab\cos\phi\cdot\dot\phi\, t} + \cancel{m}g\cancel{b}\,\text{sen}\,\phi = 0$$

$$\Longrightarrow b\ddot\phi + a\,\text{sen}\,\phi + g\,\text{sen}\,\phi = 0 \Longrightarrow \ddot\phi + \frac{a+g}{b}\text{sen}\,\phi = 0$$

b) Oscilaciones pequeñas $\text{sen}\,\theta \approx \theta \Longrightarrow \ddot\phi + \frac{a+g}{b}\phi = 0 \Longrightarrow \omega_0^2 = \frac{a+g}{b}$ //

Por Newton



$$\sum \vec{T} = -b\,m(a+g)\,\text{sen}\,\phi \Longrightarrow \cancel{m}b^{\cancel{2}}\ddot\theta = -\cancel{b}\cancel{m}(a+g)\,\text{sen}\,\phi \Longrightarrow \ddot\phi + \frac{a+g}{b}\text{sen}\,\phi = 0 \; //$$

$$\sum F_y = T - mg = ma \Longrightarrow T = m(a+g) \longleftarrow \text{Peso aparente}$$

Problema 5. (Taylor 7.23)

7.23 ★ A small cart (mass m) is mounted on rails inside a large cart. The two are attached by a spring (force constant k) in such a way that the small cart is in equilibrium at the midpoint of the large. The distance of the small cart from its equilibrium is denoted x and that of the large one from a fixed point on the ground is X, as shown in Figure 7.13. The large cart is now forced to oscillate such that $X = A\cos\omega t$, with both A and ω fixed. Set up the Lagrangian for the motion of the small cart and show that the Lagrange equation has the form

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = B\cos\omega t$$

where ω_o is the natural frequency $\omega_o = \sqrt{k/m}$ and B is a constant. This is the form assumed in Section 5.5, Equation (5.57), for driven oscillations (except that we are here ignoring damping). Thus the system described here would be one way to realize the motion discussed there. (We could fill the large cart with molasses to provide some damping.)

$$r = X + x \implies \dot{r} = \dot{X} + \dot{x}$$

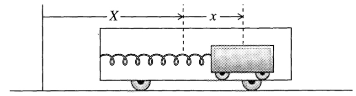


Figure 7.13 Problem 7.23

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{X})^2 \quad y \quad U = \frac{1}{2}kx^2 \implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{X})^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$* \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{1}{2}2kx = -kx$$

$$* \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m2(\dot{x}+\dot{X}) = m(\dot{x}+\dot{X}) \implies \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(\ddot{x}+\ddot{X}) \implies m(\ddot{x}+\ddot{X}) + kx = 0 \implies \ddot{x}+\ddot{X}+\omega_0^2 x = 0 \ //$$

Problema 6. (Taylor 7.29)

7.29 ★★ Figure 7.14 shows a simple pendulum (mass m, length l) whose point of support P is attached to the edge of a wheel (center O, radius R) that is forced to rotate at a fixed angular velocity ω. At $t = 0$, the point P is level with O on the right. Write down the Lagrangian and find the equation of motion for the angle ϕ. [*Hint:* Be careful writing down the kinetic energy T. A safe way to get the velocity right is to write down the position of the bob at time t, and then differentiate.] Check that your answer makes sense in the special case that $\omega = 0$.

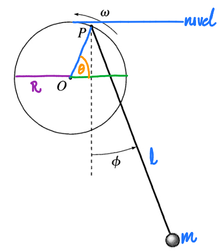


Figure 7.14 Problem 7.29

$$\vec{r} = (R\cos\theta + l\,\text{sen}\,\phi)\hat{e}_x + (R\,\text{sen}\,\theta - l\cos\phi)\hat{e}_y$$

$$\implies \dot{\vec{r}} = (-R\,\text{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta} + l\cos\phi\cdot\dot{\phi})\hat{e}_x + (R\cos\theta\cdot\dot{\theta} + l\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot{\phi})\hat{e}_y$$

$$\implies \dot{r}^2 = (-R\,\text{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta} + l\cos\phi\cdot\dot{\phi})^2 + (R\cos\theta\cdot\dot{\theta} + l\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot{\phi})^2 \qquad y \qquad U = mgy = mg(R\,\text{sen}\,\theta - l\cos\phi)$$

$$= R^2\text{sen}^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 \cancel{-2Rl\dot{\theta}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi} + l^2\cos^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 + R^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 \cancel{+2Rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi} + l^2\text{sen}^2\phi\cdot\dot{\phi}^2$$

$$= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2) - mg(R\,\text{sen}\,\theta - l\cos\phi) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

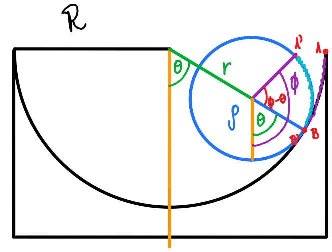
Para θ: $\quad * \ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgR\cos\theta \qquad * \ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}R^2\dot{\theta} = mR^2\dot{\theta} \implies \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta} \implies mR^2\ddot{\theta} + mgR\cos\theta = 0$

Para ϕ: $\quad * \ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mgl\,\text{sen}\,\theta \qquad * \ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dfrac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}l^2\dot{\phi} = ml^2\dot{\phi} \implies \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} \implies ml^2\ddot{\phi} + mgl\,\text{sen}\,\theta = 0 \ //$

Mecánica Lagrangiana con Multiplicadores de Lagrange

Problema 1. (Thornton 7.3)

7-3. A sphere of radius ρ is constrained to roll without slipping on the lower half of the inner surface of a hollow cylinder of inside radius R. Determine the Lagrangian function, the equation of constraint, and Lagrange's equations of motion. Find the frequency of small oscillations.



$$\vec{r} = (R-\rho)\hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = (\dot{R}-\dot{\rho})\hat{e}_r + (R-\rho)\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = (\dot{R}-\dot{\rho})^2 + (R-\rho)^2\dot{\theta}^2$$

$$I = \frac{2}{5}m\rho^2$$

Restricciones: $g_1: R\theta - \rho(\phi-\theta) = 0$ y $g_2: r-(R-\rho) = 0$

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow R\theta = \rho(\phi-\theta)$$

Energía cinética: $T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$

Energía potencial: $U = mgy = mg(R - r\cos\theta)$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{5}m\rho^2\dot{\phi}^2 - mg(R - r\cos\theta) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial q_i} = 0 \text{ con } q_i = r, \theta, \phi$$

Para ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \phi}} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial \phi} + \cancelto{0}{\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial \phi}} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{1}{5}m\rho^2\dot{\phi} = \frac{1}{5}m\rho^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{1}{5}m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})$ * $\frac{\partial g_1}{\partial \phi} = -\rho$

aceleración rotacional

$$\Rightarrow \frac{1}{5}m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) - \lambda_1\rho = 0 \xrightarrow[\text{restricciones}]{\text{Aplicando}} \frac{1}{5}m\rho^{\cancel{2}}\frac{d\dot{\phi}}{dt} - \lambda_1\cancel{\rho} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{5}m\rho\ddot{\phi} = -\frac{m\cancel{\rho}\ddot{\theta}(R+\rho)}{5\cancel{\rho}} = -\frac{m\ddot{\theta}(R+\rho)}{5}$$

Para r: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} + \cancelto{0}{\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial r}} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial r} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}r\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$ * $\frac{\partial g_2}{\partial r} = 1$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{r} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$

aceleración radial

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda_2 = 0 \xrightarrow[\text{restricciones}]{\text{Aplicando}} \cancelto{0}{m\ddot{r}} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Para θ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial \theta} + \cancelto{0}{\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial \theta}} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\,\text{sen}\theta$ * $\frac{\partial g_1}{\partial \theta} = R+\rho$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}r^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + r\,\text{sen}\theta + \lambda_1(R+\rho) = 0 \xrightarrow[\text{restricciones}]{\text{Aplicando}} \cancelto{0}{2mr\dot{r}\dot{\theta}} + mr^2\ddot{\theta} + r\,\text{sen}\theta + \lambda_1(R+\rho) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{m}(R+\rho)^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{mg}(\cancel{R+\rho})\text{sen}\theta + \frac{\lambda_1}{m}(\cancel{R+\rho}) = 0 \Rightarrow (R+\rho)\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\theta + \frac{\lambda_1}{m} = 0$$ Álgebra y reemplazar.

Problema 2. (Thorton 7.34)

7-34. A particle of mass m slides down a smooth circular wedge of mass M as shown in Figure 7-C. The wedge rests on a smooth horizontal table. Find (**a**) the equation of motion of m and M and (**b**) the reaction of the wedge on m.

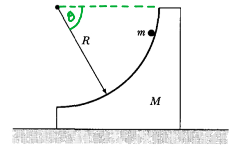


FIGURE 7-C Problem 7-34.

a) $g: r - R = 0 \implies \dot{\vec{r}} = \dot{r} + r\dot{\theta} \implies \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\,\text{sen}\theta \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Para r: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda\frac{\partial g}{\partial r} = 0 \qquad * \frac{\partial g}{\partial r} = 1$

$* \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}r\dot{\theta}^2 + mg\,\text{sen}\theta = mr\dot{\theta}^2 + mg\,\text{sen}\theta \qquad * \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{r} = m\dot{r} \implies \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$

Para θ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \qquad * \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$

Te amo

$* \frac{\partial L}{\partial \theta} = +mgr\cos\theta \qquad * \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}r^2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$

$$\implies \begin{cases} m\cancelto{0}{\ddot{r}} - mr\dot{\theta}^2 - mg\,\text{sen}\theta + \lambda = 0 \\ mr^2\ddot{\theta} + \cancelto{0}{2mr\dot{r}\dot{\theta}} - mgr\cos\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 - mg\,\text{sen}\theta + \lambda = 0 \\ \cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - \cancel{mg}\cancel{R}\cos\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -mR\dot{\theta}^2 - mg\,\text{sen}\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Asumiendo que sale del reposo en $\theta = \theta_0$

$$H = T + U = \frac{1}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\dot{\theta}^2 - \cancel{m}g\cancel{R}\,\text{sen}\theta = -\cancel{m}g\cancel{R}\,\text{sen}\theta_0 \implies R\dot{\theta}^2 - 2g\,\text{sen}\theta = -2g\,\text{sen}\theta_0 \implies \dot{\theta}^2 = \frac{2g(\text{sen}\theta - \text{sen}\theta_0)}{R}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda = -m\cancel{R}\,\frac{2g(\text{sen}\theta - \text{sen}\theta_0)}{\cancel{R}} - mg\,\text{sen}\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -2mg(\text{sen}\theta - \text{sen}\theta_0) - mg\,\text{sen}\theta \\ R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Problema 3. (Thorton 7.37)

7-37. Use the method of Lagrange undetermined multipliers to find the tensions in both strings of the double Atwood machine of Example 7.8.

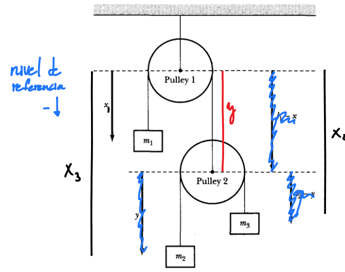


FIGURE 7-6 Example 7.8. The double pulley system.

Restricciones: $g_1: X_1 + y - l_1 = 0$ y $g_2: X_3 + X_2 - 2y - l_2 = 0$

$$\Longrightarrow g: 2X_1 + X_2 + X_3 - \underbrace{(2l_1 + l_2)}_{c} = 0 \Longrightarrow 2\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \ddot{X}_3 = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{X}_1^2 + m_2\dot{X}_2^2 + m_2\dot{X}_2^2\right) \quad y \quad U = -g\left(m_1X_1 + m_2X_2 + m_2X_2\right)$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{X}_1^2 + m_2\dot{X}_2^2 + m_2\dot{X}_2^2\right) + g\left(m_1X_1 + m_2X_2 + m_2X_2\right) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda\frac{\partial g}{\partial q_i} = 0 \quad con \quad q_i = X_1, X_2, X_3$$

Para X_1: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} - \frac{\partial L}{\partial X_1} + \lambda\frac{\partial g}{\partial X_1} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial X_1} = m_1 g$ * $\frac{\partial g}{\partial X_1} = 2$

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_1\dot{X}_1 = m_1\dot{X}_1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = m_1\ddot{X}_1$

Para X_2: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} - \frac{\partial L}{\partial X_2} + \lambda\frac{\partial g}{\partial X_2} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial X_2} = m_2 g$ * $\frac{\partial g}{\partial X_2} = 1$

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_2\dot{X}_2 = m_2\dot{X}_2 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} = m_2\ddot{X}_2$

Para X_3: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_3} - \frac{\partial L}{\partial X_3} + \lambda\frac{\partial g}{\partial X_3} = 0$

* $\frac{\partial L}{\partial X_3} = m_3 g$ * $\frac{\partial g}{\partial X_3} = 1$

* $\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_3} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_3\dot{X}_3 = m_3\dot{X}_3 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_3} = m_3\ddot{X}_3$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{X}_1 - m_1 g + 2\lambda = 0 \\ m_2\ddot{X}_2 - m_2 g + \lambda = 0 \quad ; \quad 2\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 + \ddot{X}_3 = 0 \\ m_3\ddot{X}_3 - m_3 g + \lambda = 0 \end{cases}$$

4 ecuaciones, 4 variables

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ddot{X}_1 & \ddot{X}_2 & \ddot{X}_3 & \lambda \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} m_1 & 0 & 0 & 2 & m_1 g \\ 0 & m_2 & 0 & 1 & m_2 g \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & m_3 g \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[m_4 = A_{41}]{f_i \longrightarrow \frac{1}{m_i} f_i} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Recuperando lo anterior

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_4 \longrightarrow f_4 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} & -g - \frac{g}{2} - \frac{g}{2} \end{array}\right)$$

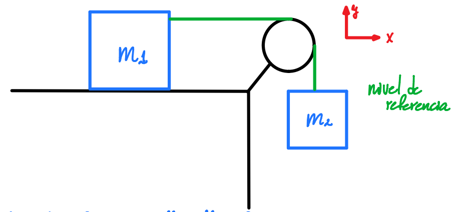
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3} & -2g \end{array}\right) \xrightarrow{f_4 \longrightarrow \left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1} & g \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_2} & g \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \longrightarrow f_2 - \frac{1}{m_2}f_4 \\ f_3 \longrightarrow f_3 - \frac{1}{m_3}f_4}]{f_1 \longrightarrow f_1 - \frac{2}{m_1}f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & g + \frac{2}{m_1} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g + \frac{1}{m_2} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g + \frac{1}{m_3} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{X}_1 = g + \frac{2}{m_1} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ \ddot{X}_2 = g + \frac{1}{m_2} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ \ddot{X}_3 = g + \frac{1}{m_3} 2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \\ \lambda = -2g\left(\frac{-2}{m_1} - \frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)^{-1} \end{cases}$$

Problema 4. (Taylor 7.50)

7.50 ⋆ A mass m_1 rests on a frictionless horizontal table. Attached to it is a string which runs horizontally to the edge of the table, where it passes over a frictionless, small pulley and down to where it supports a mass m_2. Use as coordinates x and y the distances of m_1 and m_2 from the pulley. These satisfy the constraint equation $f(x, y) = x + y = \text{const}$. Write down the two modified Lagrange equations and solve them (together with the constraint equation) for $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, and the Lagrange multiplier λ. Use (7.122) (and the corresponding equation in y) to find the tension forces on the two masses. Verify your answers by solving the problem by the elementary Newtonian approach.



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 - m_2 g y \qquad g: x + y - c = 0 \longrightarrow \lambda \quad \Longrightarrow \dot{x} + \dot{y} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

Hay que operar: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial q_i} = 0$ con $q_i = x, y$

Para x:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_1 \ddot{x} \qquad \Longrightarrow m_1 \ddot{x} + \lambda = 0$$

Para y:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -m_2 g, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m_2 \ddot{y} \qquad \Longrightarrow m_2 \ddot{y} + m_2 g + \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} = 0 \\ m_1 \ddot{x} + \lambda = 0 \\ m_2 \ddot{y} + m_2 g + \lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \\ \ddot{x} = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2} \\ \ddot{y} = \dfrac{-m_2 g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Problemas varios

Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizamiento hacia abajo en un plano inclinado con un ángulo α respecto a la horizontal. En su eje, el disco tiene una varilla de diámetro, largo y masa despreciables. De la varilla está suspendido un péndulo simple de largo $l < R$ y que tiene una masa m en su extremo. Considere que el movimiento del péndulo toma lugar en el plano del disco y halle las ecuaciones de Lagrange para el sistema.

Sugerencias: La inercia rotacional del disco es $MR^2/2$; se puede usar la relación $\xi = R\theta$, con θ el ángulo con el que rota el disco sobre el plano inclinado.

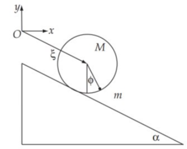
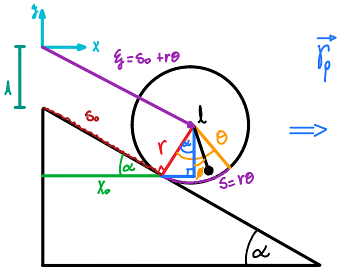


Figura 4: Imagen de la configuración del disco y el péndulo con masa m.



$$\vec{r}_p = \left[(s_0 + r\theta)\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\alpha + \overbrace{l\,\text{sen}\,\phi}^{\text{Péndulo}}\right]\hat{\imath} + \left[-A - (s_0 + r\theta)\,\text{sen}\,\alpha + r\cos\alpha - \overbrace{l\cos\phi}^{\text{Péndulo}}\right]\hat{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{r}}_p = \big(\overset{\dot\xi}{r\dot\theta}\cos\alpha + l\cos\phi\cdot\dot\phi\big)\hat{\imath} + \big(-\overset{\dot\xi}{r\dot\theta}\,\text{sen}\,\alpha + l\,\text{sen}\,\phi\cdot\dot\phi\big)\hat{\jmath}$$

$$\dot{\vec{r}}_c = r\dot\theta\cos\alpha\,\hat{\imath} - r\dot\theta\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath}$$

Péndulo:

$$\Longrightarrow \dot r_p^2 = r^2\dot\theta^2\cos^2\alpha + 2rl\dot\theta\dot\phi\cos\alpha\cos\phi + l^2\cos^2\phi\cdot\dot\phi^2 + r^2\dot\theta^2\,\text{sen}^2\alpha - 2rl\dot\theta\dot\phi\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi + l^2\text{sen}^2\phi\cdot\dot\phi^2$$

$$= r^2\dot\theta^2 + l^2\dot\phi^2 + 2rl\dot\theta\dot\phi(\cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)$$

$$\Longrightarrow T_p = \frac{1}{2}m\left[r^2\dot\theta^2 + l^2\dot\phi^2 + 2rl\dot\theta\dot\phi(\cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\right]$$

$$\Longrightarrow U_p = mgy_p = mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\,\text{sen}\,\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi\right]$$

Cilindro:

$$\Longrightarrow \dot r_c^2 = r^2\dot\theta^2\cos^2\alpha + r^2\dot\theta^2\,\text{sen}^2\alpha = r^2\dot\theta^2$$

$$\Longrightarrow T_c = \frac{1}{2}Mr^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{2}Mr^2\dot\theta^2 + \frac{Mr^2}{4}\dot\theta^2 = \frac{3Mr^2}{4}\dot\theta^2$$

$$\Longrightarrow U_c = Mgy_c = Mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\,\text{sen}\,\alpha + r\cos\alpha\right]$$

Sistema:

$$L = \frac{1}{2}m\left[r^2\dot\theta^2 + l^2\dot\phi^2 + 2rl\dot\theta\dot\phi(\cos\alpha\cos\phi - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\right] + \frac{3Mr^2}{4}\dot\theta^2 - mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\,\text{sen}\,\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi\right] + \cdots$$

$$- Mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\,\text{sen}\,\alpha + r\cos\alpha\right]$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}m\left[r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\alpha+\phi)\right] + \frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta}^2 - mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\operatorname{sen}\alpha + r\cos\alpha - l\cos\phi\right] + \cdots$$

$$\cdots - Mg\left[-A - (s_0 + r\theta)\operatorname{sen}\alpha + r\cos\alpha\right]$$

Las coordenadas generalizadas son θ y ϕ $\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Para ϕ:

$$* \ \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}rl\dot{\theta}\dot{\phi}\cdot -\operatorname{sen}(\alpha+\phi) - mgl\operatorname{sen}\phi = -mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}(\alpha+\phi) - mgl\operatorname{sen}\phi$$

$$* \ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\left[\cancel{2}l^2\dot{\phi} + \cancel{2}rl\dot{\theta}\cos(\alpha+\phi)\right] = ml^2\dot{\phi} + mrl\dot{\theta}\cos(\alpha+\phi)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} + mrl\ddot{\theta}\cos(\alpha+\phi) - mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}(\alpha+\phi)$$

$$\Longrightarrow ml^2\ddot{\phi} + mrl\ddot{\theta}\cos(\alpha+\phi) \cancel{- mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}(\alpha+\phi)} + \cancel{mrl\dot{\theta}\dot{\phi}\operatorname{sen}(\alpha+\phi)} + mgl\operatorname{sen}\phi = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{m}\cancel{l}^2\ddot{\phi} + \cancel{m}r\cancel{l}\ddot{\theta}\cos(\alpha+\phi) + \cancel{m}g\cancel{l}\operatorname{sen}\phi = 0$$

$$\Longrightarrow l\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}\cos(\alpha+\phi) + g\operatorname{sen}\phi = 0 \quad //$$

Para θ:

$$* \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\left[-r\operatorname{sen}\alpha\right] - Mg\left[-r\operatorname{sen}\alpha\right] = gr\operatorname{sen}\alpha(M+m)$$

$$* \ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}}m\left[\cancel{2}r^2\dot{\theta} + \cancel{2}rl\dot{\phi}\cos(\alpha+\phi)\right] + 2\cdot\frac{3Mr^2}{4}\dot{\theta} = m\left[r^2\dot{\theta} + rl\dot{\phi}\cos(\alpha+\phi)\right] + \frac{3Mr^2}{2}\dot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\left[r^2\ddot{\theta} + rl\ddot{\phi}\cos(\alpha+\phi) - rl\dot{\phi}^2\operatorname{sen}(\alpha+\phi)\right] + \frac{3Mr^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$\Longrightarrow m\left[r^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{r}l\ddot{\phi}\cos(\alpha+\phi) - \cancel{r}l\dot{\phi}^2\operatorname{sen}(\alpha+\phi)\right] + \frac{3Mr^{\cancel{2}}}{2}\ddot{\theta} - g\cancel{r}\operatorname{sen}\alpha(M+m) = 0$$

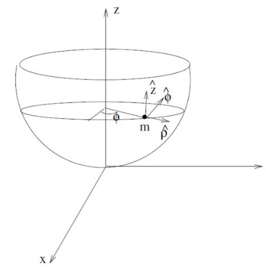
$$\Longrightarrow m\left[r\ddot{\theta} + l\ddot{\phi}\cos(\alpha+\phi) - l\dot{\phi}^2\operatorname{sen}(\alpha+\phi)\right] + \frac{3Mr}{2}\ddot{\theta} - g\operatorname{sen}\alpha(M+m) = 0 \quad //$$

Considere una partícula de masa m moviéndose sin fricción en un paraboloide dado por $x^2 + y^2 = az$, y cuya restricción por tanto se puede escribir como $2\rho\delta\rho - a\delta z = 0$.

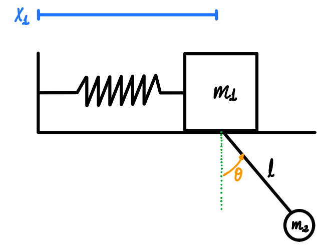
Sea ϕ el ángulo que forma el vector posición con el eje x, ρ la distancia al eje z y z la coordenada vertical:

a) Encuentre el Lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento en términos del multiplicador de lagrange asociado a la restricción.

b) Considerando el caso de que la masa se mueve en un círculo horizontal de altura $z = h$, encuentre la velocidad angular $\dot{\phi}$ en términos de constantes conocidas.



El bloque m_1 está sobre una superficie sin fricción y conecta a un resorte ideal de constante de elasticidad K. Además está conectado a otro bloque de masa m_2 por medio de una cuerda ideal de largo l.



Determine ecuaciones del movimiento y simplifique a oscilaciones pequeñas

$$\vec{r}_1 = X\,\hat{e}_x \quad y \quad \vec{r}_2 = (X + r\,sen\theta)\hat{e}_x - r\cos\theta\,\hat{e}_y$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{X}\,\hat{e}_x \quad y \quad \dot{\vec{r}}_2 = (\dot{X} + r\cos\theta\cdot\dot{\theta})\hat{e}_x + r\,sen\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{e}_y$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \dot{X}^2 \quad y \quad \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = (\dot{X} + r\cos\theta\cdot\dot{\theta})^2 + r^2 sen^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r\cos\theta + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + r^2 sen^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{\theta}r\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}KX^2 + m_2 g r\cos\theta \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Para X: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = 0$

$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}KX = -KX$$

$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} = \frac{1}{\cancel{2}}m_1\cancel{2}\dot{X} + \frac{1}{\cancel{2}}m_2(\cancel{2}\dot{X} + \cancel{2}\dot{\theta}r\cos\theta) = m_1\dot{X} + m_2\dot{X} + m_2\dot{\theta}r\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} = m_1\ddot{X} + m_2\ddot{X} + m_2 r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 sen\theta) = (m_1 + m_2)\ddot{X} + m_2 r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 sen\theta)$$

$$\Longrightarrow (m_1 + m_2)\ddot{X} + m_2 r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 sen\theta) + KX = 0$$

Para θ:

$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -m_2\dot{X}\dot{\theta}r\,sen\theta - m_2 g r\,sen\theta$$

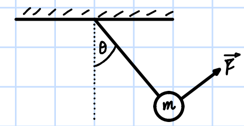
$$* \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}}m_2(\cancel{2}\dot{X}r\cos\theta + \cancel{2}r^2\dot{\theta}) = m_2(\dot{X}r\cos\theta + r^2\dot{\theta}) \quad \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m_2(\ddot{X}r\cos\theta - \dot{X}\dot{\theta}r\,sen\theta + r^2\ddot{\theta})$$

$$\Longrightarrow m_2(\ddot{X}r\cos\theta \cancel{- \dot{X}\dot{\theta}r\,sen\theta} + r^2\ddot{\theta}) \cancel{+ m_2\dot{X}\dot{\theta}r\,sen\theta} + m_2 g r\,sen\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{m_2}(\ddot{X}r\cos\theta + r^2\ddot{\theta}) + \cancel{m_2} g r\,sen\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{X} + m_2 r(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 sen\theta) + KX = 0 \\ \ddot{X}r\cos\theta + r^2\ddot{\theta} + g r\,sen\theta = 0 \end{cases}$$

//

Se muestra un péndulo simple, que además se le aplica una fuerza $\vec{F} = F\,\hat{e}_\theta$, donde $\hat{e}_\theta$ es el vector unitario en la dirección tangencial.

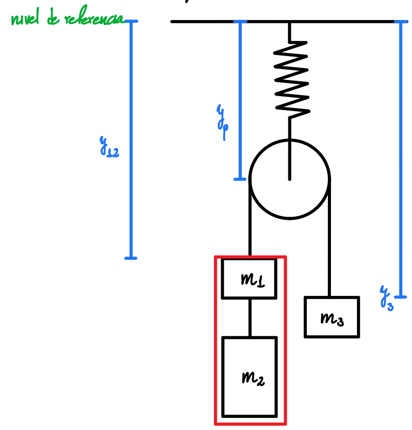


a) Planteé el Lagrangeano del sistema

b) Determine las fuerzas generalizadas de la configuración

c) ¿Cuáles son las ecuación(es) de movimiento del sistema?

El sistema que se muestra está formado por 2 masas $m_1+m_2>m_3$, además de una polea ideal, de masa M, radio R y momento de inercia $I=\frac{1}{2}MR^2$. El centro de la polea y el techo están conectados por medio de un resorte ideal, con una constante de elasticidad k y una longitud sin deformación y_0. Considere que el resorte solo se puede mover verticalmente, que la cuerda es ideal, sin que exista fricción entre ella y la polea. En el inicio m_1 y m_3 están a la misma altura con respecto al techo, el resorte está sin deformar y el sistema se suelta desde el reposo



Restricciones: $g_1: y_{12}+y_3-2y_p-l=0$ y $g_2: y_{12}-R\phi=0$

m_1+m_2: $T_{12}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_{12}^2$ y $U_{12}=(m_1+m_2)g\,y_{12}$

M: $T_p=\frac{1}{2}M\dot{y}_p^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2$ y $U_p=Mg\,y_p+\frac{1}{2}k\,y_p^2$

m_3: $T_3=\frac{1}{2}m_3\dot{y}_3^2$ y $U_3=m_3 g\,y_3$

$$\Rightarrow L=T-U=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_{12}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}_p^2+\frac{1}{2}m_3\dot{y}_3^2+\frac{1}{4}MR^2\dot{\phi}^2-(m_1+m_2)g\,y_{12}-Mg\,y_p-\frac{1}{2}k\,y_p^2-m_3 g\,y_3$$

Hay que operar: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial q_i}+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial q_i}=0$ para $q=y_{12},y_p,y_3$ y ϕ

Para m_1+m_2: * $\frac{\partial L}{\partial y_{12}}=(m_1+m_2)g$ * $\frac{\partial g_1}{\partial y_{12}}=1$ * $\frac{\partial g_2}{\partial y_{12}}=1$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{12}}=\frac{1}{\cancel{2}}(m_1+m_2)\cancel{2}\dot{y}_{12}=(m_1+m_2)\dot{y}_{12}\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{12}}=(m_1+m_2)\ddot{y}_{12}$

Para y_p: * $\frac{\partial L}{\partial y_p}=-Mg-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k\,y_p=-mg-ky_p$ * $\frac{\partial g_1}{\partial y_p}=-2$ * $\frac{\partial g_2}{\partial y_p}=0$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_p}=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}M\dot{y}_p=M\dot{y}_p\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_p}=M\ddot{y}_p$

Para ϕ: * $\frac{\partial L}{\partial \phi}=0$ * $\frac{\partial g_1}{\partial \phi}=0$ * $\frac{\partial g_2}{\partial \phi}=-R$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{2}MR^2\dot{\phi}=\frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=\frac{1}{2}MR^2\ddot{\phi}$

Para y_3: * $\frac{\partial L}{\partial y_3}=-m_3 g$ * $\frac{\partial g_1}{\partial y_3}=1$ * $\frac{\partial g_2}{\partial y_3}=0$ * $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3}=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m_3\dot{y}_3=m_3\dot{y}_3\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3}=m_3\ddot{y}_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{y}_{12}+(m_1+m_2)g+\lambda_1+\lambda_2=0\\ M\ddot{y}_p+Mg+ky_p-2\lambda_1=0\\ MR^2\ddot{\phi}+2\cdot -R\lambda_1=0\\ m_3\ddot{y}_3+m_3g+\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{y}_{12}+(m_1+m_2)g+\lambda_1+\lambda_2=0\\ M\ddot{y}_p+Mg+ky_p-2\lambda_1=0\\ MR^2\ddot{\phi}-2R\lambda_1=0\\ m_3\ddot{y}_3+m_3g+\lambda_1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{y}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{y}_p + Mg + Ky_p - 2\lambda_1 = 0 \\ MR^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - 2\cancel{R}\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + m_3 g + \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad ; \Longrightarrow \begin{matrix} \ddot{y}_{12} + \ddot{y}_3 - 2\ddot{y}_p = 0 \\ \ddot{y}_{12} - R\ddot{\theta} = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{y}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{y}_p + Mg + Ky_p - 2\lambda_1 = 0 \\ M\ddot{y}_{12} - 2\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + m_3 g + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{y}_{12} + (m_1+m_2)g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ M\ddot{y}_p + Mg + Ky_p - 2\lambda_1 = 0 \\ M\ddot{y}_{12} - 2\lambda_1 = 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + m_3 g + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Pasando a forma matricial

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \ddot{y}_{12} & \ddot{y}_p & \ddot{y}_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} (m_1+m_2) & 0 & 0 & 1 & 1 & -(m_1+m_2)g \\ M & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - Ky_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3 g \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{f_2 \longleftrightarrow f_3 \\ f_3 \longleftrightarrow f_4}]{f_1 \longrightarrow \frac{1}{m_1+m_2} f_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - Ky_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3 g \\ M & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_5 \longrightarrow f_5 - f_1]{f_4 \longrightarrow f_4 - Mf_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\ 0 & M & 0 & -2 & 0 & -Mg - Ky_p \\ 0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3 g \\ 0 & 0 & 0 & -2 - \frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & Mg \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & g \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\
0 & M & 0 & -2 & 0 & -M_g - K y_p \\
0 & 0 & m_3 & 1 & 0 & -m_3 g \\
0 & 0 & 0 & -2-\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & M_g \\
0 & -2 & 1 & -\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & g
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{f_3 \to \frac{1}{m_3} f_3 \\ f_5 \to \frac{-1}{2} f_5}]{f_2 \to \frac{1}{M} f_2}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2}{M} & 0 & \frac{-M_g-Ky_p}{M} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\
0 & 0 & 0 & -2-\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & M_g \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & -\frac{g}{2}
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2}{M} & 0 & \frac{-M_g-Ky_p}{M} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\
0 & 0 & 0 & \frac{-2(m_1+m_2)-M}{m_1+m_2} & \frac{-M}{m_1+m_2} & M_g \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & -\frac{g}{2}
\end{array}\right)
\xrightarrow[\substack{f_5 \to f_5 - f_2 \\ f_5 \to f_5 + \frac{1}{2} f_3}]{f_4 \to \frac{m_1+m_2}{-2(m_1+m_2)-M} f_4}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2}{M} & 0 & \frac{-M_g-Ky_p}{M} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)M_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}+\frac{2}{M}-\frac{1}{2m_3} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & -g+\frac{M_g+Ky_p}{M}
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} & -g \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2}{M} & 0 & \frac{-M_g-Ky_p}{M} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{m_3} & 0 & -g \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)M_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2} & -g+\frac{M_g+Ky_p}{M}
\end{array}\right)
$$

$$
f_1 \to f_1 - \frac{1}{m_1+m_2} f_4
$$

$$
f_2 \to f_2 + \frac{2}{M} f_4
$$

$$
\longrightarrow
$$

$$
f_3 \to f_3 - \frac{1}{m_3} f_4
$$

$$
f_5 \to f_5 - \frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)Mm_3} f_4
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2}-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g-\frac{1}{\cancel{m_1+m_2}}\frac{\cancel{(m_1+m_2)}M_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{\cancel{M}}\frac{-\cancel{M}}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{-M_g-Ky_p}{M}+\frac{2}{\cancel{M}}\frac{(m_1+m_2)\cancel{M}_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m_3}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g-\frac{1}{m_3}\frac{(m_1+m_2)M_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)M_g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)\cancel{M}m_3}\frac{-\cancel{M}}{-2(m_1+m_2)-M} & -g+\frac{M_g+Ky_p}{M}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2\cancel{(m_1+m_2)}\cancel{M}m_3}\frac{\cancel{(m_1+m_2)}\cancel{M_g}}{-2(m_1+m_2)-M}
\end{array}\right)
$$

Recuperando la matriz y simplificando

$$
\left(\begin{array}{cccc c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2}-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g-\frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2(m_1+m_2)+M} & \frac{-Mg-K_c y_p}{M}+\frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m_3}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g-\frac{1}{m_3}\frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)m_3[2(m_1+m_2)+M]} & -g+\frac{Mg+K_c y_p}{M}+g\cdot\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]}
\end{array}\right)
$$

$$f_5 \to \left(\frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)m_3[2(m_1+m_2)+M]}\right)^{-1} f_5$$

$\longrightarrow$

$$
\left(\begin{array}{cccc c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1+m_2}-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M} & -g-\frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2(m_1+m_2)+M} & \frac{-Mg-K_c y_p}{M}+\frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m_3}\frac{-M}{2(m_1+m_2)+M} & -g-\frac{1}{m_3}\frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M}{2(m_1+m_2)+M} & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underbrace{\frac{-g+\frac{Mg+K_c y_p}{M}+g\cdot\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]}}{\frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)m_3[2(m_1+m_2)+M]}}}_{A}
\end{array}\right)
$$

$$f_1 \to f_1-\left(\frac{1}{m_1+m_2}-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M}\right)f_5$$

$$f_2 \to f_2-\frac{2}{2(m_1+m_2)+M}f_5$$

$\longrightarrow$

$$f_3 \to f_3+\frac{1}{m_3}\frac{M}{2(m_1+m_2)+M}f_5$$

$$f_4 \to f_4-\frac{M}{2(m_1+m_2)+M}f_5$$

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-g-\frac{Mg}{-2(m_1+m_2)-M}\right)-\left(\frac{1}{m_1+m_2}-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{-M}{-2(m_1+m_2)-M}\right)A \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-Mg-K_c y_p}{M}+\frac{2(m_1+m_2)g}{-2(m_1+m_2)-M}-\frac{2}{2(m_1+m_2)+M}A \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -g-\frac{1}{m_3}\frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M}+\frac{1}{m_3}\frac{M}{2(m_1+m_2)+M}A \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{(m_1+m_2)Mg}{-2(m_1+m_2)-M}-\frac{M}{2(m_1+m_2)+M}A \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-g+\frac{Mg+K_c y_p}{M}+g\cdot\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2m_3[2(m_1+m_2)+M]}}{\frac{1}{2}\frac{M}{m_1+m_2}-\frac{M^2m_3+4(m_1+m_2)m_3+(m_1+m_2)M}{2(m_1+m_2)m_3[2(m_1+m_2)+M]}}=A
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\leftarrow \ddot{y}_{12} \\
\leftarrow \ddot{y}_p \\
\leftarrow \ddot{y}_3 \\
\leftarrow \lambda_1 \\
\leftarrow \lambda_2
\end{array}
\end{array}
$$