

# MATH-F-112 : Rappels

Romain Grimau

## Séance 1 : logique, égalité/inégalité, récurrence

implication :  $\rightarrow$

double implication (si et seulement si) :  $\leftrightarrow$

et :  $\wedge$

ou :  $\vee$

négation :  $\neg$

Suffisance implique Nécessaire :  $S \rightarrow N$

contraposée de  $A \rightarrow B = \neg A \rightarrow \neg B$  et  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

## Séance 2 : nombres

...

## Séance 3 : trigonométrie

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Dans triangle rectangle :  $SOH - CAH - TOA - CAO$

Pythagore :  $hypoténuse^2 = adjacent^2 + opposé^2$

Dans un triangle quelconque :  $\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$

loi des cosinus :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{c})$

## Séance 4 : fonctions

$f : dom \rightarrow im$

$dom f : \{x | f(x) \exists\}$ , tous les  $x$  pour lesquels il existe un  $y$

Parité :  $\begin{cases} \forall x, f(x) = f(-x) & \text{PAIRE} \\ \forall x, -f(x) = -f(x) & \text{IMPAIRE} \end{cases}$

Fonction périodique : si  $\exists p$  tel que  $\forall x, f(x+p) = f(x)$

Périodicité : Si  $f$  et  $g$  sont périodiques,  $f+g$  est périodique et une période possible est le *ppcm* de la période de  $f$  et de la période de  $g$ .

## Séance 5 : combinatoire

Choisir  $k$  éléments parmi  $n$ , l'ordre n'a pas d'importance :  $C_n^k$  ou  $\binom{n}{k}$

Choisir  $k$  éléments parmi  $n$  sans répétition, l'ordre à de l'importance :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Choisir  $k$  éléments parmi  $n$  avec répétition, l'ordre à de l'importance :  $n^k$

## Séance 6 : géométrie analytique

$$(d) : ax + by + cz + d = 0 \rightarrow v_{(d)}^{\vec{}} = (-b, a)$$

$$(d') : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \rightarrow v_{(d')}^{\vec{}} = (-b', a')$$

$$\text{Si } (d)/(d') \Rightarrow v_{(d)}^{\vec{}} = v_{(d')}^{\vec{}}$$

$$\left. \begin{array}{l} (d) : y = mx + p \\ (d') : y = m'x + p' \end{array} \right\} (d)/(d') \Rightarrow m = m'$$

$$(d) \perp (d') \Rightarrow m \cdot m' = -1$$

Équation du cercle de centre  $(x_c, y_c)$  et de rayon 1 :  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = 1^2$

## Séance 7 : géométrie analytique

Équations du plan :

$$\text{Pour } \vec{u} \text{ et } \vec{v}, 2 \text{ vecteurs directeurs } \begin{cases} x = x_0 + \mu u_1 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \mu u_2 + \lambda v_2 \\ z = x_0 + \mu u_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

$$\text{Pour un vecteur normal } \vec{n} = (a, b, c) : ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Produit scalaire de 2 vecteurs } \vec{u}, \vec{v} : \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

Équation d'une droite :

$$\text{Pour } \vec{u}, \text{ le vecteur directeur } \begin{cases} x = x_0 + t u_1 \\ y = y_0 + t u_2 \\ z = z_0 + t u_3 \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

$$\text{Produit vectoriel de } \vec{u}, \vec{v} : \vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\text{Distance entre un point } (p_1, p_2, p_3) \text{ et une droite avec } \vec{n} = (a, b, c) : \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$Aire_{\text{parallélogramme}} = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| \quad Aire_{\text{triangle}} = \frac{Aire_{\text{parallélogramme}}}{2}$$

## Séance 8 : géométrie dans l'espace

...

## Séance 9 : fonctions et équations trigonométriques et logarithmes

/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\log_a : ]0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \log_a(x) = y \text{ où } a^y = x$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

$$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_a(b)}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

## Séance 10 : limites

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g \exists \Rightarrow \begin{aligned} \lim(f+g) &= \lim f + \lim g \\ \lim(f \cdot g) &= \lim f \cdot \lim g \end{aligned}$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g \exists \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} l = L \text{ et } \lim_{t \rightarrow L} g(t) \exists \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$$

## Séance 11 : limites et asymptotes

La droite  $x = a$  est une asymptote verticale à  $f$  si :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

La droite  $y = b$  est une asymptote horizontale à  $f$  si :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

La droite  $y = mx + b$  est une asymptote oblique à  $f$  si :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m(x) = b$

$f$  est asymptotiquement du même ordre que  $g$  si :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

## Séance 12 : dérivées

Si  $f$  est dérivable, alors  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  est la droite tangente de  $f$  au point  $(a, f(a))$ .  
 $f'(a)$  est donc la pente de la tangente au point  $(a, f(a))$ .

Si  $f'(a) > 0 \Rightarrow f$  croît.

Si  $f'(a) < 0 \Rightarrow f$  décroît.

## Séance 13 : dérivées

$f'(a)$  est :

- la pente de la tangente de  $f$  au point  $a$
- la vitesse à laquelle  $f$  croît ou décroît en  $a$

$b$  est un point de max ou min si  $f'(b) = 0$

## Séance 14 : Taylor

Le polynôme de Taylor de  $f$  au point  $a$  d'ordre  $n$  est :

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\frac{(x - a)^k}{k!}$$

L'erreur commise  $R_{n,a,f} = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$  où  $t$  est entre  $x$  et  $a$

Développement de MacLaurin = Taylor en 0.

## Séance 15 : primitives

$$\int f(x)dx = F(x)$$

tel que  $F'(x) = f(x)$

1)  $\int n^x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

3)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$

4)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$

5)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{argsh}(x) + C$

6)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{argch}(x) + C$

7)  $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$

8)  $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} dx = \tanh(x) + C$

9)  $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$

10)  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

11)  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$

12)  $\int \operatorname{sh}(x) dx = \operatorname{ch}(x) + C$

13)  $\int \operatorname{ch}(x) dx = \operatorname{sh}(x) + C$

14)  $\int e^x dx = e^x + C$

15)  $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$

16)  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$

17)  $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$

18)  $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$

19)  $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

20)  $\int k dx = kx + C$

## Séance 16 : intégration par substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

L'idée : on pose  $\begin{matrix} t & = & g(x) \\ \frac{dt}{dx} & = & g'(x) \end{matrix} \Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$

## Séance 17 : intégration par partie

$$(fg)' = f'g + g'f \Rightarrow \int f'g = fg - \int g'f$$

## Séance 18 : fractions simples et intégrales définies

...

## Séance 19 : intégrales définies

Si on intègre jusqu'en  $\pm\infty$  ex :  $\int_0^\infty e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} dx &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} [e^{-x}]_0^u \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} -e^{-u} + e^{-0} = 1 \end{aligned}$$

Si on intègre une fonction non-bornée ex :  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} [\ln(|x|)]_u^1 \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \ln(1) - \ln(u) = -(-\infty) = \infty \end{aligned}$$

## Séance 20 : courbes

Si  $\gamma(t)$  est la courbe position :

$\Rightarrow \vec{v} = \gamma(t)'$  est le vecteur vitesse (ou vecteur tangent)

$\vec{a} = \vec{v}' = \gamma(t)''$  est le vecteur accélération (ou vecteur normal

norme :  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \dots \cdot v_n^2}$

## Séance 21 :matrices et sytèmes

Inverse d'une matrice :  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

## Fin premier quadrimestre

Pour des notes plus complètes, voir la synthèse de Marie ;)

Pour les notes les plus complètes possible, voir le cours !