PART

I

Mecánica Newtoniana

Section 1

Vectores

Esto ya deberían saberlo y probablemente se actualice de último :)

SECTION 2

Mecánica Newtoniana para una partícula

A continuación se expresará la mecánica de partículas.

SUBSECTION 2.1

Leyes de Newton

Comenzando con algunos conceptos claves para el desarrollo de las leyes de Newton:

Definition 1 (**Fuerza**) Fuerza es el nombre que se le da a la interacción entre un cuerpo y su entorno, la cual es capaz de afectar el estado del cuerpo. Las fuerzas son cantidades vectoriales, por lo que poseen magnitud y dirección; su magnitud es dada en unidades de newton N.

Definition 2 (**Momentum Lineal**) Momentum lineal o cantidad de movimiento, ambos se refieren a una cantidad vectorial dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

Las leyes de Newton tal y como se expresarán a continuación son unicamente válidas para sistemas de referencias **inerciales**, es decir, sistemas de referencia que no poseen ningun tipo de aceleración.

Un estado de **equilibrio** se refiere a que el cuerpo o sistema de interés se encuentra movientodose con velocidad lineal constante (**equilibrio dinámico**) o se encuentra en reposo (**equilibrio estático**).

Definition 3 (**Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia**) Un cuerpo mantiene su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta diferente de cero lo perturbe. Dicho de otra forma, un cuerpo siempre mantendrá su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta llegue a afectarlo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \tag{2.2}$$

Definition 4 (**Segunda Ley de Newton**) Un cuerpo que experimenta una fuerza neta diferente de cero, tendrá como resultado un cambio en su momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \tag{2.3}$$

Suponiendo que la masa es constante para el cuerpo de interés, la primera ley de Newton también se puede escribir de la forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.4}$$

Definition 5 (**Tercera Ley de Newton o Ley de Acción-Reacción**) Considere dos cuerpos denotados como A y B que presentan algún tipo de interacción entre sí, se dice que: Toda **acción** que realice el cuerpo A sobre el cuerpo B le corresponde una **reacción** que proveniente del cuerpo B. Estas **acciones** y **reacciones** corresponden a fuerzas internas del sistema (cuerpos A y B) debido a su interacción, dichas fuerzas poseen la misma magnitud y su dirección es contraria.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{2.5}$$

Para trabajar con esta ley hay que tomar cuenta cierta ambiguedad que nos lleva a los siguientes enunciados de la tercera ley:

- **Enunciado Fuerte:** Los vectores correspondientes a las fuerzas de **acción** y **reacción** se encuentran sobre una misma recta, es decir, sí se conocen las direcciones de las fuerzas de **acción** y **reacción** es posible trazar una recta (conocida como línea de acción) que una los vectores de fuerzas y sea paralela a estos. Ver Figura 1
- **Enunciado Débil:** No ocurre lo anterior. Es imposible unir los vectores de las fuerzas de **acción** y **reacción** por medio de una recta que sea paralela a ambos vectores. Ver Figura 2

Además de lo anterior, es preciso destacar que la **Tercera Ley de Newton** no es una ley general de la naturaleza y se puede establecer que toda fuerza que dependa de velocidades no obedecerá esta ley.

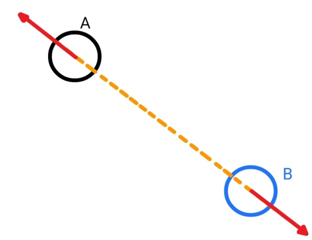


Figura 1. Situación del enunciado fuerte

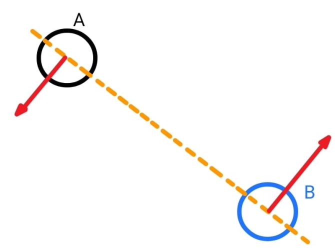


Figura 2. Situación del enunciado débil

SUBSECTION 2.2
Trabajo y Energía

Definition 6 (**Trabajo**) Corresponde a la cantidad generada al tomar el producto punto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo a lo largo de todo su desplazamiento desplazamiento desde una punto A a un punto B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.6}$$

Definition 7 (**Fuerza conservativa**) Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si se puede escribir de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{2.7}$$

A partir de las Ecuaciones (2.3) y (2.6):

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Ejerciendo el producto punto y trabajando por índices:

$$W = \int_A^B \sum_{i=1}^{3} \frac{dp_i}{dt} dr_i$$

Suponiendo que la masa es constante, la derivada temporal del momentum lineal es de la forma: $\frac{dp_i}{dt} = m\frac{dv_i}{dt}$:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i \frac{dt}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B dv_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{= v_i} \cancelto{1}{\frac{dt}{dt}} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B v_i dv_i = \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{1}{2} d\left(v_i^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 \bigg|_A^B = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iB}^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iA}^2
\end{aligned}
$$

Definition 8 (**Energía Cinética Traslacional**) Corresponde al trabajo necesario para comenzar a mover un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez v.

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} v_i^2 \tag{2.8}$$

Theorem 1 (**Trabajo - Energía Cinética**)

$$W = \Delta T \tag{2.9}$$

Regresando a la definición Ecuación (2.6) pero ahora tomando la fuerza que es ejercida sobre el cuerpo como una fuerza conservativa, Ecuación (2.7).

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -V_B + V_A$$

Definition 9 (**Energía Potencial**) Corresponde a la capacidad de un cuerpo de ejercer trabajo se denomina energía potencial. Ahora se presentan algunos ejemplos de energías potenciales.

$$V = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2} k x^2 \\ \frac{-GMm}{r} \\ \frac{-K q_1 q_2}{r} \\ \vdots \end{cases} \tag{2.10}$$

Theorem 2 (**Trabajo - Energía Potencial**)

$$W = -\Delta V \tag{2.11}$$

Definition 10 (**Energía de un sistema**) Ante la suposición de que el sistema a tratar tienen masa constante y es un sistema conservativo, la energía total es de la forma:

$$E = T + V \tag{2.12}$$

SUBSECTION 2.3

Análogo rotacional de las leyes de Newton

Ahora se presentarán algunos conceptos importantes y ecuaciones para una descripción sencilla de la mecánica de partículas en rotación. Nuevamente se comenzará por los conceptos básicos análogos a los usados en las leyes de Newton y posteriormente se darán las leyes análogas.

Primero deduciendo una relación entre la velocidad lineal $\vec{v}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$:

- Se sabe que la velocidad angular es por definición

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \tag{2.13}$$

respecto a un eje instantáneo de rotación. Siempre será posible establecer una velocidad angular para un cuerpo en movimiento arbitrário, ya que en cada instante el cuerpo se mueve con una trayectoría circular respecto a un eje de rotación; esto se puede observar en la Figura 3.

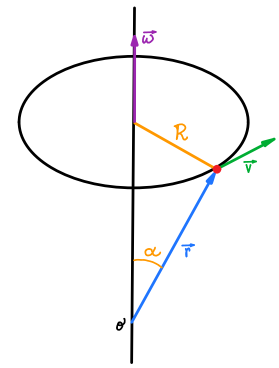


Figura 3. Relación entre $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$

Obsevando la rotación infinitesimal presente en Figura 4, se puede concluir la siguiente relación [1]

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}$$

[1] *Recuerde que antes se era bien conocida la relación $v = \omega R$ para una partícula en un movimiento circular de radio R en un plano.*

En este caso, al relacionar con $\vec{r}$, se tiene:

$$v = wrsen\,(\alpha)$$

Dividiente entre δt:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{\delta\vec{\theta}}{\delta t} \times \vec{r}$$

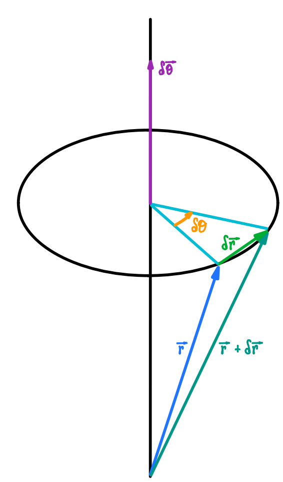
Lo cual, al considerar $\delta t \to 0$, se convierte en:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}$$

Definition 11 (**Relación velocida Lineal - Angular**) Para un cuerpo en un movimiento arbitrário se cumple lo siguiente para cada instante del movimiento.

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{2.14}$$

Recuerde que el eje de rotación instantáneo puede cambiar si el movimiento no es una rotación fija.



Definition 12 (**Torque**) El torque es el análogo de la fuerza para las rotaciones. Por lo que el torque corresponde a una interacción del sistema con su entorno que es capaz de generar un cambio en el estado *rotacional* del sistema, dicha interacción es mediada por la presencia de una o más fuerzas y se define como:

$$\vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.15}$$

Figura 4. Relación diferencial entre $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$

Como tal, el torque depende del origen que se este utilizando, debido a su dependencia con el vector posición $\vec{r}$. Al torque es común llamarlo en algunos campos como: torca, momento de fuerza o simplemente momento.

Definition 13 (**Momentum Angular**) Corresponde al análogo angular del momentum lineal. Es una cantidad vectorial que para el caso de partículas se define como:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})^{2} = m\left[\vec{r}^{\,2}\vec{\omega} - \vec{r}\,(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\right] \tag{2.16}$$

[2] $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

De forma similar al torque, el momentum angular depende del origen desde el que se decida medir.

En la amplia gama de casos en que se trabaja con partículas, se podrá reconocer que el producto $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ y los vectores $\vec{r}$ y $\vec{\omega}$ apuntan en una única dirección, por lo que el momentum angular tomará la siguiente forma:

$$L_{\mathcal{O}q} = mr^2\omega_q \tag{2.17}$$

La **masa** *inercial* y los **momentos de inercia** están intimamente relacionados, ambos son medidas de que tan difícil es mover un cuerpo de cierta forma.

Definition 14 (**Momentos de Inercia**) La inercia es el análogo rotacional de la masa y corresponde a una medida que indica que tan difícil es girar un cuerpo respecto a cada eje (A mayor inercia más complicado es girar el objeto). Girando un cuerpo es posible concluir que se pueden generar rotaciones respecto a 3 ejes y por lo tanto **existen 3 momentos de inercia**, los cuales no necesariamente serán iguales, esto dependerá de la distribución de la masa respecto a cada eje.
En el caso de partículas puntuales, la inercia se define como:

$$I_q^{\mathcal{O}} = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2.18}$$

Donde r_i corresponde a la distancia que hay entre el eje de rotación y la masa puntual.

El termino *inercial* es para hacer una distinción entre la **masa inercial** (La masa dada por la aceleración de un cuerpo al estar bajo el efecto de una fuerza) y la **masa gravitacional** (La masa determinada por las fuerzas gravitacionales entre el cuerpo de interés y otros cuerpos), a pesar de que ambas cantidades **son iguales** por el principio de equivalencia.

Definition 15 (**Primera Ley de Newton análoga rotacional**) De forma similar a la Primera Ley de Newton, este principio análogo estable que un cuerpo en un estado rotacional de equilibrio tenderá a mantener dicho estado hasta que un torque neto diferente de cero lo perturbe.

$$\sum \vec{N}_{\mathcal{O}} = 0 \tag{2.19}$$

Definition 16 (**Segunda Ley de Newton análoga rotacional**)

$$\sum \vec{N}_{\mathcal{O}} = \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} = \dot{\vec{L}}_{\mathcal{O}} \tag{2.20}$$

Manteniendo la inercia constante, la ecuación se escribe de la forma:

$$\sum N_q = I_q \alpha_q \tag{2.21}$$

Donde el subíndice denota el eje respecto al cual se está realizando la suma de torques.

Definition 17 (**Tercera Ley de Newton análoga rotacional**) Este principio se enuncia de forma análoga a la Tercera Ley de Newton original bajo la salvedad de que en vez de trabajar con fuerzas, este trabaja con torques.

$$\vec{N}_{AB} = -\vec{N}_{BA} \tag{2.22}$$

Definition 18 (**Energía Cinética Rotacional**) Corresponde al trabajo necesario para hacer rotar un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez angular ω.

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_q \omega^2 \tag{2.23}$$

La forma de obtener esta expresión es similar al procedimiento que se realizó con la energía cinética traslacional.

Subsection 2.4

Teoremas de Conservación

A continuación se van a enunciar los teoremas de conservación bajo la suposición de masa constante y que el sistema a tratar no posee fuerzas disipativas.

Theorem 3 (**Conservación de la Energía**) Una vez ya conocida la expresión para la energía del sistema Ecuación (2.12), basta con derivarla con respecto al tiempo para determinar que restricciones se plantean para la conservación de dicha cantidad:

$$\begin{aligned}
E = T + V \Rightarrow \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \text{ ; A partir de Ecuación (2.8) y suponiendo } V = V(\vec{r}, t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}\right) + \overbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}}^{=\vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}}} + \cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial t}} \; ; \begin{array}{c}\text{Sistema} \\ \text{conservativo}\end{array} \Rightarrow V = V(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2} m \left(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right) + \vec{\nabla} V \dot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V \dot{\vec{r}} = \left[m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V\right] \dot{\vec{r}} \\
&= \left[\vec{F} + \vec{\nabla} V\right] \cdot \dot{\vec{r}}
\end{aligned}$$

Para que la energía se conserve se cumple:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \left[\vec{F} + \vec{\nabla} V\right] \cdot \dot{\vec{r}} = 0 &\Rightarrow \vec{F} + \vec{\nabla} V = 0 \\
&\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{2.24}$$

Theorem 4 (**Conservación de Momentum Lineal**) Conociendo ya la expresión de la Ecuación (2.1), se derivará con respecto al tiempo para determinar las condiciones en que se conserva dicha cantidad:

$$\begin{aligned}\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} &= \cancelto{0}{\frac{dm}{dt}}\dot{\vec{r}} + m\ddot{\vec{r}}\\ &= m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\end{aligned}$$

Para que el momentum lineal se conserve se cumple:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{0}$$

$$\therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \tag{2.25}$$

Theorem 5 (**Conservación de Momentum de Angular**) A partir de la expresión de la Ecuación (2.16) y derivandola respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} &= \overbrace{\dot{\vec{r}}\times\vec{p}}^{\dot{\vec{r}}\,\parallel\,\vec{p}} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}}\\ &= \vec{r}\times\dot{\vec{p}} \quad \text{; Por la Ecuación (2.3)}\\ &= \vec{r}\times\vec{F} \quad \text{; Por la Ecuación (2.15)}\\ &= \vec{N}_{\mathcal{O}}\end{aligned}$$

Para que se conserve el momentum angular se debe cumplir:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{0}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{0} \tag{2.26}$$

SUBSECTION 2.5

Complementos de la conservación de la energía

Definition 19 (**Condiciones de estabilidad**) Al conservarse la energía en un sistema, es posible encontrarse con que la partícula de interés se encuentra en un punto de equilibrio de algún tipo (Estables u Inestables), alrededor de estos puntos es posible obtener mucha información acerca del comportamiento del sistema. Las siguientes son las condiciones para determinar que es un punto de equilibrio y clasificarlo.

- **Pundo de equilibrio:** Se define como un punto en algun potencial que cumple con:

$$\vec{\nabla} V\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0 \tag{2.27}$$

  - Punto de Equilibrio Estable: De colocar una partícula en reposo en este punto y sin la aparición de fuerzas a su alrededor, la partícula permanecerá en equilibrio en dicho punto por siempre. Ahora, si esta es colocada en reposo en los alrededores de este punto o desde el punto de equilibrio se le ejerce una fuerza que la obligue a moverse, la partícula comenzará un movimiento en dirección a este punto y se moverá perpetuamente a su alrededor siempre que $E =$ constante. La forma de determinar los puntos estables:

$$\vec{\nabla}^2 V\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} > 0 \tag{2.28}$$

  - Punto de Equilibrio Inestable: De forma similar al anterior, si se coloca una partícula en reposo en este punto y sin la aparición de fuerzas a su alrededor, la partícula permanecerá en equilibrio en dicho punto por siempre. No obstante, de aparecer algún tipo de fuerza o colocarla en los alrededores del punto de equilibrio inestable, la partícula se encontrará en un movimiento unicamente limitado por la cantidad de energía del sistema y es posible que nunca vuelva a pasar por dicho punto. La forma de encontrar los puntos inestables:

$$\vec{\nabla}^2 V\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} < 0 \tag{2.29}$$

  - Punto No concluyente:

$$\vec{\nabla}^2 V\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0 \tag{2.30}$$

    Es necesario comprobar derivadas de orden superior bajo los mismos criterios para determinar estabilidad u inestabilidad de la posición de equilibrio. De obtenerse $\vec{\nabla}^3 V\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_{eq}} = 0$, es necesario continar con orden 4 en la derivación, comprobar criterios y, de ser necesario, repetir los pasos en derivaciones superiores.

A continuación se muestra un ejemplo de como se aplican estos conceptos en un caso unidimensional.

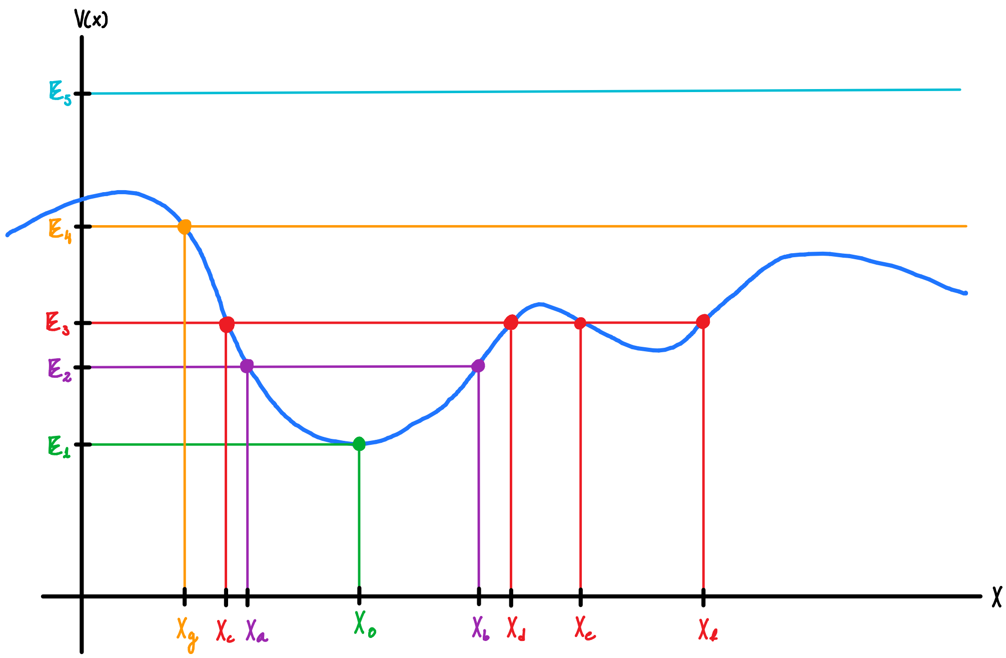


Figura 5. Ejemplo en una dimensión de las condiciones de estabilidad.
La línea azul corresponde a la energía potencial que siente la partícula en cada punto. Se colocan un total de 5 energías totales para el sistema cada una determinada por un color para mayor facilidad. Junto a esto, cada intersección que tienen las rectas de energía con la curva de potencial posee un punto y también su respectiva ubicación en el eje X acorde al color de la energía total.

Al observar la Figura 5, se determina lo siguente:

- $x = x_0$ corresponde a un punto de equilibrio estable.
- Si se coloca una partícula en $x = x_0$ en energía E_1 , esta permancerá en reposo.
- Para la energía E_2 , la partícula se moverá de forma periódica en $x_a < x < x_b$.
- Para la energía E_3, la partícula se moverá de forma periódica en $x_c < x < x_d$ ó $x_e < x < x_f$. Esto es excluyente cabe destacar, la partícula se movera en uno o en el otro foso.
- Hay un punto de equilibrio inestable entre los puntos x_d y x_e, al igual que entre $x = 0$ y x_g.
- Para la energía E_4, la partícula se moverá de forma periódica en $x_g < x < +\infty$. La partícula va a $+\infty$, vuelve a x_g y regresa a $+\infty$, completando un ciclo.
- Para la energía E_5, el movimiento no está limitado por la energía potencial que siente la partícula. Esta se puede mover libremente pero su velocidad va a depender de la posición en la que se encuentre.

Subsection 2.6

Problemas resueltos

Problema 1. (Thornton 2.2)

2-2. A particle of mass m is constrained to move on the surface of a sphere of radius R by an applied force $\mathbf{F}(\theta, \phi)$. Write the equation of motion.

Aceleración en coordenadas esféricas

$$\vec{a}(t) = (\cancelto{0}{\ddot r} - r\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta - r\dot\theta^2)\hat e_r + (\cancelto{0}{2\dot r\dot\phi \operatorname{sen}\theta} + r\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2r\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + (\cancelto{0}{2\dot r\dot\theta} - r\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\ddot\theta)\hat e_\theta$$

$$= (-R\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta - R\dot\theta^2)\hat e_r + (R\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2R\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + (-R\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + R\ddot\theta)\hat e_\theta$$

$$= -R(+\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2)\hat e_r + R(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + R(-\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \ddot\theta)\hat e_\theta \quad ; \vec F = F_r e_r + F_\phi e_\phi + F_\theta e_\theta$$

$$\sum \vec F = m\vec a(t) = -mR(+\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2)\hat e_r + mR(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + mR(-\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \ddot\theta)\hat e_\theta$$

Respuesta para la pregunta

$$\Longrightarrow \cancel{F_r e_r} + F_\phi e_\phi + F_\theta e_\theta = \cancel{-mR(+\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2)\hat e_r} + mR(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + mR(-\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \ddot\theta)\hat e_\theta$$

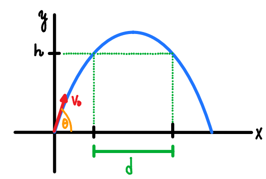
$$\Longrightarrow \vec F(\phi,\theta) = mR(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta)\hat e_\phi + mR(-\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \ddot\theta)\hat e_\theta$$

← Respuesta según el solucionario, buscando la forma de la fuerza desconocida

Problema 2. (Thornton 2.8)

2-8. A projectile is fired with a velocity v_0 such that it passes through two points both a distance h above the horizontal. Show that if the gun is adjusted for maximum range, the separation of the points is

$$d = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 4gh}$$



$$y_f = V_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{\text{Tiempo de vuelo}} 0 = V_0\operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t\left(\frac{1}{2}gt - V_0\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \Longrightarrow t_1 = 0 \text{ y } t_2 = \frac{2V_0\operatorname{sen}\theta}{g}$$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Rango máximo: $R = V_0\cos\theta\, t = V_0\cos\theta \frac{2V_0\operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{V_0^2\operatorname{sen}(2\theta)}{g} \Longrightarrow \frac{dR}{d\theta} = \frac{2V_0^2\cos(2\theta)}{g} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}$ Ángulo de máximo alcance

$$h = V_0\operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{V_0}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow 0 = +h - \frac{V_0}{\sqrt{2}}t + \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \frac{\frac{V_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{\sqrt{2}^2} - 4\cdot\frac{1}{2}gh}}{2\cdot\frac{1}{2}g} = \frac{\frac{V_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{2} - 2gh}}{g}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 4gh}}{g}$$ Tiempo para alcanzar una misma altura en la parábola

$$d = X(t_+) - X(t_-) = V_0\cos\theta\, t_+ - V_0\cos\theta\, t_- = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cancel{V_0} + \sqrt{V_0^2 - 4gh}}{g} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cancel{V_0} - \sqrt{V_0^2 - 4gh}}{g}\right) = \frac{V_0}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{2}\sqrt{V_0^2 - 4gh}}{g}$$

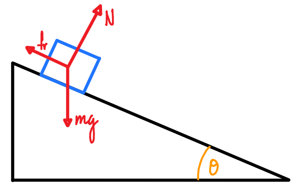
$$\Longrightarrow d = \frac{V_0}{g}\sqrt{V_0^2 - 4gh}$$

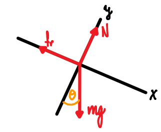
Problema 3. (Thornton 2.15)

2-15. A particle of mass m slides down an inclined plane under the influence of gravity. If the motion is resisted by a force $f = kmv^2$, show that the time required to move a distance d after starting from rest is

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{kg \sin\theta}}$$

where θ is the angle of inclination of the plane.





$$\sum F_x = mg\,sen\theta - Kmv^2 = ma_x \Longrightarrow g\,sen\theta - Kv^2 = a_x = \frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow dv_x = g\,sen\theta - Kv_x^2\,dt \Longrightarrow \frac{dv_x}{g\,sen\theta - Kv_x^2} = dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^v \frac{dv_x}{g\,sen\theta - Kv_x^2} = \int_0^v \frac{1}{K}\frac{dv_x}{\frac{g\,sen\theta}{K} - v_x^2} = \int_0^t dt' = t \Longrightarrow t = \frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}}\tanh^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}}\right)$$

$$\Longrightarrow K\sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}\,t = \sqrt{Kg\,sen\theta}\,t = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}}\right) \Longrightarrow \tanh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t\right) = \frac{v}{\sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}} \Longrightarrow \sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}\tanh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t\right) = v$$

$$\Longrightarrow \int_0^t \sqrt{\frac{g\,sen\theta}{K}}\tanh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t'\right)dt' = \int_0^d dx = d \Longrightarrow \frac{1}{K}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t\right)\right] = d \Longrightarrow \ln\left[\cosh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t\right)\right] = Kd$$

$$\Longrightarrow \cosh\left(\sqrt{Kg\,sen\theta}\,t\right) = e^{Kd} \Longrightarrow \sqrt{Kg\,sen\theta}\,t = \cosh^{-1}\left(e^{Kd}\right) \Longrightarrow t = \frac{\cosh^{-1}\left(e^{Kd}\right)}{\sqrt{Kg\,sen\theta}}$$

Problema 4. (Taylor 2.14)

2.14 ★★★ Use the method of Problem 2.7 to solve the following: A mass m is constrained to move along the x axis subject to a force $F(v) = -F_o e^{v/V}$, where F_o and V are constants. **(a)** Find $v(t)$ if the initial velocity is $v_o > 0$ at time $t = 0$. **(b)** At what time does it come instantaneously to rest? **(c)** By integrating $v(t)$, you can find $x(t)$. Do this and find how far the mass travels before coming instantaneously to rest.

a) $F(v) = -F_o e^{\frac{v}{V}} = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \int_0^t -\frac{F_o}{m}\,dt = \int_{v_o}^{v} e^{-\frac{v}{V}}\,dv \Longrightarrow -\frac{F_o}{m}t = -V\left(e^{-\frac{v}{V}} - e^{-\frac{v_o}{V}}\right) \Longrightarrow \frac{F_o}{Vm}t = e^{-\frac{v}{V}} - e^{-\frac{v_o}{V}}$

$\Longrightarrow e^{-\frac{v}{V}} = \frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}} \Longrightarrow -v = V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) \Longrightarrow v = -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)$

b) Reposo $\Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}} = 1 \Longrightarrow \frac{F_o}{Vm}t = 1 - e^{-\frac{v_o}{V}} \Longrightarrow t_r = \frac{\left(1 - e^{-\frac{v_o}{V}}\right)Vm}{F_o}$

c) $\frac{dx}{dt} = -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) \Longrightarrow \int_0^x dx = \int_0^t -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)dt$

* $\int_0^t -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)dt \qquad u = \frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}$ y $du = \frac{F_o}{Vm}dt \Longrightarrow \frac{Vm}{F_o}du = dt$

$\Longrightarrow \int_0^t -V\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)dt = \int_{e^{-\frac{v_o}{V}}}^{\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}} -\frac{V^2m}{F_o}\ln(u)\,du = -\frac{V^2m}{F_o}\left\{\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)\left[\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) - 1\right] - e^{-\frac{v_o}{V}}\left[\ln\left(e^{-\frac{v_o}{V}}\right) - 1\right]\right\}$

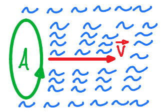
$= -\frac{V^2m}{F_o}\left\{\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)\left[\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) - 1\right] - e^{-\frac{v_o}{V}}\left[-\frac{v_o}{V} - 1\right]\right\}$

$\Longrightarrow X = -\frac{V^2m}{F_o}\left\{\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right)\left[\ln\left(\frac{F_o}{Vm}t + e^{-\frac{v_o}{V}}\right) - 1\right] - e^{-\frac{v_o}{V}}\left[-\frac{v_o}{V} - 1\right]\right\}$

$\Longrightarrow X(t_r) = -\frac{V^2m}{F_o}\left\{\left(\frac{\cancel{F_o}}{\cancel{Vm}}\frac{\left(1 - \cancel{e^{-\frac{v_o}{V}}}\right)\cancel{Vm}}{\cancel{F_o}} + \cancel{e^{-\frac{v_o}{V}}}\right)\left[\cancelto{0}{\ln\left(\frac{\cancel{F_o}}{\cancel{Vm}}\frac{\left(1 - \cancel{e^{-\frac{v_o}{V}}}\right)\cancel{Vm}}{\cancel{F_o}} + \cancel{e^{-\frac{v_o}{V}}}\right)} - 1\right] - e^{-\frac{v_o}{V}}\left[-\frac{v_o}{V} - 1\right]\right\}$

$= -\frac{V^2m}{F_o}\left\{1 \cdot -1 - e^{-\frac{v_o}{V}}\left[-\frac{v_o}{V} - 1\right]\right\} = +\frac{V^2m}{F_o}\left\{1 + e^{-\frac{v_o}{V}}\left[-\frac{v_o}{V} - 1\right]\right\}$

2.4 ★★ The origin of the quadratic drag force on any projectile in a fluid is the inertia of the fluid that the projectile sweeps up. **(a)** Assuming the projectile has a cross-sectional area A (normal to its velocity) and speed v, and that the density of the fluid is ϱ, show that the rate at which the projectile encounters fluid (mass/time) is $\varrho A v$. **(b)** Making the simplifying assumption that all of this fluid is accelerated to the speed v of the projectile, show that the net drag force on the projectile is $\varrho A v^2$. It is certainly not true that all the fluid that the projectile encounters is accelerated to the full speed v, but one might guess that the actual force would have the form



$$f_{\text{quad}} = \kappa \varrho A v^2 \tag{2.84}$$

where κ is a number less than 1, which would depend on the shape of the projectile, with κ small for a streamlined body, and larger for a body with a flat front end. This proves to be true, and for a sphere the factor κ is found to be $\kappa = 1/4$. **(c)** Show that (2.84) reproduces the form (2.3) for f_{quad}, with c given by (2.4) as $c = \gamma D^2$. Given that the density of air at STP is $\varrho = 1.29\ \text{kg/m}^3$ and that $\kappa = 1/4$ for a sphere, verify the value of γ given in (2.6).

$$f_{\text{quad}} = cv^2. \tag{2.3}$$

$$c = \gamma D^2 \tag{2.4}$$

$$\gamma = 0.25\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4. \tag{2.6}$$

a) Pensando que el área tranversal A permanece quieta y el fluido se mueve hacia A, se puede plantear

$$\mathcal{I} = \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint \rho v\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v r\, dr\, d\theta$$

$$= \pi r^2 \rho v = \rho v A = \frac{dm}{dt}$$

b) $$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m\cancel{\frac{dv}{dt}}^{\,V:\text{constante} \to 0} = \frac{dm}{dt} v = \rho v A v = \rho v^2 A$$

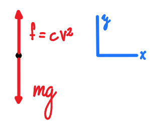
c) $$f_{quad} = \kappa \rho v^2 A \overset{\text{sphere}}{\Longrightarrow} \frac{1}{4}\rho v^2 \pi R^2 = \frac{1}{16}\rho v^2 \pi D^2 = cv^2 \Longrightarrow c = \frac{\rho \pi}{16} D^2 = \gamma D^2 \Longrightarrow \gamma = \frac{\rho\pi}{16} \approx 0{,}25$$

Problema 5. (Taylor 2.24)

2.24 ★ Consider a sphere (diameter D, density ϱ_{sph}) falling through air (density ϱ_{air}) and assume that the drag force is purely quadratic. **(a)** Use Equation (2.84) from Problem 2.4 (with $\kappa = 1/4$ for a sphere) to show that the terminal speed is

$$v_{\text{ter}} = \sqrt{\frac{8}{3} Dg \frac{\varrho_{\text{sph}}}{\varrho_{\text{air}}}}. \tag{2.88}$$

(b) Use this result to show that of two spheres of the same size, the denser one will eventually fall faster. **(c)** For two spheres of the same material, show that the larger will eventually fall faster.



$$m = \rho_{sph} V = \rho_{sph} \frac{4\pi R^3}{3} = \rho_{sph}\frac{\pi D^3}{6}$$

a) $$\sum F_y = \kappa \rho_{air} A v^2 - mg = ma_y \Longrightarrow \frac{1}{4}\rho_{air} v^2 \pi R^2 - mg = ma_y \Longrightarrow \frac{\rho_{air} v^2 \pi D^2}{16} - \rho_{sph}\frac{\pi D^3}{6} g = \rho_{sph}\frac{\pi D^3}{6} a_y$$

Velocidad terminal $a_y = 0 \Longrightarrow \dfrac{\rho_{air} v^2 \cancel{\pi D^2}}{16} - \rho_{sph}\dfrac{\cancel{\pi D^3}}{6} g = 0 \Longrightarrow \dfrac{\rho_{air} v^2}{16} = \rho_{sph}\dfrac{D}{6} g \Longrightarrow v_{ter} = \sqrt{\dfrac{8 D g}{3}\dfrac{\rho_{sph}}{\rho_{air}}}$

b) $\rho_{sph1} > \rho_{sph2}$

$$\Longrightarrow \frac{v_{ter1}}{v_{ter2}} = \frac{\sqrt{\frac{8Dg}{3}\frac{\rho_{sph1}}{\rho_{air}}}}{\sqrt{\frac{8Dg}{3}\frac{\rho_{sph2}}{\rho_{air}}}} = \sqrt{\frac{\rho_{sph1}}{\rho_{sph2}}} \Longrightarrow v_{ter1} = v_{ter}\sqrt{\frac{\rho_{sph1}}{\rho_{sph2}}} \quad \text{con} \quad \sqrt{\frac{\rho_{sph1}}{\rho_{sph2}}} > 1 \quad \text{ya que} \quad \rho_{sph1} > \rho_{sph2}$$

c) $D_1 > D_2$

$$\Longrightarrow \frac{v_{ter1}}{v_{ter2}} = \frac{\sqrt{\frac{8D_1 g}{3}\frac{\rho_{sph}}{\rho_{air}}}}{\sqrt{\frac{8D_2 g}{3}\frac{\rho_{sph}}{\rho_{air}}}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \Longrightarrow v_{ter1} = v_{ter}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \quad \text{con} \quad \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} > 1 \quad \text{ya que} \quad D_1 > D_2$$

Problema 6. (Taylor 2.28)

2.28 ★ A mass m has speed v_o at the origin and coasts along the x axis in a medium where the drag force is $F(v) = -cv^{3/2}$. Use the "$v\,dv/dx$ rule" (2.86) in Problem 2.12 to write the equation of motion in the separated form $m\,v\,dv/F(v) = dx$, and then integrate both sides to give x in terms of v (or vice versa). Show that it will eventually travel a distance $2m\sqrt{v_o}/c$.

$$\sum F_x = -cv^{3/2} = ma \Longrightarrow \frac{-cv^{3/2}}{m} = \frac{dv}{dt} \;;\; \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow \frac{-cv^{3/2}}{m} = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow \frac{-c}{m}dx = \frac{v}{v^{3/2}}dv = \frac{1}{\sqrt{v}}dv$$

$$\Longrightarrow \int_0^x \frac{-c}{m}dx = \int_{v_0}^{v}\frac{1}{\sqrt{v}}dv \Longrightarrow \frac{-c}{m}X = \int_{v_0}^{v}\frac{1}{\sqrt{v}}dv$$

$$\boxed{* \int_{v_0}^{v}\frac{1}{\sqrt{v}}dv = \int_{v_0}^{v} v^{-\frac{1}{2}}dv = \frac{v^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{v_0}^{v} = 2v^{\frac{1}{2}}\Big|_{v_0}^{v} = 2v^{1/2} - 2v_0^{1/2}}$$

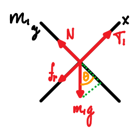
$$\Longrightarrow \frac{-c}{m}X = 2v^{1/2} - 2v_0^{1/2} \Longrightarrow \frac{-c}{2m}X = v^{1/2} - v_0^{1/2} \Longrightarrow v = \sqrt{v_0^{1/2} - \frac{c}{2m}X}^{\,4}$$

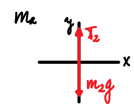
Como m está siendo acelerada en dirección contraria a su movimiento traslacional, entonces en algun punto $v = 0$

$$v = \sqrt{v_0^{1/2} - \frac{c}{2m}X}^{\,4} = 0 \Longrightarrow v_0^{1/2} - \frac{c}{2m}X = 0 \Longrightarrow X = \frac{2m\sqrt{v_0}}{c} \quad //$$

Problema 7. (Thornton 2.32)

2-32. Two blocks of unequal mass are connected by a string over a smooth pulley (Figure 2-B). If the coefficient of kinetic friction is μ_k, what angle θ of the incline allows the masses to move at a constant speed?





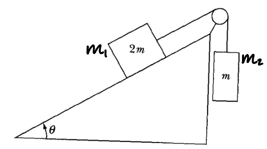


FIGURE 2-B Problem 2-32.

m_1

$$\sum F_{1x} = T_1 - f_r - m_1 g\,\text{sen}\theta = m_1 a_{1x}$$

$$\sum F_{1y} = N - m_1 g\cos\theta = m_1 \cancel{a_{1y}}^{\,0}$$ no hay movimiento en y

$$\Longrightarrow T - f_r - m_1 g\,\text{sen}\theta = m_1 a_{1x}$$

$$N = m_1 g\cos\theta \;;\; f_r = \mu_k N$$

$$\Longrightarrow T = \mu_k m_1 g\cos\theta - m_1 g\,\text{sen}\theta + m_1 a$$

$$= m_1(\mu_k g\cos\theta - g\,\text{sen}\theta + a)$$

m_2

$$\sum F_{2x} = 0$$

$$\sum F_{2y} = T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$\Longrightarrow T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

$$\Longrightarrow T = m_2(g - a)$$

Polea

$$\sum N_{O z} = -RT_1 + RT_2 = I\cancel{\alpha}^{\,0}$$

$$\Longrightarrow T_1 = T_2$$

* Condición $a_{1x} = -a_{2y} = a$

V: constante $\Longrightarrow a = 0$*

Uniendo equaciones $\Longrightarrow m_1(\mu_k g\cos\theta - g\,\text{sen} + \cancel{a}^{\,0}) = m_2(g - \cancel{a}^{\,0})$*

$$\Longrightarrow m_1(\mu_k \cancel{g}\cos\theta - \cancel{g}\,\text{sen}\theta) = m_2\cancel{g}$$

$$\Longrightarrow \mu_k\cos\theta - \text{sen}\theta = \frac{m_2}{m_1} \;;\; \cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} \Longrightarrow \mu_k\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} - \text{sen}\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\Longrightarrow \mu_k^2(1 - \text{sen}^2\theta) = \left(\frac{m_2}{m_1} + \text{sen}\theta\right)^2 \Longrightarrow \mu_k^2 - \mu_k^2\,\text{sen}^2\theta = \frac{m_2^2}{m_1^2} + 2\frac{m_2}{m_1}\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta$$

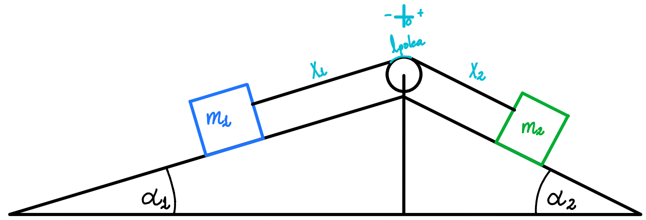
$$\Longrightarrow \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - \mu_k^2\right) + 2\frac{m_2}{m_1}\text{sen}\theta + \text{sen}^2\theta\,(1 + \mu_k^2) = 0 \Longrightarrow \text{sen}\theta = \frac{-2\frac{m_2}{m_1} \pm \sqrt{4\frac{m_2^2}{m_1^2} - 4(1 + \mu_k^2)\left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - \mu_k^2\right)}}{2(1 + \mu_k^2)}$$ con $m_1 = 2m_2 = 2m$

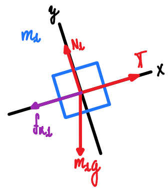
$$\Longrightarrow \text{sen}\theta = \frac{-\cancel{2}\frac{\cancel{m}}{\cancel{2}\cancel{m}} \pm \sqrt{\cancel{4}\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{4m^2}} - 4(1 + \mu_k^2)\left(\frac{\cancel{m^2}}{4\cancel{m^2}} - \mu_k^2\right)}}{2(1 + \mu_k^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + \mu_k^2)\left(\frac{1}{4} - \mu_k^2\right)}}{2(1 + \mu_k^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3\mu_k^2 + 4\mu_k^2}}{2(1 + \mu_k^2)} \quad //$$

Problema 8.

Considere dos masas m_1 y m_2 colocadas en un doble plano inclinado, con ángulos α_1 y α_2, respectivamente. Los cuerpos están unidos por medio de una cuerda y polea completamente ideales y sin masa apreciable.

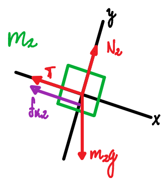
1. Determine la aceleración de cada bloque sobre el plano, si no existe fricción entre ellos y el doble plano inclinando.
2. Determine la aceleración de cada bloque sobre el plano, si el coeficiente de fricción cinético entre ellos y el doble plano inclinando es el mismo (μ_k).
3. ¿Cómo cambia el resultado si el coeficiente es distinto?





$$\sum F_{1x} = T - f_{k1} - m_1 g \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = m_1 a_{1x}$$

$$\sum F_{1y} = N_1 - m_1 g \cos\alpha_1 = \cancel{m_1 a_{1y}}^{\,0}$$



$$\sum F_{2x} = -T - f_{k2} + m_2 g \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = m_2 a_{2x}$$

$$\sum F_{2y} = N_2 - m_2 g \cos\alpha_2 = \cancel{m_2 a_{2y}}^{\,0}$$

* Largo de la cuerda: $l = -X_1 + l_{polea} + X_2$, derivando respecto t

$$\Longrightarrow 0 = -\dot{X}_1 + \dot{X}_2 \xRightarrow{\text{derivando}} 0 = -\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2 \Longrightarrow \ddot{X}_1 = +\ddot{X}_2$$

* Ninguno de los cuerpos se va a mover en sus ejes y, permanecen en reposo en este eje, por lo que

$$a_{1y} = a_{2y} = 0$$

* La fricción cinética se define como: $f_k = N\mu_k$

Aplicando lo anterior se obtiene:

$$N_1 - m_1 g\cos\alpha_1 = 0 \Longrightarrow N_1 = m_1 g\cos\alpha_1 \qquad \Longrightarrow T - \mu_{k1} m_1 g\cos\alpha_1 - m_1 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = m_1 a_x$$

$$N_2 - m_2 g\cos\alpha_2 = 0 \Longrightarrow N_2 = m_2 g\cos\alpha_2 \qquad \Longrightarrow -T - \mu_{k2} m_2 g\cos\alpha_2 + m_2 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = m_2 a_x$$

* Hay que eliminar la variable T

$$\overset{*}{\Longrightarrow} m_1 a_x + \mu_{k1} m_1 g\cos\alpha_1 + m_1 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = -\mu_{k2} m_2 g\cos\alpha_2 + m_2 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 - m_2 a_x$$

$$\Longrightarrow a_x(m_1 + m_2) = -\mu_{k2} m_2 g\cos\alpha_2 + m_2 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 - \mu_{k1} m_1 g\cos\alpha_1 - m_1 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = m_2 g(-\mu_{k2}\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_2) - m_1 g(\mu_{k1}\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1)$$

$$\Longrightarrow a_x = \frac{m_2 g(-\mu_{k2}\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_2) - m_1 g(\mu_{k1}\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1)}{(m_1 + m_2)}$$

1) $\mu_{k1} = \mu_{k2} = 0 \Longrightarrow a_x = \dfrac{m_2 g(\cancel{-\mu_{k2}\cos\alpha_2}^{\,0} + \mathrm{sen}\,\alpha_2) - m_1 g(\cancel{\mu_{k1}\cos\alpha_1}^{\,0} + \mathrm{sen}\,\alpha_1)}{(m_1 + m_2)} = \dfrac{m_2 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 - m_1 g\,\mathrm{sen}\,\alpha_1}{(m_1 + m_2)}$ //

2) $\mu_{k1} = \mu_{k2} = \mu_k \neq 0 \Longrightarrow a_x = \dfrac{m_2 g(-\mu_k\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_2) - m_1 g(\mu_k\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1)}{(m_1 + m_2)}$ //

3) $\mu_{k1} \neq \mu_{k2} \neq 0 \Longrightarrow a_x = \dfrac{m_2 g(-\mu_{k2}\cos\alpha_2 + \mathrm{sen}\,\alpha_2) - m_1 g(\mu_{k1}\cos\alpha_1 + \mathrm{sen}\,\alpha_1)}{(m_1 + m_2)}$ //

Problema 9.

Considere una partícula que percibe una fuerza angular solamente, de la forma $F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$. Demuestre que $r = Ae^{\theta} + Be^{-\theta}$, donde A y B son constantes, determinadas por las condiciones iniciales.

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_\phi \implies \vec{F}_\phi = m\ddot{\vec{r}} \implies \cancel{2m\dot{r}}\dot{\phi} = m(r\ddot{\phi} + \cancel{2\dot{r}}\dot{\phi}) \implies mr\ddot{\phi} = mr\frac{d\dot{\phi}}{dt} = 0 \implies \dot{\phi} = \text{constante} = c$$

$$\implies \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho c^2)\hat{e}_\rho \implies \ddot{\rho} - \rho c^2 = 0 \implies \rho = Ae^{ct} + B^{-ct} \implies \rho = Ae^{\phi} + B^{-\phi}$$

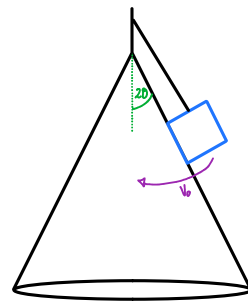
Aceleración en $\hat{e}_\rho$ igual a cero

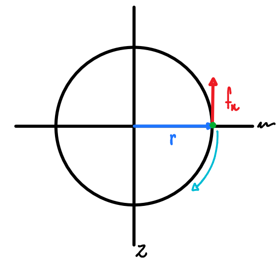
$m^2 - c^2 = 0$

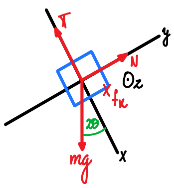
$m^2 = c^2 \Rightarrow m = \pm c$

Problema 10.

Un cono subtiende un ángulo 2θ. Un bloque de masa m está conectado a la punta por una cuerda sin masa y se mueve en un círculo horizontal de radio R alrededor de la superficie externa. Si la rapidez inicial es v_0, y si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el cono es μ_k, ¿cuánto tiempo tarda el bloque en detenerse?







$$\sum \vec{F}_x = -T + mg\cos(2\theta) = 0 \implies T = mg\cos(2\theta)$$

$$\sum \vec{F}_y = N - mg\,\text{sen}(2\theta) = 0 \implies N = mg\,\text{sen}(2\theta)$$

$$\sum \vec{F}_z = -f_k = ma_z \implies -\mu_k mg\,\text{sen}(2\theta) = ma_z \implies a_z = -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)$$

En el instante en que m se halla en un punto preciso

Durante el giro de m, la fricción estará en la dirección tangencial al círculo horizontal por el que se mueve m.

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \implies -f_k\hat{e}_\phi = m\ddot{\vec{r}} \implies -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)\hat{e}_\phi = \vec{a} \implies -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta) = \frac{d\dot{\phi}}{dt} \implies \dot{\phi} - v_0 = -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)t$$

$\implies \dot{\phi} = -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)t + v_0$; La partícula se detiene cuando $\dot{\phi} = 0$

$$\implies 0 = -\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)t + v_0 \implies t = \frac{v_0}{\mu_k g\,\text{sen}(2\theta)}$$

Problema 11.

El bloque A tiene una masa de 25 kg y el bloque B de 15 kg. El coeficiente de fricción cinético entre todas las superficies en contancto es de 0.15. Sabiendo que el ángulo del plano inclinado es de 25°. Una fuerza horizontal $\vec{P}$ jala al cuerpo A hacia abajo del plano inclinado, con una magnitud de 250 N y es capaz de acelerar al bloque B, determine la aceleración de cada bloque.

Se supone polea perfecta y cuerda perfecta

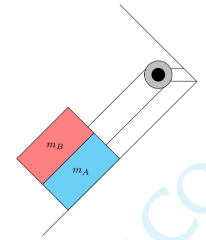
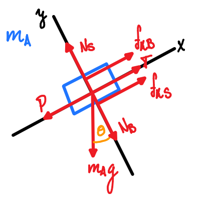


Figura 1: Configuración del problema.



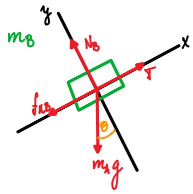
Para m_A:

$$\sum F_{Ax} = T - m_A g\,\text{sen}\theta + f_{kS} + f_{kB} - P = m_A a_{Ax} \quad (1)$$

$$\sum F_{Ay} = N_S - m_A g\cos\theta - N_B = m_A \cancel{a_{Ay}}^{\,0} \Longrightarrow N_S = m_A g\cos\theta + N_B$$

Los bloques no poseen movimiento en el eje y del marco *

$$\Longrightarrow N_S = (m_A + m_B) g\cos\theta$$



Para m_B:

$$\sum F_{Bx} = T - m_B g\,\text{sen}\theta - f_{kB} = m_B a_{Bx} \quad (2)$$

$$\sum F_{By} = N_B - m_B g\cos\theta = m_B \cancel{a_{By}}^{\,0} \Longrightarrow N_B = m_B g\cos\theta$$

Despejando T de 1 y 2:

$$(1) \Longrightarrow T = m_A g\,\text{sen}\theta - f_{kS} - f_{kB} + P + m_A a_{Ax}$$

$$= m_A g\,\text{sen}\theta - \mu_k (m_A + m_B) g\cos\theta - \mu_k m_B g\cos\theta + P + m_A a_{Ax}$$

La fricción cinética se define como: $f_k = \mu_k N$

$$\Longrightarrow f_{kB} = \mu_k N_B = \mu_k m_B g\cos\theta$$

$$\Longrightarrow f_{kS} = \mu_k N_S = \mu_k (m_A + m_B) g\cos\theta$$

$$(2) \Longrightarrow T = m_B g\,\text{sen}\theta + f_{kB} + m_B a_{Bx} = m_B g\,\text{sen}\theta + \mu_k m_B g\cos\theta + m_B a_{Bx}$$

Largo de la cuerda l

$$l = -X_B - X_A + C_p$$

Derivando respecto a t $\Longrightarrow 0 = -\dot{X}_B - \dot{X}_A$

De nuevo $\Longrightarrow 0 = -\ddot{X}_B - \ddot{X}_A$

$$\Longrightarrow -\ddot{X}_A = \ddot{X}_B$$

Igualando 1 y 2:

$$\Longrightarrow m_A g\,\text{sen}\theta - \mu_k (m_A + m_B) g\cos\theta - \mu_k m_B g\cos\theta + P + m_A a_{Ax} = m_B g\,\text{sen}\theta + \mu_k m_B g\cos\theta + m_B a_{Bx}$$

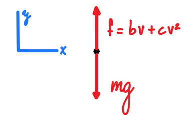
$$(m_A - m_B) g\,\text{sen}\theta - \mu_k (m_A + m_B) g\cos\theta - 2\mu_k m_B g\cos\theta + P = m_B a_{Bx} - m_A a_{Ax} = a_B (m_A + m_B)$$

$$\Longrightarrow a_B = \frac{(m_A - m_B) g\,\text{sen}\theta - \mu_k (m_A + m_B) g\cos\theta - 2\mu_k m_B g\cos\theta + P}{(m_A + m_B)} = 4{,}95\ m/s^2$$

$$\Longrightarrow a_A = -a_B = -4{,}95\ m/s^2$$

Problema 12.

Determine la velocidad terminal cuando la fuerza de resistencia incluye los términos lineal y cuadrático.



$\sum F_y = bv + cv^2 - mg = ma_y$ La velocidad terminal se obtiene cuando $a_y = 0$.

$$\Longrightarrow bv + cv^2 - mg = 0 \Longrightarrow v_{ter} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c \cdot -mg}}{2c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4mgc}}{2c}$$

$$\Longrightarrow v_{ter} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4mgc}}{2c} \quad //$$

Problema 13. (Taylor 2.40)

2.40 ★★ Consider an object that is coasting horizontally (positive x direction) subject to a drag force $f = -bv - cv^2$. Write down Newton's second law for this object and solve for v by separating variables. Sketch the behavior of v as a function of t. Explain the time dependence for t large. (Which force term is dominant when t is large?)

$$\sum F_y = -bv_x - cv_x^2 = ma_x = m\frac{dv_x}{dt} \Longrightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{-bv_x - cv_x^2}{m} \Longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{bv_x' + cv_x'^2}\,dv_x' = \int_0^t -\frac{1}{m}\,dt' = -\frac{t}{m}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{bv_x' + cv_x'^2}\,dv_x' = \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{v_x'(b + cv_x')}\,dv_x' = \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{A}{v_x'} + \frac{B}{b + cv_x'}\,dv_x' \; * \Longrightarrow \frac{A}{v_x'} + \frac{B}{b + cv_x'} = \frac{1}{v_x'(b + cv_x')}$$

$$\Longrightarrow \frac{A(b + cv_x') + Bv_x'}{v_x'(b + cv_x')} = \frac{1}{v_x'(b + cv_x')} \Longrightarrow A(b + cv_x') + Bv_x' = 1 \Longrightarrow Ab + Acv_x' + Bv_x' = Ab + v_x'(Ac + B) = 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Ab = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{b} \\ Ac + B = 0 \Longrightarrow \frac{c}{b} + B = 0 \Longrightarrow B = -\frac{c}{b} \end{cases}$$

$$* \Longrightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{A}{v_x'} + \frac{B}{b + cv_x'}\,dv_x' = \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{bv_x'} - \frac{c}{b(b + cv_x')}\,dv_x' = \frac{1}{b}\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{1}{v_x'} - \frac{c}{b + cv_x'}\,dv_x'$$

$$= \frac{1}{b}\left[\ln(v_x')\Big|_{v_{0x}}^{v_x} - \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{c}{b + cv_x'}\,dv_x'\right]^{*}; \quad u = b + cv_x' \Longrightarrow du = c\,dv_x' \Longrightarrow \int \frac{c}{b + cv_x'}\,dv_x' = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + C = \ln(b + cv_x') + C$$

$$* \Longrightarrow \frac{1}{b}\left[\ln(v_x')\Big|_{v_{0x}}^{v_x} - \int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{c}{b + cv_x'}\,dv_x'\right] = \frac{1}{b}\left[\ln(v_x') - \ln(b + cv_x')\right]\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{v_x'}{b + cv_x'}\right)\Big|_{v_{0x}}^{v_x} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{v_x}{b + cv_x}\right) - \frac{1}{b}\ln\left(\frac{v_{0x}}{b + cv_{0x}}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{b}\ln\left(\frac{v_x}{b + cv_x}\right) - \frac{1}{b}\ln\left(\frac{v_{0x}}{b + cv_{0x}}\right) = -\frac{t}{m} \Longrightarrow \ln\left(\frac{v_x}{b + cv_x}\right) - \ln\left(\frac{v_{0x}}{b + cv_{0x}}\right) = \ln\left[\frac{(b + cv_{0x})v_x}{v_{0x}(b + cv_x)}\right] = -\frac{bt}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{(b + cv_{0x})v_x}{v_{0x}(b + cv_x)} = e^{-\frac{bt}{m}} \Longrightarrow \frac{v_x}{b + cv_x} = \frac{v_{0x}}{b + cv_{0x}}e^{-\frac{bt}{m}} \Longrightarrow \frac{b + cv_x}{v_x} = \frac{b}{v_x} + c = \frac{b + cv_{0x}}{v_{0x}}e^{\frac{bt}{m}} \Longrightarrow \frac{b}{v_x} = \frac{b + cv_{0x}}{v_{0x}}e^{\frac{bt}{m}} - c$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{v_x} = \frac{b + cv_{0x}e^{\frac{bt}{m}} - cv_{0x}}{v_{0x}} \Longrightarrow \frac{v_x}{b} = \frac{v_{0x}}{b + cv_{0x}e^{\frac{bt}{m}} - cv_{0x}} \Longrightarrow v_x = \frac{bv_{0x}}{b + cv_{0x}e^{\frac{bt}{m}} - cv_{0x}} \quad //$$

Cuando t es grande v_x va a ser pequeño, restandole importancia a "cv_x^2" de la fuerza de arrastre

$v_x \approx \frac{1}{t}$ en comportamiento

Energía y teoremas de conservación

Problema 1. (Thornton 2.25)

2-25. A block of mass $m = 1.62$ kg slides down a frictionless incline (Figure 2-A). The block is released a height $h = 3.91$ m above the bottom of the loop.
(a) What is the force of the inclined track on the block at the bottom (point A)?
(b) What is the force of the track on the block at point B?
(c) At what speed does the block leave the track?
(d) How far away from point A does the block land on level ground?
(e) Sketch the potential energy $U(x)$ of the block. Indicate the total energy on the sketch.

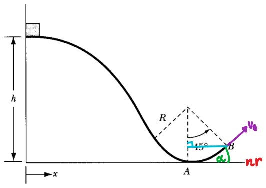
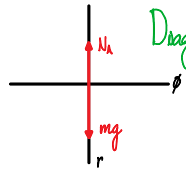


FIGURE 2-A Problem 2-25.

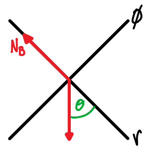
a) Diagrama para A



$$\sum F_r = mg - N_A = ma_{rad} \Longrightarrow mg - N_A = -m\frac{V^2}{R} \Longrightarrow N_A = mg + m\frac{V_A^2}{R} \;\star$$

Hay que hallar V en A: $\Delta E = 0 \Longrightarrow \cancel{T_0}^{\,0} + U_{g0} = T_A + \cancel{U_{gA}}^{\,0} \Longrightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}V_A^2 \Longrightarrow V_A^2 = 2gh \;* \Longrightarrow N_A = mg\left(1 + \frac{2}{R}h\right)$

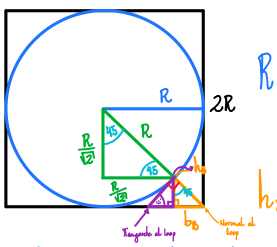
b)



$$\sum F_r = mg\cos\theta - N_B = ma_{rad} \Longrightarrow mg\cos\theta - N_B = -m\frac{V_B^2}{R} \Longrightarrow N_B = m\left(g\cos\theta + \frac{V_B^2}{R}\right) \;\star$$

$$\sum F_\phi = -mg\,sen\theta = ma_\phi$$

Hay que hallar V en B: $\Delta E = 0 \Longrightarrow \cancel{T_0}^{\,0} + U_{g0} = T_B + U_{gB} \Longrightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 + \cancel{m}gh_B \Longrightarrow V_B^2 = 2g(h - h_B) \;*$



$$R = \frac{R}{\sqrt{2}} + h_B \Longrightarrow h_B = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \star \Longrightarrow N_B = mg\left\{\cos\theta + \frac{2}{R}\left[h - R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}$$

$h_B = b_B$ por triángulo 45°

c)* $V_B^2 = 2g(h - h_B) \Longrightarrow V_B = \sqrt{2g\left[h - R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]} = \sqrt{2gh - gh\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{gh[2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]} = \sqrt{\sqrt{2}gh}$

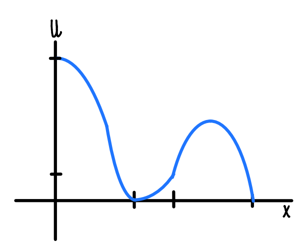
d) $V_B = V_0 \quad \alpha = 45° \Longrightarrow y_f = h_B + V_B sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \xRightarrow{t_{vuelo}} h_B + V_B sen\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

Es la solución "+" para $t > 0$

$$\Longrightarrow t = \frac{-V_B sen\alpha \pm \sqrt{V_B^2 sen^2\alpha - 4 \cdot \frac{-1}{2} g \cdot h_B}}{2 \cdot \frac{-1}{2} g} = \frac{+V_B sen\alpha \pm \sqrt{V_B^2 sen^2\alpha + 2gh_B}}{g} \Longrightarrow t = \frac{V_B sen\alpha + \sqrt{V_B^2 sen^2\alpha + 2gh_B}}{g}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{\sqrt{\sqrt{2}gh}\,sen\alpha + \sqrt{\sqrt{2}gh\,sen^2\alpha + \cancel{2}g\frac{\sqrt{2}R}{\cancel{2}}(\sqrt{2}-1)}}{g} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}gh}\,sen\alpha + \sqrt{\sqrt{2}gh\,sen^2\alpha + \sqrt{2}gR(\sqrt{2}-1)}}{g}$$

$$X_f = X_0 + V_{0x}t = R\,sen\alpha + \sqrt{\sqrt{2}gh}\cos\alpha \cdot \left[\frac{\sqrt{\sqrt{2}gh}\,sen\alpha + \sqrt{\sqrt{2}gh\,sen^2\alpha + \sqrt{2}gR(\sqrt{2}-1)}}{g}\right]$$



Problema 2. (Thornton 2.27)

2-27. A rope having a total mass of 0.4 kg and total length 4 m has 0.6 m of the rope hanging vertically down off a work bench. How much work must be done to place all the rope on the bench?

$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

densidad lineal $\rho = \frac{m}{L} \implies m(l) = \rho l \implies \vec{F} = -\rho g (L - y)\,\hat{j}$

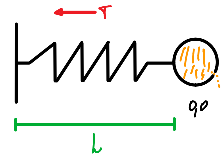
Movimiento unidimensional $\implies d\vec{r} = dy\,\hat{j}$

Trabajo necesario para subir el extremo de la cuerda: $W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{L_s} -\rho g (L_s - y)\, dy = \left.\frac{\rho g (L_s - y)^2}{2}\right|_0^{L_s} = -\frac{\rho g L_s^2}{2}$ ← Trabajo por la gravedad

$\implies W_e = -W = \frac{\rho g L_s^2}{2} = 0{,}18\,J$ necesarios para levantar la cuerda //

Problema 3.

En $t = 0$, un balde sin masa contiene una masa inicial M de arena. Está conectado a una pared por un resorte sin masa con tensión constante T (es decir, independiente de la longitud). El suelo no tiene fricción y la distancia inicial a la pared es L. El balde se suelta y, en su camino hacia la pared, pierde arena a razón de $dm/dx = M/L$, de tal forma que en un tiempo t la masa es m y x es la distancia con respecto a la pared. Por lo tanto, la tasa con la que pierde masa es constante con respecto a la distancia, no al tiempo. Además considere que el balde termina vacío justo cuando llega a la pared.



a. Determine la energía cinética del balde y la arena, como función de x. ¿Dónde es máxima?

b. ¿Cuál es el momentum lineal del balde? ¿Dónde es máximo?

a) El sistema es (balde + arena dentro) + arena fuera

$$p_T = m_{ba}V_{ba} + m_a V_a \;;\; V_{ba} = V_a \Longrightarrow \dot{p}_T = \cancel{\frac{dm_{ba}}{dt} V_{ba}} + m_{ba}\frac{dV_{ba}}{dt} + \cancel{\frac{dm_a}{dt} V_a} + \cancel{m_a \frac{dV_a}{dt}} \;;\; \frac{dm_{ba}}{dt} = -\frac{dm_a}{dt} = -\frac{dm}{dt}$$

En cada instante que es expulsada tiene la velocidad del balde y es constante al caer

$$\Longrightarrow \dot{p}_T = m\frac{dV_{ba}}{dt} = -T \;;\; \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \qquad \Longrightarrow \int_0^m dm' = \int_0^x \frac{M}{L}dx' \Longrightarrow m = \frac{M}{L}x$$

$$\Longrightarrow \frac{M}{L}x\frac{dV_{ba}}{dt} = -T = \frac{M}{L}x\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{M}{L}xv\frac{dv}{dx} \Longrightarrow -T = \frac{M}{L}xv\frac{dv}{dx} \Longrightarrow \int_L^x \frac{-LT}{x'M}dx' = \int_0^v v'dv'$$

$$\Longrightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{LT}{M}\ln\left(\frac{x}{L}\right) \Longrightarrow v = \sqrt{-\frac{2LT}{M}\ln\left(\frac{x}{L}\right)} \qquad \Longrightarrow T_e = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{M}}{\cancel{L}}x\cdot -\frac{\cancel{2}\cancel{L}T}{\cancel{M}}\ln\left(\frac{x}{L}\right) = -Tx\ln\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Longrightarrow T_e = -Tx\ln\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Máximo } \frac{dT_e}{dx} = 0 \Longrightarrow -T\ln\left(\frac{x}{L}\right) - Tx\frac{\frac{1}{L}}{\frac{x}{L}} = -T\ln\left(\frac{x}{L}\right) - T\cancel{x}\frac{L}{\cancel{x}} = -T\ln\left(\frac{x}{L}\right) - TL = 0 \Longrightarrow x_{T_e\,max} = Le^{-L}$$

b)

$$p_{ba} = m_{ba}v = \frac{M}{L}x\cdot\sqrt{-\frac{2LT}{M}\ln\left(\frac{x}{L}\right)} = \sqrt{\frac{M^{\cancel{2}}x^2}{L^{\cancel{2}}}\cdot -\frac{2\cancel{L}T}{\cancel{M}}\ln\left(\frac{x}{L}\right)} = \sqrt{\frac{2TM}{L}}\cdot\sqrt{-x^2\ln\left(\frac{x}{L}\right)}$$

$$\frac{dp_{ba}}{dx} = \sqrt{\frac{2TM}{L}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x^2\ln\left(\frac{x}{L}\right)}}\cdot\left(-2x\ln\left(\frac{x}{L}\right) - x^{\cancel{2}}\frac{\frac{1}{L}}{\frac{\cancel{x}}{L}}\right) = \sqrt{\frac{2TM}{L}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x^2\ln\left(\frac{x}{L}\right)}}\cdot\left(-2x\ln\left(\frac{x}{L}\right) - xL\right)$$

$$\text{Máximo } \frac{dp_{ba}}{dx} = 0 \Longrightarrow \cancel{\sqrt{\frac{2TM}{L}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x^2\ln\left(\frac{x}{L}\right)}}}\cdot\left(-2x\ln\left(\frac{x}{L}\right) - xL\right) = 0 \Longrightarrow -2x\ln\left(\frac{x}{L}\right) - xL = 0$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{x}{L}\right) = -\frac{L}{2} \Longrightarrow x_{p\,max} = Le^{-\frac{L}{2}}$$

Problema 4. (Thornton 2.41)

2-41. A train moves along the tracks at a constant speed u. A woman on the train throws a ball of mass m straight ahead with a speed v with respect to herself. **(a)** What is the kinetic energy gain of the ball as measured by a person on the train? **(b)** by a person standing by the railroad track? **(c)** How much work is done by the woman throwing the ball and **(d)** by the train?

a) $T_m = \frac{1}{2}mv^2$

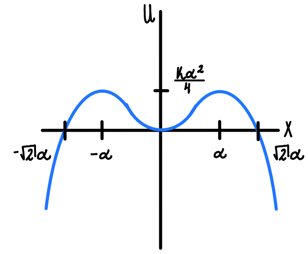
b) $T_T = \frac{1}{2}m(u+v)^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + muv$

c) $W_m = \Delta T \Rightarrow W_m = \frac{1}{2}mv^2$

d) $W_u = W_T + W_m = \frac{1}{2}mv^2 + muv \Rightarrow W_T = \cancel{\frac{1}{2}mv^2} + muv - \cancel{\frac{1}{2}mv^2} = muv$

Problema 5. (Thornton 2.43)

2-43. A particle is under the influence of a force $F = -kx + kx^3/\alpha^2$, where k and α are constants and k is positive. Determine $U(x)$ and discuss the motion. What happens when $E = (1/4)k\alpha^2$?



$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow -\int_0^U dU = \int_0^x -kx + \frac{kx^3}{\alpha^2}\,dx \Rightarrow U = +\frac{kx^2}{2} - \frac{kx^4}{4\alpha^2}$

Cuando $E = \frac{k\alpha^2}{4}$ es la máxima energía potencial, es un punto de equilibrio inestable.

Problema 6.

Considere la máquina de Atwood de la Figura 4.15 (ver libro de texto), pero suponga que la polea tiene radio R y momento de inercia I.

a. Escriba la energía total de las dos masas y la polea en términos de la coordenada x y $\dot{x}$. (Recuerde que la energía cinética de un disco es $I\omega^2/2$).

b. Demuestre que puede obtener la ecuación de movimiento para la coordenada x derivando la ecuación $E = \mathrm{cte}$. Compruebe que la ecuación de movimiento es la misma que obtendría aplicando la II Ley de Newton por separado a las dos masas y la polea, y luego eliminando las dos tensiones desconocidas de las tres ecuaciones resultantes.

$S = R\theta$
$V = R\dot{\theta}$

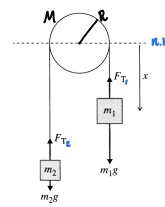


Figure 4.15 An Atwood machine consisting of two masses, m_1 and m_2, suspended by a massless inextensible string that passes over a massless, frictionless pulley. Because the string's length is fixed, the position of the whole system is specified by the distance x of m_1 below any convenient fixed level. The forces on the two masses are their weights $m_1 g$ and $m_2 g$, and the tension forces F_T (which are equal since the pulley and string are massless).

a) La polea tiene energía potencial cero $\Rightarrow T_S = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_3^2$ y $U = m_1 g x_1 + m_2 g x_2$

$\Rightarrow E_S = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_3^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2$

$a_1 = -a_2$ y $\alpha = \frac{a}{R}$

$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{x}_2}{R}$ y $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

b) $\frac{dE_S}{dt} = m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + I\dot{\theta}_3\ddot{\theta}_3 + m_1 g\dot{x}_1 + m_2 g\dot{x}_2 = 0$

$\Rightarrow m_1\cancel{\dot{x}_1}\ddot{x}_1 + m_2\cancel{\dot{x}_1}\ddot{x}_1 + I\frac{\cancel{\dot{x}_1}}{R}\cdot\frac{\ddot{x}_1}{R} + m_1 g\cancel{\dot{x}_1} - m_2 g\cancel{\dot{x}_1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) + g(m_1 - m_2) = 0$

$\sum F_1 = T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \Rightarrow T_1 = m_1 a_1 + m_1 g$ y $\sum F_2 = T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow T_2 = m_2 a_2 + m_2 g$

$\sum \tau = -T_1 R + T_2 R = I\alpha \Rightarrow -m_1 a_1 - m_1 g - m_2 a_1 + m_2 g = \frac{I a_1}{R^2} \Rightarrow -a_1\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) + g(m_2 - m_1) = 0$

(Taylor 4.36)

4.36 ★★ A metal ball (mass m) with a hole through it is threaded on a frictionless vertical rod. A massless string (length l) attached to the ball runs over a massless, frictionless pulley and supports a block of mass M, as shown in Figure 4.27. The positions of the two masses can be specified by the one angle θ. **(a)** Write down the potential energy $U(\theta)$. (The PE is given easily in terms of the heights shown as h and H. Eliminate these two variables in favor of θ and the constants b and l. Assume that the pulley and ball have negligible size.) **(b)** By differentiating $U(\theta)$ find whether the system has an equilibrium position, and for what values of m and M equilibrium can occur. Discuss the stability of any equilibrium positions.

$$\tan\theta = \frac{b}{h} \Longrightarrow h = b\cot\theta$$

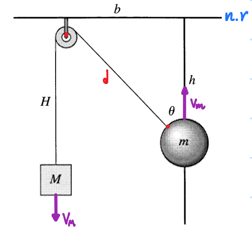


Figure 4.27 Problem 4.36

$$l = H + d = H + \sqrt{b^2+h^2} = -X_M + \sqrt{b^2+X_m^2} = -X_M + \sqrt{b^2+b^2\cot^2\theta} = -X_M + b\csc\theta$$

$$\Longrightarrow X_M = b\csc\theta - l \quad y \quad X_m = -b\cot\theta \Longrightarrow X_M = -X_m - l$$

$$a)\ U = U_m + U_M = mgX_m + MgX_M = -mgb\cot\theta + Mg(b\csc\theta - l)$$ //

$$b)\ \frac{dU}{d\theta} = +mgb\csc^2\theta - Mgb\csc\theta\cot\theta = 0 \Longrightarrow \csc\theta\,(mgb\csc\theta - Mgb\cot\theta) = 0$$

$$\Longrightarrow \csc\theta = 0 \ \vee \ m\cancel{gb}\csc\theta - M\cancel{gb}\cot\theta = 0 \Longrightarrow m\csc\theta = M\cot\theta \Longrightarrow m = M\cos\theta \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$$

$m = MK$; con $0 < K \leq 1 \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}(K)$ $\therefore$ Hay un punto equilibrio, depende de que tanta sea la diferencia de masa //

c) Halle la velocidad del sistema cuando M se mueve $\frac{l}{5}$ de su posición inicial suponiendo que $M > m$

$$X_M = b\csc\theta - l \Longrightarrow V_M = -b\cot\theta\csc\theta\cdot\dot\theta \quad y \quad X_m = -b\cot\theta \Longrightarrow V_m = -b\csc^2\theta\cdot\dot\theta$$

$$\Longrightarrow T_f = \frac{1}{2}mb^2\csc^4\theta\cdot\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Mb^2\cot^2\theta\csc^2\theta\cdot\dot\theta^2 \quad y \quad U_f = mg\left(-b\cot\theta + \frac{l}{5}\right) + Mg\left(b\csc\theta - l - \frac{l}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow U_i = U_f + T \Longrightarrow mg\left(\frac{l}{5}\right) + Mg\left(-\frac{l}{5}\right) + \frac{1}{2}mb^2\csc^4\theta\cdot\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Mb^2\cot^2\theta\csc^2\theta\cdot\dot\theta^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 2mg\left(\frac{l}{5}\right) + 2Mg\left(-\frac{l}{5}\right) + mb^2\csc^4\theta\cdot\dot\theta^2 + Mb^2\cot^2\theta\csc^2\theta\cdot\dot\theta^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{2lg}{5}(m-M) + b^2\csc^2\theta\cdot\dot\theta^2(m\csc^2\theta + M\cot^2\theta) = 0$$

$$\Longrightarrow \dot\theta^2 = \frac{-2lg(m-M)}{5b^2\csc^2\theta(m\csc^2\theta + M\cot^2\theta)} \ ; \ \cot^2\theta = \frac{(h-\frac{l}{5})^2}{b^2} \quad y \quad \csc^2\theta = \frac{d^2}{b^2} = \frac{b^2+(h-\frac{l}{5})^2}{b^2}$$

$$= \frac{2lg(M-m)}{5\cancel{b^2}\left[\frac{b^2+(h-\frac{l}{5})^2}{\cancel{b^2}}\right]\left\{m\left[\frac{b^2+(h-\frac{l}{5})^2}{b^2}\right] + M\frac{(h-\frac{l}{5})^2}{b^2}\right\}}$$

$$5\left[b^2+(h-\tfrac{l}{5})^2\right]\left\{m\left[b^2+(h-\tfrac{l}{5})^2\right] + M(h-\tfrac{l}{5})^2\right\}$$

Problema 7. (Taylor 4.26)

4.26 ★ A mass m is in a uniform gravitational field, which exerts the usual force $F = mg$ vertically down, but with g varying with time, $g = g(t)$. Choosing axes with y measured vertically up and defining $U = mgy$ as usual, show that $\mathbf{F} = -\nabla U$ as usual, but, by differentiating $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ with respect to t, show that E is not conserved.

$$U(y,t) = -\int_{y_0}^{y} \vec{F}(y',t)\cdot d\vec{y'} = -\int_0^{y} -mg(t)\,dy' = +mg(t)\,y \implies F(y,t) = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mg(t)\,y \implies \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\,2\dot{y}\ddot{y} + m\left[\frac{dg(t)}{dt}\,y + g(t)\,\dot{y}\right]$$

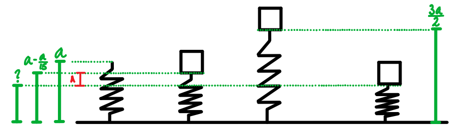
$$\implies \frac{dE}{dt} = m\cancel{(\underbrace{\ddot{y}}_{F} + \overbrace{g(t)}^{\nabla U})}\,\dot{y} + m\frac{dg(t)}{dt}\,y \implies \frac{dE}{dt} = m\frac{dg(t)}{dt}\,y = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Problema 8. (Thornton 2.52)

2-52. A particle of mass m moving in one dimension has potential energy $U(x) = U_0[2(x/a)^2 - (x/a)^4]$, where U_0 and a are positive constants. **(a)** Find the force $F(x)$, which acts on the particle. **(b)** Sketch $U(x)$. Find the positions of stable and unstable equilibrium. **(c)** What is the angular frequency ω of oscillations about the point of stable equilibrium? **(d)** What is the minimum speed the particle must have at the origin to escape to infinity? **(e)** At $t = 0$ the particle is at the origin and its velocity is positive and equal in magnitude to the escape speed of part **(d)**. Find $x(t)$ and sketch the result.

Problema 9.

Un resorte liviano de longitud natural a se coloca sobre un piso horizontal en posición vertical. Cuando un bloque de masa M descansa en equilibrio sobre el resorte, la compresión del resorte es $a/15$. El bloque ahora se levanta a una altura de $3a/2$ sobre el piso y se suelta desde el reposo. Encuentre la compresión del resorte cuando el bloque se detiene por primera vez.



$E = 0$ con $X_0 = a\left(1 - \frac{1}{15}\right)$

$$\Longrightarrow U_{alto} = \frac{1}{2}k\left(\frac{3a}{2} - a\left(1-\frac{1}{15}\right)\right)^2 + mg\left(\frac{3a}{2} - a\left(1-\frac{1}{15}\right)\right) = \frac{1}{2}k a^2 \frac{289}{900} + mga\frac{17}{30}$$

$$y \quad U_{bajo} = \frac{1}{2}k\left(X - a\left(1-\frac{1}{15}\right)\right)^2 + mg\left(X - a\left(1-\frac{1}{15}\right)\right) \quad \Longrightarrow U_{alto} = U_{bajo} \quad ; \; A = X - a\left(1-\frac{1}{15}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}k a^2 \frac{289}{900} + mga\frac{17}{30} = \frac{1}{2}kA^2 + mgA \Longrightarrow \frac{1}{2}kA^2 + mgA - \frac{1}{2}k a^2\frac{289}{900} - mga\frac{17}{30} = 0$$

$$\Longrightarrow A = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 - 4\cdot\frac{1}{2}k\cdot -\left(\frac{289ka^2 + 1020mga}{1800}\right)}}{2\cdot\frac{1}{2}k} = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2k\left(\frac{289ka^2+1020mga}{1800}\right)}}{k}$$

La solución buscada es la negativa porque se quiere el resorte contraído

$$X - a\left(1-\frac{1}{15}\right) = \frac{-mg - \sqrt{m^2g^2 + 2k\left(\frac{289ka^2+1020mga}{1800}\right)}}{k}$$

Problema 10.

Una partícula de masa $m = 1.0$ kg se mueve en un campo de fuerza dado por $\vec{F} = [(3t^2 - 4t)\,\hat{\mathbf{x}} + (12t - 6)\,\hat{\mathbf{y}} + (6t - 12t^2)\,\hat{\mathbf{z}}]$ N. La velocidad en $t = 1.0$ s es $(4\,\hat{\mathbf{x}} - 5\,\hat{\mathbf{y}} + 10\,\hat{\mathbf{z}})$ m/s y en $t = 0$ pasa por el origen.

a. Encontrar el cambio de momentum de la partícula desde el tiempo $t = 1.0$ s a 2.0 s.

b. ¿Cuál es la velocidad en $t = 2.0$ s?

c. Determine el torque en $t = 2.0$ s, con respecto al origen del sistema de referencia.

d. Con respecto al origen, también determine el momentum angular en $t = 2.0$ s.

a) $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Longrightarrow \int_1^2 (3t^2-4t)\hat{i} + (12t-6)\hat{j} + (6t-12t^2)\hat{k}\, dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} \Longrightarrow \Delta\vec{p} = (t^3-2t^2)\hat{i} + 6t^2\hat{j} + (3t^2-4t^3)\hat{k}\Big|_1^2$

$= (1\hat{i} + 12\hat{j} - 19\hat{k})$ kgm/s //

b) Primera forma

$\vec{p}(t=2) = \Delta\vec{p} + \vec{p}(t=1) = (1\hat{i} + 12\hat{j} - 19\hat{k})$ kgm/s $+ 1\text{kg}\cdot(4\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}) = (5\hat{i} + 7\hat{j} - 9\hat{k})$ kgm/s

$\Longrightarrow \vec{v}(t=2) = \dfrac{\vec{p}(t=2)}{m} = (5\hat{i} + 7\hat{j} - 9\hat{k})$ m/s //

Segunda forma

$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\vec{F}}{m} = (3t^2-4t)\hat{i} + (12t-6)\hat{j} + (6t-12t^2)\hat{k} \Longrightarrow \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}} d\vec{v}' = \int_1^t (3t^2-4t)\hat{i} + (12t-6)\hat{j} + (6t-12t^2)\hat{k}\, dt$

$\Longrightarrow \vec{v} - (4\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}) = (t^3-2t^2)\hat{i} + (6t^2-6t)\hat{j} + (3t^2-4t^3)\hat{k}\Big|_1^t = (t^3-2t^2)\hat{i} + (6t^2-6t)\hat{j} + (3t^2-4t^3)\hat{k} - (-1\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{k})$

$\Longrightarrow \vec{v} = (t^3-2t^2)\hat{i} + (6t^2-6t)\hat{j} + (3t^2-4t^3)\hat{k} + (4\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}) - (-1\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{k})$

$\Longrightarrow \vec{v} = (t^3-2t^2+5)\hat{i} + (6t^2-6t-5)\hat{j} + (3t^2-4t^3+11)\hat{k}$ ← Multiplico por m y se convierte en vector de momento

$\Longrightarrow \vec{v}(t=2) = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 9\hat{k}$ //

c) Se necesita un vector que conecte el origen con la posición

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (t^3-2t^2+5)\hat{i} + (6t^2-6t-5)\hat{j} + (3t^2-4t^3+11)\hat{k} \Longrightarrow \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' = \int_0^t (t'^3-2t'^2+5)\hat{i} + (6t'^2-6t'-5)\hat{j} + (3t'^2-4t'^3+11)\hat{k}\, dt'$

$\Longrightarrow \vec{r} = \left(\dfrac{t^4}{4} - \dfrac{2t^3}{3} + 5t\right)\hat{i} + (2t^3-3t^2-5t)\hat{j} + (t^3-t^4+11t)\hat{k}$

Torque respecto al origen: $\vec{N}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t\right) & \left(2t^3 - 3t^2 - 5t\right) & \left(t^3 - t^4 + 11t\right) \\ \left(3t^2 - 4t\right) & \left(12t - 6\right) & \left(6t - 12t^2\right) \end{vmatrix}$

$$\Longrightarrow \vec{N}_o = \left[(2t^3 - 3t^2 - 5t)\cdot(6t - 12t^2) - (t^3 - t^4 + 11t)\cdot(12t - 6)\right]\hat{i} + \cdots$$

$$\cdots - \left[\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t\right)\cdot(6t - 12t^2) - (t^3 - t^4 + 11t)\cdot(3t^2 - 4t)\right]\hat{j} + \cdots$$

$$\cdots + \left[\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 5t\right)\cdot(12t - 6) - (2t^3 - 3t^2 - 5t)\cdot(3t^2 - 4t)\right]\hat{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{N}_o(t=2) = (-36\,\hat{i} - 368\,\hat{j} + 180\,\hat{k})\ Nm$$

d) Momento angular: $\vec{L}_o(t=2) = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{26}{3} & -6 & +14 \\ 5 & 7 & -9 \end{vmatrix} = \left(-44\,\hat{i} + 148\,\hat{j} + \frac{272}{3}\,\hat{k}\right)\ Kgm^2/s$

Problemas mixtos 1

Problema 1. (Valor: 25 pts.)

Un bote de masa m, se mueve en un lago, con una posición $x(0) = 0$ y una rapidez inicial $v(0) = v_0$. Asociado a la fuerza de fricción del bote con el agua y el viento, experimenta una fuerza de fricción, cuya magnitud está dada por:

$$\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = F_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2,$$

donde F_0 es una constante positiva. Considere que le motor no está encendido.

a. ¿Cuál es la aceleración del bote?

b. Encuentre la posición del bote con respecto al tiempo.

c. Determine el tiempo y la posición donde la velocidad se reduce a la mitad de la velocidad inicial.

d. ¿Cuándo se detiene el bote?

a) $\sum F = -F_x = ma_x \Longrightarrow -F_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = m\frac{dV}{dt} \Longrightarrow -\frac{F_0 V^2}{mV_0^2} = \frac{dV}{dt} = a$

b) $-\frac{F_0 V^2}{mV_0^2} = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow \int_0^t -\frac{F_0}{mV_0^2}dt' = \int_{V_0}^{V}\frac{1}{V'^2}dV' \Longrightarrow -V'^{-1}\Big|_{V_0}^{V} = -\frac{F_0}{mV_0^2}t \Longrightarrow \frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = \frac{F_0}{mV_0^2}t \Longrightarrow \frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} + \frac{F_0}{mV_0^2}t = \frac{mV_0 + F_0 t}{mV_0^2}$

$\Longrightarrow V = \frac{mV_0^2}{mV_0 + F_0 t} = \frac{dX}{dt} \Longrightarrow \int_0^X dX' = X = \int_0^t \frac{mV_0^2}{mV_0 + F_0 t'}dt'$

$$\boxed{\int_0^t \frac{mV_0^2}{mV_0 + F_0 t'}dt' \;;\; u = mV_0 + F_0 t' \Longrightarrow du = F_0 dt' \quad \Longrightarrow \int_{mV_0}^{mV_0 + F_0 t}\frac{mV_0^2}{F_0 u}du = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln\left(\frac{mV_0 + F_0 t}{mV_0}\right)}$$

$\Longrightarrow X = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln\left(\frac{mV_0 + F_0 t}{mV_0}\right)$

c) $V = \frac{V_0}{2} \Longrightarrow \frac{V_0}{2} = \frac{mV_0^2}{mV_0 + F_0 t} \Longrightarrow \frac{\cancel{V_0}}{2}(mV_0 + F_0 t) = mV_0^{\cancel{2}} \Longrightarrow mV_0 + F_0 t = 2mV_0 \Longrightarrow F_0 t = mV_0 \Longrightarrow t = \frac{mV_0}{F_0}$

Tiempo en que $V = \frac{V_0}{2}$: $t_{\frac{V_0}{2}} = \frac{mV_0}{F_0} \Longrightarrow X_{\frac{V_0}{2}} = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln\left(\frac{mV_0 + \cancel{F_0}\frac{mV_0}{\cancel{F_0}}}{mV_0}\right) = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln\left(\frac{2\cancel{mV_0}}{\cancel{mV_0}}\right) = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln(2)$

$\Longrightarrow X_{\frac{V_0}{2}} = \frac{mV_0^2}{F_0}\ln(2)$

d) $V = 0 \Longrightarrow \frac{mV_0^2}{mV_0 + F_0 t} = 0 \Longrightarrow t = +\infty$

Problema 2. (Valor: 25 pts.)

Una partícula de masa m, se mueve en una dimensión. Sobre la partícula actúa una fuerza, relacionada con una energía potencial:

$$U(x) = -A + a(x - x_1)^2 - b(x - x_1)^3,$$

donde A, a, b y x_1 son constantes positivas. En la Figura 1 se muestra la forma cómo varía esta energía con respecto a la posición x.

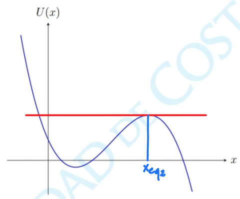


Figura 1: Energía potencial para el problema 2.

a. Determine la fuerza que experimenta la partícula.

b. Encuentre la posición de los puntos de equilibrio e indique qué tipo de equilibrio en cada punto, justificando su respuesta.

c. La velocidad cuando pasa por $x = 0$ es $v_0 > 0$. Si la partícula se mueve en la dirección positiva, determine la velocidad crítica, que mantiene la partícula confinada cerca del origen.

a) Una fuerza conservativa en una dimensión: $F = -\frac{dU}{dX}$

$$\Longrightarrow \frac{dU}{dX} = 2a(X-X_1) - 3b(X-X_1)^2 \Longrightarrow F = 3b(X-X_1)^2 - 2a(X-X_1)$$

b) Puntos de equilibrio: $\frac{dU}{dX} = 0 \Longrightarrow 2a(X-X_1) - 3b(X-X_1)^2 = 0 \Longrightarrow [2a - 3b(X-X_1)](X-X_1) = 0$

$$\Longrightarrow X - X_1 = 0 \ \wedge \ 2a - 3b(X-X_1) = 0 \Longrightarrow X_{eq1} = X_1 \ \wedge \ X_{eq2} = X_1 + \frac{2a}{3b}$$

Clasificación: $\frac{d^2U}{dX^2}\Big|_{X=X_{eq}} \Longrightarrow \frac{d^2U}{dX^2} = 2a - 6b(X-X_1)$

$$\Longrightarrow \frac{d^2U}{dX^2}\Big|_{X=X_{eq1}} = 2a - \cancel{6b(X-X_1)}^{\,0} = 2a \Longrightarrow X_{eq1} \text{ es un punto de equilibrio estable}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2U}{dX^2}\Big|_{X=X_{eq1}} = 2a - 6b(X-X_1) = 2a - 6b\left(\cancel{X_1} + \frac{2a}{\cancel{3}b} - \cancel{X_1}\right) = 2a - 2\cdot 2a = -2a \Longrightarrow X_{eq2} \text{ es un punto de equilibrio inestable}$$

c) La mayor energía que puede poseer la partícula es $E \leq U(X_{eq2})$ $\qquad U = -A + a(X-X_1)^2 + 3b(X-X_1)^3$

$$\Longrightarrow U(X_{eq2}) = -A + a\left(\cancel{X_1} + \frac{2a}{3b} - \cancel{X_1}\right)^2 + 3b\left(\cancel{X_1} + \frac{2a}{3b} - \cancel{X_1}\right)^3 = -A + \frac{4a^3}{9b^2} + \frac{8a^3}{9b^2} = -A + \frac{4a^3}{3b^2} \quad y \quad U(X_{eq1}) = -A$$

$$E = T + U_{eq1} = U_{eq2} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \cancel{-A} = \cancel{-A} + \frac{4a^3}{3b^2} \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{8a^3}{3b^2 m}}$$

Problema 3. (Valor: 25 pts.)

Un oscilador subamortiguado tiene una frecuencia angular natural $3\pi/2\ \mathrm{rad/s}$. Este oscilador es tal que la amplitud disminuye un 25 % al transcurrir un periodo de tiempo.

a. Determine el periodo de oscilación.

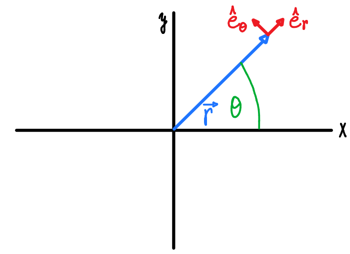
b. Encuentre el parámetro de amortiguamiento.

c. ¿Cuál es la disminución de la amplitud, con respecto a la amplitud inicial, después de haber pasado 2 periodos de tiempo?

d. Determine el cambio de energía del sistema, con respecto a la energía en $t = 0$, al transcurrir un periodo de tiempo.

Nota: Se puede suponer el ángulo de desfase como cero. Además se puede considerar que el oscilador se relaciona con una masa m y un resorte de constante de elasticidad k.

Problema 4. (Valor: 25 pts.)



Un insecto se mueve en una trayectoria en dos dimensiones, descrito por:

$$r = \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t), \qquad \theta = \frac{t}{\tau},$$

donde $0 \leq t \leq 2\tau$, b y τ son constantes positivas.

a. Calcule, para cualquier trayectoria descrita en coordenadas polares, los vectores $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ y $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$.

b. Determine para cualquier trayectoria descrita en coordenadas polares, la velocidad y la aceración de una partícula.

c. A partir de este resultado, encuentre la velocidad y aceleración del insecto.

d. Encuentre el tiempo cuando la acelaración tangencial del insecto es nula.

e. Para este tiempo, determine la posición, velocidad y aceleración del insecto.

a) Primero se plantean los vectores unitarios polares: $\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$ y $\hat{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$

Para $\hat{e}_r$, hay que hallar $\dfrac{d\hat{e}_r}{dt} = \dfrac{\partial \hat{e}_r}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

Para $\hat{e}_\theta$, hay que hallar $\dfrac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dfrac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\cos\theta\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}) = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$

$\Longrightarrow \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$ y $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$ //

b) Posición en coordenadas polares: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$

Velocidad: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \quad \Longrightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$ //

Aceleración: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\theta}\,\hat{e}_r$

$$\Longrightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta \quad //$$

c) $\dot{r} = \dfrac{b}{\tau^2}(2\tau - t) - \dfrac{bt}{\tau^2} = \dfrac{2b}{\tau} - 2\dfrac{bt}{\tau^2}$; $\ddot{r} = -\dfrac{2b}{\tau^2}$; $\dot{\theta} = \dfrac{1}{\tau}$ y $\ddot{\theta} = 0$

$$\Longrightarrow \vec{v}_{ins} = \left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right)\hat{e}_r + \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t)\frac{1}{\tau}\,\hat{e}_\theta = \left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right)\hat{e}_r + \frac{bt}{\tau^3}(2\tau - t)\,\hat{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_{ins} = \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t)\frac{1}{\tau^2}\right]\hat{e}_r + \left[\cancelto{0}{\frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t)\ddot{\theta}} + 2\left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right)\frac{1}{\tau}\right]\hat{e}_\theta$$

$$= \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{bt}{\tau^4}(2\tau - t)\right]\hat{e}_r + \frac{2}{\tau}\left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right)\hat{e}_\theta$$

Continua....

d) $a_\theta = \frac{2}{\tau}\left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right)$, buscando $a_\theta = 0$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\tau}\left(\frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{2b}{\tau} - 2\frac{bt}{\tau^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\cancel{2}b}{\cancel{\tau}} = \frac{\cancel{2}bt}{\tau^{\cancel{2}}} \Longrightarrow t = \tau \;//$$

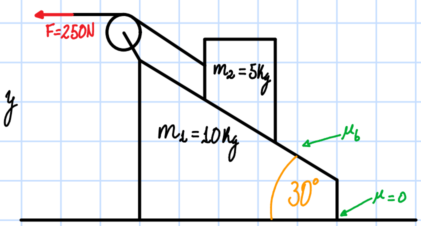
e) $\vec{r}_{ins}(t=\tau) = \frac{b\tau}{\tau^2}(2\tau - \tau)\hat{e}_r = \frac{b}{\tau}(\tau)\hat{e}_r = b\,\hat{e}_r \;//$

$$\vec{v}_{ins}(t=\tau) = \left(\cancel{\frac{2b}{\tau}} - \cancel{2\frac{b\tau}{\tau^2}}\right)\hat{e}_r + \frac{b\cancel{\tau}}{\tau^{\cancel{2}}}(\cancel{2\tau} - \cancel{\tau})\hat{e}_\theta = 0\,\hat{e}_r + \frac{b}{\tau}\hat{e}_\theta = \frac{b}{\tau}\hat{e}_\theta \;//$$

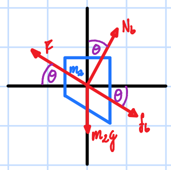
$$\vec{a}_{ins}(t=\tau) = \left[-\frac{2b}{\tau^2} - \frac{b\cancel{\tau}}{\tau^{\cancel{3}\,2}}(\cancel{2\tau} - \cancel{\tau})\right]\hat{e}_r + \frac{2}{\tau}\left(\cancel{\frac{2b}{\tau}} - \cancel{2\frac{b\tau}{\tau^2}}\right)\hat{e}_\theta = -\frac{3b}{\tau^2}\hat{e}_r + 0\,\hat{e}_\theta = -\frac{3b}{\tau^2}\hat{e}_r \;//$$

a) Encuentre μ_b tal que los cuerpos se muevan juntos

b) Tome la mitad del resultado anterior y calcule la aceleración de ambas masas y la aceleración de m_2 sobre m_1



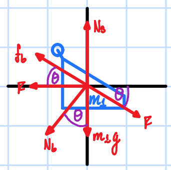
Considere la polea sin masa y luego con masa $m_p = 2Kg$ y $R = 0,5\,m$



$$\sum F_{2y} = N_b\cos\theta + F\operatorname{sen}\theta - m_2 g - f_b\operatorname{sen}\theta = m_2 a_{2y}$$

$$\sum F_{2x} = N_b\operatorname{sen}\theta + f_b\cos\theta - F\cos\theta = m_2 a_{2x}$$

$$\vec{a_2} = \vec{a_1} + \vec{a_{21}} = (a_{1x} + a_{21x})\hat{\imath} + a_{21y}\hat{\jmath}$$



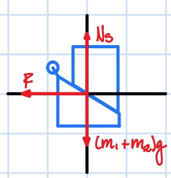
$$\sum F_{1y} = N_s - m_1 g + f_b\operatorname{sen}\theta - F\operatorname{sen}\theta - N_b\cos\theta = \cancel{m_1 a_{1y}}^{\,0}$$

$$\sum F_{1x} = F\cos\theta - F - f_b\cos\theta - N_b\operatorname{sen}\theta = m_1 a_{1x}$$

La cuña no se mueve en el eje y: $a_{1y} = 0$

a) Como los bloques se mueven juntos, como un solo objeto: $\Longrightarrow a_{1x} = a_{2x} \ \wedge \ a_{21y} = 0 = a_{2y}$; $f = \mu N$

$$\begin{cases} N_b\cos\theta + F\operatorname{sen}\theta - m_2 g - f_b\operatorname{sen}\theta = \cancel{m_2 a_{2y}}^{\,0} = 0 \\ N_b\operatorname{sen}\theta + f_b\cos\theta - F\cos\theta = m_2 a_x \\ N_s - m_1 g + f_b\operatorname{sen}\theta - F\operatorname{sen}\theta - N_b\cos\theta = 0 \\ F\cos\theta - F - f_b\cos\theta - N_b\operatorname{sen}\theta = m_1 a_x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} N_b\cos\theta + F\operatorname{sen}\theta - m_2 g - \mu N_b\operatorname{sen}\theta = 0 \\ N_b\operatorname{sen}\theta + \mu N_b\cos\theta - F\cos\theta = m_2 a_x \\ N_s - m_1 g + \mu N_b\operatorname{sen}\theta - F\operatorname{sen}\theta - N_b\cos\theta = 0 \\ F\cos\theta - F - \mu N_b\cos\theta - N_b\operatorname{sen}\theta = m_1 a_x \end{cases}$$



$$\sum F_y = N_s - (m_1+m_2)g = (m_1+m_2)\cancel{a_y}^{\,0} \Longrightarrow N_s = (m_1+m_2)g$$

$$\sum F_x = -F = (m_1+m_2)a_x \Longrightarrow a_x = \frac{-F}{(m_1+m_2)}$$

Aplicando esta consideración al sistema de ecuaciones

$$\Longrightarrow \begin{cases} N_b\cos\theta + F\operatorname{sen}\theta - m_2 g - \mu N_b\operatorname{sen}\theta = 0 \\ N_b\operatorname{sen}\theta + \mu N_b\cos\theta - F\cos\theta = \frac{-m_2 F}{(m_1+m_2)} \\ (m_1+m_2)g - m_1 g + \mu N_b\operatorname{sen}\theta - F\operatorname{sen}\theta - N_b\cos\theta = 0 \\ F\cos\theta - F - \mu N_b\cos\theta - N_b\operatorname{sen}\theta = \frac{-m_1 F}{(m_1+m_2)} \end{cases}$$

Continua

SECTION 3

Sistemas de partículas

Theorem 6 (**Teorema de Ejes paralelos**)

$$I_{q'} = I_q^{cm} + Md^2 \tag{3.1}$$

La demostración de este teorema tal y como se encuentra escrito aquí se le dejará al lector y se recomienda verlo como una simplificación del teorema de ejes paralelos real que se desarrollará más adelante.

SECTION 4

Sistemas no inerciales