

Séance 3 (3 octobre 2018)

Exercice 1.

Trouver le nombre de solutions de l'équation $x + y + z + w = 15$, dans les naturels $(0, 1, 2, \dots)$

Exercice 2.

Combien l'équation

$$x + y + z + t + u = 60$$

possède-t-elle de solutions entières (x, y, z, t, u) telles que

$$x > 0, \quad y \geq 9, \quad z > -2, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

Exercice 3.

Trouver le nombre de solutions de l'inéquation

$$x + y + z + t \leq 6$$

1. dans les naturels;
2. dans les entiers > 0 ;
3. dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2, y > -2, z > 0$ et $t > -3$.

Exercice 4. Combien le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 415 \\ x + y + z + u = 273 \end{cases}$$

possède-t-il de solutions (x, y, z, t, u) en entiers > 0 ?

Exercice 5.

Combien l'inéquation

$$x + y + z + t < 100$$

possède-t-elle de solutions (x, y, z, t) en entiers > 0 ?

Exercice 6. Avec les lettres du mot

HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA

(“poisson” en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Exercice 7.

Combien de personnes doivent être sélectionné dans une collection de 15 couples mariés afin d’être certain qu’au moins 2 personnes choisies soient marié l’un à l’autre?

Exercice 8.

Montrer que dans une collection de $n^2 + 1$ objets, il en existe soit $n + 1$ identiques ou $n + 1$ qui sont tous différents.

Exercice 9.

Une boulangerie vend 8 variétés de muffins: pomme, banane, myrtille, fromage, chocolat, café, pêche et le préféré de tout le monde brocoli.

De combien de manières peut-on sélectionner:

1. 16 muffins?
2. 16 muffins avec au moins 1 de chaque type?
3. 16 muffins avec au moins 2 à la pêche et au moins 3 au chocolat?
4. 16 muffins avec au plus 2 brocolis?
5. 16 muffins avec au moins 2 fromages, au moins 3 chocolat et pas plus de 2 brocolis?

Exercice 10.

Soit un groupe de 6 personnes dans lequel chaque paire d’individus sont soit deux amis soit deux ennemis. Montrer qu’il existe trois amis mutuels ou trois ennemis mutuels.

Maths Discrètes

Solutions TP 3

Exercice 1

$$s = 15, \quad d = 4$$

$$\binom{s+d-1}{s} = \binom{18}{15}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{llll} x > 0 \rightarrow x \geq 1 & ; & x' = x - 1 & \text{ou} & x = x' + 1 \\ y \geq 9 & ; & y' = y - 9 & & y = y' + 9 \\ z > -1 \rightarrow z \geq -1 & ; & z' = z + 1 & & z = z' - 1 \\ t \geq 0 & ; & t' = t & & t = t' \\ y > 10 \rightarrow u \geq 11 & ; & u' = u - 11 & & u = u' + 11 \end{array}$$

Exercice 3

$$1. \quad s \leq 6 \text{ et } s \in \mathbb{N}, \quad d = 4$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^6 \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^6 \binom{n+3}{3} \\ &= \sum_{n=0}^6 \binom{n+3}{0+3} \\ &= \sum_{n=0}^6 \binom{6+1+3}{0+1+3} \\ &= \binom{10}{4} = 210 \end{aligned}$$

2. $0 < s \leq 2$ et $s \in \mathbb{Z}$, $d = 4$
 puisque $x, y, z, t \geq 1$, alors $s \leq 6 - 4(1)$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^2 \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^2 \binom{n+3}{4-1} \\ &= \sum_{n=0}^2 \binom{n+3}{0+3} \\ &= \binom{6}{4} \\ &= 15 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x &\geq 3 ; x = x' + 3 \\ y &\geq -1 ; y = y' - 1 \\ z &\geq 1 ; z = z' + 1 \\ t &\geq -2 ; t = t' - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x' + 3) + (y' - 1) + (z' + 1) + (t' - 2) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow x' + y' + z' + t' &\leq 5 \\ \Rightarrow s \leq 5 \text{ et } s \in \mathbb{Z}, d = 4 &\in \mathbb{Z} \text{ parce que } x, y, z, t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^5 \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^5 \binom{n+3}{3} \\ &= \binom{9}{4} = 126 \end{aligned}$$

Exercice 4

$$x + y + z = 415 - t$$

$$(415 - t) + u = 273$$

$$t - u = 142$$

si on connait u on connait t

(et $u < t$ donc \mathbb{Z}_+)

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (u' + 1) = 273$$

$$x' + y' + z' + u' = 269$$

$$\binom{269+4-1}{4-1} = \binom{272}{3}$$

Exercice 5

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (t' + 1) \leq 99$$

$$x' + y' + z' + t' \leq 95$$

$$\sum_{n=0}^{95} \binom{n+3}{3} = \binom{98}{3}$$

Exercice 6

Sans les U, il y a 12 lettres, avec lesquelles on peut composer $\frac{12!}{2!2!2!3!1!}$ mots (voir *coefficient multinomial*).

Il y a 13 emplacements pour U dans un mot de 12 lettres pour qu'il n'en ait jamais 2 côte à côte: devant le mot, entre chaque lettre, à la fin du mot.

On a 9 U, soit $\binom{13}{9}$ possibilités.

On peut donc composer $\frac{12!}{2!2!2!3!1!} \times \binom{13}{9}$ mots.

Exercice 7

16

Exercice 8

[Preuve par contradiction]

Pour n éléments, on a

→ maximum n éléments identiques

→ maximum n éléments différents

Pour chaque type d'élément dans n , on a au plus n éléments, soit n^2 objets au total.

Si on a $n^2 + 1$ objets, alors on doit avoir soit $n + 1$ éléments différents soit $n + 1$ objets d'un type.

Exercice 9

1. 8^{16}
2. 8^8
3. 8^{11}
4. $7^{14} + 7^{15} + 7^{16}$
5. $7^{11} + 7^{10} + 7^9$

Exercice 10

[Preuve par contradiction]
voir *Ramsay number*: $R_{3,3}$