Maths Discrètes

Solutions

Séance 6 (suite)

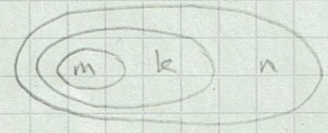
8. $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$

$= (2+1)^n$

$\underline{= 3^n}$

solution mathématique ?

9. $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$; le nombre de façons de choisir m parmi k, et k parmi n, soit : le nombre de façons de choisir m parmi n, et inclure ou non un élément de n dans k (m y étant par définition donc sans choix)



10 ?

Séance 7

1. $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right)$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1+1)^i$

$= (2+1)^n$

$\underline{= 3^n}$

2. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1}(i+1)\,2^i = \sum_{i=0}^{n} (n+1)\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\,2^i$

$= (n+1)(2+1)^n$

$\underline{= 3^n (n+1)}$

3. • 8, 2, 8, 2, 8, 2

• 9, 4, 10, 13, 1, 10, 1, 10, 4, 8, 1, 13, 9

4.1. 2 – 4 – 1 – 6, 1 | 3 – 5

2. 5 – 3 – 6 – 2 – 1 – 4 – 8, 6 | 7

5. voir annexe

Scéance 7

07/11/2018

5.

$$A^n_r := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k}$$

- $A^n_1 = \sum_{k=0}^{n} k^1 \binom{n}{k}$

car si $k=0$ alors le tout est 0 donc ne change rien à la somme

$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

propriété : $\binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1}$ Ch1 sl59

$= \sum_{k=1}^{n} \boxed{n \binom{n-1}{k-1}}$

car n constante (et donc indépendante)

$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$

$\ell = k-1$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$

binome de Newton pour $(1+1)^{n-1}$ Ch 1 sl68

$$\boxed{= n\, 2^{n-1}}$$

- $A^n_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

car si $k=0$ alors ne change rien à la somme

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$

simplification entre k^2 et $k!$

$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

développement de $n!$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$= n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}$

$\ell = k-1$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \binom{n-1}{\ell}$

développement de $(\ell+1)$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{\ell}$

simplification comme pour A^n_1 ; binome de Newton

$\hookrightarrow \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

donc

$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = (n-1) 2^{n-2}$

$= n \cdot \boxed{(n-1) 2^{n-2}} + n \boxed{2^{n-1}}$

$= n \left[(n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1} \right]$

$= n\, 2^{n-2} \left[(n-1) + 2 \right]$

$$\boxed{= n(n+1) 2^{n-2}}$$

$$\bullet\ A^n_r = n\left(A^n_{r-1} - A^{n-1}_{r-1}\right)$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} k^{r-1}\binom{n}{k} - n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\binom{n-1}{k}$$

développement
sans $k=0$
(au cas où)

$$= n\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right]\right] + n.n^{r-1}\binom{n}{n}$$

Addition/Induction
Ch1 sl61

$$= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\binom{n-1}{k-1}} + n^r\binom{n}{n}$$

Absorption/Extraction
Ch1 sl58

$$= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\frac{k}{n}\binom{n}{k}} + n^r\binom{n}{n}$$

Car n constant et $k^{r-1}.k = k^{(r-1)+1} = k^r$

$$= \frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k^{r}\binom{n}{k} + \underline{n^r\binom{n}{n}}$$

$n^r\binom{n}{n}$ cas où $k=n$ donc ajout à la somme.

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{r}\binom{n}{k}$$

puisque $k=0$ valable aussi

$$\boxed{= A^n_r}$$