MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 3 (3 octobre 2018)

Exercice 1.
Trouver le nombre de solutions de l'équation $x + y + z + w = 15$, dans les naturels (0,1,2, ...)

Exercice 2.
Combien l'équation

$$x + y + z + t + u = 60$$

possède-t-elle de solutions entières (x, y, z, t, u) telles que

$$x > 0\ , \quad y \geqslant 9\ , \quad z > -2\ , \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

Exercice 3.
Trouver le nombre de solutions de l'inéquation

$$x + y + z + t \leqslant 6$$

1. dans les naturels;
2. dans les entiers > 0;
3. dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2$, $y > -2$, $z > 0$ et $t > -3$.

Exercice 4. Combien le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 415 \\ x + y + z + u &= 273 \end{cases}$$

possède-t-il de solutions (x, y, z, t, u) en entiers > 0 ?

Exercice 5.
Combien l'inéquation

$$x + y + z + t < 100$$

possède-t-elle de solutions (x, y, z, t) en entiers > 0 ?

Exercice 6. Avec les lettres du mot

H U M U H U M U N U K U N U K U A P U A A

("poisson" en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Exercice 7.
Combien de personnes doivent être sélectionné dans une collection de 15 couples mariés afin d'être certain qu'au moins 2 personnes choisies soient marié l'un à l'autre?

Exercice 8.
Montrer que dans une collection de $n^2 + 1$ objets, il en existe soit $n + 1$ identiques ou $n + 1$ qui sont tous différents.

Exercice 9.
Une boulangerie vend 8 variétés de muffins: pomme, banane, myrtille, fromage, chocolat, café , pêche et le préféré de tout le monde brocoli.
De combien de manières peut-on sélectionner:

1. 16 muffins?
2. 16 muffins avec au moins 1 de chaque type?
3. 16 muffins avec au moins 2 à la pêche et au moins 3 au chocolat?
4. 16 muffins avec au plus 2 brocolis?
5. 16 muffins avec au moins 2 fromages, au moins 3 chocolat et pas plus de 2 brocolis?

Exercice 10.
Soit un groupe de 6 personnes dans lequel chaque paire d'individus sont soit deux amis soit deux ennemis. Montrer qu'il existe trois amis mutuels ou trois ennemis mutuels.

Maths Discrètes

Solutions TP 3

Exercice 1

$s = 15, \qquad d = 4$

$$\binom{s+d-1}{s} = \binom{18}{15}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{lcll}
x > 0 \rightarrow x \geq 1 & ; & x' = x - 1 \quad \text{ou} & x = x' + 1 \\
y \geq 9 & ; & y' = y - 9 & y = y' + 9 \\
z > -1 \rightarrow z \geq -1 & ; & z' = z + 1 & z = z' - 1 \\
t \geq 0 & ; & t' = t & t = t' \\
y > 10 \rightarrow u \geq 11 & ; & u' = u - 11 & u = u' + 11
\end{array}$$

Exercice 3

1. $s \leq 6$ et $s \in \mathbb{N}$, d = 4

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{6} \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{3} \\
&= \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{0+3} \\
&= \sum_{n=0}^{6} \binom{6+1+3}{0+1+3} \\
&= \binom{10}{4} = 210
\end{aligned}$$

2. $0 < s \leq 2$ et $s \in \mathbb{Z}$, $d = 4$
puisque $x, y, z, t \geq 1$, alors $s \leq 6 - 4(1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2} \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{4-1} \\
&= \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{0+3} \\
&= \binom{6}{4} \\
&= 30
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&x \geq 3 \quad ; x = x' + 3 \\
&y \geq -1 ; y = y' - 1 \\
&z \geq 1 \quad ; z = z' + 1 \\
&t \geq -2 ; t = t' - 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (x'+3) + (y'-1) + (z'+1) + (t'-2) \leq 6$
$\Leftrightarrow x' + y' + z' + t' \leq 5$
$\Rightarrow s \leq 5$ et $s \in \mathbb{Z}, d = 4$ $\qquad \in \mathbb{Z}$ parce que $x, y, z, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{5} \binom{n+4-1}{4-1} &= \sum_{n=0}^{5} \binom{n+3}{3} \\
&= \binom{9}{4} = 126
\end{aligned}$$

Exercice 4

$$x + y + z = 415 - t$$

$$(415 - t) + u = 273$$

$$t - u = 142$$

si on conniat u on connait t

(et $u < t$ donc $\mathbb{Z}_+$)

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) + (u'+1) = 273$$

$$x' + y' + z' + u' = 269$$

$$\binom{269+4-1}{4-1} = \binom{272}{3}$$

Exercice 5

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (t' + 1) \leq 99$$
$$x' + y' + z' + t' \leq 95$$
$$\sum_{n=0}^{95} \binom{n+3}{3} = \binom{98}{3}$$

Exercice 6

Sans les U, il y a 12 lettres, avec lesquelles on peut composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!}$ mots (*voir coefficient multinomial*).
Il y a 13 emplacements pour U dans un mot de 12 lettres pour qu'il n'en ait jamais 2 côte à côte: devant le mot, entre chaque lettre, à la fin du mot.
On a 9 U, soit $\binom{13}{9}$ possibilités.
On peut donc composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!} \times \binom{13}{9}$ mots.

Exercice 7

16

Exercice 8

[Preuve par contradiction]
Pour n éléments, on a
$\rightarrow$ maximum n éléments identiques
$\rightarrow$ maximum n éléments différents
Pour chaque type d'élément dans n, on a au plus n élements, soit n^2 objets au total.
Si on a $n^2 + 1$ objets, alors on doit avoir soit $n + 1$ éléments différents soit $n + 1$ objets d'un type.

Exercice 9

1. 8^{16}
2. 8^{8}
3. 8^{11}
4. $7^{14} + 7^{15} + 7^{16}$
5. $7^{11} + 7^{10} + 7^{9}$

Exercice 10

[Preuve par contradiction]
voir *Ramsay number*: $R_{3.3}$