Maths Discrètes

Solutions

Scéance 1

1.1. $|A \times B| = |A| \cdot |B| = ab$
2. $|B^A| = b^a$
3. $|\{f : A \to B : f$ est une projection de A dans B, injective$\}| = \frac{b!}{(b-a)!}$, si $a \leq b$, sinon 0
4. $|S(A)| = a!$

2.1. $|F^X| = 1$, donc $|F| = 1$ puisque $|F^X| = f^x$ pour $|F| = f$ et $|X| = x$
2. $|Y^F| = 1$, donc F n'existe pas si non-vide

3.1. supposons f non-injective
alors $\exists\, a, b \in A$ tq $f(a) = f(b)$
et donc $g \circ f(a) = g \circ f(b)$
mais $g \circ f$ est injective, donc f doit être injective
2. supposons g non-surjective
alors $\exists\, c \in C : \nexists\, b \in B$ tq $g(b) = c$
et donc $\exists\, c \in C : \nexists\, a \in A$ tq $g \circ f(a) = c$
mais $g \circ f$ est surjective, donc g doit être surjective
3. si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est surjective & injective
comme démontré en 1, f est donc injective
comme démontré en 2, g est donc surjective

? x 4. (explications) ; not relevant-ish

5. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n\}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\begin{cases} n \to \frac{-n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \to \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ (injection)

$g = f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\begin{cases} n \to -2n & \text{si } n \leq 0 \\ \to 2n-1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$ (surjection)

x 6. si n est pair, alors n^3 est pair, donc $n^3 - n$ est pair
si n est impair, alors n^3 est impair, donc $n^3 - n$ est pair. (modulo 2) si poussé

7. supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
alors $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$
donc $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, et $a = 3$, $b = \sqrt{3}$
mais $b \notin \mathbb{Z}$ quand $b = \sqrt{3}$, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

8. $18a + 6b = 1$
$3a + b = 1/6$
$b = 1/6 - 3a$ Supposons $b \in \mathbb{Z}$, alors $a \notin \mathbb{Z}$
et inversément

9. graphe of handshakes