MATH-F-112 : Rappels

Romain Grimau

Séance 1 : logique, égalité/inégalité, récurrence

...

Séance 2 : nombres

...

Séance 3 :trigonométrie

...

Séance 4 :fonctions

...

Séance 5 : combinatoire

Choisir **k** éléments parmis **n**, l'ordre n'a pas d'importance : C_n^k ou $\binom{n}{k}$

Choisir **k** éléments parmis **n** sans répétition, l'ordre à de l'importance :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Choisir **k** éléments parmis **n** avec répétition, l'ordre à de l'importance : n^k

Séance 6 :géométrie analytique

...

Séance 7 :géométrie analytique

Équations du plan :

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs directeurs $\begin{cases} x &=& x_0 + \mu u_1 + \lambda v_1 \\ y &=& y_0 + \mu u_2 + \lambda v_2 \\ z &=& x_0 + \mu u_3 + \lambda v_3 \end{cases}$

Pour un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$: $ax + by + cz + d = 0$

Produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$

Équation d'une droite :

Pour $\vec{u}$, le vecteur directeur $\begin{cases} x &=& x_0 + tu_1 \\ y &=& y_0 + tu_2 \\ z &=& z_0 + tu_3 \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

Produit vectoriel de $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

Distance entre un point (p_1, p_2, p_3) et une droite avec $\vec{n} = (a, b, c)$: $\frac{ap_1+bp_2+cp_3+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Séance 8 :géométrie dans l'espace

...

Séance 9 :fonctions et équations trigonométriques et logarithmes

/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\log_a :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow \log_a(x) = y$ où $a^y = x$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x^n) = n \log a(x)$
$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}$
$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Séance 10 :limites

Si $\lim\limits_{x \to a} f$ et $\lim\limits_{x \to a} g \; \exists \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lim(f+g) &=& \lim f + \lim g \\ \lim(f \cdot g) &=& \lim f \cdot \lim g \end{array}$

Si $\lim\limits_{x \to a} f$ et $\lim\limits_{x \to a} g \; \exists$ et $\lim\limits_{x \to a} g \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$

Si $\lim_{x\to a} l = L$ et $\lim_{t\to L} g(t)$ $\exists \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to L} g(t)$

Séance 11 : limites et asymptotes

La droite $x = a$ est une asymptote verticale à f si : $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} = \pm\infty$

La droite $y = b$ est une asymptote horizontale à f si : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$

La droite $y = mx+b$ est une asymptote oblique à f si : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m(x) = b$

f est asymptotiquement du même ordre que g si : $\lim_{x\to\infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R}\backslash_{\{0\}}$

Séance 12 :dérivées

Si f est dérivable, alors $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est la droite tangente de f au point $(a, f(a))$.
$f'(a)$ est donc la pente de la tangente au point $(a, f(a)$.
Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ croît.
Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ décroît.

Séance 13 :dérivées

$f'(a)$ est :

- la pente de la tangente de f au point a
- la vitesse à laquelle f croît ou décroît en a

b est un point de max ou min si $f'(b) = 0$

Séance 14 :Taylor

Le polynôme de Taylor de f au point a d'ordre n est :

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)}{2} + ... + f^{\overset{n}{-}}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} f^k(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

L'erreur commise $R_{n,a,f} = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ oú t est entre x et a

Développement de MacLaurin = Taylor en 0.

Séance 15 :primitives

$\int f(x)dx = F(x)$
tel que $F'(x) = f(x)$

1) $\int n^x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
3) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
5) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{argsh}(x) + C$
6) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \text{argch}(x) + C$
7) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
8) $\int \frac{1}{\text{ch}^2(x)} dx = \tanh(x) + C$
9) $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$
10) $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
11) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
12) $\int \text{sh}(x) dx = \text{ch}(x) + C$
13) $\int \text{ch}(x) dx = \text{sh}(x) + C$
14) $\int e^x dx = e^x + C$
15) $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$
16) $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$
17) $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$
18) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$
19) $\text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
20) $\int k dx = kx + C$

Séance 16 :intégration par substitution

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F'(g(x)) + C$

L'idée : on pose $\begin{array}{rcl} t & = & g(x) \\ \frac{dt}{dx} & = & g'(x) \end{array}$ $\Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$

Séance 17 :intégration par partie

$(fg)' = f'g + g'f \Rightarrow \int f'g = fg - \int g'f$

Séance 18 :fractions simples et intégrales définies

...

Séance 19 :intégrales définies

Si on intègre jusqu'en $\pm\infty$ ex : $\int_0^\infty e^{-x} dx$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \int_0 \infty e^{-x} dx & = & \lim\limits_{u\to\infty} \int_0^u e^{-x} dx \\ & = & \lim\limits_{u\to\infty} [e^{-x}]_0^u \\ & = & \lim\limits_{u\to\infty} -e^{-u} + e^{-0} = 1 \end{array}$$

Si on intègre une fonction non-bornée ex : $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx & = & \lim\limits_{u\to 0} \int_u^1 \frac{1}{x} dx \\ & = & \lim\limits_{u\to 0} [\ln(|x|)]_u^0 \\ & = & \lim\limits_{u\to 0} \ln(1) - ln(u) = -(-\infty) = \infty \end{array}$$

Séance 20 :courbes

Si $\gamma(t)$ est la courbe position :

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} \vec{v} & = & \gamma(t)' \text{ est le vecteur vitesse (ou vecteur tangent)} \\ \vec{a} & = & \vec{v}' = \gamma(t)'' \text{ est le vecteur accélération (ou vecteur normal} \end{array}$$

norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot ... \cdot v_n^2}$

Séance 21 :matrices et sytèmes

...