Robótica Industrial

2025

Modelado de un robot
Generación de trayectorias

TEMARIO

- Posición y orientación (pose).
- Transformaciones homogéneas. Ángulos de Euler.
- Espacio articular y cartesiano. Problema cinemático directo. La representación de Denavit-Hartenberg. Problema cinemático inverso.
- Problema dinámico directo e inverso. Formulación de Euler-Lagrange.

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Introducción
  - Se busca obtener el valor de las variables articulares para localizar el extremo del robot en un lugar conocido.
  - Este problema, puede tener una única solución, más de una solución o ninguna.
- Solución algebraica
  - Consiste en obtener un sistema de n ecuaciones en función de la localización del extremo del robot.
  - Se puede obtener partiendo de la solución de la cinemática directa mediante el algoritmo de Denavit-Hartenberg, despejando de la matriz de transformación final las variables articulares.

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

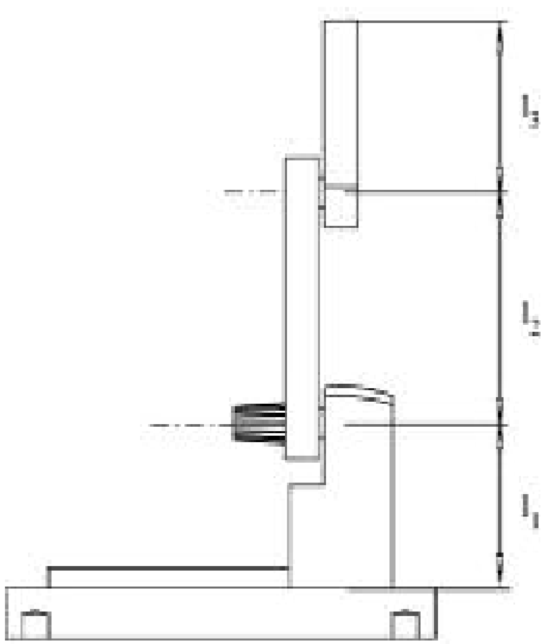
- Solución geométrica
  - Busca descomponer la cadena cinemática del robot en varios planos geométricos, resolviendo por trigonometría el problema asociado a cada plano.

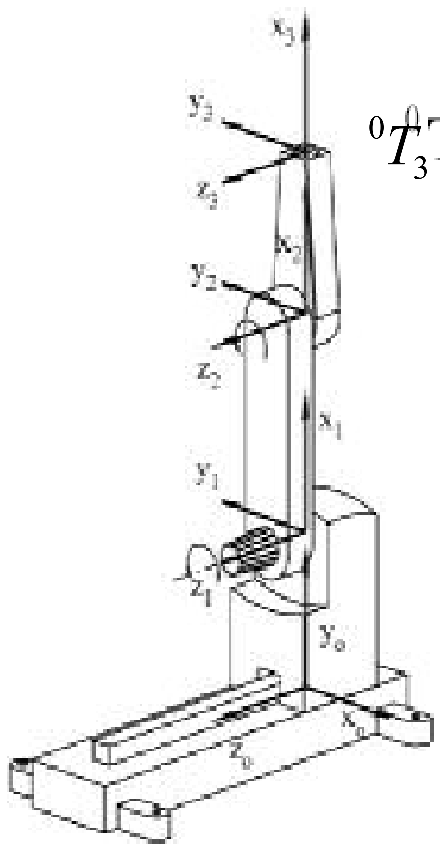
- Solución de Pieper
  - Consiste en separar las articulaciones de la muñeca del resto, resolviendo ambos conjuntos por separado.

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Solución algebraica

ejemplo:





$$
{}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Solución algebraica

ejemplo:

$${}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} x_{x^0_{extremo}} & x_{y^0_{extremo}} & x_{z^0_{extremo}} & x^0_{extremo} \\ y_{x^0_{extremo}} & y_{y^0_{extremo}} & y_{z^0_{extremo}} & y^0_{extremo} \\ z_{x^0_{extremo}} & z_{y^0_{extremo}} & z_{z^0_{extremo}} & z^0_{extremo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 \cdot {}^{1}T_2 \cdot {}^{2}T_3$$

$$\Downarrow$$

$$({}^{0}T_1)^{-1} \cdot {}^{0}T_3 = {}^{1}T_2 \cdot {}^{2}T_3 \Rightarrow q_1$$

$$\Downarrow$$

$$({}^{1}T_2)^{-1} \cdot ({}^{0}T_1)^{-1} \cdot {}^{0}T_3 = {}^{2}T_3 \Rightarrow q_3,\ q_2$$

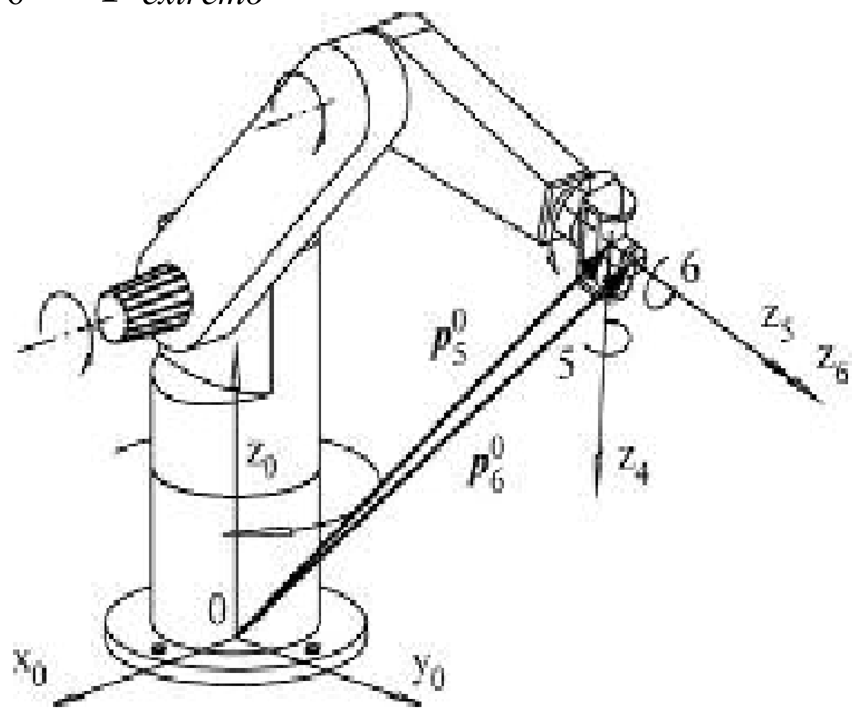
	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Solución de Pieper
  - La posición de la muñeca es $p_5^0 = p_{muñeca}^0$
  - La posición del extremo es $p_6^0 = p_{extremo}^0$

$$p_5^0 = p_6^0 - d_6 \cdot z_6$$

Ya se pueden obtener las 3 primeras articulaciones



PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Solución de Pieper
  - Para las últimas 3 se utiliza la orientación

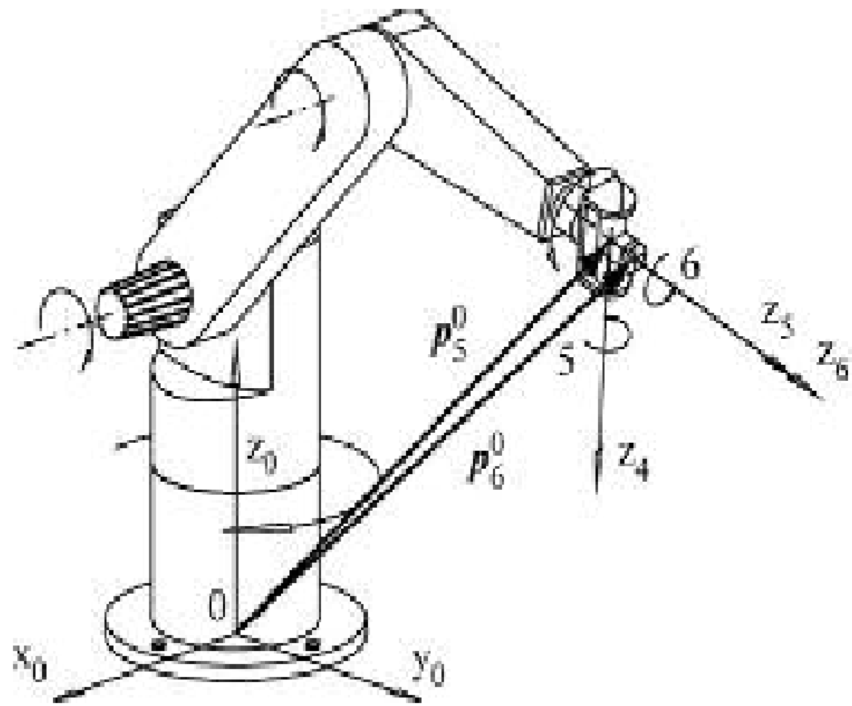
$$\underbrace{{}^{0}Rot_{extremo}}_{conocida} = \underbrace{{}^{0}Rot_{3}}_{conocida} \cdot {}^{3}Rot_{extremo}$$

$$\Downarrow$$

$${}^{3}Rot_{extremo} = {}^{3}Rot_{6}$$

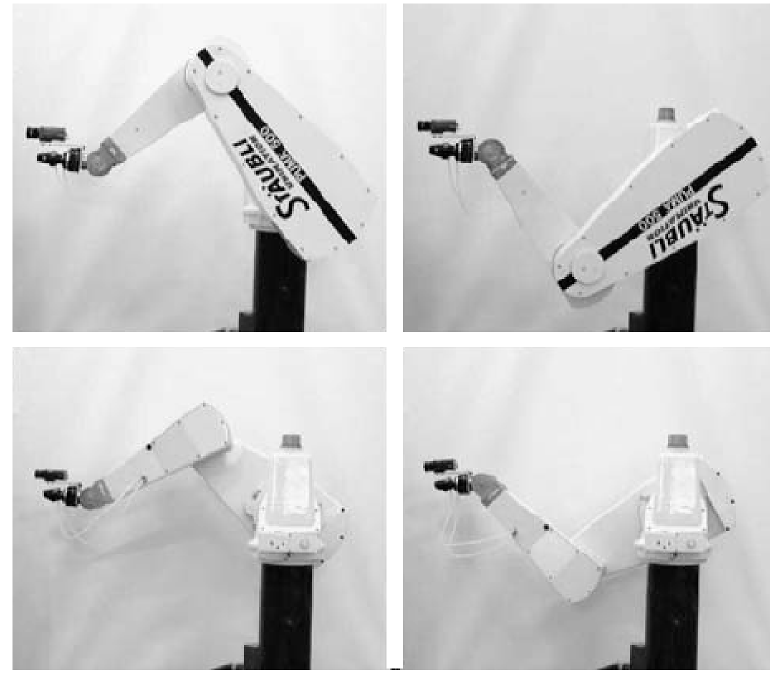
$$\Downarrow$$

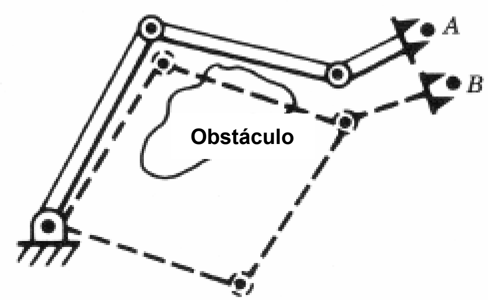
$${}^{3}Rot_{6} = \left({}^{0}Rot_{3}\right)^{-1} \cdot {}^{0}Rot_{extremo}$$



PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

- Existencia de múltiple soluciones
  - Elección que minimice los movimientos desde la posición actual
  - Concepto de solución más Cercana
  - Mover los eslabones de menor peso
  - Considerar obstáculos (evitar colisiones)

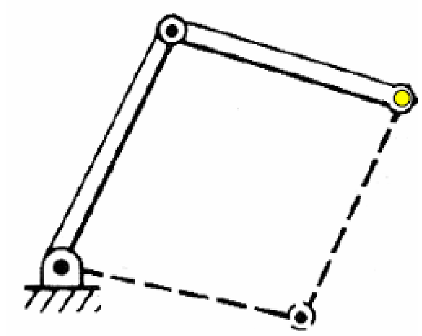




PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

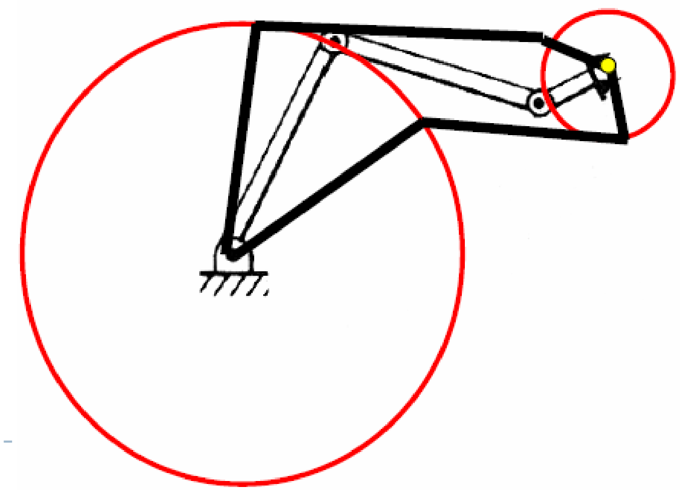
- Existencia de múltiple soluciones
  - Número de GDL del manipulador = Número de GDL que requiere la tarea

    $\Rightarrow$Dos soluciones



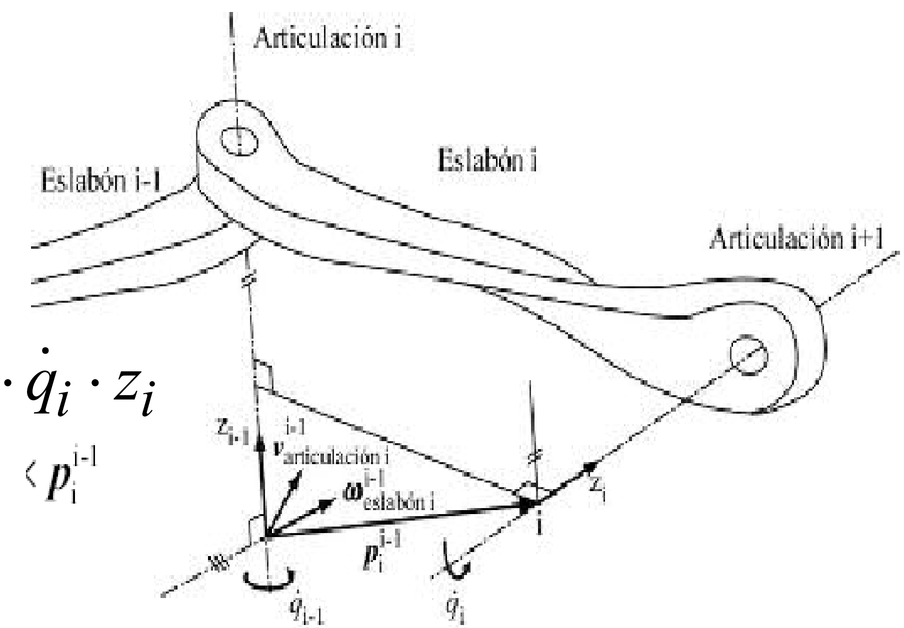
  - Número de GDL del manipulador > Número de GDL que requiere la tarea

    $\Rightarrow$ Infinitas soluciones



CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- Introducción
  - Estudia las relaciones entre el espacio articular y el cartesiano considerando velocidades además de posiciones.



$$\omega^{i-1}_{eslabón\ i+1} = \omega^{i-1}_{eslabón\ i} + {}^{i-1}Rot_i \cdot \dot{q}_i \cdot z_i$$

$$v^{i-1}_{articulación\ i+1} = v^{i-1}_{articulación\ i} + \omega^{i-1}_{eslabón\ i} \times p_i^{i-1}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- Matriz Jacobiana
  - Es una matriz de derivadas.

$$
\begin{aligned}
x^0_{extremo} &= f_x(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
y^0_{extremo} &= f_y(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
z^0_{extremo} &= f_z(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\alpha^0_{extremo} &= f_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\beta^0_{extremo} &= f_\beta(q_1, q_2, \cdots, q_n) \\
\gamma^0_{extremo} &= f_\gamma(q_1, q_2, \cdots, q_n)
\end{aligned}
\Rightarrow \mathbf{p} = {}^{\mathbf{0}}\mathbf{T_n}(\mathbf{q}) \overset{derivando}{\Rightarrow}
\begin{aligned}
\dot{x}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_x}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_x}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\
\dot{y}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_y}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_y}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\
\dot{z}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_z}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_z}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\
\dot{\alpha}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\
\dot{\beta}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\
\dot{\gamma}^0_{extremo} &= \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \dot{x}^0_{extremo} \\ \dot{y}^0_{extremo} \\ \dot{z}^0_{extremo} \\ \dot{\alpha}^0_{extremo} \\ \dot{\beta}^0_{extremo} \\ \dot{\gamma}^0_{extremo} \end{bmatrix} = J(q) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}
$$

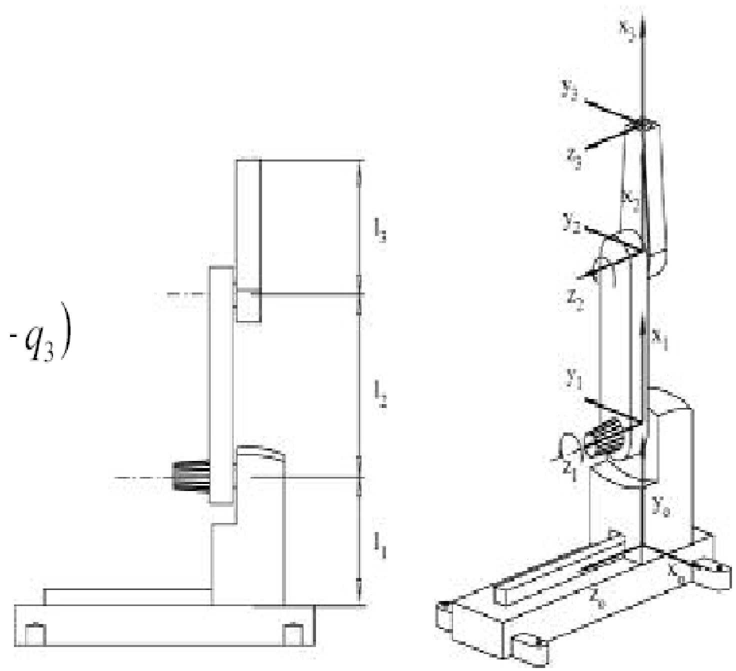
  - Permite relacionar la velocidad de las articulaciones con la velocidad del extremo del robot.

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- Matriz Jacobiana

  Ejemplo:

$$x^0_{extremo} = l_2 \cdot \sin q_2 + l_3 \cdot \sin(q_2 + q_3)$$
$$y^0_{extremo} = l_1 + l_2 \cdot \cos q_2 + l_3 \cdot \cos(q_2 + q_3)$$
$$z^0_{extremo} = q_1$$



$$\mathbf{J}_{(\mathbf{q})} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \cdot \cos q_2 + l_3 \cdot \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cdot \cos(q_2 + q_3) \\ 0 & -l_2 \cdot \sin q_2 - l_3 \cdot \sin(q_2 + q_3) & -l_3 \cdot \sin(q_2 + q_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- **Matriz Jacobiana Inversa**

  Relaciona la velocidad del extremo del robot con las velocidades de las articulaciones.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J^{-1}\left(x^0_{extremo}, y^0_{extremo}, z^0_{extremo}, \alpha^0_{extremo}, \beta^0_{extremo}, \gamma^0_{extremo}\right) \cdot \begin{bmatrix} v^0_{extremo} \\ \omega^0_{extremo} \end{bmatrix}$$

Hay que tener en cuenta la aparición de singularidades que implican la no existencia de la matriz Jacobiana inversa.

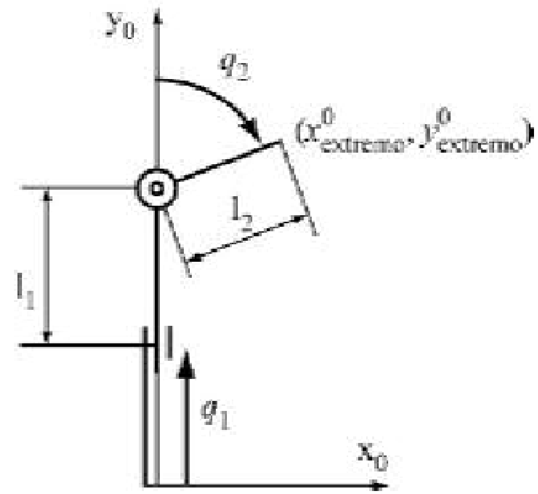
CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- Matriz Jacobiana Inversa

Ejemplo:

$$q_1 = y^0_{extremo} - l_1 - \left(l_2^2 - {x^0_{extremo}}^2\right)^{1/2}$$

$$q_2 = \arcsin \frac{x^0_{extremo}}{l_2}$$



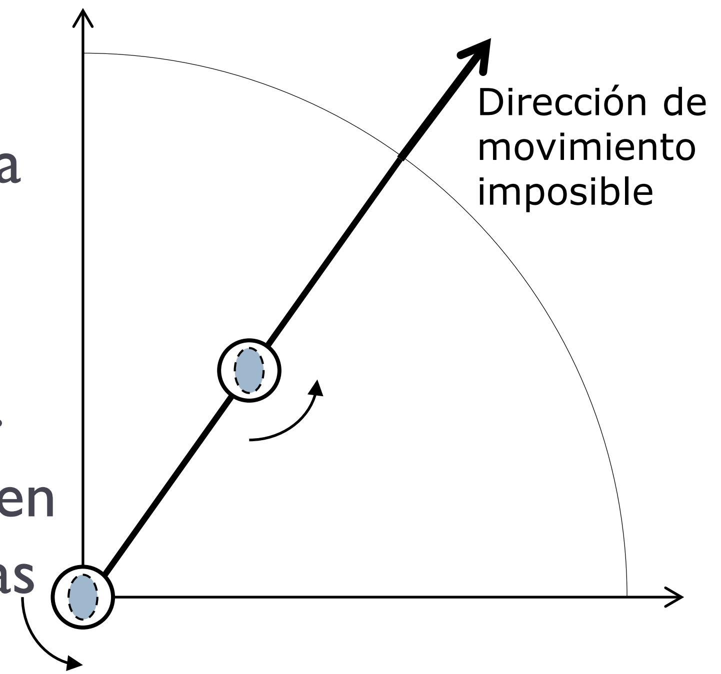
$$J^{-1}_{(q)} = \begin{bmatrix} \dfrac{x^0_{extremo}}{\left(l_2^2 - {x^0_{extremo}}^2\right)^{1/2}} & 1 \\ \dfrac{1}{l_2 \cdot \left(1 - {x^0_{extremo}}^2\right)^{1/2}} & 0 \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

- Matriz Jacobiana Inversa

Singularidades:

Existen combinaciones de las variables articulares que hacen que el Jacobiano sea nulo.



- ✓ Configuraciones articulares desde las cuales el movimiento resulta imposible.
- ✓ A velocidades finitas del extremo pueden corresponder velocidades infinitas de las articulaciones.
- ✓ A fuerzas y pares finitos del extremo pueden corresponder fuerzas y pares infinitas de las articulaciones.
- ✓ Se pierde al menos un grado de libertad

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO

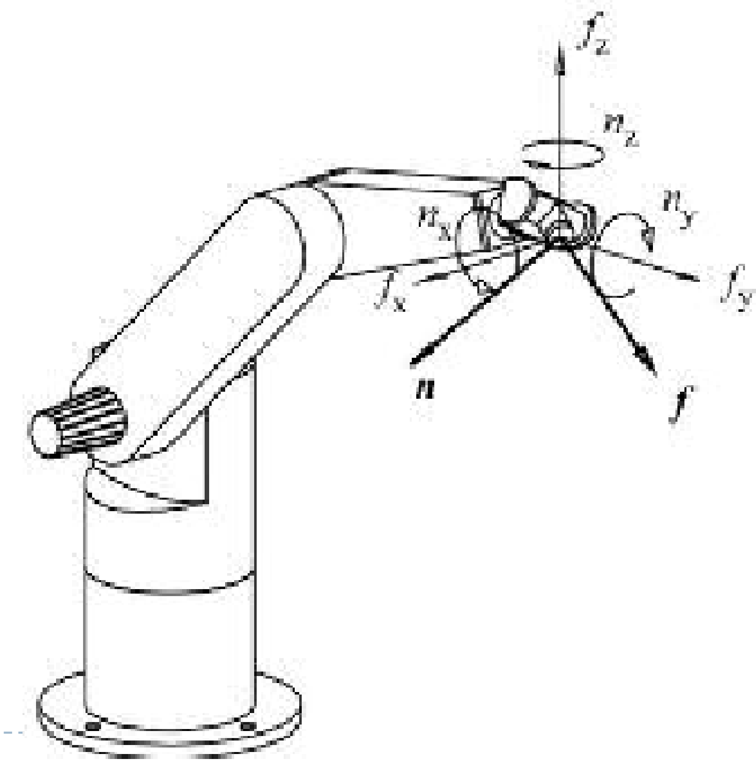
- Fuerzas estáticas

  Para que un robot se mantenga en equilibrio estático en una determinada posición y orientación es necesario que las articulaciones ejerzan unas determinadas fuerzas o pares.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{n}) = \left(f_x, f_y, f_z, n_x, n_y, n_z\right)$$

$$\partial x = \mathbf{J}_{(\mathbf{q})} \cdot \partial q$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{\mathbf{T}}_{(\mathbf{q})} \cdot \mathbf{F}$$

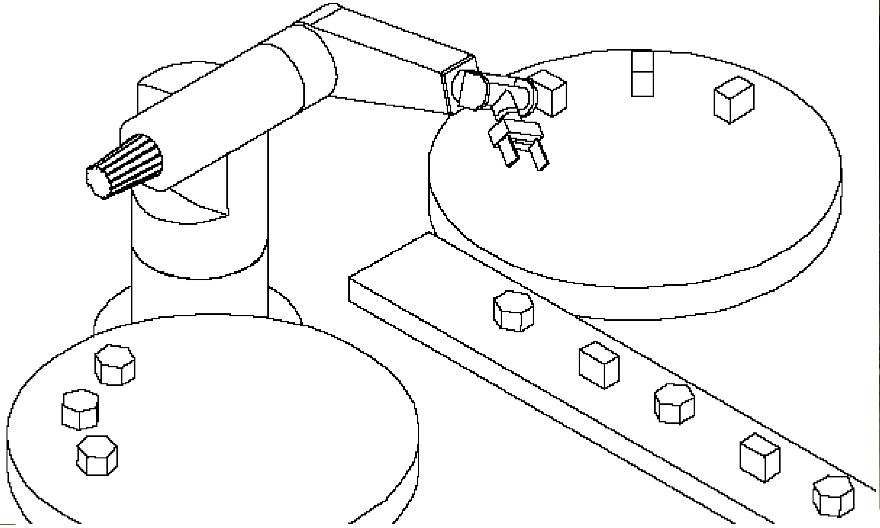


GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Formulación del problema

  a) Que el extremo del robot se desplace entre dos puntos (Trayectorias en el espacio articular).

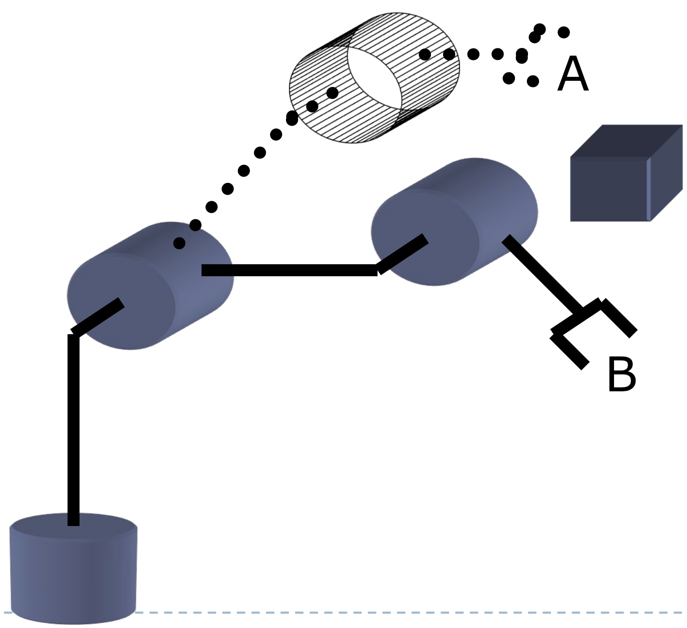
  b) Que el extremo del robot se desplace sobre una trayectoria determinada (Trayectorias en el espacio cartesiano).




GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- **Trayectorias en el espacio articular:**

  Desplazar el extremo del robot entre A y B en un tiempo determinado.

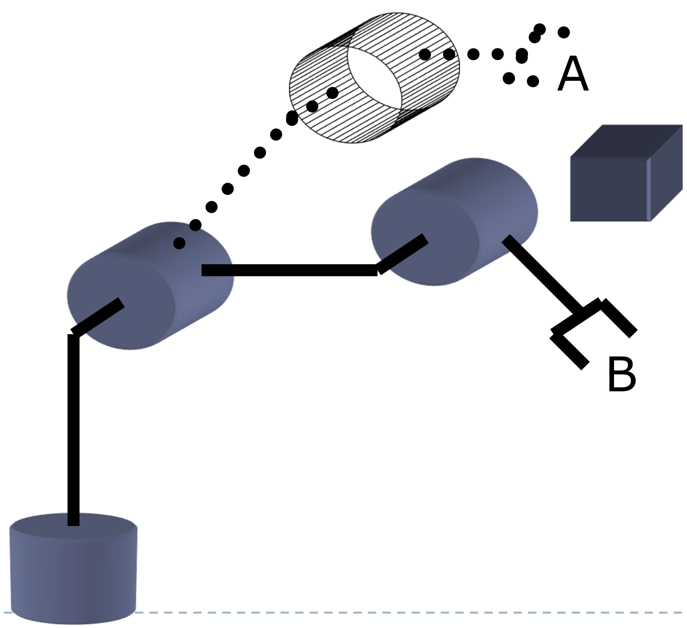


- Se trabaja sobre el espacio articular.
- La trayectoria descripta por el extremo es compleja.
- Si existen obstáculos hay que considerar puntos intermedios.

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Trayectorias en el espacio articular:

  Para generar la trayectoria del robot se siguen los pasos siguientes:



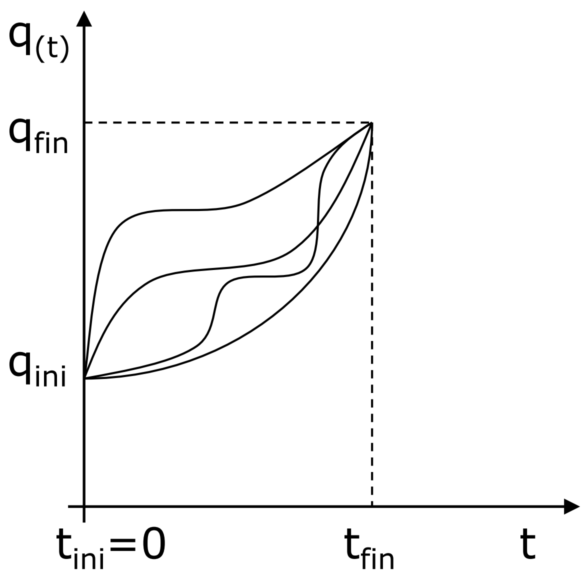
- Conversión de los puntos inicial, final e intermedios a valores articulares mediante la cinemática inversa.
- Interpolación de los valores articulares para cada articulación.
- Movimiento de cada articulación según la trayectoria establecida.

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- **Interpolación articular:**

  La conversión a valores articulares se realiza con ayuda de la cinemática inversa.

  Interpolación considerando sólo puntos de inicio y fin :



Condiciones de contorno

$$q_{(t_{ini})} = q_{(0)} = q_{ini}$$

$$q_{(t_{fin})} = q_{fin}$$

$$\dot{q}_{(t_{ini})} = \dot{q}_{(0)} = \dot{q}_{ini}$$

$$\dot{q}_{(t_{fin})} = \dot{q}_{fin}$$

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación lineal

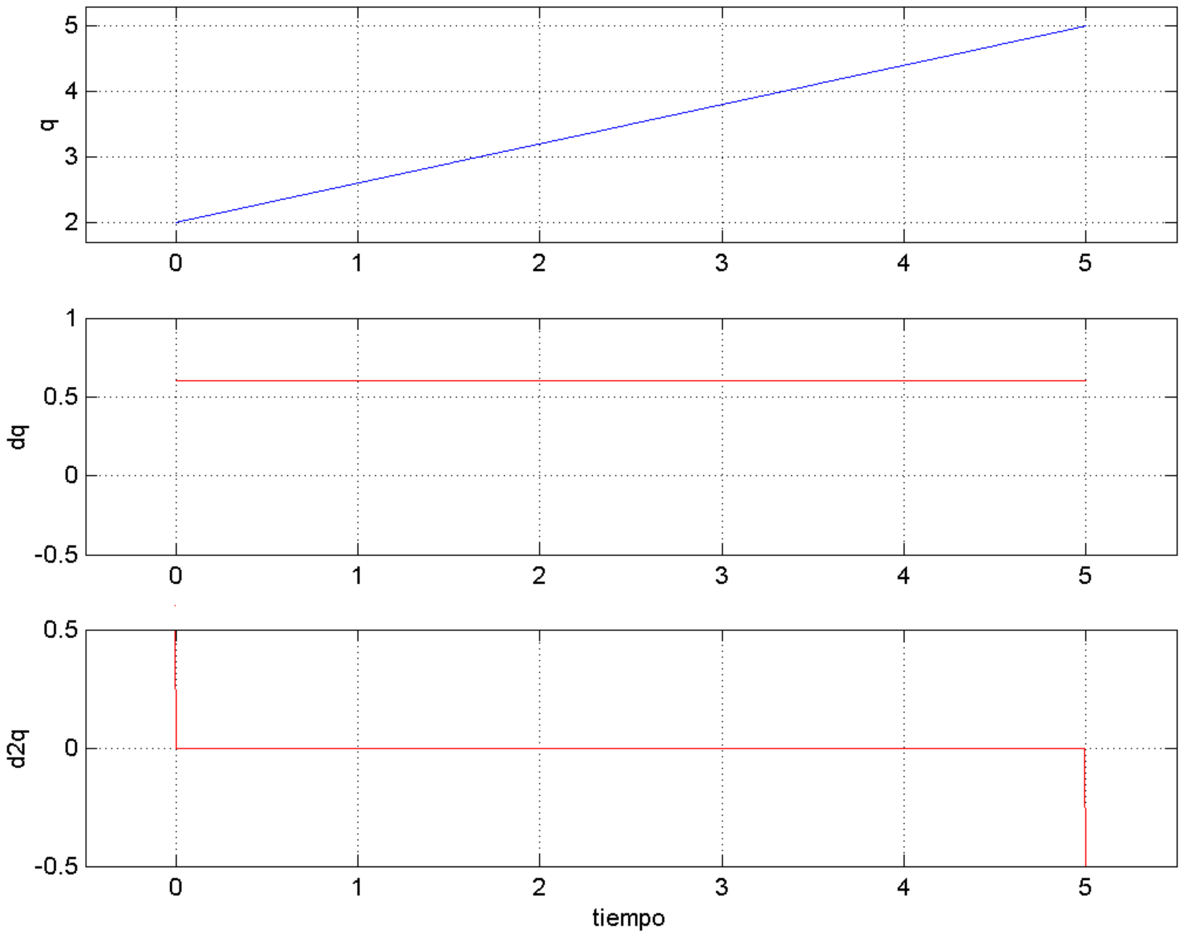
$$q_{(t)} = a + b \cdot t \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & q_{(t_{ini})} = q_{(0)} \Rightarrow a = q_{ini} \\ & q_{(t_{fin})} = a + b \cdot t_{fin} = q_{fin} \Rightarrow b = \frac{q_{fin} - q_{ini}}{t_{fin}} \end{aligned}$$

Requiere un aceleración infinita, ya que la velocidad inicial y final no son nulas.

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación lineal



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación cúbica

Cumple las cuatro condiciones de contorno

$$q_{(t)} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{ini} & t_{ini}^2 & t_{ini}^3 \\ 0 & 1 & 2t_{ini} & 3t_{ini}^2 \\ 1 & t_{fin} & t_{fin}^2 & t_{fin}^3 \\ 0 & 1 & 2t_{fin} & 3t_{fin}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{ini} \\ \dot{q}_{ini} \\ q_{fin} \\ \dot{q}_{fin} \end{bmatrix}$$

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación cúbica

Cumple las cuatro condiciones de contorno

$$q_{(t)} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3$$

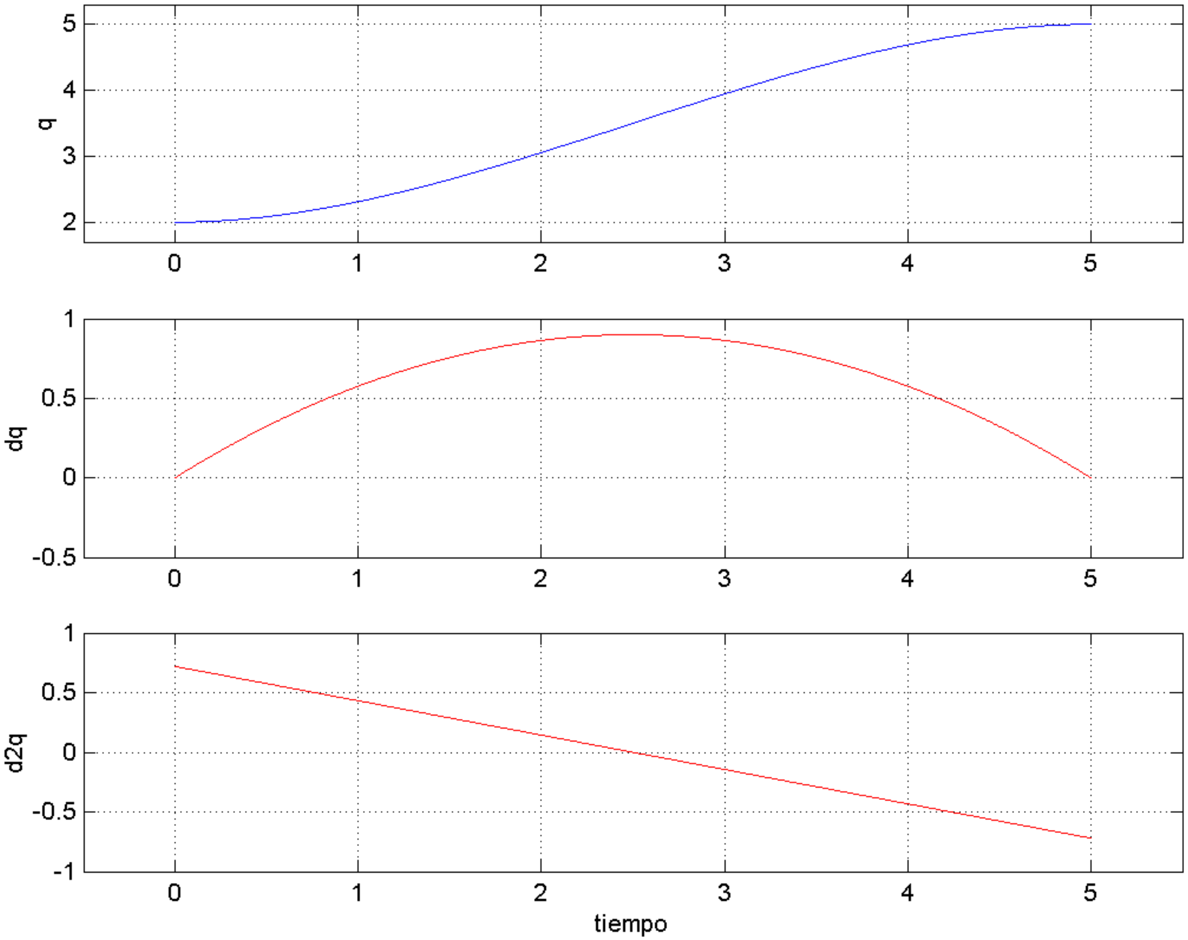
$$t_{ini} = 0 \qquad \dot{q}_{ini} = 0 \qquad \dot{q}_{fin} = 0$$

$$a = q_{ini} \qquad b = 0 \qquad c = \frac{3 \cdot \left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^2} \qquad d = \frac{-2 \cdot \left(q_{fin} - q_{ini}\right)}{t_{fin}^3}$$

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación cúbica



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación lineal con ajuste parabólico

Trayectoria en tres tramos:

Tramo I: Parabólico

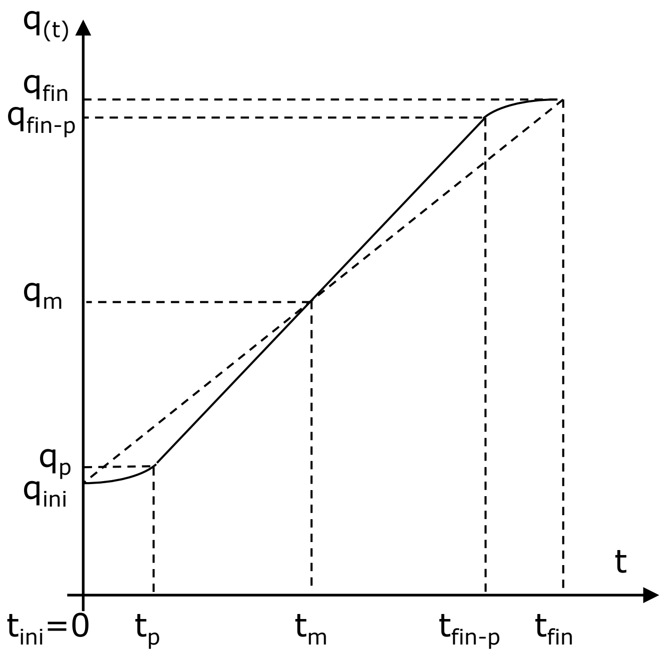
Aplica una aceleración

Tramo II: Lineal

Mantiene la velocidad constante

Tramo III: Parabólico

Aplica una desaceleración



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación lineal con ajuste parabólico

Tramo I:

$$q_{(t)} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \qquad a = q_{ini} \qquad b = 0 \qquad c = \frac{\ddot{q}}{2}$$

Tramo III:

$$q_{(t)} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \qquad a = q_{fin} + \frac{\ddot{q}}{2} \cdot t_{fin}^2 \qquad b = -\ddot{q} \cdot t_{fin} \qquad c = \frac{\ddot{q}}{2}$$

Tramo II: Velocidad const. igual a velocidad final del tramo I

Posición inicial igual a posición final tramo I

$$q_{(t)} = a + b \cdot t$$

$$t_p = t_m - \sqrt{\ddot{q}^2 \cdot t_m^2 - \ddot{q} \cdot \left(q_{fin} - q_{ini}\right)} \Big/ \ddot{q}$$

$$\Rightarrow$$

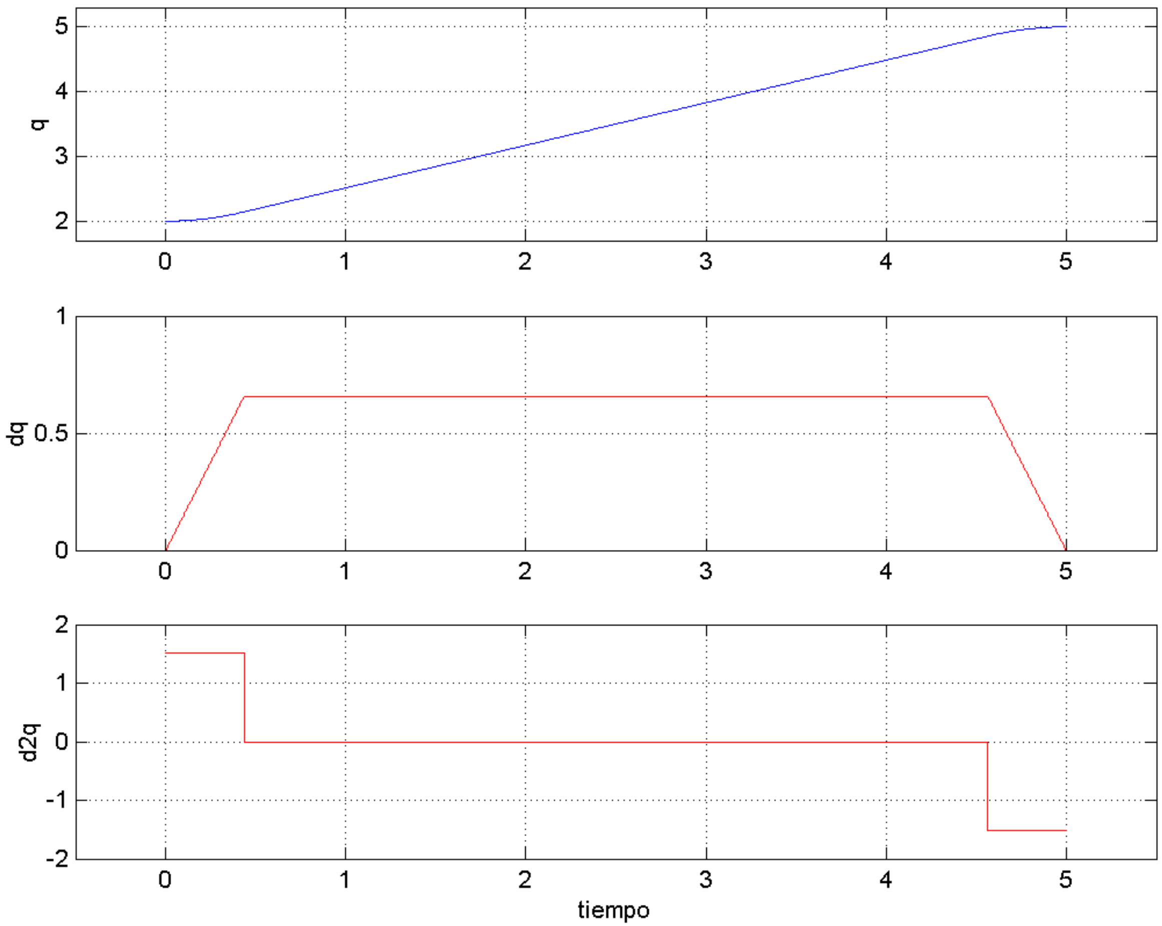
$$a = q_p - \frac{q_{fin-p} - q_p}{t_{fin} - 2 \cdot t_p} \cdot t_p$$

$$b = \frac{q_{fin-p} - q_p}{t_{fin} - 2 \cdot t_p}$$

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación lineal con ajuste parabólico



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Interpolación articular:

Interpolación considerando puntos intermedios

Si se utilizan los métodos anteriores la articulación se detiene en los puntos intermedios $\Rightarrow$ Hay que cambiar las condiciones de contorno:

1. Velocidades de paso definidas por el usuario
2. Las define el generador de trayectorias por medios heurísticos:
   - La media de las velocidades entre los dos tramos si la velocidad mantiene el mismo sentido
   - Cero si la velocidad en los dos tramos tiene sentidos opuestos
3. El generador define trayectorias para evitar discontinuidades de aceleración en los puntos de paso

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Tipos de trayectorias articulares:

  Los interpoladores obtenidos, de manera independiente, para cada articulación se combinan para un robot.

  El movimiento de cada articulación se produce de manera independiente

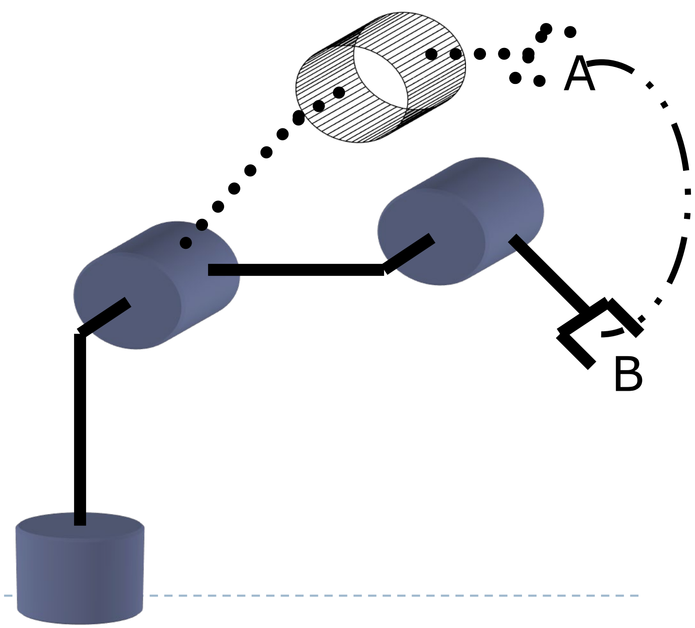
- Trayectorias punto a punto.
  - **Movimiento eje a eje:** Las articulaciones se mueven de manera consecutiva a la máxima velocidad.
  - **Movimiento simultáneo de ejes:** Todas las articulaciones comienzan a moverse en el mismo instante de tiempo a la máxima velocidad
- Trayectorias coordinadas o isócronas.
  - Todas las articulaciones comienzan a moverse en el mismo instante de tiempo y terminan a la vez, adaptando su velocidad a la más lenta

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- **Trayectorias en el espacio cartesiano:**

Que el extremo del robot se desplace sobre una trayectoria determinada (recta, circular, elíptica, etc.).

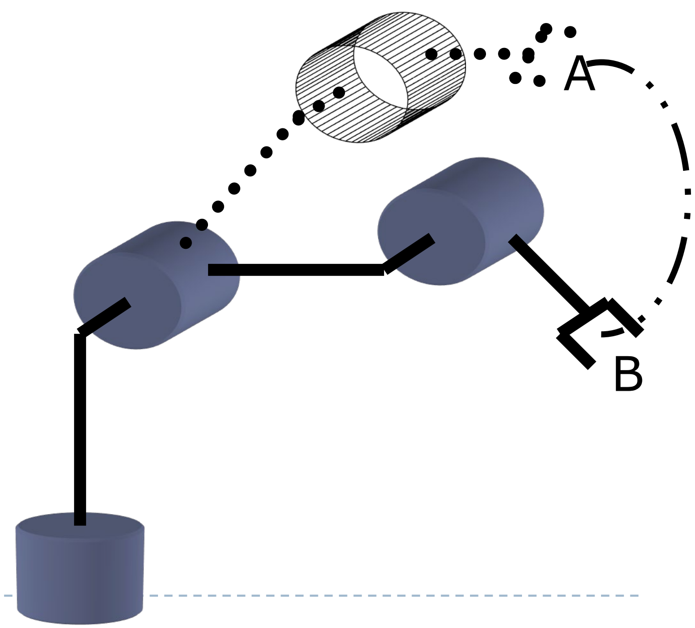
- Se trabaja sobre el espacio cartesiano.
- Implica un mayor coste computacional.
- Se toman puntos intermedios de referencia sobre la trayectoria cartesiana en función del período de muestreo del sistema de control.
- Se calcula la cinemática inversa para cada uno de ellos.



GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Trayectorias en el espacio cartesiano:

  - Se representa la posición y orientación del extremo mediante 6 parámetros (x,y,z) y (α,β,γ).
  - Se obtienen la coordenadas articulares para cada uno de los puntos.
  - Se interpola cada articulación tal y como se ha visto anteriormente.

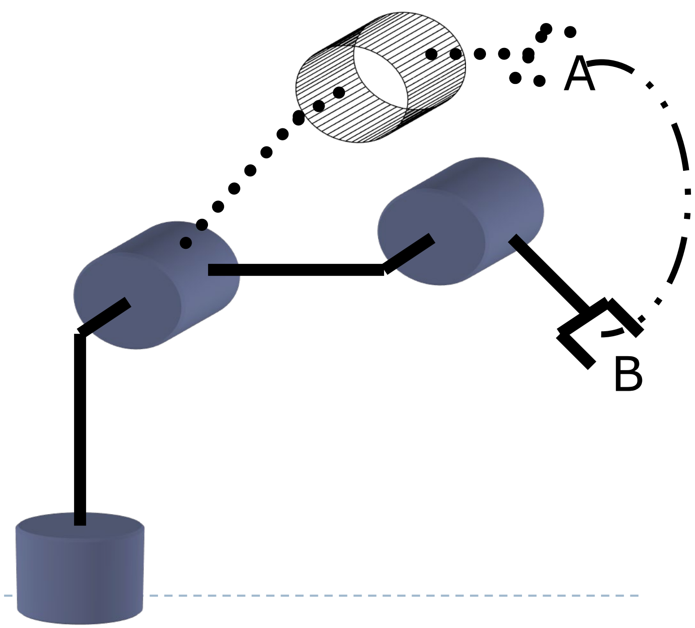


GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Trayectorias en el espacio cartesiano:

Las trayectorias en el espacio cartesiano están sometidas a problemas debido fundamentalmente a las singularidades en el espacio de trabajo.

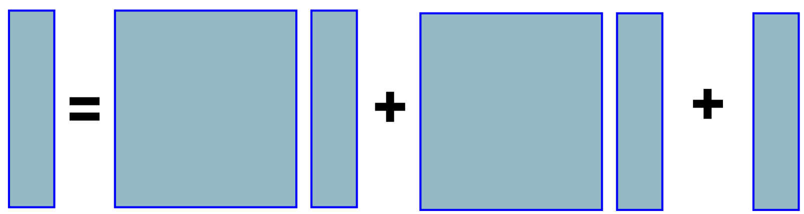
- Cuando el extremo del robot pasa por una configuración singular, la velocidad de alguna de las articulaciones deberá ser idealmente infinita para poder llevar a cabo la trayectoria cartesiana..



MODELO DINAMICO

- Describe la evolución del sistema mecánico articulado, sujeto a las acciones de fuerza o par de los actuadores.

$$\mathbf{t} = \mathbf{M(q)\ddot{q}} + \mathbf{C(q,\dot{q})\dot{q}} + \mathbf{g(q)}$$



- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \Re^{nx1}$ vector de posición, velocidad y aceleración
- $M\left(q\right) \in \Re^{nxn}$ matriz de inercia
- $C\left(q, \dot{q}\right) \in \Re^{nxn}$ matriz de pares centrifugos o de Colioris
- $g\left(q\right) \in \Re^{nx1}$ vector de pares gravitacionales
- $\tau \in \Re^{nx1}$ vector de torques

- **Problema dinámico directo**

  Se calcula el movimiento del extremo del robot a partir de los pares y fuerzas de los accionadores de las articulaciones.

- **Problema dinámico inverso**

  Se calcula los valores de los pares y fuerzas de los accionadores de las articulaciones a partir de las posiciones, velocidades y aceleraciones requeridas para el extremo del robot.

- **Métodos de solución**
  - Iterativos: solución numérica.
  - Soluciones cerradas: expresión analítica de un robot concreto.
  - Soluciones recursivas.

- **Enfoques de solución**
  - **Lagrange**: Balance de energías a través del Lagrangiano. Permite análisis del sistema.
  - **Newton-Euler**: Balance de fuerzas y pares. Mejor implementación recursiva.

FORMULACIÓN DE LAGRANGE

- **Lagrangiano:**

Es una función escalar que se define como la diferencia entre las energías cinética y potencial de un sistema mecánico, en función de las llamadas coordenadas generalizadas que en el caso de un robot son las variables articulares:

$$L_{(q,\dot{q})} = E_{C(q,\dot{q})} - E_{P(q)}$$

Las ecuaciones del movimiento para un robot se pueden definir como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{(q,\dot{q})}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L_{(q,\dot{q})}}{\partial q} = \tau$$