FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

Institut für Informatik
Lehrstuhl für Digitale Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Joachim Denzler
`http://www.inf-cv.uni-jena.de`

M.Sc. Niklas Penzel

Wintersemester

Übung zur Vorlesung

Rechnersehen 1

Übungsblatt 3: Bildverbesserung im Frequenzbereich

Aufgabe 1 Fourier-Spektrum (2 Punkte)

Die zweidimensionale diskrete Fourier-Transformation $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{W \times H} \to \mathbb{C}^{W \times H}$ überführt ein Bild in eine alternative Repräsentation, in der es als Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz dargestellt wird:

$$\mathcal{F}(I)(u,v) = \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} I(x,y) \cdot \exp\left(-2\pi i \left(\frac{ux}{W} + \frac{vy}{H}\right)\right). \tag{1}$$

Zur kompakten Schreibweise der Sinus- und Kosinusfunktionen dient dabei die Eulersche Formel:

$$\exp(i \cdot \varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\,. \tag{2}$$

Das Ergebnis $\mathcal{F}(I)(u,v)$ ist eine Funktion über dem Raum der komplexen Zahlen, welche die Amplitude und Phase einer Welle mit horizontaler Frequenz u und vertikaler Frequenz v kodieren. Der Betrag (auch *Magnitude*) dieser Fourier-Koeffizienten entspricht dabei der Amplitude der Welle und das Argument (Winkel zwischen den Koeffizienten) entspricht der Phase.

Verwenden Sie `numpy.fft.fft2` zur Berechnung der Fouriertransformation eines Bildes! Danach befindet sich das Zentrum $\mathcal{F}(I)(0,0)$ des Fourier-Spektrums in der linken oberen Ecke des transformierten Bildes. Nutzen Sie daher `numpy.fft.fftshift`, um das Zentrum in den Bildmittelpunkt zu verschieben und stellen Sie sowohl Magnitude als auch Phase des Spektrums graphisch dar! Da die Magnitude üblicherweise vom Koeffizienten $(0,0)$ dominiert wird, sollte vor der Darstellung die Grauwerttransformation $x \mapsto \log(1+x)$ zur Kontrastverbesserung angewandt werden.

Aufgabe 2 Hoch- und Tiefpassfilter (3 Punkte)

Hochpass- und Tiefpassfilter im Frequenzbereich erlauben Kantenextraktion bzw. Glättung von Bildern, analog zu Faltungen im Ortsbereich. Dazu werden im fouriertransformierten Bild alle Fourierkoeffizienten innerhalb (idealer Hochpassfilter) bzw. außerhalb (idealer Tiefpassfilter) eines Radius D_0 um den Mittelpunkt des Spektrums auf 0 gesetzt.

Verwenden Sie die von `numpy.fft` bereitgestellte Funktionalität zur Berechnung der Fouriertransformation eines Bildes! Wenden Sie im Frequenzraum jeweils einen idealen Hochpass- und einen idealen Tiefpassfilter an! Transformieren Sie das veränderte Spektrum zurück in den Ortsbereich (`ifftshift`, `ifft2`) und interpretieren Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 3 Gaußfilter (2 Punkte)

Anstatt wie in der vorigen Aufgabe an einer ausgewählten Frequenz hart abzuschneiden, kann mittels eines Faktors

$$h(u,v) = \mathrm{e}^{-\frac{D^2(u,v)}{2\sigma^2}}, \qquad h \in [0;1] \tag{3}$$

auch ein weicher Übergang erzeugt werden.

Verwenden Sie eine Gauß-Glocke für die Hoch- und Tiefpassfilterung und berechnen Sie den Faktor h in Abhängigkeit von der Entfernung $D(u,v)$ zum Ursprung! Führen Sie die Transformationen ansonsten wie in Teilaufgabe 2 durch! Die Varianz σ der Gauß-Glocke ist mit dem dort gegebenen Radius gleichzusetzen. Was ändert sich in den Ausgabebildern im Vergleich zu Teilaufgabe 2?

Aufgabe 4 Faltungstheorem (3 Punkte)

Das Faltungstheorem

$$F * G = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(F) \cdot \mathcal{F}(G)) \tag{4}$$

besagt, dass eine Faltung im Ortsraum äquivalent zu einer Multiplikation im Frequenzraum ist. Prüfen Sie die Gültigkeit dieses Theorems an mindestens zwei praktischen Beispielen mit selbst gewählten Filtermasken! Vergleichen und analysieren Sie sowohl die Ergebnisse als auch die Rechenzeiten im Hinblick auf verschiedene Filtergrößen!

Viel Spaß und Erfolg!

Weiterführende Links:

Erläuterungen zur Fourier-Transformation von Bildern in der *Hypermedia Image Processing Reference*:
`https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/fourier.htm`