4. Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$

Primero, es pertinente decir que si $i=j \Rightarrow a_{ij}=1$, es decir, toda la diagonal son unos.

- Por definición de la sustitución hacia adelante tenemos una matriz triangular menor:

$$\begin{bmatrix} A_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i0} & A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

- Al resolver para todos los casos:

(1) $A_{00} \cdot x_0 = b_0 \Rightarrow x_0 = \frac{b_0}{A_{00}} = b_0$

(2) $A_{10} \cdot x_0 + A_{11} \cdot x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = b_1 - A_{10} x_0$

(3) $A_{20} \cdot x_0 + A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = b_2 - A_{20} \cdot x_0 + A_{21} \cdot x_1$

$\vdots$

(i) $A_{i0} \cdot x_0 + A_{i1} \cdot x_1 + \dots A_{ii} \, x_i = b_i \Rightarrow x_i = b_i - (A_{i0} \cdot x_0 + A_{i1} x_1 + \dots) + A_{i(i-1)} \cdot x_{(i-1)}$

Por lo tanto

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j$$