Formelsammlung Mathe 1.Semester

Mengen

Schnittmenge	Enthält alle gemeinsamen Elemente der Menge A und der Menge B	$A \bigcap B$
Vereinigung	Enthält alle Elemente der Menge A und der Menge B	$A \bigcup B$
Differenz	Menge der Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten	$A \setminus B$
Komplement	Differenz $\sim$ Komplement; Alle Elemente von B, die nicht in A liegen	$\overline{A} = B \setminus A$

Aussagenlogik

Negation	$\neg A$
Und-Verknüpfung	$A \wedge B$
Oder-Verknüpfung	$A \vee B$
Implikation	$A \implies B$
Äquivalenz	$A \equiv B$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Beweismethoden

Direkter Beweis	Aus mehreren Aussagen eine neue Aussage durch Implikation $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \implies B$
Indirekter Beweis	Aus dem Gegenteil der Behauptung den Widerspruch herstellen $\neg B \implies \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_m$
Konstruktiver Beweis	Schritt für schritt zeigen, wie man aus Aussagen $A_1 \ldots A_m$ zur Aussage kommt
vollst. Induktion	Nur bei Behauptungen der Art $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \implies B_n$ für jedes n aus N. Behauptung – Induktionsanfang – Induktionsschritt

Vektoren

Eigenschaften von Vektoren

äquivalent	Länge und Richtung stimmen überein	$\vec{a} = \vec{b}$
Senkrechte	2 Vektoren stehen senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.	

Mathematische Operationen im Vektorraum

Addition	$\vec{a} + \vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
Subtraktion	$\vec{a} - \vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
Skalare Multipl.	$\lambda \cdot \vec{a}$	$\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
Abstand P.-Urpsr. Betrag (Norm)	$\lvert\lvert\vec{a}\rvert\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n = x$
Kreuzprodukt	$\vec{a} \times \vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$
Spatprodukt	$u \cdot (v \times w)$	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (siehe Determinante)
Winkel		$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$
Rotationsmatrix		$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Matrizen

Arten der Matrizen

Spaltenmatrix R^{mx1}	$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Zeilenmatrix R^{1xn}	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
Skalar R^{1x1}	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
Nullmatrix	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Transponierte Matrix $A^T = [a_{ji}]$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Spezielle quadratische Matrizen

- Diagonalmatrix $d_{ij} = 0, i \neq j$
- Einheitsmatrix E_n (Alle Werte auf Hauptdiag. = 1)
- Obere/Untere Dreieckdiagonalmatrix
- Orthogonale Matrix: $A \cdot A^T = E$
- Symmetrische Matrix $A = A^T$
- Schiefsymmetrische Matrix $A = -A^T$

Operatoren

Gleich	$A = B$	$(a_{ij}) = (b_{ij})$
Addition	$C = A + B$	$(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$
Differenz	$C = A - B$	$(c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij})$
Multiplikation Skalar	$c \cdot A$	$cA \in R^{m \times n}$
Multiplikation Matrizen	$A \cdot B$	$AB = \sum_j a_{ij} b_{ij}$

Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Inverse bilden

$$A \cdot A^{-1} = I | A = (a_{ij}), A^{-1} = (a_{ij})$$

Multiplikation aus A und A^{-1} ergeben Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \ldots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse kann mit Gauß-Jordan berechnet werden.
Koeffizientenmatrix A umd Einheitsmatrix I erweitern.

$$(A|I) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Matrix A mit elementarer Zeilenumformung auf obere Dreiecksgestalt bringen, wobei Einheitsmatrix I mit umgeformt wird:

$$(D|B) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & * & * & \ldots & * \end{array}\right)$$

Matrix A ist nur invertierbar, wenn D keine Null auf Hauptdiagonale D mit elementarer Zeilenumformung auf Diagonalgestalt und durch Skalierung in Einheitsmatrix. Rechte Seite enthält die Inverse.

$$(I|A^{-1}) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{n1} & \ldots & \hat{a}_{nn} \end{array}\right)$$

Determinante bilden

$$det(A) = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Eigenwerte & -vektoren

1. Auf Hauptdiagonale λ subtrahieren
2. Determinante bestimmen
3. Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix
4. Eigenwerte jeweils in A bei $A \cdot X_n = 0_n$ einsetzen und LGS lösen. Matrix ist immer $det(0)$

Diagonalisierbarkeit

- Charakteristisches Polynom zerfällt vollst. in Linearfaktoren

  $det(A - \lambda \cdot E) = 0$

- geometrische & algebraische Vielfachheit der Eigenwerte muss gleich sein

Linearkombination

Die n Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus dem m-dimensionalen Raum R_m heißen linear unabhängig, wenn die lineare Kombination

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann. Andernfalls sind sie linear abhängig. ($det(A) = 0 \implies$ linear abhängig)

Lösbarkeitskriterien (allgemein)

$Ax = b$ mit $A \in R^{m \times n}, x \in R^{n \times 1}, b \in R^{m \times 1}$

	$b \neq 0$	$b = 0$
$Rg(A) \neq Rg(A\|b)$	Unlösbar	-
$Rg(A) = Rg(A\|b) = r$ $r = n$ $r < n$	 Eindeutig lösbar Mehrdeutig lösbar; Freiheitsgrad n-r	x=0 (triviale Lsg)

Lösbarkeit für quadratische LGS

$Ax = b$ mit $A \in R^{n \times n}, x \in R^{n \times 1}, b \in R^{n \times 1}, b \neq 0$

Kriterium	Lösung	Lösungsmethode
$det(A) = 0$	Keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.	KF
$det(A) \neq 0$	Eindeutige Lösung	KF, Cramersche Regel

Lösbarkeit für quadratische LGS (Homogenes System)

$Ax = 0$ mit $A \in R^{n \times n}, x \in R^{n \times 1}$

Kriterium	Lösung	Lösungsmethode
$det(A) = 0$	Eindeutige Lösung	KF
$det(A) \neq 0$	Triviale Lösung $x = 0$	-

Basics

pq-Formel	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Ableitungsregeln & Ableitungen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Faktorregel	
$c \cdot u$	$c \cdot u'$
Summenregel	
$u + v$	$u' + v'$
Produktregel	
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Kettenregel	
$u(v(x))$	$v'(x) \cdot u'(v(x))$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f(x)'$
The basics™	
$c = const$	0
x	1
$a \cdot x$	a
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
ax^n	anx^{n-1}
ax^2	$2ax$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$lna \cdot a^x$
Logarithmische Funktionen	
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{lna \cdot x}$
$log_a(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x) ln\ a}$
Trigonometrische Funktionen	
$sin(x)$	$cosx$
$cos(x)$	$-sinx$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$
$cot(x)$	$\frac{-1}{sin^2 x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$arccot(x)$	$\frac{-1}{1 + x^2}$