MATH-F-112 : Rappels

Romain Grimau

Séance 1 : logique, égalité/inégalité, récurrence

implication : $\rightarrow$
double implication (si et seulement si) : $\leftrightarrow$
et : $\wedge$
ou : $\vee$
négation : $\neg$
Suffisance implique **N**écessaire : $S \rightarrow N$
contraposée de $A \rightarrow B = \neg A \rightarrow \neg B$ et $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

Séance 2 : nombres

...

Séance 3 : trigonométrie

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

Dans triangle rectangle : $SOH - CAH - TOA - CAO$
Pythagore : $\textit{hypoténuse}^2 = adjacent^2 + \textit{opposé}^2$
Dans un triangle quelconque : $\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{sin(\hat{B})}{b} = \frac{sin(\hat{C})}{c}$
loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{c})$

Séance 4 : fonctions

$f : dom \rightarrow im$
$domf : \{x | f(x) \exists\}$, tous les x pour lesquels il existe un y

Parité : $\left\{ \begin{array}{rcl} \forall x, f(x) & = & f(-x) \text{ PAIRE} \\ \forall x, -f(x) & = & -f(x) \text{ IMPAIRE} \end{array} \right.$

Fonction périodique : si $\exists\ p$ tel que $\forall x, f(x+p) = f(x)$
Périodicité : Si f et g sont périodiques, $f + g$ est périodique et une période possible est le *ppcm* de la période de f et de la période de g.

Séance 5 : combinatoire

Choisir **k** éléments parmis **n**, l'ordre n'a pas d'importance : C_n^k ou $\binom{n}{k}$

Choisir **k** éléments parmis **n** sans répétition, l'ordre à de l'importance :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Choisir **k** éléments parmis **n** avec répétition, l'ordre à de l'importance : n^k

Séance 6 : géométrie analytique

$$\begin{array}{lcl} (d) & : & ax + by + cz + d = 0 \rightarrow \vec{v_{(d)}} = (-b, a) \\ (d') & : & a'x + b'y + c'z + d' = 0 \rightarrow \vec{v'_{(d')}} = (-b', a') \end{array}$$

Si $(d//d') \Rightarrow \vec{v_{(d)}} = \vec{v'_{(d')}}$

$$\left.\begin{array}{lcl} (d) & : & y = mx + p \\ (d') & : & y = m'x + p' \end{array}\right\} (d)//(d') \Rightarrow m = m'$$

$(d) \perp (d') \Rightarrow m \cdot m' = -1$

Équation du cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon 1 : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = 1^2$

Séance 7 : géométrie analytique

Équations du plan :

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$, 2 vecteurs directeurs $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \mu u_1 + \lambda v_1 \\ y & = & y_0 + \mu u_2 + \lambda v_2 \\ z & = & x_0 + \mu u_3 + \lambda v_3 \end{array}\right.$

Pour un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$: $ax + by + cz + d = 0$

Produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = v_1u_1 + v_2u_2 + ... + v_nu_n$

Équation d'une droite :

Pour $\vec{u}$, le vecteur directeur $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + tu_1 \\ y & = & y_0 + tu_2 \\ z & = & z_0 + tu_3 \end{array}\right. \rightarrow \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

Produit vectoriel de $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

Distance entre un point (p_1, p_2, p_3) et une droite avec $\vec{n} = (a, b, c)$: $\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$Aire_{parallélogramme} = \|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|$ $\quad$ $Aire_{triangle} = \frac{Aire_{parallélogramme}}{2}$

Séance 8 : géométrie dans l'espace

...

Séance 9 : fonctions et équations trigonométriques et logarithmes

/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\log_a :]0;\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \log_a(x) = y$ où $a^y = x$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x^n) = n \log a(x)$
$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}$
$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
$\log_a(b) = \frac{1}{\log_a(b)}$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Séance 10 : limites

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f \text{ et } \lim_{x\to a} g \ \exists \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lim(f+g) & = & \lim f + \lim g \\ \lim(f\cdot g) & = & \lim f \cdot \lim g \end{array}$$

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f \text{ et } \lim_{x\to a} g \ \exists \text{ et } \lim_{x\to a} g \neq 0 \Rightarrow \lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$

$$\text{Si } \lim_{x\to a} l = L \text{ et } \lim_{t\to L} g(t) \ \exists \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{t\to L} g(t)$$

Séance 11 : limites et asymptotes

La droite $x = a$ est une asymptote verticale à f si : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} = \pm\infty$

La droite $y = b$ est une asymptote horizontale à f si : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$

La droite $y = mx + b$ est une asymptote oblique à f si : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) - m(x) = b$

f est asymptotiquement du même ordre que g si : $\lim\limits_{x\to \infty} |\frac{f(x)}{g(x)}| \in \mathbb{R}\backslash_{\{0\}}$

Séance 12 : dérivées

Si f est dérivable, alors $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est la droite tangente de f au point $(a, f(a))$.
$f'(a)$ est donc la pente de la tangente au point $(a, f(a)$.
Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ croît.
Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ décroît.

Séance 13 : dérivées

$f'(a)$ est :

- la pente de la tangente de f au point a
- la vitesse à laquelle f croît ou décroît en a

b est un point de max ou min si $f'(b) = 0$

Séance 14 :Taylor

Le polynôme de Taylor de f au point a d'ordre n est :

$$T_{f,a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)}{2} + ... + f^{\underline{n}}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} f^k(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

L'erreur commise $R_{n,a,f} = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ oú t est entre x et a

Développement de MacLaurin = Taylor en 0.

Séance 15 : primitives

$\int f(x)dx = F(x)$
tel que $F'(x) = f(x)$

1) $\int n^x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
3) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
5) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \mathrm{argsh}(x) + C$
6) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{argch}(x) + C$
7) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
8) $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} dx = \tanh(x) + C$
9) $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$
10) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
11) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
12) $\int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x) + C$
13) $\int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x) + C$
14) $\int e^x dx = e^x + C$
15) $\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$
16) $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$
17) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
18) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$
19) $\mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
20) $\int k dx = kx + C$

Séance 16 : intégration par substitution

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F'(g(x)) + C$

L'idée : on pose $\begin{array}{ccc} t & = & g(x) \\ \frac{dt}{dx} & = & g'(x) \end{array} \Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$

Séance 17 : intégration par partie

$(fg)' = f'g + g'f \Rightarrow \int f'g = fg - \int g'f$

Séance 18 : fractions simples et intégrales définies

...

Séance 19 : intégrales définies

Si on intègre jusqu'en $\pm\infty$ ex : $\int_0^\infty e^{-x}dx$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \int_0 \infty e^{-x}dx & = & \lim\limits_{u\to\infty} \int_0^u e^{-x}dx \\ & = & \lim\limits_{u\to\infty} [e^{-x}]_0^u \\ & = & \lim\limits_{u\to\infty} -e^{-u} + e^{-0} = 1 \end{array}$$

Si on intègre une fonction non-bornée ex : $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}dx & = & \lim\limits_{u\to 0} \int_u^1 \frac{1}{x}dx \\ & = & \lim\limits_{u\to 0} [\ln(|x|)]_u^0 \\ & = & \lim\limits_{u\to 0} \ln(1) - ln(u) = -(-\infty) = \infty \end{array}$$

Séance 20 : courbes

Si $\gamma(t)$ est la courbe position :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec{v} &= \gamma(t)' \text{ est le vecteur vitesse (ou vecteur tangent)} \\ \vec{a} &= \vec{v}' = \gamma(t)'' \text{ est le vecteur accélération (ou vecteur normal} \end{aligned}$$

norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot ... \cdot v_n^2}$

Séance 21 :matrices et sytèmes

Inverse d'une matrice : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss : $\left[\begin{array}{c|cc} A & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 1 & \end{array} \right]$

Opérations sur un système linéaire homogène :

- $L_i \Leftrightarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
- $L_i \Leftrightarrow L_i - \mu L_j, \mu \in \mathbb{R}$
- $L_i = L_j, L_j = L_i$ (permutation)

Fin premier quadrimestre

Pour des notes plus complètes, voir la synthèse de Marie ;)

Pour les notes les plus complètes possible, voir le cours !