Maths Discrètes
Solutions TP 1

Beltus Marcel

Exercice 1

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B| = ab$
2. $|B^A| = b^a$
3. $|\{f : A \to B :$ f est une projection de A dans B, injective$\}| = \frac{b!}{(b-a)!}$si $a \leq b$, sinon 0.
4. $|S(A)| = a!$

Exercice 2

1. $|F^x| = 1$, donc $|F| = 1$ puisque $|F^x| = f^x$ pour $|F| = f$ et $|X| = x$.
2. $|Y^F| = 1$, donc F n'existe pas si non vide.

Exercice 3

1.

Supposons f non-injective

alors $\exists a, b \in A$ tq $f(a) = f(b)$

et donc $g \circ f(a) = g \circ f(b)$

mais $g \circ f$ est injective, donc f doit être inejctive

2.

Supposons g non surjective

alors $\exists c \in C : \nexists b \in B$ tq $g(b) = c$

et donc $\exists c \in C : \nexists a \in A$ tqt $g \circ f(a) = c$

mais $g \circ f$ est surjective, donc g doit être surjective

3.

si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est surjective et injective
comme démontré en 1, f est injective
comme démontré en 2, g est donc sujective

Exercice 4

Ne sera pas à l'examen.
Supposons :

$$\begin{aligned} \text{A} &= \{[n] \to [n] \text{ bijections}\} \\ \text{B} &= \{[n] \times [n-1] \times ... \times [1]\} \\ &= \{(a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n) | a_1 \in [n],\, ...,\, a_n \in [1]\} \\ &= \{(a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n) | a_i \in [n-i+1]\} \end{aligned}$$

Prenons n=4:

Alors une bijection de $[n] \to [n]$ ressemble à :

$1 \to 3$
$2 \to 1$
$3 \to 2$
$4 \to 4$,

soit (3,1,1,1), puisque:

$1 \to 3$, donc le 3eme élément de {1,2,3,4}.
$2 \to 1$, donc le 1er élément de {1,2,4}.
$3 \to 2$, donc le 1er élément de {2,4}.
$4 \to 4$, donc le 1er élément de {4}.

Alors étant donné (4,2,1,1), une bijection de $[n] \to [n]$, on peut retrouver :

$1 \to 4$, puisque le 4eme élément de {1,2,3,4}.
$2 \to 2$, puisque le 2eme élément de {1,2,3}.
$3 \to 1$, puisque le 1er élément de {1,3}.
$4 \to 3$, puisque le 1er élément de {3}.

Exercice 5

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n\}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} = \begin{cases} n \to \frac{-n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \\ n \to \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{(injection)}$$

$$g = f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} = \begin{cases} n \to -2n & \text{si } n \leq 0 \\ \\ n \to 2n-1 & \text{si n>0} \end{cases} \qquad \text{(surjection)}$$

Exercice 6

si n est pair, alos n^3 est pair, donc $n^3 - n$ est pair.
si n est impair, alors n^3 est impair, donc $n^3 - n$ est pair. (modulo 2 si poussé)

Exercice 7

supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

alors $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$

alors $\sqrt{3} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$, et $a = 3, b = \sqrt{3}$

mais $b \notin \mathbb{Z}$ quand $b = \sqrt{3}$, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8

$$18a + 6b = 1$$
$$3a+b = \frac{1}{6}$$
$$b = \frac{1}{6} - 3a$$

Supposons $b \in \mathbb{Z}$, alors $a \notin \mathbb{Z}$ et inversément