MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 2 (26 septembre 2018)

Exercice 1.

1. Soit une rangée de 5 chaises dans une pièce. Il y a 7 personnes dans la pièce. De combien de manières peut-on assoir 5 personnes le long de la rangée?
2. De combien de manières peut-on distribuer 10 livres (tous différents) si Elisa reçoit 5 livres, Mathieu 3 livres et Julie 2 livres?
3. Trois pots de confiture et trois pots de miel doivent être placé sur une étagère. De combien de manières peut-on arranger les pots afin qu'il y ait deux pots de confiture aux deux extrémités de l'étagère?

Exercice 2. Dans un jeu non-standard de 40 cartes (10 cartes de valeurs différentes dans 4 couleurs), combien de main de 4-cartes contiennent

1. 4 cartes d'une seule et même couleur?
2. 4 cartes de deux couleurs?
3. 4 cartes de trois couleurs?
4. 4 cartes de quatres couleurs?

Exercice 3. Une classe de 12 étudiants doit être divisé en groupes d'études de chacun trois étudiants. De combien de manière cela peut-il être fait si

1. les groupes ont tous des sujets d'étude différents?
2. les groupes étudient le même sujet?

Exercice 4. Donner deux démonstrations de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

Exercice 5. Prouver, pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ .$$

Exercice 6. Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?

Exercice 7. Pour $n \geqslant 1$, que vaut la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec k pair ?

Exercice 8. Dans le triangle de Pascal, montrer que le produit des 6 voisins d'un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est toujours un carré parfait.

Exercice 9. Que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad ?$$

Exercice 10. Que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad ?$$

Maths Discrètes

Solutions TP 2

Exercice 1

1. $\binom{7}{5} = 21$
2. $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 2520$
3. $\binom{4}{1} = 4$ ou $\binom{4}{3} = 4$ puisque 4 emplacements et 1 pot d econfiture, 3 pots de miel

Exercice 2

1. $\binom{4}{1}\binom{10}{4} = 840$, choix de la couleur puis des cartes
2. $\binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{10}{2} + \binom{4}{1}\binom{10}{3}\binom{3}{1}\binom{10}{1}$, choix des cartes pour une main de 2 cartes de chaque couleur, plus choix des cartes pour une main de 3 cartes d'une couleur, 1 de l'autre
3. $\binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{10}{2}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$, choix des couleurs puis de celle sur 2 cartes, puis choix des cartes
4. 10^4 ou $\binom{4}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

Exercice 3

1. $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$
2. $\dfrac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{4!}$, pour éviter les groupes répétés en ordre différent

Exercice 4

Binome de Newton,

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1^k\right) \left(1^{x-k}\right)$$
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Nombre de représentations de $\{1, \ldots, n\}$ en deux sous-ensembles

- chaque élément n pris ou non pour le 1[er] sous-ensemble, 2^n
- chaque sous-ensemble, de taille k, $\binom{n}{k}$

Exercice 5

par le binome de Newton, si $x = -1$ et $y = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, (1)^{n-k} = (-1+1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Exercice 6

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \;\; y^{n-k}$$

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \;\; x^{k-1} \;\; y^{n-k}$$

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \;\; x^{k-1} \;\; y^{n-k}$$

$$\Downarrow \text{comme } \binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1} \Downarrow$$

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \;\; y^{n-k},$$

$$n(x+y)^{n-1} = \; n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \;\; y^{n-1-k}$$

$$\Downarrow \text{ si on prend } x = y = 1\text{, alors: } \Downarrow$$

$$n2^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$$

Exercice 7

$\sum_{k \text{ pair}=0}^{n} \binom{n}{k}$; pour $(-1+1)^n$;

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}$$

Exercice 8

Dans le triangle de Pascal

$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}$

$= \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdots$

$= \dfrac{(n-1)!^2 \;\; n!^2 \;\; (n+1)!^2}{(k-1)!^2(n-k)!^2(k+1)!^2(n-k-1)!^2k!^2(n-k+1)!^2}$

$= \binom{n-1}{k-1}^2 \binom{n}{k+1}^2 \binom{n+1}{k}^2$

Exercice 9

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

$$\Downarrow \text{si } k=0\text{, tout es à 0. } k/k! \to 1/(k-1) \Downarrow$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\ (n-k)!}$$

$$\Downarrow \text{où L = k =1} \Downarrow$$

$$= n\sum_{L=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{L!\ (n-1-L)!}$$

$$= n2^{n-1}$$

Exercice 10

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\ (n+1)}{(k+1)\ k!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$$

$$\Downarrow \text{pour arriver à } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}\text{, il faut pour } k=0 \Downarrow$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{0} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$