Theorie-Übungsserie 2

1. Filter separieren

Annahme: Der Filter ist nicht die Nullmatrix. Ein Filter ist separierbar, wenn sein Rang 1 ist. Wenn das gilt, kann man die Matrix als äußeres Produkt zweier Vektoren angeben. Dies sind dann die Teilfilter.

a)

$$A_a := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Matrix A_a hat Rang 1, da jede Zeile identisch ist und so jede Zeile durch bspw. die erste Zeile dargestellt werden kann.

$$u_a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$v_a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$u_a \otimes v_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

b)

Die Matrix A_b hat Rang 1, da die erste und dritte Zeile identisch sind und die zweite Zeile eine Linearkombination der bspw. ersten Zeile ist.

$$u_b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$v_b := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$u_b \otimes v_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

c)

Diese Matrix hat Rang 2. Sie kann durch die Basisvektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ dargestellt werden, welche keine Linearkombinationen voneinander sind.

d)

Die Matrix hat Rang 1, da die erste und dritte Zeile identisch sind und die zweite eine Linearkombination (mal 2) der bspw. ersten ist.

$$u_d := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$v_d := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$u_d \otimes v_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

2. Mehrfache Filterung

Sei f ein Eingabe- und h das Ausgabesignal. Es ist zu zeigen, dass der 1D-Gaußfilter g zweifach angewandt auf das Eingangssignal dieselbe Filterung ausführt, wie für $\sigma_c = \sqrt{2} \cdot \sigma$.

Hintergrundwissen aus der VL (und hier Annahme): Die Faltung zweier Gaußfunktionen ist wieder eine Gaußfunktion.

$$g_\sigma := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{5.1}$$

$$h := f * g_\sigma * g_\sigma \quad \Big| \quad \text{Filtern heißt falten (VL)} \tag{5.2}$$

$$\hookrightarrow g_{\sigma_c} \stackrel{?}{=} g_\sigma * g_\sigma \quad \Big| \quad \text{zu zeigen / Behauptung} \tag{5.3}$$

$$\leftrightarrow \mathcal{F}\left\{g_{\sigma_c}\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{g_\sigma\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{g_\sigma\}(\omega) \quad \Big| \quad \text{Tabelle aus der VL} \tag{5.4}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \quad \Big| \quad \text{aus Paper (1) kopiert} \tag{5.5}$$

$$= e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)+\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)} \tag{5.6}$$

$$= \boxed{e^{-\sigma^2\,\omega^2}} \tag{5.7}$$

$$F\left\{g_{\sigma_c}\right\}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\,\sigma_c^2\,\omega^2} \tag{6.1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cdot\sigma\right)^2\,\omega^2} \quad \Big| \quad \text{Df. einsetzen} \tag{6.2}$$

$$= \boxed{e^{-\sigma^2\,\omega^2}} \tag{6.3}$$

■

Verwendetes Paper für Fouriertransformierte des Gaußfilters:

(1) http://www.cse.yorku.ca/~kosta/CompVis_Notes/fourier_transform_Gaussian.pdf

3. Quantisierungskennlinie

Sei $p(f)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines aufgenommenen Bildes die Zufallsvariable f.

Zu zeigen: Der mittlere quadratische Fehler ε für gleichverteilte f ist minimal, wenn die Quantisierungsintervalle äquidistant gewählt werden.

$$\varepsilon := \sum_{\nu=1}^{L} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_\nu)^2 \, p(f) \, \mathrm{d}f \tag{7.1}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{L} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_\nu)^2 \, \mathrm{d}f \qquad \Big| \text{ PDF konst.} \tag{7.2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{L} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_\nu)^2 \, \mathrm{d}f \tag{7.3}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial b_\nu} \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_\nu)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} \qquad \Big| \text{ wie in der VL abl.} \tag{7.4}$$

$$\leftrightarrow 0 = \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} f \, \mathrm{d}f - \left(b_\nu \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} 1 \, \mathrm{d}f \right) \tag{7.5}$$

$$\leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_\nu^2) - (b_\nu(a_{\nu+1} - a_\nu)) \tag{7.6}$$

$$\leftrightarrow b_\nu = \frac{1}{2}(a_{\nu+1} + a_\nu) \tag{7.7}$$

Streng genommen müsste ich noch zeigen, dass das Optimierungsproblem konvex ist. In der VL wurde das allerdings auch angenommen, daher setze ich es voraus. Es ist auch intuitiv, da ε quadratisch von b_ν abhängt und es eine positive zweite Ableitung gibt, wegen $\varepsilon_\nu = \int f^2 \, \mathrm{d}f - 2b_\nu \int f \, \mathrm{d}f + b_\nu^2 \int f \, \mathrm{d}f \leftrightarrow \frac{\partial^2 e_\nu}{\partial b_\nu^2} = 2 \int_{a_\nu}^{a_\nu + 1} 1 \, \mathrm{d}f$ (die Integralgrenzen habe ich teilweise zur besseren Lesbarkeit weggelassen).

Das optimale b_ν ist also abhängig vom a_ν. In der VL wurde schon gezeigt, dass das optimale $a_\nu = \frac{b_{\nu-1} + b_\nu}{2}$ ist.

$$b_\nu = \frac{1}{2}(a_{\nu+1} + a_\nu) \qquad \Big| \text{ Df. eins.} \tag{8.1}$$

$$\leftrightarrow b_\nu = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{b_{\nu+1} + b_\nu}{2} \right) + \left(\frac{b_{\nu-1} + b_\nu}{2} \right) \right) \qquad \Big| \text{ kleine Abk.} \tag{8.2}$$

$$\leftrightarrow b_{\nu+1} - b_\nu = b_\nu - b_{\nu-1} \tag{8.3}$$

■

4. Histogrammlinearisierung

Zu zeigen: Histogrammegalisierung führt zu einer Linearisierung der Verteilungsfunktion.

Sei I eine Zufallsvariable mit einer stetigen Wkeitsdichtefunktion h, die ausschließlich im Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Sei weiters I' das transformierte Ausgabebild.

Mit „Histogramm eines Bildes [...] linearisieren“ kann nur „das Histogramm konstant machen gemeint sein“. Sonst könnte bspw. die Dichtefunktion $p_g(x) := 2x$ (offensichtlich linear) und die zugehörige Verteilungsfunktion quadratisch sein.

maW ist zu zeigen, dass das transformierte Bild eine lineare Verteilungsfunktion hat.

$$I' = h_c(I) \tag{9.1}$$

$$h_c(I) := \int_0^I h(t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

$$h'(I') = h(I) \cdot \left|\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}I'}\right)\right| \qquad \Big| \text{ Transf. einer ZF-Var.} \tag{9.3}$$

$$\leftrightarrow h'(I') = h(I) \cdot \left|\frac{1}{h(I)}\right| \tag{9.4}$$

$$\leftrightarrow h'(I') = 1 \tag{9.5}$$

Die Dichtefunktion der Ausgabe ist also konstant und die zugehörige Verteilungsfunktion damit linear.

■