ALGEBRA DE BOOLE

***Definición 1*:**

Sea un conjunto no vacío B y dos funciones denotadas con + y $\cdot$ **,** la terna $(B, +, \cdot)$ es un ***Álgebra de Boole*** si y sólo sí

1) + y $\cdot$ son leyes de composición interna en B
   $\forall\, a, b \in B;\ a + b \in B$
   $\forall\, a, b \in B;\ a \,.\, b \in B$

2) + y $\cdot$ son asociativas
   $\forall\, a, b, c \in B;\ a + (b + c) = (a + b) + c$
   $\forall\, a, b, c \in B;\ a. (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$

3) + y $\cdot$ son conmutativas
   $\forall\, a, b \in B;\ a + b = b + a$
   $\forall\, a, b \in B;\ a \,.\, b = b \,.\, a$

4) + y $\cdot$ son distributivas, cada una respecto de la otra
   $\forall\, a, b, c \in B;\ a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$
   $\forall\, a, b, c \in B;\ a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c$

5) Existen elementos neutros en B, respecto de + y de $\cdot$ que se denotan con 0 y 1 respectivamente
   $\exists\ 0 \in B: \forall\, a \in B;\ a + 0 = 0 + a = a$
   $\exists\ 1 \in B: \forall\, a \in B;\ a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$

6) $1 \neq 0$

7) Todo elemento $a \in B$ admite un ***complementario*** $a' \in$ B, tal que
   $\forall\, a \in B; \exists\, a' \in B:\ a + a' = a' + a = 1$
   $\forall\, a \in B; \exists\, a' \in B:\ a \,.\, a' = a' \,.\, a = 0$

***Notas*:**

1.- Es frecuente que, en vez de **+**, $\cdot$ y **′** se empleen los símbolos $\cup$**,** $\cap$ y **c** o bien $\vee$**,** $\wedge$ y ~ respectivamente**.**

2.- Se supondrá, al igual que el álgebra ordinaria, la precedencia de las operaciones, esto es, la operación producto es prioritaria sobre la operación adición. Esta prioridad podrá ser alterada con el uso de paréntesis. Por ejemplo:

$a + b \,.c = a + (b \,.c)$, pero
$a + b \,.c \neq (a + b) \,.c$

Modelos de la Estructura Algebraica de Álgebra de Boole

1.-

Sea U un conjunto no vacío. El conjunto "***partes de*** U", denotado por $\mathscr{P}(U)$, con las operaciones de *unión, intersección* y *complementación* de conjuntos, es un modelo de la estructura algebraica de Álgebra de Boole. Donde el conjunto $\varnothing$ es el elemento neutro para la unión, U es elemento neutro para la intersección y $A^c = U - A$ es el complemento de cualquier subconjunto A de U.

2.-

El conjunto de los valores de verdad de las proposiciones lógicas $\mathscr{V} = \{V, F\}$, con las conectivas lógicas *disjunción* ($\vee$), *conjunción* ($\wedge$) y *negación* (~), definidas en las tablas:

$\vee$	**V**	**F**
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**

$\wedge$	**V**	**F**
V	**V**	**F**
F	**F**	**F**

	~
V	F
F	V

constituye un modelo del Álgebra de Boole, donde **F** es el elemento neutro para la disjunción**,** **V** es el elemento neutro para la conjunción y el valor de verdad de **~p** (la negación de la proposición **p**) es el complementario del valor de verdad de la proposición **p**.

3.-

El conjunto **B** = { **0, 1**} con las leyes definidas mediante las tablas

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**

·	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

	′
0	**1**
1	**0**

constituye un modelo de la estructura algebraica de Álgebra de Boole, llamada ***Álgebra de Boole Binaria***, donde **0** es el elemento neutro para la suma, **1** es el elemento neutro para la multiplicación, el complementario de **0** es **1** (**0′ = 1**) y el complementario de **1** es **0** (**1′ = 0**).

***Definición 2*:**

Dada una proposición **P**, se llama proposición "***dual de* P**" a la proposición que se obtiene de **P** al intercambiar entre sí las operaciones de suma (**+**) y multiplicación (·) y sus elementos neutros **0** y **1**.

Nota

Es fácil advertir que los axiomas de la estructura de Álgebra de Boole relativo a la operación multiplicación (·) son los duales de los axiomas correspondientes a la operación suma (**+**).

PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

P1.- *Principio de dualidad*

Si una proposición **P** es derivable de los axiomas de Álgebra de Boole, entonces la proposición dual de **P** es también derivable de los axiomas de Álgebra de Boole.

Demostración:

En efecto, al demostrar una proposición **P** empleando una sucesión de axiomas de Álgebra de Boole, la proposición dual de **P** se demuestra empleando la sucesión de los axiomas duales.

P2.- *Unicidad de los elementos neutros 0 y 1*

i) Existe un único elemento neutro para la suma.
ii) Existe un único elemento neutro para la multiplicación.

P3.- *Idempotencia*

Todos los elementos de un Álgebra de Boole son idempotentes respecto a la suma y a la multiplicación. Esto es

i) $a \in B \Rightarrow a + a = a$

ii) $a \in B \Rightarrow a \,.\, a = a$

Demostración:

i) $$a \underset{(1)}{=} a + 0 \underset{(2)}{=} a + (a'.\, a) \underset{(3)}{=} (a + a') \,.\, (a + a) \underset{(4)}{=} 1.\, (a + a) \underset{(5)}{=} a + a$$

Referencias: Para ser completado por el alumno

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

ii) La propiedad dual se demuestra empleando el Principio de Dualidad

Q.E.D.

P4.- ***Identidad de los elementos 0 y 1***

i) $a \in B \Rightarrow a + 1 = 1$

ii) $a \in B \Rightarrow a \,.\, 0 = 0$

Demostración:

i) $a + 1 \underset{(1)}{=} a + (a + a') \underset{(2)}{=} (a + a) + a' \underset{(3)}{=} a + a' \underset{(4)}{=} 1$

Referencias: Para ser completado por el alumno
(1)
(2)
(3)
(4)

ii) La propiedad dual se demuestra empleando el Principio de Dualidad

Q.E.D.

P5.- ***Absorción***

i) $a, b \in B \Rightarrow a + (a \,.b) = a$

ii) $a, b \in B \Rightarrow a \,.\, (a + b) = a$

Demostración:

i) $a + (a \,.\, b) \underset{(1)}{=} (a \,.\, 1) + (a \,.\, b) \underset{(2)}{=} a \,.\, (1 + b) \underset{(3)}{=} a$

Referencias: Para ser completado por el alumno
(1)
(2)
(3)

ii) La propiedad dual se demuestra empleando el Principio de Dualidad

Q.E.D.

P6.- ***Unicidad del complementario***

Cada elemento a de B admite un único complementario a' *de* $\boldsymbol{B}$

<u>*Demostración*</u>:

Sean a'_1 y a'_2 complementarios de a, se mostrará que son iguales

$$a'_2 \underset{(1)}{=} a'_2 + 0 \underset{(2)}{=} a'_2 + (a \,.\, a'_1) \underset{(3)}{=} (a'_2 + a) \,.\, (a'_2 + a'_1) \underset{(4)}{=} 1 \,.\, (a'_2 + a'_1) \underset{(5)}{=}$$

$$\underset{(5)}{=} (a + a'_1) \,.\, (a'_2 + a'_1) \underset{(6)}{=} (a \,.\, a'_2) + a'_1 \underset{(7)}{=} 0 + a'_1 \underset{(8)}{=} a'_1$$

<u>Referencias</u>: Para ser completado por el alumno

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)

Q.E.D

P7.- ***Involución***

El complementario del complementario de un elemento $a \in B$ es a. Esto es,

$$a \in B \Rightarrow (a')' = a$$

P8.- ***Leyes de De Morgan***

i) $a, b \in B \Rightarrow (a + b)' = a' \,.\, b'$

ii) $a, b \in B \Rightarrow (a \,.\, b)' = a' + b'$

<u>*Demostración*</u>:

i) $(a + b) \,.\, (a' \,.\, b') \underset{(1)}{=} a \,.\, (a' \,.\, b') + b \,.\, (a' \,.\, b') \underset{(2)}{=} (a \,.\, a') \,.\, b' + (b \,.\, b') \,.\, a' \underset{(3)}{=} 0$

<u>Referencias</u>:

(1)
(2)
(3)

ii) La propiedad dual se demuestra empleando el Principio de Dualidad

Q.E.D

P9.- ***Complementarios de 0 y 1***

i) $0' = 1$

ii) $1' = 0$

P10.- ***Cancelatividad en la multiplicación***

Si *a, b* y *c* son elementos de *B,* entonces se verifica que

$$[\ a \,.\, b = c \,.\, b \ \wedge \ a \,.\, b' = c \,.\, b'\ ] \Rightarrow a = c$$

Demostración:

$$a \underset{(1)}{=} a \,.1 \underset{(2)}{=} a \,.(b + b') \underset{(3)}{=} a \,.\, b + a \,.\, b' \underset{(4)}{=} c \,.\, b + c \,.\, b' \underset{(5)}{=} c \,.\, (b + b') \underset{(6)}{=} c \,.\, 1 \underset{(7)}{=} c$$

Referencias: Para ser completado por el alumno

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

Q.E.D

P11.- ***Sin nombre especial***

i) $a, b \in B \Rightarrow a + a' \,.\, b = a + b$

ii) $a, b \in B \Rightarrow a \,.\, (a' + b) = a \,.\, b$

Demostración:

i) $$a + b \underset{(1)}{=} a + 0 + b \underset{(2)}{=} a + a \,.\, a' + b \underset{(3)}{=} a + (a \,.\, a' + b) \underset{(4)}{=} a + a \,.\, b + a' \,.\, b \underset{(5)}{=}$$

$$\underset{(5)}{=} (a + a \,.\, b) + a' \,.\, b \underset{(6)}{=} a + a' \,.\, b$$

Referencias: Para ser completado por el alumno

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

ii) La propiedad dual se demuestra empleando el Principio de Dualidad

Q.E.D

FUNCIONES BOOLEANAS

Sea $(B, +, \cdot)$ un Álgebra de Boole.

Definición 1:

Se denomina ***constante*** a un elemento particular de B, como por ejemplo el elemento neutro 0.

Definición 2:

Una ***variable*** es un símbolo que representa a cualquier elemento del conjunto B. Las variables se designan con las últimas letras del alfabeto castellano.

Definición 3:

Una función booleana es toda expresión de un Álgebra de Boole, que consiste en combinaciones de sumas y/o productos de un número finito de variables. Por ejemplo

$$f(x) = x + x'$$
$$g(x, y, z) = x + y \,.\, z'$$

En un Álgebra de Boole las funciones booleanas se pueden expresar en general como suma de productos distintos o como producto de sumas distintas, aplicando axiomas y propiedades. Por ejemplo,

a)

$$f(x, y, z) = [(x + y') \,.\, (x \,.\, y' \,.\, z)'\,]' \underset{(1)}{=} (x + y')' + [\,(x \,.\, y' \,.\, z)'\,]' \underset{(2)}{=} (x' \,.\, y) + (x \,.\, y' \,.\, z)$$

(1) Por leyes de De Morgan
(2) Por leyes de De Morgan y Prop. involutiva

b)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \{\, [(x' \,.\, y')' + z] \,.\, (x + z) \,\}' && \text{por leyes de De Morgan} \\ &= [(x' \,.\, y')' + z]' + (x + z)' && \text{por leyes de De Morgan y Prop. involutiva} \\ &= (x' \,.\, y' \,.\, z') + (x' \,.\, z') && \text{por Prop. de Absorción} \\ &= x' \,.\, z' \end{aligned}$$

FORMA CANÓNICA

<u>Definición 4</u>

La ***forma canónica*** de una función booleana es la formada por una suma de términos, y cada uno de ellos está compuesto por un producto de todas las variables, complementadas o no, de la función.

Por ejemplo la función f siguiente se transforma a la forma canónica aplicando axiomas y propiedades de Álgebra de Boole.

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (x' . y) + (x . y' . z) \\
&= (x' . y . 1) + (x . y' . z) \\
&= (x' . y . (z + z')) + (x . y' . z) \\
&= (x' . y . z) + (x' . y . z') + (x . y' . z)
\end{aligned}
$$

<u>Notas</u>:

1. La forma canónica de una función booleana en n variables contiene a lo sumo 2^n términos distintos.
2. La forma canónica de una función booleana que contiene los 2^n términos distintos se llama *forma canónica completa*.
3. La forma canónica completa de una función booleana en n variables es igual a 1.

<u>Definición 5</u>:

El complemento f' de una función booleana f expresada en forma canónica es la suma de todos los términos de la forma canónica completa de f que no aparecen en la forma canónica de f.

Por ejemplo, el complemento de la función booleana de la función del ejemplo precedente es

$$f'(x, y, z) = (x . y . z) + (x' . y' . z') + (x' . y' . z) + (x . y' . z') + (x . y . z')$$

<u>Proposición 1</u>

Si en la forma canónica completa de una función booleana en n variables, cada variable toma el valor 0 o el valor 1, entonces sólo un término tiene el valor 1 y todos los demás tienen el valor 0.

Proposición 2

Dos funciones booleanas son iguales si y sólo si sus formas canónicas respectivas son idénticas, es decir, sus formas canónicas tienen los mismos términos.

FORMA CANÓNICA DUAL

Definición 6:

La ***forma canónica dual*** de una función booleana es la formada por un producto de factores, y cada uno de ellos está compuesto por una suma de todas las variables, complementadas o no, de la función.

Por ejemplo la función booleana f siguiente se lleva a la forma canónica dual empleando axiomas y propiedades de Álgebra de Boole.

$$f(x, y, z) = (x + y) \,.\, (y + z) \,.\, (x' + z) \,.\, (x' + y')$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= (x + y + z) \,.\, (x + y + z') . (x' + y + z) \,.\, (x' + y' + z) \,.\, (x' + y' + z')$$

Notas:

1. La forma canónica dual de una función booleana en n variables contiene a lo sumo 2^n términos distintos.
2. La forma canónica dual de una función booleana en n variables que contiene los 2^n términos se llama *forma canónica dual completa*.
3. La forma canónica dual completa de una función booleana en n variables es idénticamente 0.
4. La forma canónica dual de una función booleana en n variables, **no es** la dual de la forma canónica.

***Definición 7*:**

El complemento f' de una función booleana f expresada en forma canónica dual es el producto de todos los factores de la forma canónica dual completa que no aparecen en la forma canónica dual de f.

Por ejemplo, el complemento de la función booleana de la función del ejemplo precedente es

$$f'(x, y, z) = (x + y' + z) \,.\, (x' + y + z') \,.\, (x + y' + z')$$

Proposición 1'

Si en la forma canónica dual completa en n variables cada variable toma el valor 0 o el valor 1, sólo un factor tiene el valor 0 y todos los demás tienen el valor 1.

Proposición 2'

Dos funciones booleanas son iguales si y sólo sí sus formas canónicas duales respectivas son idénticas, es decir tienen los mismos términos.

TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA DEL ÁLGEBRA DE BOOLE BINARIA

Si f es una función booleana en n variables del Álgebra de Boole Binaria, es posible construir una tabla de valores de la función f para todas las posibles maneras de asignar los valores 0 y 1 a las variables.

Teniendo en cuenta la Proposición 1, los términos que aparecen en la forma canónica de la función son los de la forma canónica completa en n variables que tienen valor 1 cuando f es igual a 1.

Por ejemplo si la tabla de una función booleana en tres variables viene dada por

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

$$f(x, y, z) = (x \, . \, y \, . \, z) + (x \, . \, y' \, . \, z) + (x \, . \, y' \, . \, z') + (x' \, . \, y' \, . \, z) + (x' \, . \, y' \, . \, z')$$

Análogamente, los términos de la forma canónica dual de f son los de la forma canónica dual completa que tienen el valor 0 cuando f es 0.

En el ejemplo es

$$f(x, y, z) = (x' + y' + z) \, . \, (x + y' + z') \, . \, (x + y' + z)$$

- - - - - -

BIBLIOGRAFÍA

- Johnsonbaugh, R. *Matemáticas Discretas*. Grupo Editorial Iberoamérica. 1988.
- Ross, K. - Wright, C. *Matemáticas Discretas.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1990.
- Colman, B. - Busby, R. *Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1986.
- Lipschutz, S. *Matemática para Computación.* . McGraw-Hill
- Ayres, F. *Álgebra Moderna*. McGraw-Hill-Serie Schaum. 1993.
- Rojo, A. *Álgebra I.* El Ateneo. 1994.