МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
 ФЕДЕРАЦИИ

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ   
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра Вычислительной техники

Новосибирск 2020

|  |  |
| --- | --- |
| Факультет: АВТФ  Группа: АВТ-809  Студент: Семёнов Б.В.  Преподаватель: Балакин В.В. |  |

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
 «Вычислительная математика»

*Тема: «Методы приближения функции»*

Содержание

[Цель работы 2](#_Toc40574149)

[Задание 3](#_Toc40574150)

[Порядок выполнения 3](#_Toc40574151)

[Исходные данные 4](#_Toc40574152)

[1. Ход работы 5](#_Toc40574153)

[1.1. Приближение заданной дискретной функции 5](#_Toc40574154)

[1.2. Использование стандартных встроенных функций Python 5](#_Toc40574155)

[1.3. Применение специально разработанных в среде программирования Python методов 6](#_Toc40574156)

[1.3.1. Интерполяция полиномом Лагранджа 6](#_Toc40574157)

[1.3.2. Интерполяция полиномом Ньютона 8](#_Toc40574158)

[1.3.3. Использование кубических сплайнов 10](#_Toc40574159)

[1.2.4. Применение метода наименьших квадратов 13](#_Toc40574160)

[1.3.5. Метод решения СЛАУ 15](#_Toc40574161)

[2. Экстраполяция функции на два шага вперед 17](#_Toc40574162)

[3. Вычисление значения интеграла на интервале приближения 20](#_Toc40574163)

[4. Вычисление значения производной при x0 21](#_Toc40574164)

[5. Сравнительный анализ рассмотренных способов решения поставленной задачи 21](#_Toc40574165)

[Заключение 22](#_Toc40574166)

[Литература 23](#_Toc40574167)

# Цель работы

Научиться выполнять приближения дискретной функций с помощью системы MathCad (Python), используя такие методы, какинтерполяция с помощью решения СЛАУ, интерполяция методом Лагранжа, интерполяция методом Ньютона, интерполяция сплайнами, аппроксимация полиномом (МНК).

# Задание

Для заданной дискретной функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** |
|  | **Х** | **Х** | **Х** | **Х** |

с помощью системы MathCad (Python), используя разные способы, выполнить приближение функции методами:

1. Интерполяция с помощью решения СЛАУ.

2. Интерполяция методом Лагранжа

3. Интерполяция методом Ньютона.

4. Интерполяция сплайнами.

5. Аппроксимация полиномом (МНК)

# Порядок выполнения

1) Записать программу MathCad (Python) приближения заданной дискретной ***y(xk ) = yk*** с использованием его стандартных (встроенных и специально разработанных в среде программирования MathCad (Python)) функций. Проверить качество решения и найти значение функции при заданном значении аргумента (например, ***x***=**2.58** обеспечивающий абсолютную погрешность решения ***ε ≤ 0.01÷0.001*** и относительную погрешность ***ε/y <0.01*** ).

2) Используя найденные в **п.1** приближения функции, выполнить экстраполяцию на два шага вперед и оценить качество экстраполяции для каждого приближения функции.

3) Для любой выбранной студентом из найденных аппроксимирующих функций вычислить значение интеграла на интервале приближения ([0;3]). Изменяя шаг интегрирования (по необходимости), найти его величину, обеспечивающую ту же погрешность, что и в **п.1**. Оценить значение производной при заданном значении аргумента, что и в **п.1**.

# Исходные данные

*Таблица 1. Вариант задания*

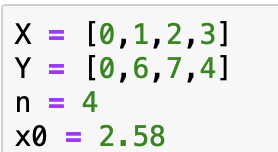
|  |  |
| --- | --- |
| № варианта | Значения функции |
|  | 0,6,7,4 |

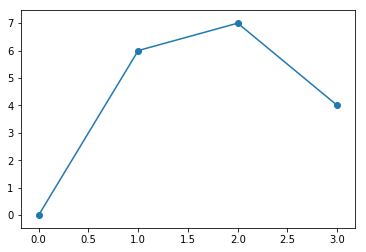
# 

# Ход работы

## Приближение заданной дискретной функции

Зададим функцию, количество узлов и значение аргумента:





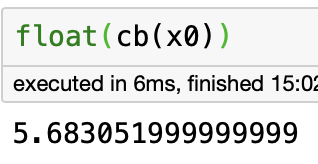
*Рис. 1. Заданная дискретная функция*

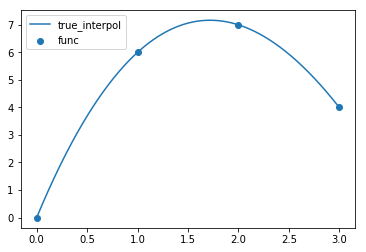
### Использование стандартных встроенных функций Python

Сначала произведем интерполяцию функции с помощью встроенных стандартных функций Python, результаты которой примем за эталон.



Вычислим значение функции в точке х0, используя кубические сплайн-функции, и изобразим на графике результаты расчета функции.



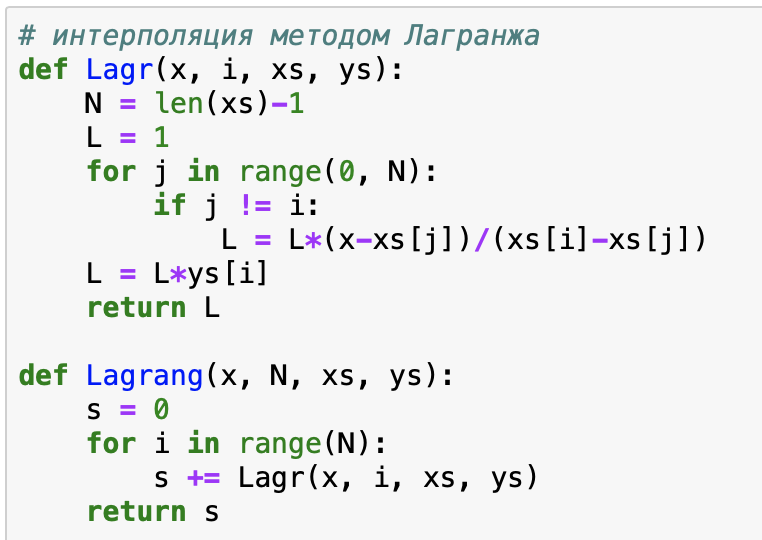


*Рис.2.График функции, построенной стандартными средствами Python*

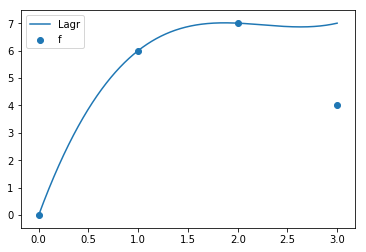
### Применение специально разработанных в среде программирования Python методов

#### Интерполяция полиномом Лагранджа

Реализация на языке Python:

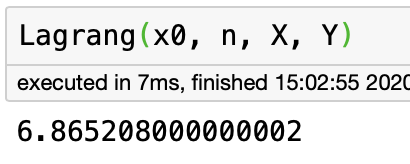


Построим график полученной функции



*Рис.3.График, полученный при помощи интерполяции полинома Лагранжа*

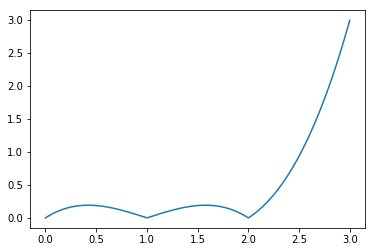
Значение в точке x0:



Абсолютная ошибка - 0.3940519999999976

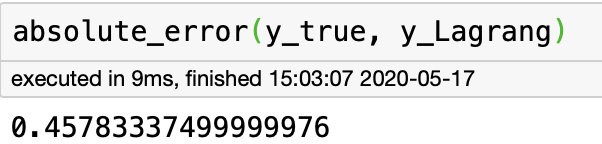
Относительная ошибка - 0.06933809509397375

График абсолютной погрешности интерполяции методом Лагранжа:

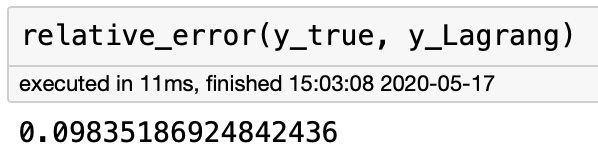


*Рис.4.График абсолютной погрешности методом Лагранжа*

Среднее значение абсолютной ошибки равно:

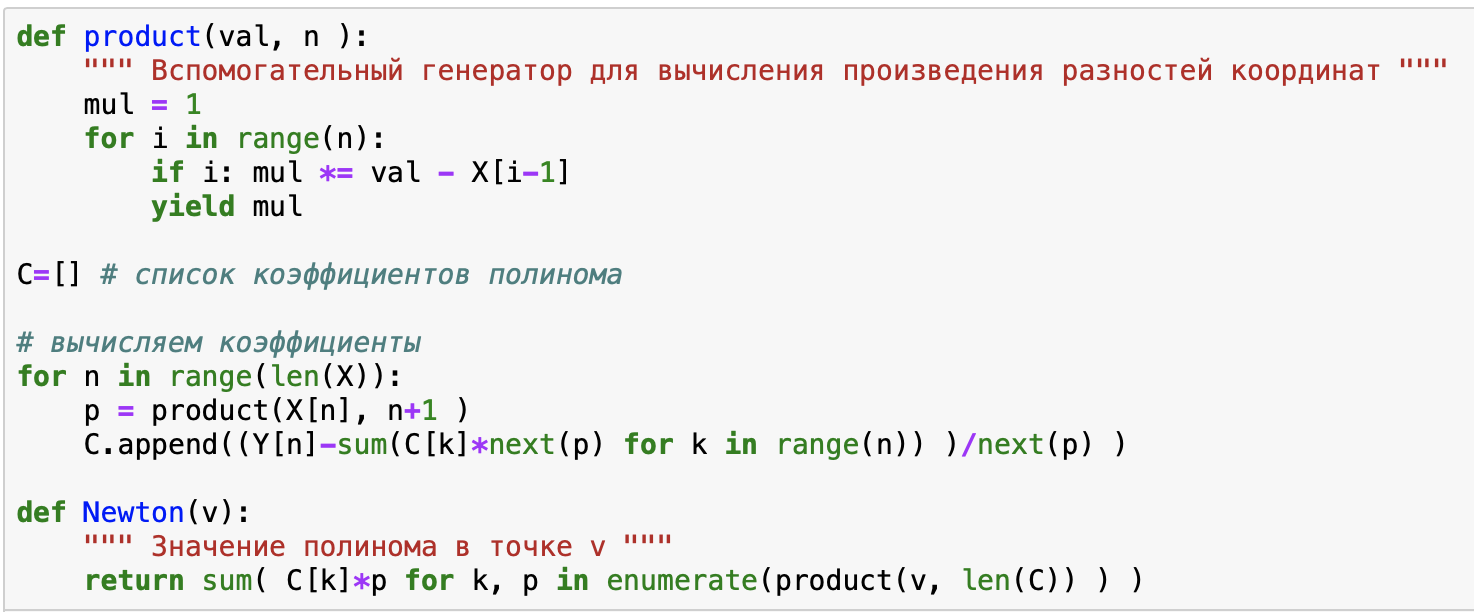


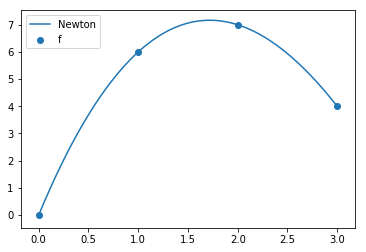
Среднее значение относительной ошибки:



#### 1.3.2. Интерполяция полиномом Ньютона

Реализация на языке Python:





*Рис.4.Интерполяция методом Ньютона.*

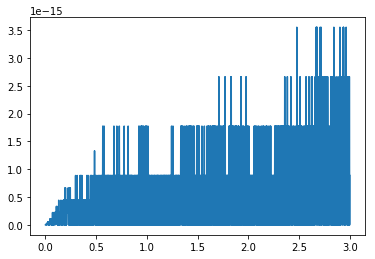
Значение в точке x0:



Абсолютная ошибка - 8.881784197001252e-16

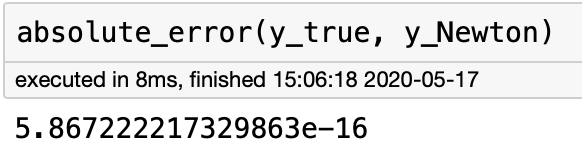
Относительная ошибка - 1.5628546416610746e-16

График абсолютной погрешности интерполяции методом Ньютона:

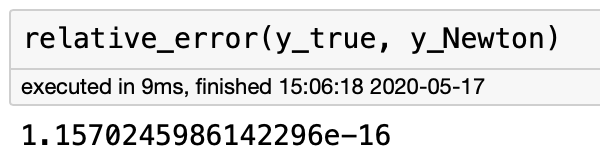


*Рис.5.График* *абсолютной погрешности интерполяции методом Ньютона*

Среднее значение абсолютной ошибки равно:

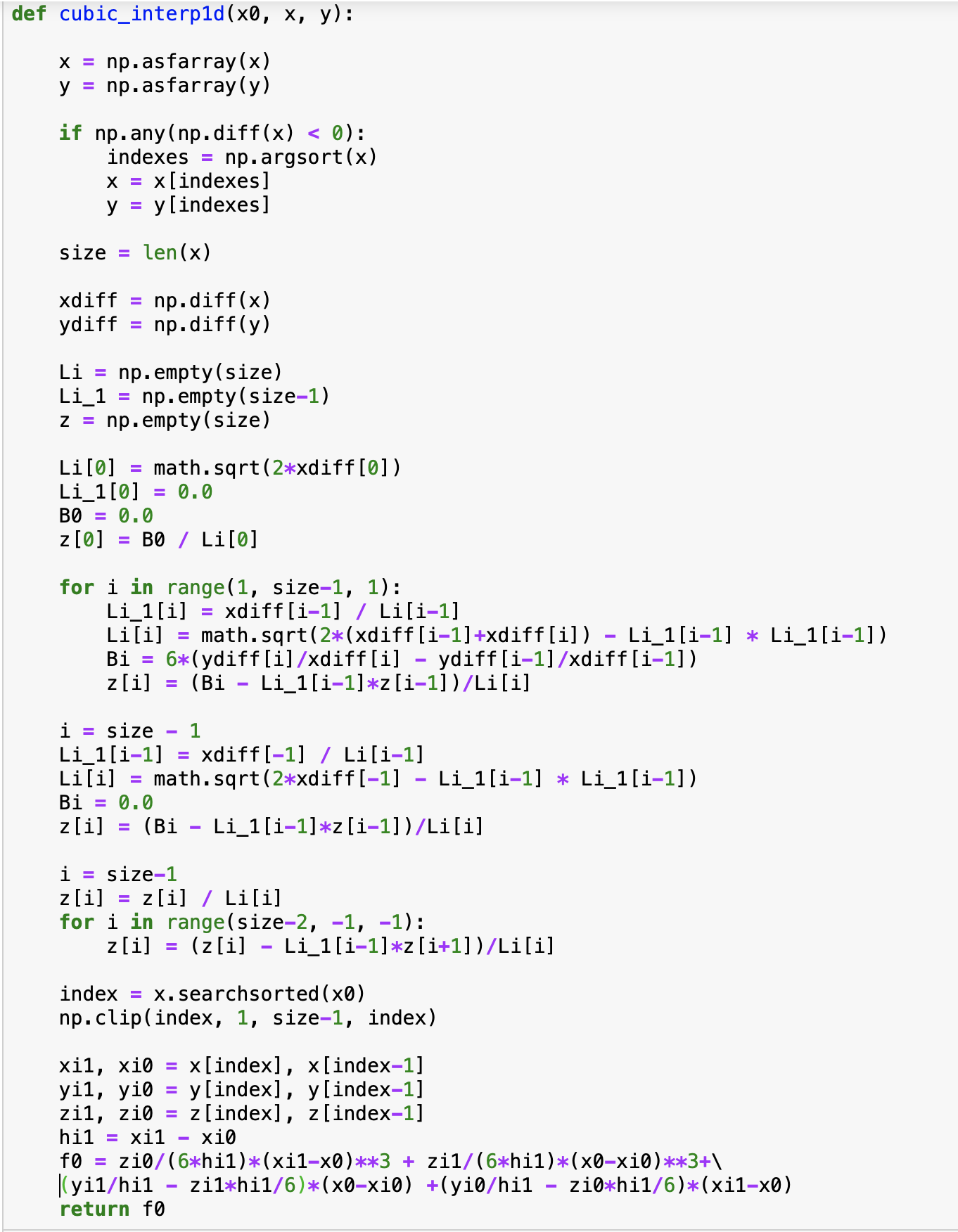


Среднее значение относительной ошибки:

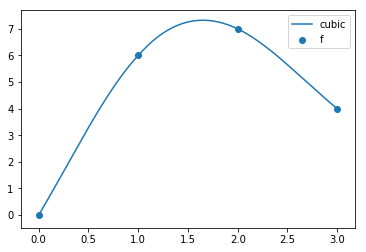


#### 1***.3.3. Использование кубических сплайнов***

Реализация на Python:

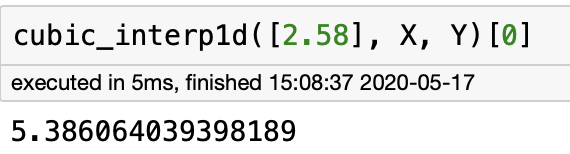


Изобразим на графике:



*Рис.6.Интерполяция кубическими сплайнами*

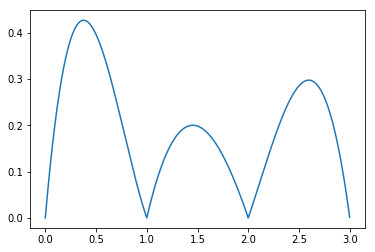
Значение функции в заданной точке:



Абсолютная ошибка - 0.2969879606018102

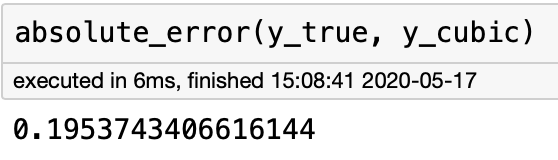
Относительная ошибка - 0.05225853302095604

График абсолютной погрешности интерполяции методом кубических сплайнов:

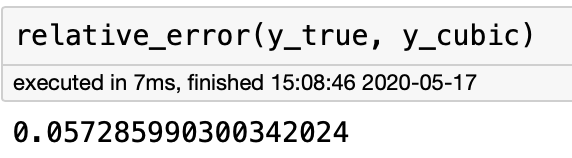


*Рис.7.График абсолютной погрешности интерполяции кубическими сплайнами*

Среднее значение абсолютной ошибки равно:



Среднее значение относительной ошибки:



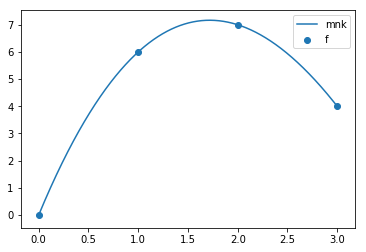
#### 1.2.4. Применение метода наименьших квадратов

Реализация подбора полинома степени n на Python:



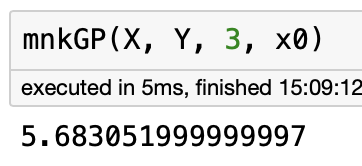
Опытным путем было вявлено, что оптимальное значение n – 3.

Изобразим на графике:



*Рис.8.Апроксимация МНК*

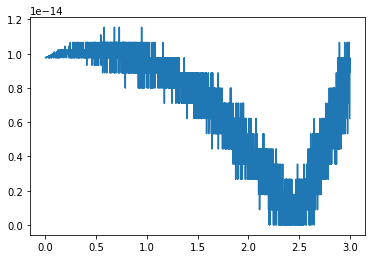
Значение функции в заданной точке:



Абсолютная ошибка - 1.7763568394002505e-15

Относительная ошибка - 3.1257092833221493e-16

График абсолютной погрешности интерполяции методом наименьших квадратов:

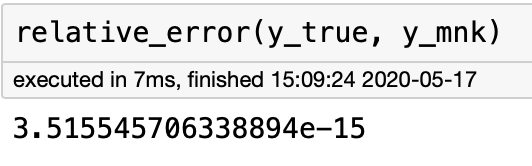


*Рис.8.График абсолютной погрешности МНК*

Среднее значение абсолютной ошибки равно:

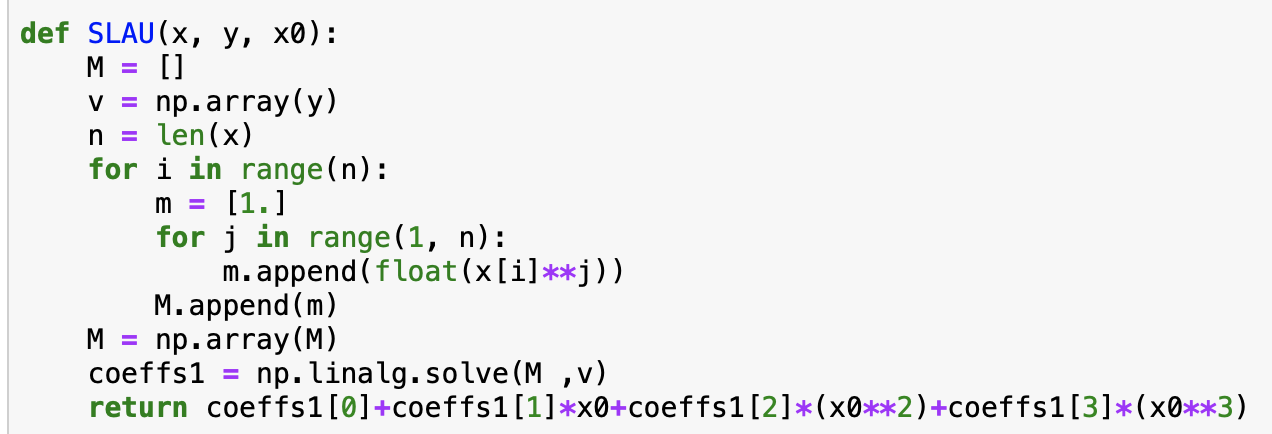


Среднее значение относительной ошибки:

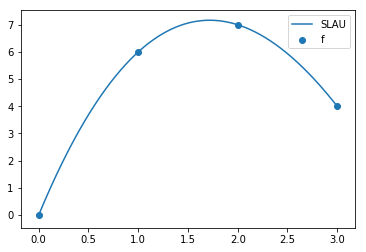


#### 1.3.5. Метод решения СЛАУ

Реализация на Python:

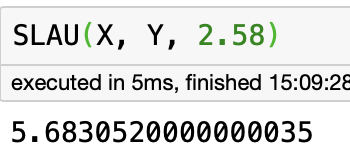


Изобразим на графике:



*Рис.11.Апроксимация СЛАУ*

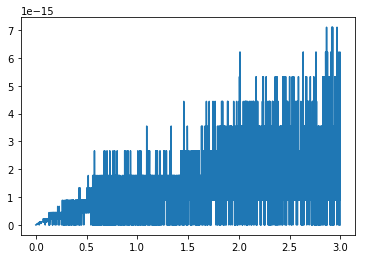
Значение функции в заданной точке:



Абсолютная ошибка - 4.440892098500626e-15

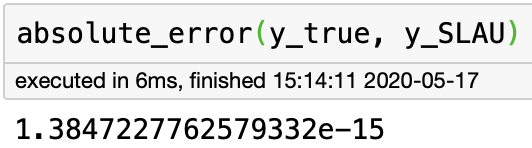
Относительная ошибка - 7.814273208305374e-16

График абсолютной погрешности интерполяции методом решения СЛАУ:

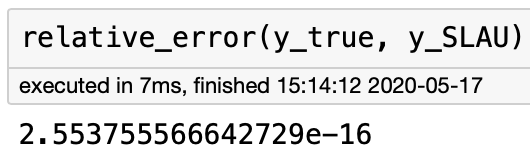


*Рис.12.Погрешность СЛАУ*

Среднее значение абсолютной ошибки равно:

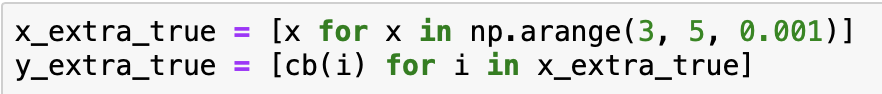


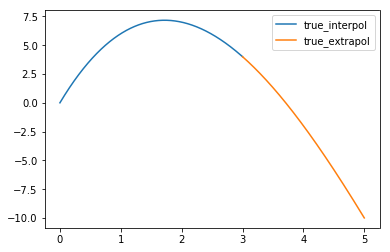
Среднее значение относительной ошибки:



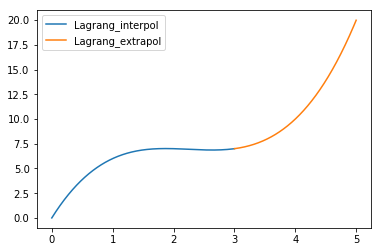
## 2. Экстраполяция функции на два шага вперед

Зададим выборки значений, по которым будем экстраполировать функции и экстраполируем функцию на этой выборке с помощью встроенных средств Python:

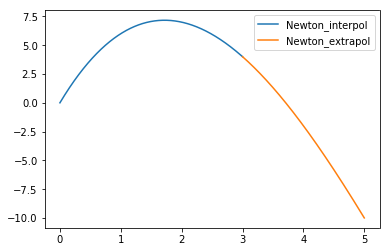




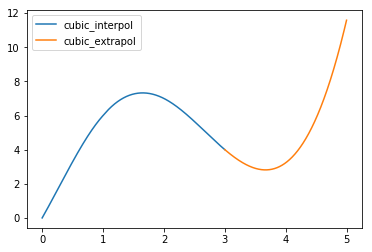
*Рис.14.* *График экстраполяции для функции, построенной стандартными средствами Python*



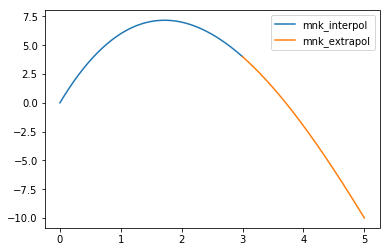
*Рис.15.* *График экстраполяции для функции, вычисленной методом Лагранжа*



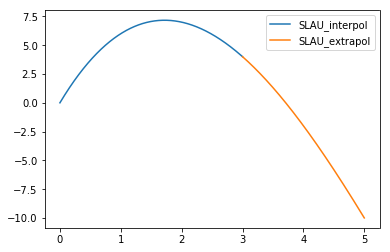
*Рис.16.* *График экстраполяции для функции, вычисленной методом Ньютона*



*Рис.17.* *График экстраполяции для функции, вычисленной кубических сплайнов*



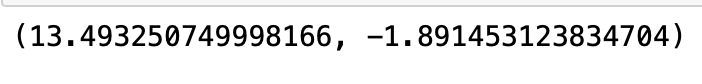
*Рис.18.* *График экстраполяции для функции, вычисленной МНК*



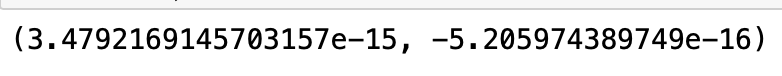
*Рис.19.* *График экстраполяции для функции, вычисленной решением СЛАУ*

Абсолютные и относительные погрешности экстраполяции для разных методов:

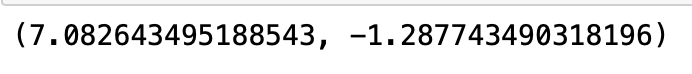
Лагранж:



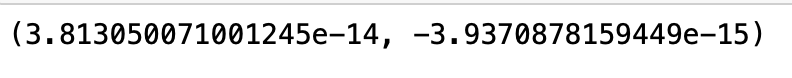
Ньютон:



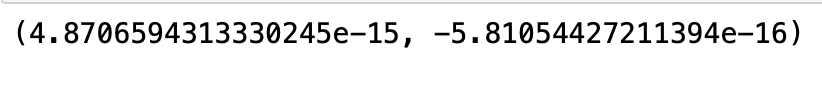
Кубические сплайны:



МНК:

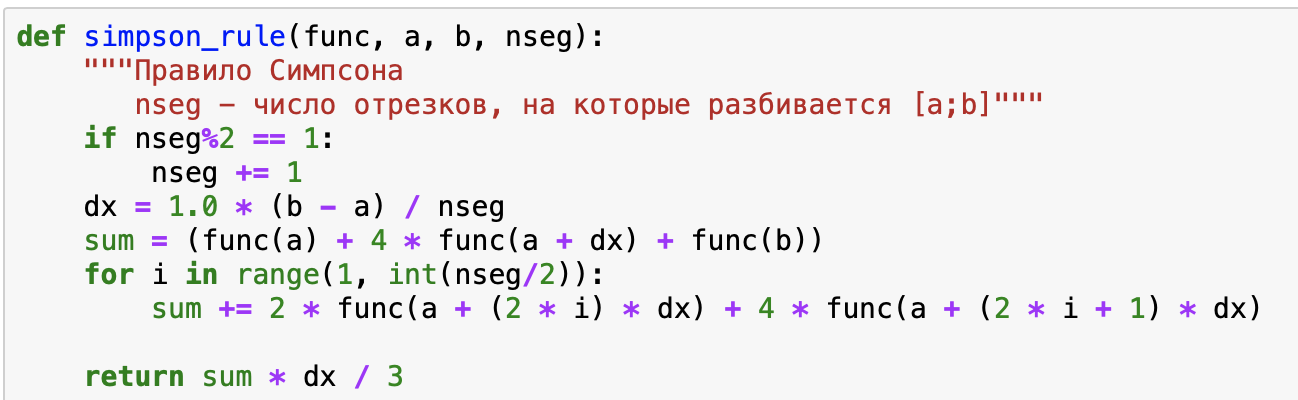


СЛАУ:

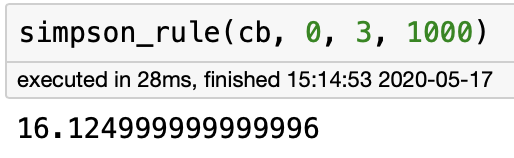


## 3. Вычисление значения интеграла на интервале приближения

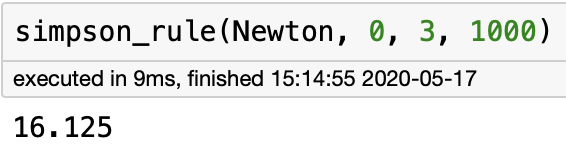
Реализация метода Симпсона на Python:



Интеграл от значений, полученных встроенными средствами Python:

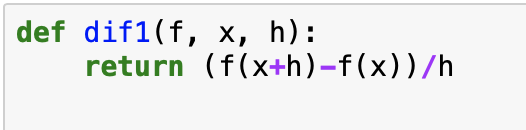


Интеграл от значений, полученных методом Ньютона:

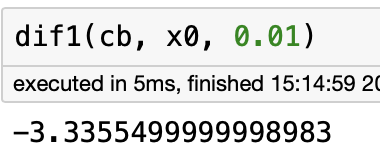


## 4. Вычисление значения производной при x0

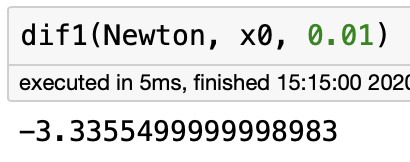
Реализация вычисления производной на Python:



Производная от значений, полученных встроенными средствами Python:



Производная от значений, полученных методом Ньютона:



## 5. Сравнительный анализ рассмотренных способов решения поставленной задачи

*Таблица 2. Сравнение используемых методов*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Полином Лагранжа | Полином Ньютона | Кубические сплайны | МНК | Решение СЛАУ |
| Значение функции в заданной точке | 6.865 | 5.683 | 5.386 | 5.683 | 5.683 |
| Абсолютная погрешность | 0.394 | 8.881  \*10^-16 | 0.296 | 1.776  \*10^-15 | 4.44  \*10^-15 |
| Относительная погрешность | 0.069 | 1.562  \*10^-16 | 0.052 | 3.125  \*10^-16 | 7.814\*10^-16 |

# Заключение

В результате данной работы были получены навыки выполнения приближения дискретной функций с помощью системы Python, используя такие методы, какинтерполяция с помощью решения СЛАУ, интерполяция методом Лагранжа, интерполяция методом Ньютона, интерполяция сплайнами, аппроксимация полиномом (МНК).

Из таблицы 2 был сделан вывод о том, что 3 метода из 5 показали наименьшую погрешность, которую в данной случае можно принять равной 0 – интерполяция полиномом Ньютона, МНК и решение СЛАУ. Наименее точным оказался метод Лагранжа.

Также в ходе выполнения работы были построены графики экстраполяции для функции, вычисленной приближенно с помощью метода Лагранжа, метода Ньютона, кубических сплайнов, метода наименьших квадратов и решения СЛАУ. Наименьшие погрешности, приближающиеся к нулю, показали метод Ньютона, МНК и СЛАУ.

Для аппроксимирующей функции, полученной интерполяцией методом Ньютона, было вычислено значение интеграла на интервале приближения ([0;3]). Интеграл от аппроксимирующей функции равен 16.125, истинное значение так же 16.125.

Для этой же функции была вычислена производная в точке 2.58. Она равна  
 -3.3355. Истинное значение так же равно -3.3355

# Литература

1. **Зыбарев В.М.** Численные методы аппроксимации функций: Методические указания к лабораторной работе для студентов II курса дневного отделения АВТФ, Новосибирск -2016.