Maths Discrètes

Solutions TP 3

Exercice 1

$s = 15, \qquad d = 4$

$$\binom{s+d-1}{s} = \binom{18}{15}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{llll}
x > 0 \to x \geq 1 & ; \quad x' = x - 1 & \text{ou} & x = x' + 1 \\
y \geq 9 & ; \quad y' = y - 9 & & y = y' + 9 \\
z > -1 \to z \geq -1 & ; \quad z' = z + 1 & & z = z' - 1 \\
t \geq 0 & ; \quad t' = t & & t = t' \\
y > 10 \to u \geq 11 & ; \quad u' = u - 11 & & u = u' + 11
\end{array}$$

Exercice 3

1. $s \leq 6$ et $s \in \mathbb{N}$, d = 4

$$\sum_{n=0}^{6} \binom{n+4-1}{4-1} = \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{0+3}$$

$$= \sum_{n=0}^{6} \binom{6+1+3}{0+1+3}$$

$$= \binom{10}{4} = 210$$

2. $0 < s \leq 2$ et $s \in \mathbb{Z}$, $d = 4$
   puisque $x, y, z, t \geq 1$, alors $s \leq 6 - 4(1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2} \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{4-1} \\
&= \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{0+3} \\
&= \binom{6}{4} \\
&= 30
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&x \geq 3 \quad ; x = x' + 3 \\
&y \geq -1 ; y = y' - 1 \\
&z \geq 1 \quad ; z = z' + 1 \\
&t \geq -2 ; t = t' - 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (x'+3) + (y'-1) + (z'+1) + (t'-2) \leq 6$
$\Leftrightarrow x' + y' + z' + t' \leq 5$
$\Rightarrow s \leq 5$ et $s \in \mathbb{Z}, d = 4$ $\qquad \in \mathbb{Z}$ parce que $x, y, z, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{5} \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^{5} \binom{n+3}{3} \\
&= \binom{9}{4} = 126
\end{aligned}$$

Exercice 4

$$x + y + z = 415 - t$$

$$(415 - t) + u = 273$$

$$t - u = 142$$

si on conniat u on connait t

(et $u < t$ donc $\mathbb{Z}_+$)

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) + (u'+1) = 273$$

$$x' + y' + z' + u' = 269$$

$$\binom{269+4-1}{4-1} = \binom{272}{3}$$

Exercice 5

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(t'+1) \leq 99$$
$$x'+y'+z'+t' \leq 95$$
$$\sum_{n=0}^{95} \binom{n+3}{3} = \binom{98}{3}$$

Exercice 6

Sans les U, il y a 12 lettres, avec lesquelles on peut composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!}$ mots (*voir coefficient multinomial*).
Il y a 13 emplacements pour U dans un mot de 12 lettres pour qu'il n'en ait jamais 2 côte à côte: devant le mot, entre chaque lettre, à la fin du mot.
On a 9 U, soit $\binom{13}{9}$ possibilités.
On peut donc composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!} \times \binom{13}{9}$ mots.

Exercice 7

16

Exercice 8

[Preuve par contradiction]
Pour n éléments, on a
$\rightarrow$ maximum n éléments identiques
$\rightarrow$ maximum n éléments différents
Pour chaque type d'élément dans n, on a au plus n élements, soit n^2 objets au total.
Si on a n^2+1 objets, alors on doit avoir soit $n+1$ éléments différents soit $n+1$ objets d'un type.

Exercice 9

1. 8^{16}
2. 8^{8}
3. 8^{11}
4. $7^{14}+7^{15}+7^{16}$
5. $7^{11}+7^{10}+7^{9}$

Exercice 10

[Preuve par contradiction]
voir *Ramsay number*: $R_{3.3}$