SPN加解密及线性密码分析

- 2112514 辛浩然

SPN加解密

SPN 加密

SPN由 `Nr` 轮组成，在每一轮(除了最后一轮稍有不同外)，先用异或操作混入该轮的轮密钥，再用π_s进行代换，然后用π_p进行置换。而在最后一轮，使用π_s进行代换后，没有用π_p进行置换，而是异或最后一轮轮密钥，得到密文。

伪代码如下：

Algorithm 1 SPN 加密

$w_0 \leftarrow x$
for $r \leftarrow 1$ **to** $\mathrm{Nr}-1$ **do**
  $u^r \leftarrow w^{r-1} \oplus \mathbf{K}^r$
  for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
    $w^r \leftarrow \left(v^r_{\pi_p(1)}, \cdots, v^r_{\pi_p(\ell m)}\right)$
  end for
end for
$u^{\mathrm{Nr}} \leftarrow w^{\mathrm{Nr}-1} \oplus K^{\mathrm{Nr}}$
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
  $v^{\mathrm{Nr}}_{<i>} \leftarrow \pi_s\left(u^{\mathrm{Nr}}_{<i>}\right)$
end for
$t \leftarrow v^{\mathrm{Nr}} \oplus K^{\mathrm{Nr}+1}$
output(y)

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
string S_box(string u, int nr)
{
    string res;
    string mapping[] = {
        "1110", "0100", "1101", "0001",
        "0010", "1111", "1011", "1000",
```

```
        "0011", "1010", "0110", "1100",
        "0101", "1001", "0000", "0111"};

    for (int i = 0; i < nr; i++)
    {
        string tmp = u.substr(i * 4, 4);
        res += mapping[stoi(tmp, 0, 2)];
    }

    return res;
}

string P_box(string s, int nr)
{
    string res;
    int mapping[] = {
        0, 4, 8, 12,
        1, 5, 9, 13,
        2, 6, 10, 14,
        3, 7, 11, 15};

    for (int i = 0; i < nr * 4; i++)
    {
        res += s[mapping[i]];
    }

    return res;
}

int main()
{
    string x, w, k, u, s_res, p_res;
    cin >> x >> k;
    int len = 16;
    int nr = 4;
    w = x;
    for (int i = 0; i <= nr; i++)
    {
        int index = i * 4;
        u.clear();
        for (int j = 0; j < len; j++)
        {
            if (w[j] == k[index])
            {
                u += '0';
            }
            else
```

```
            {
                u += '1';
            }
            index++;
        }
        if (i == nr)
            break;
        s_res = S_box(u, nr);
        if (i != nr - 1)
        {
            p_res = P_box(s_res, nr);
        }
        else
        {
            p_res = s_res;
        }
        w.clear();
        w = p_res;
    }
    cout << u;
}
```

具体而言，使用一个循环，迭代 `nr` 次来执行加密过程：

- 状态 `w` 初始化为明文。在每轮中，
  - 首先，轮密钥 `k_i` 与 `w` 按位异或操作，并将结果存储在 `u` 中。
  - 使用 `S_box` 函数对 `u` 中的每 `4` 位进行S盒替代。
  - 对于S盒的结果：
    - 如果不是最后一轮，使用 `P_box` 函数对S盒替代的结果进行P盒置换。
    - 如果是最后一轮，将S盒的结果与轮密钥 `k_5` 进行异或，结束循环。
  - 将本轮结果存储在变量 `w` 中，以备下一轮使用。
- 最后一轮异或后的结果即为加密后的密文。

SPN 解密

SPN 解密即SPN 加密的逆过程，以下伪代码说明了SPN解密的基本流程：

Algorithm 2 SPN 解密

$v^{\mathrm{Nr}} \leftarrow y \oplus K^{\mathrm{Nr}+1}$
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
  $u^{\mathrm{Nr}}_{<i>} \leftarrow \pi_s^{-1}(v^{\mathrm{Nr}}_{<i>})$
end for
$w^{\mathrm{Nr}-1} \leftarrow u^{\mathrm{Nr}} \oplus K^{\mathrm{Nr}}$
for $r \leftarrow \mathrm{Nr}-1$ **downto** 1 **do**
  $v^r \leftarrow \left(w^r_{\pi_p^{-1}(1)}, \cdots, w^r_{\pi_p^{-1}(\ell m)}\right)$
  for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
    $u^r_{<i>} \leftarrow \pi_s^{-1}(v^r_{<i>})$
  end for
  $w^{r-1} \leftarrow u^r \oplus \mathbf{K}^r$
end for
$x \leftarrow w_0$
output(x)

具体实现思路如下：

- 首先编写S盒和P盒的逆变换；
- 解密过程，具体而言，使用一个循环，`r` 从 `Nr` 到 `1` 迭代 `nr` 次来执行解密过程：
  - 如果是第一轮，则将密文与轮密钥异或得到v^r；
  - 如果不是第一轮，则将w^r逆P盒置换得到v^r；
  - 随后，使用 `Reverse_S_box` 函数对v^r进行S盒逆变换，得到u^r；
  - 轮密钥k^r 与u^r 按位异或操作，得到 w^{r-1} 的值。
- 最后一轮得到的w^0即为解密后的明文。

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;
string Reverse_S_box(string u, int nr)
{
    string res;
    string mapping[] = {
        "1110", "0011", "0100", "1000",
        "0001", "1100", "1010", "1111",
        "0111", "1101", "1001", "0110",
        "1011", "0010", "0000", "0101"};

    for (int i = 0; i < nr; i++)
    {
```

```
        string tmp = u.substr(i * 4, 4);
        res += mapping[stoi(tmp, 0, 2)];
    }

    return res;
}

string Reverse_P_box(string s, int nr)
{
    string res;
    int mapping[] = {
        0, 4, 8, 12,
        1, 5, 9, 13,
        2, 6, 10, 14,
        3, 7, 11, 15};

    for (int i = 0; i < nr * 4; i++)
    {
        res += s[mapping[i]];
    }

    return res;
}

int main()
{
    string y, k, u, w, v, x;
    cin >> y >> k;
    int len = 16;
    int nr = 4;
    int index = nr * 4;
    for (int i = nr; i > 0; i--)
    {
        v.clear();
        if (i != nr)
        {
            v = Reverse_P_box(w, nr);
        }
        else
        {
            for (int j = 0; j < len; j++)
            {
                if (y[j] == k[index])
                {
                    v += '0';
                }
                else
```

```
                {
                    v += '1';
                }
                index++;
            }
        }
        u = Reverse_S_box(v, nr);
        int index = (i - 1) * 4;
        w.clear();
        for (int j = 0; j < len; j++)
        {
            if (u[j] == k[index])
            {
                w += '0';
            }
            else
            {
                w += '1';
            }
            index++;
        }
    }
    x = w;
    cout << x;
}
```

线性密码分析基本原理

线性密码分析是一种已知明文攻击——攻击者已知密钥相同的多组明密文对，求解密钥。

线性分析法的基本想法是在一个**明文比特子集**与最后一轮**即将进行代换的输入状态比特子集**之间找到一个概率线性关系，即存在一个比特子集使得元素的异或表现出非随机的分布。比如：$X_{i_1} \bigoplus X_{i_2} \bigoplus \ldots \bigoplus U_{j_1}^4 \bigoplus U_{j_2}^4 \bigoplus \cdots = 0$

如果我们找到一个比特子集，使得子集中元素的异或表现出非随机的分布，也就是异或式具有偏差，即异或取值为 0 的概率P不等于$1/2$，$|P-1/2|$的值越大，则越容易使用线性分析法，利用上式通过多组明密文分析出密钥的值。

具体而言，假设拥有大量的使用**同一未知密钥K加密的明-密文对**：

- 对每一个明-密文对，将用**所有可能的候选密钥**来对最后一轮解密密文
- 对每一个候选密钥，计算包含在**线性关系式**中的**相关状态比特的异或值**，然后确定上述的**线性关系**是否成立
    - 如果成立，就在对应于特定候选密钥的计数器上加1

- 在这个过程的最后，我们希望计数频率离明-密文对数的一半最远的候选密钥含有那些密钥比特的正确值

分析过程

线性逼近表

对于给定S盒，输入$X_1X_2X_3X_4$，得到输出$Y_1Y_2Y_3Y_4$。

考虑若干输入输出变量之间的异或值，可把每一个相关的随机变量写成：
$\left(\bigoplus_{i=1}^{4} \quad a_i \mathbf{X}_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{4} \quad b_i \mathbf{Y}_i\right)$

其中 $a_i \in \{0,1\}, b_i \in \{0,1\}, i=1,2,3,4$ 。为了记号的紧凑，把每一个二元向量 (a_1,a_2,a_3,a_4)和 (b_1,b_2,b_3,b_4) 看做一个十六进制数字 (这些数字分别叫做**输入和**与**输出和**)。这样，这 256 个随机变量里的每一个就用一对十六进制数字来表示。

对于一个具有 (十六进制) 输入和 a 与输出和 b 的随机变 量 (这里 $a=(a_1,a_2,a_3,a_4), b=(b_1,b_2,b_3,b_4),$)，设 $N_L(a,b)$表示满足如下条件的二进制 8 元组 $(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)$ 的个数：
$(y_1,y_2,y_3,y_4)=\pi_S(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 及 $\left(\bigoplus_{i=1}^{4} a_i x_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{4} b_i y_i\right)=0$

该随机变量的偏差计算公式为：$\epsilon(a,b)=(N_L(a,b)-8)/16$

由于选择线性逼近时，需要计算相关随机变量之间的偏差，因此，需要提前列出$N_L(a,b)$的表格，即线性逼近表。

具体实现思路为：

- 遍历所有输入和a与输出和b;
- 遍历所有S盒输入$X_1X_2X_3X_4$，得到输出$Y_1Y_2Y_3Y_4$；
- 将二进制表示的a与$X_1X_2X_3X_4$按位取与，二进制表示的b与$Y_1Y_2Y_3Y_4$按位取与，统计二者结果中1的数目，如果为偶数，说明这组随机变量异或值为0，将线性逼近表中相应位置的值加1。

核心代码如下：

```
// 省略一些函数的实现，完整代码参见附件
const int size = 16;
string X[size] = {"0000", "0001", "0010", "0011",
                  "0100", "0101", "0110", "0111",
                  "1000", "1001", "1010", "1011",
                  "1100", "1101", "1110", "1111"};
string Y[size] = {"1110", "0100", "1101", "0001",
                  "0010", "1111", "1011", "1000",
```

```
                    "0011", "1010", "0110", "1100",
                    "0101", "1001", "0000", "0111"};
int table[size][size] = {0};
char or_bit(char a, char b){}
int countOnes(string str, int len){}
void output_table(){}
int main()
{
    string l1, l2;
    for (int i = 0; i < 16; i++)
    {
        for (int j = 0; j < 16; j++)
        {
            for (int k = 0; k < size; k++)
            {
                l1.clear();
                l2.clear();
                string i_string = bitset<4>(i).to_string();
                string j_string = bitset<4>(j).to_string();
                for (int m = 0; m < 4; m++)
                {
                    l1 += or_bit(i_string[m], X[k][m]);
                    l2 += or_bit(j_string[m], Y[k][m]);
                }
                if ((countOnes(l1, 4) + countOnes(l2, 4)) % 2 == 0)
                {
                    table[i][j]++;
                }
            }
        }
    }
    output_table();
}
```

输出线性逼近表如下：

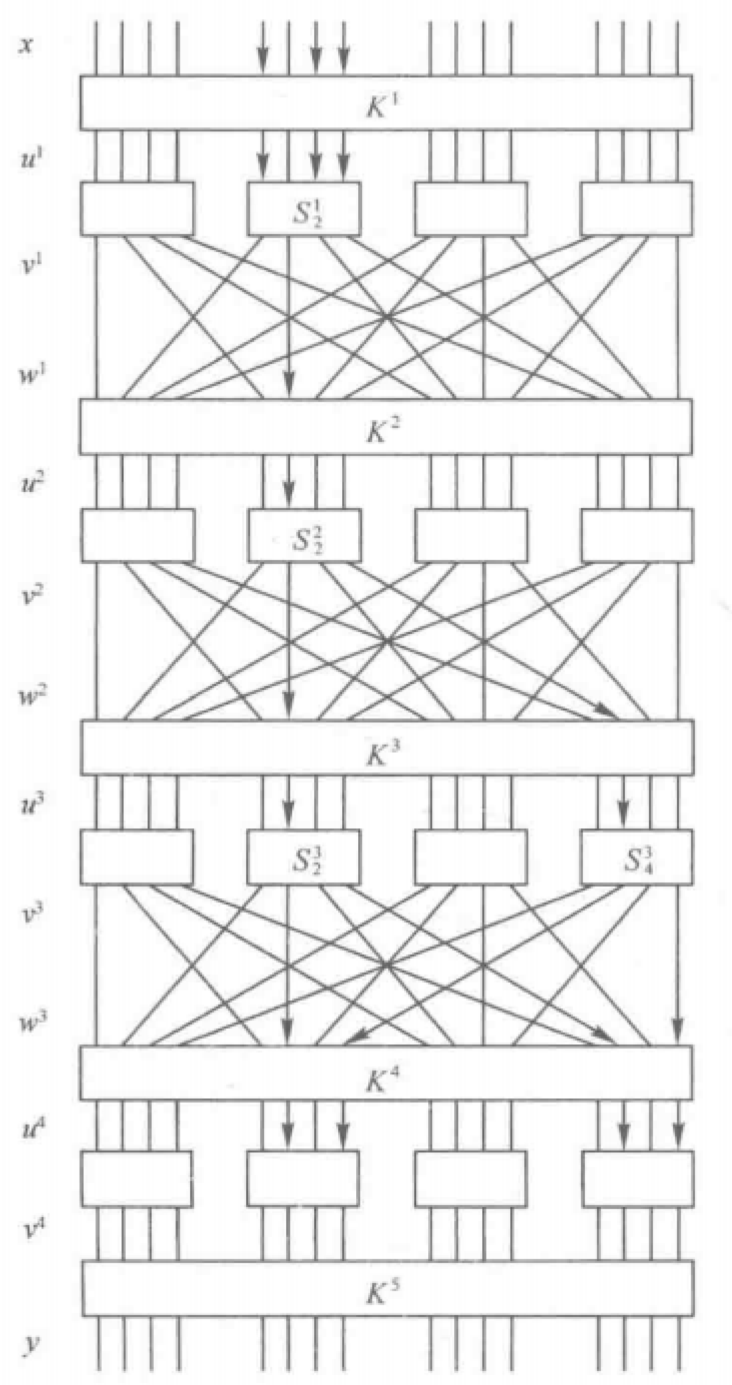
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	16	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
1	8	8	6	6	8	8	6	14	10	10	8	8	10	10	8	8
2	8	8	6	6	8	8	6	6	8	8	10	10	8	8	2	10
3	8	8	8	8	8	8	8	8	10	2	6	6	10	10	6	6
4	8	10	8	6	6	4	6	8	8	6	8	10	10	4	10	8
5	8	6	6	8	6	8	12	10	6	8	4	10	8	6	6	8
6	8	10	6	12	10	8	8	10	8	6	10	12	6	8	8	6
7	8	6	8	10	10	4	10	8	6	8	10	8	12	10	8	10
8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	10	10	6	10	6	6	2
9	8	8	6	6	8	8	6	6	4	8	6	10	8	12	10	6
10	8	12	6	10	4	8	10	6	10	10	8	8	10	10	8	8
11	8	12	8	4	12	8	12	8	8	8	8	8	8	8	8	8
12	8	6	12	6	6	8	10	8	10	8	10	12	8	10	8	6
13	8	10	10	8	6	12	8	10	4	6	10	8	10	8	8	10
14	8	10	10	8	6	4	8	10	6	8	8	6	4	10	6	8
15	8	6	4	6	6	8	10	8	8	6	12	6	6	8	10	8

线性逼近

线性密码分析要求找出一组S盒的线性逼近，这组线性逼近能够用来导出一个整个SPN(除最后一轮外)的线性逼近。

求解$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$

首先，给出用于求解$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$的线性逼近，如图所示。带箭头的线条对应于包含在线性逼近中的随机变量。带标号的S盒表示在这些逼近中使用了此S盒。



此线性逼近包括四个活动S盒，结合线性逼近表，可以得到：

- 在S_2^1 中，随机变量 $\mathbf{T}_1 = \mathbf{U}_5^1 \oplus \mathbf{U}_7^1 \oplus \mathbf{U}_8^1 \oplus \mathbf{V}_6^1$ 具有偏差$1/4$；
- 在 S_2^2 中，随机变量 $\mathbf{T}_2 = \mathbf{U}_6^2 \oplus \mathbf{V}_6^2 \oplus \mathbf{V}_8^2$ 具有偏差$-1/4$；
- 在 S_2^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_3 = \mathbf{U}_6^3 \oplus \mathbf{V}_6^3 \oplus \mathbf{V}_8^3$具有偏差 $-1/4$;
- 在 S_4^3中，随机变量$\mathbf{T}_4 = \mathbf{U}_{14}^3 \oplus \mathbf{V}_{14}^3 \oplus \mathbf{V}_{16}^3$具有偏差$-1/4$.

假设这四个随机变量相互独立，根据堆积引理可以求得随机变量$\mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{T}_2 \oplus \mathbf{T}_3 \oplus \mathbf{T}_4$具有偏差$2^3(1/4)(-1/4)^3 = -1/32$

- 随机变量$\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3,\mathbf{T}_4$具有以下性质：它们的异或可用明文比特、$u^4$的比特(S盒最后一轮的输入)以及密钥比特表示出来，即可以推导出如下关系式：
- $\mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{T}_2 \oplus \mathbf{T}_3 \oplus \mathbf{T}_4 = \mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}_6^4 \oplus \mathbf{U}_8^4 \oplus \mathbf{U}_{14}^4 \oplus \mathbf{U}_{16}^4$
  $$\oplus \mathbf{K}_5^1 \oplus \mathbf{K}_7^1 \oplus \mathbf{K}_8^1 \oplus \mathbf{K}_6^2 \oplus \mathbf{K}_6^3 \oplus \mathbf{K}_{14}^3 \oplus \mathbf{K}_6^4 \oplus \mathbf{K}_8^4 \oplus \mathbf{K}_{14}^4 \oplus \mathbf{K}_{16}^4$$
- 由于密钥比特固定，K_i^j具有固定的值0或1，因此，随机变量 $\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}_6^4 \oplus \mathbf{U}_8^4 \oplus \mathbf{U}_{14}^4 \oplus \mathbf{U}_{16}^4$ **具有偏差** $\pm 1/32$。

上式仅包含明文比特和$u^4_{<2>}$、$u^4_{<4>}$的比特，而上式具有偏离0的偏差这一事实允许我们进行线性密码攻击。我们可以通过线性密码攻击获得$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$的8比特密钥。

一般来说，一个基于偏差为 ϵ 的线性逼近的线性攻击要想获得成功，所需要的明密文对数目 T 要接近于 $c\,\epsilon^{-2}$ 。在该线性逼近中， $\epsilon^{-2}=1024$ ， 我们要求解的比特位数$c=8$, 计算可知$T\approx 8000$ 。因此，需要大约8000对明密文对。

攻击的基本思路就是，保持对应于候选子密钥的计数器，每当随机变量 $\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}_6^4 \oplus \mathbf{U}_8^4 \oplus \mathbf{U}_{14}^4 \oplus \mathbf{U}_{16}^4$ 取值为0时，就将对应于该子密钥的记数器加1(这些计数器的初始值全为0)。在计数过程的最后，我们希望大多数的计数器值接近于T/2,而真正的候选子密钥对应的计数器具有接近于$T/2\pm T/32$之值，这有助于我们确定正确的8个子密钥比特。

接下来，给出具体实现线性攻击获得$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$的8比特密钥的代码：

```
// plain 为输入的明文
// cipher 为输入的密文
// binaryArray 为0~16数字对应的4位01字符串
void K24(string *plain, string *cipher, string *binaryArray, string &res2,
string &res4)
{
    int count[16][16] = {0};
    string tmp1, tmp2, tmp3, tmp4;
    char z;
    char v[16] = {0}, u[16] = {0};
    for (int i = 0; i < size; i++)
    {
        for (int l1 = 0; l1 < 16; l1++)
        {
            for (int l2 = 0; l2 < 16; l2++)
            {
                for (int k = 0; k < 4; k++)
                {
                    v[k + 4] = nor(binaryArray[l1][k], cipher[i][k + 4]);
                    v[k + 12] = nor(binaryArray[l2][k], cipher[i][k + 12]);
                }
                tmp1.clear();
```

```
                tmp2.clear();
                for (int k = 0; k < 4; k++)
                {
                    tmp1 += v[k + 4];
                    tmp2 += v[k + 12];
                }
                tmp1 = Reverse_S_box(tmp1, 1);
                tmp2 = Reverse_S_box(tmp2, 1);
                for (int k = 0; k < 4; k++)
                {
                    u[k + 4] = tmp1[k];
                    u[k + 12] = tmp2[k];
                }
                z = nor(nor(nor(nor(nor(nor(plain[i][4], plain[i][6]),
plain[i][7]), u[5]), u[7]), u[13]), u[15]);
                if (z == '0')
                {
                    count[l1][l2]++;
                }
            }
        }
    }
    int max = -1;
    int a = 0, b = 0;
    for (int l1 = 0; l1 < 16; l1++)
    {
        for (int l2 = 0; l2 < 16; l2++)
        {
            count[l1][l2] = abs(count[l1][l2] - 4000);
            if (count[l1][l2] > max)
            {
                max = count[l1][l2];
                a = l1;
                b = l2;
            }
        }
    }
    res2 = bitset<4>(a).to_string();
    res4 = bitset<4>(b).to_string();
}
```

具体步骤分析如下：

1. 输入：明文数组、与之对应的密文数组；
2. 定义计数器二维数组，索引是密钥$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$的十进制数值，内容全部置为0；
3. 遍历所有明密文对：

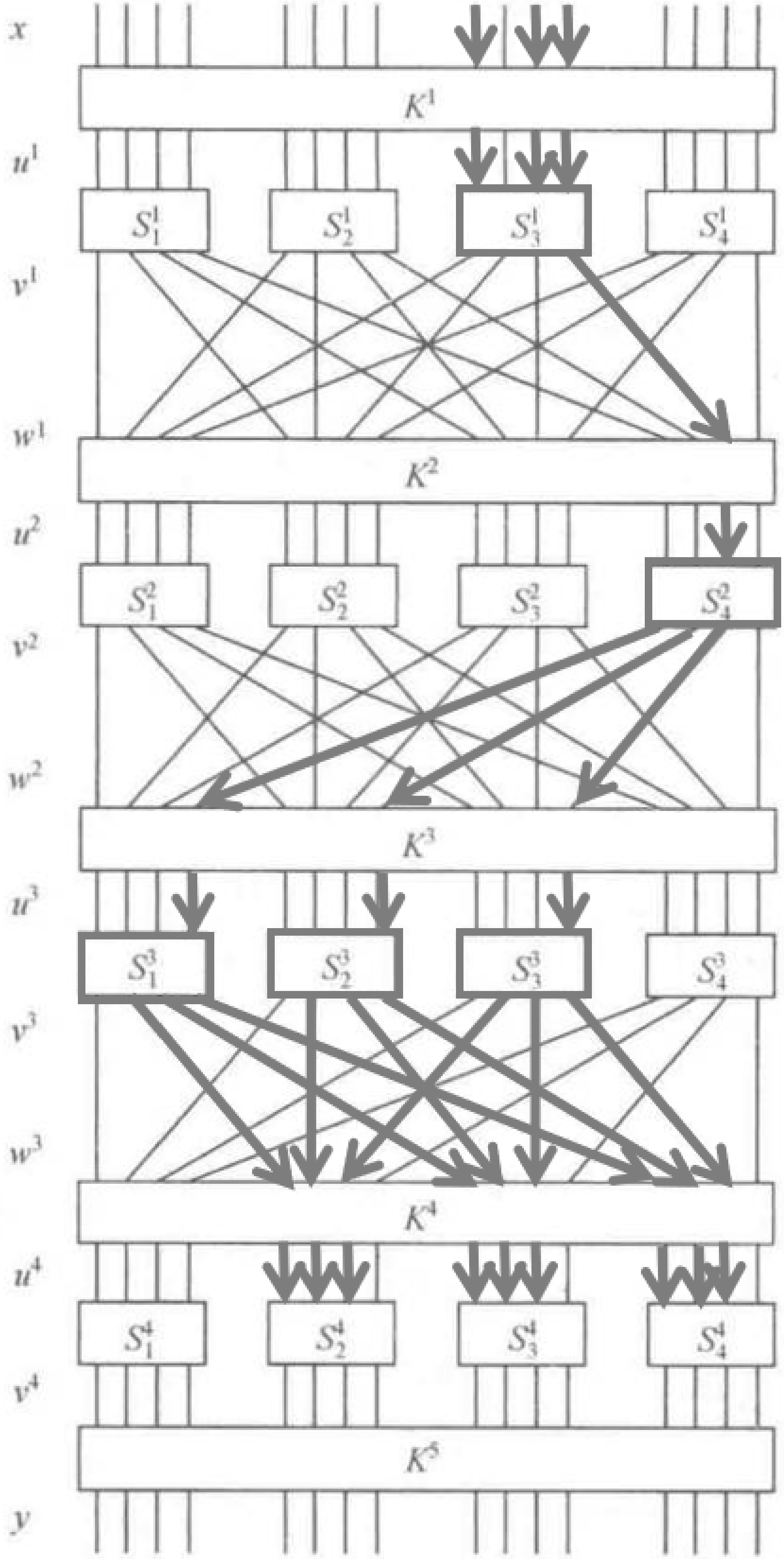
- 遍历所有候选子密钥$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$：
  - **获得 $v^4_{<2>}$ ：密文 $y_{<2>}$ 与密钥 $K^5_{<2>}$ 异或；**
  - **获得 $v^4_{<4>}$ ：密文 $y_{<4>}$ 与密钥 $K^5_{<4>}$ 异或；**
  - **获得 $u^4_{<2>}$：$v^4_{<2>}$通过S盒逆置换；**
    - 实现S盒逆置换函数，将输入字符串 按照逆S盒映射规则进行逆变换，并返回结果字符串
  - **获得 $u^4_{<4>}$：$v^4_{<4>}$通过S盒逆置换；**
  - **计算异或值**：计算 $\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}^4_6 \oplus \mathbf{U}^4_8 \oplus \mathbf{U}^4_{14} \oplus \mathbf{U}^4_{16}$ 的值
    - 如果异或值为0，在对应于特定候选密钥的计数器上加1

4. 遍历计数器：

- 计数频率离明-密文对数的一半最近(即频率$-T/2$最大)的候选密钥含有那些密钥比特的正确值

求解$K^5_{<3>}$

给出用于求解$K^5_{<3>}$的线性逼近，如图所示：



此线性逼近包括五个活动S盒，结合线性逼近表，可以得到：

- 在S_3^1 中， 随机变量 $\mathbf{T}_1=\mathbf{U}_9^1\oplus\mathbf{U}_{11}^1\oplus\mathbf{U}_{12}^1\oplus\mathbf{V}_{12}^1$ 具有偏差1/4；
- 在 S_4^2 中，随机变量 $\mathbf{T}_2=\mathbf{U}_{15}^2\oplus\mathbf{V}_{13}^2\oplus\mathbf{V}_{14}^2\oplus\mathbf{V}_{15}^2$ 具有偏差$-3/8$；

- 在 S_1^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_3=\mathbf{U}_4^3\oplus\mathbf{V}_2^3\oplus\mathbf{V}_3^3\oplus\mathbf{V}_4^3$具有偏差 3/8；
- 在 S_2^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_4=\mathbf{U}_8^3\oplus\mathbf{V}_6^3\oplus\mathbf{V}_7^3\oplus\mathbf{V}_8^3$具有偏差 3/8；
- 在 S_3^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_5=\mathbf{U}_{12}^3\oplus\mathbf{V}_{10}^3\oplus\mathbf{V}_{11}^3\oplus\mathbf{V}_{12}^3$具有偏差 3/8.

假设这四个随机变量相互独立，根据堆积引理可以求得随机变量$\mathbf{T}_1\oplus\mathbf{T}_2\oplus\mathbf{T}_3\oplus\mathbf{T}_4\oplus\mathbf{T}_5$具有偏差$2^4(1/4)(-3/8)(3/8)^3=-81/1024$

同前一部分，可以得到随机变量
$\mathbf{X}_9\oplus\mathbf{X}_{11}\oplus\mathbf{X}_{12}\oplus\mathbf{U}_5^4\oplus\mathbf{U}_6^4\oplus\mathbf{U}_7^4\oplus\mathbf{U}_9^4\oplus\mathbf{U}_{10}^4\oplus\mathbf{U}_{11}^4\oplus\mathbf{U}_{13}^4\oplus\mathbf{U}_{14}^4\oplus\mathbf{U}_{15}^4$ **具有偏差** $\pm 81/1024$。

上式具有偏离0的偏差这一事实允许我们通过线性密码攻击获得$K^5_{<3>}$的4比特密钥。

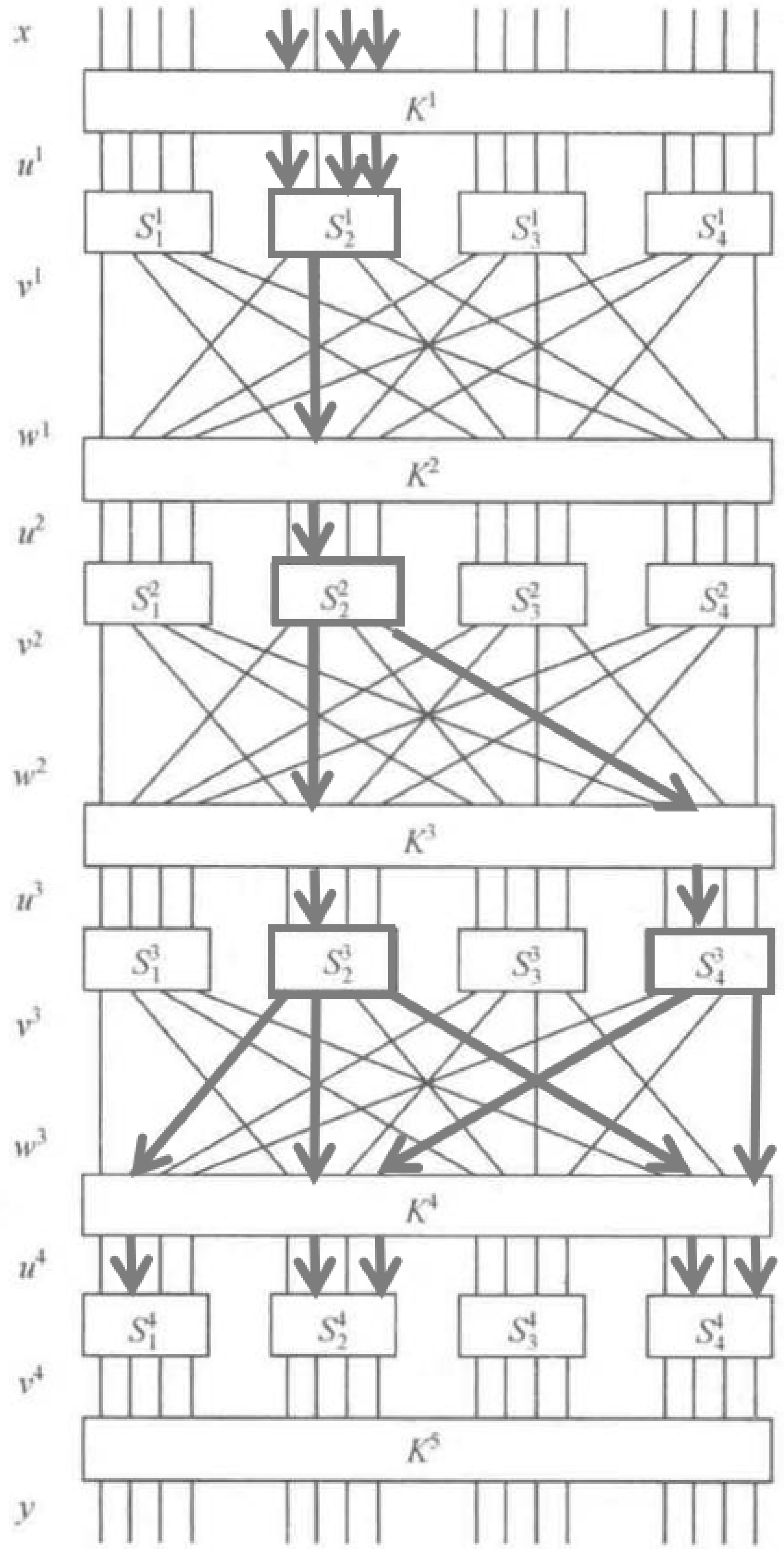
明密文对数目 T 要接近于 $c\,\epsilon^{-2}$ 。在该线性逼近中，$T\approx 600$ 。因此，需要大约600对明密文对。

攻击的基本思路与前面一致，就是保持对应于候选子密钥的计数器，每当随机变量
$\mathbf{X}_9\oplus\mathbf{X}_{11}\oplus\mathbf{X}_{12}\oplus\mathbf{U}_5^4\oplus\mathbf{U}_6^4\oplus\mathbf{U}_7^4\oplus\mathbf{U}_9^4\oplus\mathbf{U}_{10}^4\oplus\mathbf{U}_{11}^4\oplus\mathbf{U}_{13}^4\oplus\mathbf{U}_{14}^4\oplus\mathbf{U}_{15}^4$取值为0时，就将对应于该子密钥的计数器加1(这些计数器的初始值全为0)。最后统计计数器计数频率离明密文对数的一半最远的候选密钥。

$K^5_{<3>}$虽然与$K^5_{<1>}$的求解使用不同的线性逼近，但可以一起求解，因此具体代码实现在下部分分析。

求解$K^5_{<1>}$

给出用于求解$K^5_{<1>}$的线性逼近，如图所示：



此线性逼近包括四个活动S盒，结合线性逼近表，可以得到：

- 在S_2^1 中， 随机变量 $\mathbf{T}_1=\mathbf{U}_5^1\oplus\mathbf{U}_7^1\oplus\mathbf{U}_8^1\oplus\mathbf{V}_6^1$ 具有偏差$1/4$；

- 在 S_2^2 中，随机变量 $\mathbf{T}_2 = \mathbf{U}_6^2 \oplus \mathbf{V}_6^2 \oplus \mathbf{V}_8^2$ 具有偏差$-1/4$；
- 在 S_2^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_3 = \mathbf{U}_6^3 \oplus \mathbf{V}_5^3 \oplus \mathbf{V}_6^3 \oplus \mathbf{V}_8^3$具有偏差 $-1/4$;
- 在 S_4^3 中，随机变量 $\mathbf{T}_4 = \mathbf{U}_{14}^3 \oplus \mathbf{V}_{14}^3 \oplus \mathbf{V}_{16}^3$具有偏差 $-1/4$;

假设这四个随机变量相互独立，根据堆积引理可以求得随机变量$\mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{T}_2 \oplus \mathbf{T}_3 \oplus \mathbf{T}_4$具有偏差$2^3(1/4)(-1/4)^3 = -1/32$

同前一部分，可以得到随机变量 $\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}_2^4 \oplus \mathbf{U}_6^4 \oplus \mathbf{U}_8^4 \oplus \mathbf{U}_{14}^4 \oplus \mathbf{U}_{16}^4$ **具有偏差** $\pm 1/32$。

上式具有偏离0的偏差这一事实允许我们通过线性密码攻击获得$K^5_{<1>}$的4比特密钥。

明密文对数目 T 要接近于 $c\,\epsilon^{-2}$ 。在该线性逼近中，$T \approx 4000$ 。因此，需要大约4000对明密文对。

攻击的基本思路与前面一致，就是保持对应于候选子密钥的计数器，每当随机变量 $\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}_2^4 \oplus \mathbf{U}_6^4 \oplus \mathbf{U}_8^4 \oplus \mathbf{U}_{14}^4 \oplus \mathbf{U}_{16}^4$ 取值为0时，就将对应于该子密钥的计数器加1(这些计数器的初始值全为0)。最后统计计数器计数频率离明密文对数的一半最远的候选密钥。

代码如下：

```
void K13(string *plain, string *cipher, string *binaryArray, string res2,
string res4, string &res1, string &res3)
{
    int count1[16] = {0}, count3[16] = {0};
    string tmp1, tmp2, tmp3, tmp4;
    char z;
    char v[16] = {0}, u[16] = {0};
    for (int i = 0; i < size; i++)
    {
        cin >> plain[i] >> cipher[i];
    }
    for (int i = 0; i < size; i++)
    {
        for (int l1 = 0; l1 < 16; l1++)
        {
            for (int k = 0; k < 4; k++)
            {
                v[k] = nor(binaryArray[l1][k], cipher[i][k]);
                v[k + 8] = nor(binaryArray[l1][k], cipher[i][k + 8]);
                v[k + 4] = nor(res2[k], cipher[i][k + 4]);
                v[k + 12] = nor(res4[k], cipher[i][k + 12]);
            }
            tmp1.clear();
            tmp2.clear();
```

```
            tmp3.clear();
            tmp4.clear();
            for (int k = 0; k < 4; k++)
            {
                tmp1 += v[k];
                tmp2 += v[k + 4];
                tmp3 += v[k + 8];
                tmp4 += v[k + 12];
            }
            tmp1 = Reverse_S_box(tmp1, 1);
            tmp2 = Reverse_S_box(tmp2, 1);
            tmp3 = Reverse_S_box(tmp3, 1);
            tmp4 = Reverse_S_box(tmp4, 1);
            for (int k = 0; k < 4; k++)
            {
                u[k] = tmp1[k];
                u[k + 4] = tmp2[k];
                u[k + 8] = tmp3[k];
                u[k + 12] = tmp4[k];
            }
            z = nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(plain[i][8],
plain[i][10]), plain[i][11]), u[4]), u[5]), u[6]), u[8]), u[9]), u[10]),
u[12]), u[13]), u[14]);
            if (z == '0')
            {
                count3[l1]++;
            }
            z = nor(nor(nor(nor(nor(nor(nor(plain[i][4], plain[i][6]),
plain[i][7]), u[1]), u[5]), u[7]), u[13]), u[15]);
            if (z == '0')
            {
                count1[l1]++;
            }
        }
    }
    int max1 = -1, max3 = -1;
    int a = 0, b = 0;
    for (int l1 = 0; l1 < 16; l1++)
    {
        count1[l1] = abs(count1[l1] - 4000);
        count3[l1] = abs(count3[l1] - 4000);
        if (count1[l1] > max1)
        {
            max1 = count1[l1];
            a = l1;
        }
        if (count3[l1] > max3)
```

```
        {
            max3 = count3[l1];
            b = l1;
        }
    }
    res1 = bitset<4>(a).to_string();
    res3 = bitset<4>(b).to_string();
}
```

实现思路基本与求$K^5_{<2><4>}$时一致，具体如下：

1. 输入：明文数组、与之对应的密文数组、之前求出的$K^5_{<2>}$和$K^5_{<4>}$；
2. 定义计数器：
    - 一维数组 `count3`，索引是密钥$K^5_{<3>}$的十进制数值，内容全部置为0；
    - 一维数组 `count1`，索引是密钥$K^5_{<1>}$的十进制数值，内容全部置为0；
3. 遍历所有明密文对：

- 遍历所有四位候选子密钥：
    - **获得 $v^4_{<1>}$ ：密文 $y_{<1>}$ 与密钥 $K^5_{<1>}$ 异或；**
    - **获得 $v^4_{<2>}$ ：密文 $y_{<2>}$ 与已知密钥 $K^5_{<2>}$ 异或；**
    - **获得 $v^4_{<3>}$ ：密文 $y_{<3>}$ 与密钥 $K^5_{<3>}$ 异或；**
    - **获得 $v^4_{<4>}$ ：密文 $y_{<4>}$ 与已知密钥 $K^5_{<4>}$ 异或；**
    - **获得 $u^4_{<1>}$：$v^4_{<1>}$通过S盒逆置换；**
    - **获得 $u^4_{<2>}$：$v^4_{<2>}$通过S盒逆置换；**
    - **获得 $u^4_{<3>}$：$v^4_{<3>}$通过S盒逆置换；**
    - **获得 $u^4_{<4>}$：$v^4_{<4>}$通过S盒逆置换；**
    - **计算异或值**：计算$\mathbf{X}_5 \oplus \mathbf{X}_7 \oplus \mathbf{X}_8 \oplus \mathbf{U}^4_2 \oplus \mathbf{U}^4_6 \oplus \mathbf{U}^4_8 \oplus \mathbf{U}^4_{14} \oplus \mathbf{U}^4_{16}$ 的值
        - 如果异或值为0，在 `count1` 中对应于特定候选密钥的计数器上加1
    - **计算异或值**：计算 $\mathbf{X}_9 \oplus \mathbf{X}_{11} \oplus \mathbf{X}_{12} \oplus \mathbf{U}^4_5 \oplus \mathbf{U}^4_6 \oplus \mathbf{U}^4_7 \oplus \mathbf{U}^4_9 \oplus \mathbf{U}^4_{10} \oplus \mathbf{U}^4_{11} \oplus \mathbf{U}^4_{13} \oplus \mathbf{U}^4_{14} \oplus \mathbf{U}^4_{15}$的值
        - 如果异或值为0，在 `count3` 中对应于特定候选密钥的计数器上加1

4. 分别遍历两个计数器：

- 计数频率离明-密文对数的一半最远(即频率$-T/2$最大)的候选密钥含有那些密钥比特的正确值

- 虽然此阶段不需要8000对明密文即可攻击，但由于前一阶段需要8000对明密文，因此，此阶段就也使用了8000对明密文，但实际上$K^5_{<1>}$只需4000对、$K^5_{<3>}$只需600对即可完成攻击。

求解完整密钥 K

通过以上步骤，求出第五轮密钥K^5的值。试图求解完整密钥，在固定后16位密钥的基础上，采用穷举的方式，遍历前16位密钥，使用明密文对加以验证(实际上只需要几对就可以，我取了16对来验证)，即可得到完整密钥K。

```
string K_all(string *plain, string *cipher, string *binaryArray, string K5)
{
    string K;
    for (int i = 0; i < 16; i++)
    {
        for (int j = 0; j < 16; j++)
        {
            for (int ii = 0; ii < 16; ii++)
            {
                for (int jj = 0; jj < 16; jj++)
                {
                    K = binaryArray[i] + binaryArray[j] + binaryArray[ii] +
binaryArray[jj] + K5;
                    int k = 0;
                    for (; k < 16; k++)
                    {
                        if (SPN_Encrypt(plain[k], K) != cipher[k])
                        {
                            break;
                        }
                    }
                    if (k == 16)
                    {
                        return K;
                    }
                }
            }
        }
    }
    return "failed";
}
```

攻击测试

生成明密文对

由于攻击需要大量明密文对，前面分析出来约8000对即可满足需求。因此，首先需要生成大量明密文对。

- 使用 `generate_plain.py` (见附件)构造输入数据，随机生成8000个8位01字符串作为明文，每个明文后跟一行密钥。
- 作为加密输入文件，写 `makefile` 文件运行加密函数 `SPN.cpp` ，生成密文。
- 随后使用 `merge_plain_cipher.py` 将明文和密文合并为一个文件，每条明文后跟着一行相应密文，作为线性攻击的输入文件。

求解密钥

得到输入的8000个明密文对后，就可以验证线性攻击程序了。

编写 `makefile` 文件，如下：

```makefile
CXX = g++
CXXFLAGS = -std=c++11 -Wall
TARGET = final
INPUT_FILE = input.txt
OUTPUT_FILE = output.txt

all: $(TARGET)

$(TARGET): $(TARGET).cpp
	$(CXX) $(CXXFLAGS) -o $(TARGET) $(TARGET).cpp

run: $(TARGET)
	./$(TARGET) < $(INPUT_FILE) > $(OUTPUT_FILE)

clean:
	rm -f $(TARGET) $(OUTPUT_FILE)
```

命令行输入 `make run` ，可以得到输出结果：


```
K5 is 1101011000111111
K is 00111010100101001101011000111111
```

即通过线性攻击得到$K^5 = 1101\ 0110\ 0011\ 1111$；

$K = 0011\ 1010\ 1001\ 0100\ 1101\ 0110\ 0011\ 1111$

与之前设定的加密密钥对比，发现是一致的，

$$K = 0011\quad 1010\quad 1001\quad 0100\quad 1101\quad 0110\quad 0011\quad 1111$$

这证明了所编写的线性攻击程序的正确性。