MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 9 (21 novembre 2018)

Exercice 1. Finir les exercices 1 et 2 du TP 8

Exercice 3. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Exercice 4. Avec l'alphabet $\{A, B, C\}$, combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas

1. deux lettres A côte-à-côte ?
2. deux lettres A ni deux lettres B côte-à-côte ?
3. deux lettres A ni deux lettres B ni deux lettres C côte-à-côte ?

Exercice 5. Donner le comportement asymptotique des suites $T(n)$ pour chacune des récurrences suivantes :

1. $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
2. $T(n) = T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$
3. $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
4. $T(n) = 7T(\lceil n/3 \rceil) + n^2$
5. $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
6. $T(n) = 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + \sqrt{n}$
7. $T(n) = T(n - 1) + n$

Exercice 6. Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} &a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geqslant 2 \\ &a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \end{aligned}$$

Exercice 7. (Examen août 2011.)
Combien y a-t-il de matrices $2 \times n$ à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?

- Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers 1, 2, …, n apparaît une et une seule fois.
- Dans chacune des n colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus 1.

Exercice 8. (Just for fun.)
Résoudre la récurrence (discuter en fonction de a_0)

$$a_n = a_{n-1}^2 + 2 \quad \forall n \geqslant 1$$

(Hint : poser $a_n = b_n + 1/b_n$.)

Mathématiques discrètes

Sceance 9

Exercice 1 & 2

Voir sceance 8

Exercice 3

$$D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$$

Exercice 4

1. cas 1: mot commençant par la lettre A
   cas 2: mot commençant par B ou C
   pour a_n, le nombre de mots de n lettres commençant par la lettre A,
   et b_n, c_n, le nombre de mots de n lettres commençant par la lettre B et C respectivement:
   $a_n = b_{n-1} + cn - 1$, puisque qu'un mot commençant par A ne peut contenir qu'un mot de $n-1$ lettres de cas 2.
   $b_n = c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$
   Pour m_n, le nombre de mots de n lettres:

   $$\begin{aligned} m_n &= a_n + b_n + c_n \\ &= b_{n-1} + c_{n-1} + 2m_{n-1} \\ &= 2m_{n-1} + 2m_{n-2} \end{aligned}$$

   On résout ensuite la récurrence:
   solution générale: $m_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

   $m_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^n$

2. $a_n = b_{n-1} + cn - 1$
   $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$

$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$
Pour m_n, le nombre de mots de n lettres:
$m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2}$
On résout ensuite la récurrence:
solution générale: $m_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$

$m_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$

3. $a_n = b_{n-1} + cn - 1$
   $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$
   $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$
   Pour m_n, le nombre de mots de n lettres:
   $m_n = 2m_{n-1}$
   On résout ensuite la récurrence:
   solution générale: $m_n = A2^n$

   $m_n = 3(2)^{n-1}$

Exercice 5

1. $\alpha = 2, \beta = 2, f(n) = n^2$
   $\log_\beta \alpha = 1$
   $f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon})$, pour $\epsilon = 1$.

$$\begin{aligned} 2f(\frac{n}{2}) &\leq Cf(n), \text{ pour } C < 1 \\ 2 \times \frac{1}{4}n^2 &\leq Cn^2 \\ \frac{1}{2} &\leq C \end{aligned}$$

   Donc $T(n) \in \Theta(n^2)$.

2. $\alpha = 1, \beta = \frac{10}{9}, f(n) = n$
   $\log_\beta \alpha = 0$
   $f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon})$, pour $\epsilon = 1$.

$$\begin{aligned} f(\frac{9n}{10}) &\leq Cf(n), \text{ pour } C < 1 \\ \frac{9}{10} &\leq C \end{aligned}$$

   Donc $T(n) \in \Theta(n)$.

3. $\alpha = 16, \beta = 4, f(n) = n^2$
   $\log_\beta \alpha = 2$

$f(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$
Donc $T(n) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$.

4. $\alpha = 7, \beta = 2, f(n) = n^2$
   $\log_\beta \alpha = log_2 7$
   $f(n) \in O(n^{\log_\beta \alpha - \epsilon})$, pour $\epsilon = log_2 7 - 2$.
   Donc $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$.

5. $\alpha = 2, \beta = 4, f(n) = \sqrt{n}$
   $\log_\beta \alpha = \frac{1}{2}$
   $f(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$
   Donc $T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log_2 n)$.

6. $T(n) - T(n-1) = n$

$$\begin{aligned}
&\text{EHA: } x - 1 = 0, \text{ donc solution: } A1^n \\
&\text{si } \tilde{T}(n) = Bn^2 + C, \text{ alors } 2An - -A + B = n, \text{ soit } A = B = \frac{1}{2} \\
&\text{donc } T(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) + A.
\end{aligned}$$

   Donc $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Exercice 6

$a_n = 2^{b_n}$, pour $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$
Ici, bête observation si vous essayez de a_0 à a_4
$b_n - \frac{1}{2}b_{n-1} - \frac{1}{2}b_{n-2} = 0$

$$\begin{aligned}
&\text{EHA: } x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0, \text{ donc solution: } A + B(-\frac{1}{2})^n \\
&\text{donc } b_n = \frac{2}{3}\left[1 - (-\frac{1}{2})^n\right].
\end{aligned}$$

Donc $a_n = 2^{\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]}$.

Exercice 7

Prenons S_n, le nombre de potentielles 2ndes lignes si la première est dans l'ordre:
alors $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$
donc $S_n = F_{n+1}$
Quand la 1ere ligne n'est pas dans l'ordre, elle est simplement une permutation possible de celle-ci, soit $n!$.

On a donc $n!F_{n+1}$ matrices possibles.