Formelsammlung Robotik

Vektoren

Mathematische Operationen im Vektorraum

Addition	$\vec{a}+\vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$
Subtraktion	$\vec{a}-\vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}$
Skalare Multipl.	$\lambda \cdot \vec{a}$	$\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
Abstand P.-Urspr. Betrag (Norm)	$\|\|\vec{a}\|\|$	$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n = x$
Kreuzprodukt	$\vec{a} \times \vec{b}$	$\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$
Spatprodukt	$u \cdot (v \times w)$	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (siehe Determinante)
Winkel		$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$
Rotationsmatrix		$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Matrizen

Operatoren

Gleich	$A = B$	$(a_{ij}) = (b_{ij})$
Addition	$C = A + B$	$(c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$
Differenz	$C = A - B$	$(c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij})$
Multiplikation Skalar	$c \cdot A$	$cA \in R^{m \times n}$
Multiplikation Matrizen	$A \cdot B$	$AB = \sum_j a_{ij} b_{ij}$

Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Inverse bilden

$$A \cdot A^{-1} = I | A = (a_{ij}), A^{-1} = (a_{ij})$$

Multiplikation aus A und A^{-1} ergeben Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{n1} & \ldots & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Inverse kann mit Gauß-Jordan berechnet werden. Koeffizientenmatrix A umd Einheitsmatrix I erweitern.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

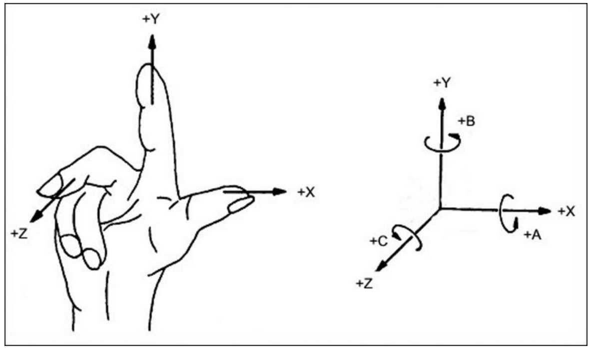
Matrix A mit elementarer Zeilenumformung auf obere Dreiecksgestalt bringen, wobei Einheitsmatrix I mit umgeformt wird:

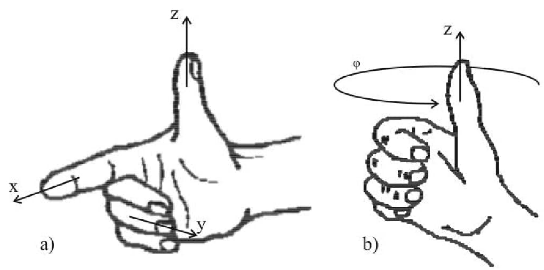
$$(D|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & * & * & \ldots & * \end{array}\right)$$

Matrix A ist nur invertierbar, wenn D keine Null auf Hauptdiagonale D mit elementarer Zeilenumformung auf Diagonalgestalt und durch Skalierung in Einheitsmatrix. Rechte Seite enthält die Inverse.

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{11} & \ldots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{n1} & \ldots & \hat{a}_{nn} \end{array}\right)$$

Rechte Hand Regel





Koordinatensysteme

Objekt in 3D (OKS)	$\vec{v} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$	$\alpha, \beta, \gamma =$ Drehwinkel
Senkrechte		

Rotationsmatrizen

Rotation um X	$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
Rotation um Y	$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
Rotation um Z	$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
Vormultipl. (Roll-pitch-yaw)	Rotation um die ursprüngliche (feste) Achse. Schreibweise: Letzte Drehung → 1. Drehung
Nachmultipl. (Euler-Winkel)	Rotation um die neuen (momentanen) Achsen. Schreibweise: 1. Drehung → Letzte Drehung
Homogene 4× 4-Matrix	$T = \left(\dfrac{R_{3\times3}}{f_{1\times3} = 0} \middle\| \dfrac{u_{3\times1}}{1\times1}\right) = \begin{pmatrix} n_{x\downarrow z} & o_{x\downarrow z} & a_{x\downarrow z} & u_{x\downarrow z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Invertierung 4×4	$T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc\|c} n_x & n_y & n_z & -n^T \cdot \vec{u} \\ o_x & o_y & o_z & -o^T \cdot \vec{u} \\ a_x & a_y & a_z & -a^T \cdot \vec{u} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
Verkettete Lagebeschr.-	${}^{BKS}H_B = {}^{BKS}H_A \cdot {}^{A}H_B \| H =$ Homogene Matr.
test	