

## Séance 9 (21 novembre 2018)

**Exercice 1.** Finir les exercices 1 et 2 du TP 8

**Exercice 3.** Que vaut le déterminant de la matrice  $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

**Exercice 4.** Avec l'alphabet  $\{A, B, C\}$ , combien peut-on écrire de mots de  $n$  lettres dans lesquels on ne trouve pas

1. deux lettres  $A$  côte-à-côte ?
2. deux lettres  $A$  ni deux lettres  $B$  côte-à-côte ?
3. deux lettres  $A$  ni deux lettres  $B$  ni deux lettres  $C$  côte-à-côte ?

**Exercice 5.** Donner le comportement asymptotique des suites  $T(n)$  pour chacune des récurrences suivantes :

1.  $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
2.  $T(n) = T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$
3.  $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
4.  $T(n) = 7T(\lceil n/3 \rceil) + n^2$
5.  $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
6.  $T(n) = 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + \sqrt{n}$
7.  $T(n) = T(n-1) + n$

**Exercice 6.** Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 &= 1, \quad a_1 = 2 \end{aligned}$$

**Exercice 7.** (Examen août 2011.)

Combien y a-t-il de matrices  $2 \times n$  à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?

- Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers  $1, 2, \dots, n$  apparaît une et une seule fois.
- Dans chacune des  $n$  colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus 1.

**Exercice 8.** (Just for fun.)

Résoudre la récurrence (discuter en fonction de  $a_0$ )

$$a_n = a_{n-1}^2 + 2 \quad \forall n \geq 1$$

(Hint : poser  $a_n = b_n + 1/b_n$ .)