# Theorie-Übungsserie 1

## 1. Bildaufnahme

*Kommentar: Man könnte in der Vorlesung oder auch der Übung natürlich mal definieren, was ein CCD-Chip und insbesondere Zeilenpaar sein soll. Warum das nicht gemacht wird, ist mir schleierhaft. Kann man Vorwissen über Optik und E'-Technik im Studiengang Informatik (heutzutage) voraussetzen?*

**Gegeben.**
- CCD-Chip mit $7 \cdot 7$ mm Größe, Auflösung $1024 \cdot 1024$ Px
- Objektabstand $s = 0.5\text{m} = 500$ mm
- Brennweite $f = 35$ mm

**Annahme.** Es handelt sich um eine dünne Linse $\hookrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$.

**Formbezeichnungen.**
- $s$ ist die Objektweite
- $s'$ Bildweite
- $m$ ist der Abbildungsmaßstab bzw. die Vergrößerung
- $\xi_{\text{Objekt}}$ objektseitige Pixelgröße

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \tag{1.1}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{35 \text{ mm}} = \frac{1}{500 \text{ mm}} + \frac{1}{s'} \tag{1.2}$$

$$\leftrightarrow s' = \frac{3500}{93} \text{ mm} \tag{1.3}$$

$$\hookrightarrow m = \frac{s'}{s} = \frac{7}{93} \tag{1.4}$$

Online[1] habe ich gefunden, dass man das dann in etwa wie folgt berechnen kann.

$$\xi_{\text{Objekt}} = \frac{93 \text{ mm}}{1024} \tag{2.1}$$

$$\xi_{\text{Sensor}} = \frac{1 \text{ lp}}{2 \cdot s} \cdot \left(\frac{1024}{93 \text{ mm}}\right) \approx 5.054 \frac{\text{lp}}{\text{mm}} \tag{2.2}$$

[1] https://www.edmundoptics.de/knowledge-center/application-notes/imaging/resolution/

## 2. Rauschelimination

Es ist klar, dass die Wahl von $K$ die Stichprobengröße erhöht und dadurch das „unverrauschte“ Bild besser rekonstruiert wird, da der Erwartungswert des Mittelbilds $\overline{g}(x, y)$ genau das „unverrauschte“ Bild $f(x, y)$ ist.

Zu zeigen: Der Erwartungswert des Mittelbilds ist das unverrauschte Bild.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\overline{g}(x,y)\} &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y)\right\} && (3.1)\\
&= \frac{1}{K}\ \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}\{g_i(x,y)\} && (3.2)\\
&= \frac{1}{K}\ \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}\{f(x,y) + \eta_i(x,y)\} && (3.3)\\
&= \frac{1}{K}\left(K \cdot f(x,y) + \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}\{\eta_i(x,y)\}\right) && (3.4)\\
&= \frac{1}{K}\left(K \cdot f(x,y) + \sum_{i=1}^{K} \mathbb{E}\{0\}\right) \qquad \Big| \ \text{per Definition} && (3.5)\\
&= \frac{1}{K} \cdot K \cdot f(x,y) && (3.6)\\
&= f(x,y) && (3.7)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Zu zeigen: Die Varianz des Mittelbild ist die Varianz des Fehlers einer Einzelaufnahme, geteilt durch $K$.

$$\sigma^2_{\overline{g}(x,y)} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y) - 0\right)^2\right\} \qquad \Big| \text{ Df. Varianz} \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{K} g_i(x,y)\right)^2\right\} \qquad \Big| \text{ Unabhängigkeit p. Df.} \tag{4.2}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} g_i(x,y)\cdot g_j(x,y)\right\} \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\mathbb{E}\{g_i(x,y)\cdot g_j(x,y)\}\right) \tag{4.4}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\mathbb{E}\{(f(x,y)+\eta_i(x,y))\cdot(f(x,y)+\eta_j(x,y))\}\right) \tag{4.5}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\mathbb{E}\{\eta_i(x,y)\cdot\eta_j(x,y)\}\right) \qquad \Big| \text{ Unabhängigkeit p. Df.} \tag{4.6}$$

$$= \frac{1}{K^2}\cdot K\cdot\sigma^2_{\eta(x,y)} \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{K}\cdot\sigma^2_{\eta(x,y)} \tag{4.8}$$

■

# 3. Median-Operator

Für Linearität muss Homogenität und Additivität gelten. Es genügt zu zeigen, dass eine der beiden Eigenschaften verletzt ist. Ich zeige dies anhand der Additivität.

$$x := (-2, -3, 1) \tag{5.1}$$

$$y := (-1, 1, -1) \tag{5.2}$$

$$\tilde{x} := (-3, -2, 1) \tag{5.3}$$

$$\tilde{y} := (-1, -1, 1) \tag{5.4}$$

$$\zeta(x) = -2 \tag{5.5}$$

$$\zeta(y) = -1 \tag{5.6}$$

$$x + y = (-3, -2, 0) \tag{5.7}$$

$$\zeta(x) + \zeta(y) = -3 \tag{5.8}$$

$$\zeta(x + y) = -2 \ ⚡ \tag{5.9}$$

∎

# 4. Grauwerttransformation

Maximum: $a$

Minimum: $b$

Ziel: Abbildung auf das Intervall $[0, L - 1]$.

$$g' := \frac{(L-1) - 0}{a - b} \ (g - b) \tag{6}$$

**Zu zeigen:** Linearität dieser Abbildung.

**Beweis.**

Eine lineare Transformation hat die Form $g' = \alpha g + \beta$. Hier $\alpha := \frac{L-1}{a-b}$ und $\beta := \alpha(-b)$.

∎