

# 《音乐与数学》研究题

2023 — 2024 学年第一学期

从下列六个题目中 **任选一题**

## 一、管乐器的超吹 (overblow)

超吹可以激发高次泛音, 从而在不改变指法的情况下演奏出更高的音. 记未超吹时音高的基频为  $f$ . 长笛作为开管, 可以产生各次泛音, 所以超吹时发出  $2f$  频率的音, 即高八度的音级. 单簧管作为闭管, 只能产生偶次泛音 ( $3f, 5f, \dots$ ), 所以单簧管超吹时得到的是高 12 度的音级, 频率为  $3f$ .

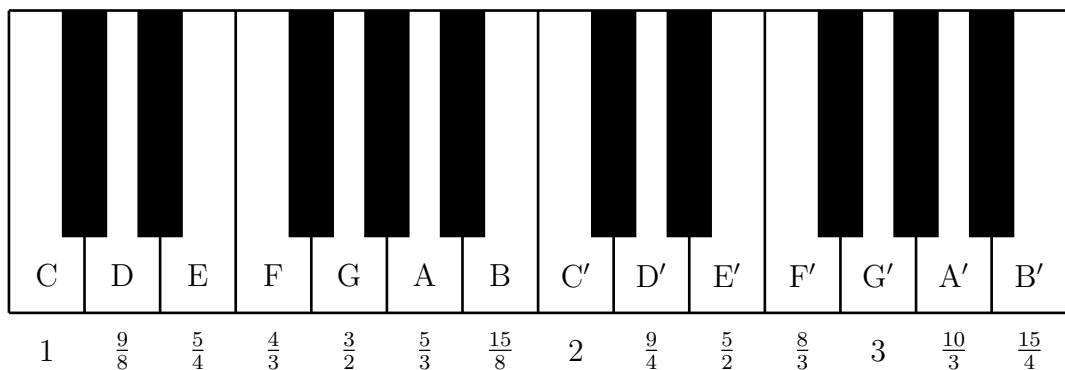
然而同样作为闭管乐器, 双簧管和唢呐超吹时得到的却是高八度、而非高 12 度的音. 研读参考文献, 试对此现象作出理论解释.

### 参考文献:

- [1] David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 第3章.
- [2] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*, Vol. I, The MIT Press, Cambridge, 2006, 第8章.
- [3] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer-Verlag, New York, 1991, 第2章、第3章.

## 二、纯律与转调

纯律是由两个生律元素构成的: 纯五度的频率比  $3:2$ , 大三度的频率比  $5:4$ . 假定音级 C 的频率为 1, 就可以得出下图所示的两个八度内各自然音级的频率.



- (1) 根据纯律的生律规则, 确定各变化音级 (键盘上的黑键) 的频率;
- (2) 按照你所确定的各音级的频率, 考虑下列调式

G 大调,  $\flat B$  大调, c 自然小调,  $\sharp f$  和声小调

- (a) 分别写出上述各调式的音阶;
- (b) 根据你在 (1) 中确定的各音级的频率, 通过计算上述各调式音阶中音程之间的频率比, 找出该调式音阶中所有 **不符合** 纯律要求的音级;
- (c) 讨论你在 (b) 中求得的这 4 个调式音阶的结果, 从中能够看出什么一般性的规律?

### 三、我国古代律制问题

在我国古代文献中有不少关于生律过程的描述, 但也给后人留下一些有趣的问题. 例如: 考察《吕氏春秋》中所描述的生律过程和《管子·地员》中描述的“三分损益”过程, 它们各自产生的律制是相同的吗? 在《吕氏春秋》的生律过程中, 为何上生得到蕤宾后, 没有按照上下交替的规则进行下生, 而是再次上生得到大吕? 研读参考文献, 提出你的观点, 并加以论证.

## 参考文献

- [1] 刘永福,《吕氏春秋》音律相生法的分析和解读,中国音乐学,2017 (3): 67 - 74.
- [2] 薛冬艳,十二律旋宫走向历法、律法解——释左旋、右旋及损益相生问题,中国音乐,2017 (1): 155-162.
- [3] 宋克宾,需回归原典、分清语境解读古代乐律问题,音乐探索,2014 (1): 80 - 85.
- [4] 宋克宾,十二律“三分损益”上下相生究竟是什么在上生、下生? 中国音乐,2013 (4): 57-62.
- [5] 丁慧,“大阴阳与蕤宾重上”和“小阴阳与蕤宾下生”,湖北师范学院学报 (哲学社会科学版), Vol. 32 (2012), no. 1, 58-69.

## 四、机器作曲·遗传算法

### 1. 采用下述方法 之一 产生初始种群:

- (a) 从具有相同节拍的若干歌曲、乐曲中选取十个长度相等 (例如 4 小节) 的片段.
- (b) 随机产生: 给定乐音体系

$$S = \{ F_3, \sharp F_3, \dots, B_3, C_4, \sharp C_4, \dots, B_4, C_5, \sharp C_5, \dots, \sharp F_5, G_5 \}.$$

随机选取  $S$  中的音级, 配以不同的时值, 产生十段 4/4 拍、四小节的“旋律”, 其中音符的最短时值为八分音符.

- 2. 根据课上介绍, 研读参考文献以及文后给出的相关文献, 在任何一个软件平台 (MATLAB, Mathematica, Python, C/C++ 等) 上建立遗传算法. 遗传操作应包括交叉 (crossover), 变异 (mutation) 以及对旋律进行的移调、倒影、逆行变换等.

3. 探索建立适应度函数 (fitness function), 用以指导旋律进化的方向.
4. 把初始种群作为遗传算法的输入, 对其进行遗传迭代, 看是否能够得到较好的音乐片段.
5. 真实、客观、准确地描述你所完成的各项工作及得到的实际结果, 形成完整的实验报告. 着重讨论适应度函数的选取对于最终产生旋律的音乐特性之间的联系, 以及对算法本身效率的影响.

## 参考文献

[1] Dragan Matić, A genetic algorithm for composing music, *Yugoslav Journal of Operations Research*, **20** (2010), 157–177.

## 西方多声音乐发展问题

我们通常认为, 中国音乐精于单一调主题的水平对比, 西方音乐擅长多调主题的立体对比, 然而15世纪之前的全球音乐普遍处于形式相对简单的状态. 以 J. S. 巴赫为代表的西方巴洛克音乐家对于复调音乐的立体发展达到了顶峰, 使西方音乐的复杂程度迅速与其他文明的音乐拉开距离, 奠定了后世西方音乐影响全球的基调.

五、试从文艺复兴时期的西方音乐发展入手, 分析为何西方音乐呈现出多声部形态的历史选择.

六、巴洛克后的西方音乐迅速回到了以单旋律为主导的主调音乐主流, 请试分析这背后的历史原因和其中的数学逻辑和理论支撑.

## 参考文献

[1] 西方音乐史 (第6版), (美) 唐纳德·杰·格劳特, 克劳德·帕利斯卡 著 余志刚 译