MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 4 (10 octobre 2018)

Exercice 1.
Soit un graphe simple à n sommets. Quel nombre maximal d'arêtes peut-il avoir ?

Exercice 2.
Construire un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est incident à exactement trois arêtes. Pourriez-vous faire la même chose avec 7 sommets? Avec 9 sommets ? Donner un exemple ou justifier.

Exercice 3. Dans un groupe de n personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

1. Formaliser cette propriété dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrer cette propriété (par l'absurde).

Exercice 4. Soit G un graphe simple à $2n$ sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est plus grand que n. Montrer que G est connexe.

Exercice 5. Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes avec $m < n$. Utiliser la récurrence pour montrer que G possède au moins $n - m$ composantes connexes.

Exercice 6.
Determiner $\mid V \mid$ pour les graphes G suivants. Justifier votre raisonnement sans déssiner le graphe.

1. G à 12 arêtes et tous les sommets sont de degré 3.
2. G à 10 arêtes avec 2 sommets de degré 3 et tous les autres de degré 2.

Exercice 7.
Un graphe G à 65 arêtes et 40 sommets. Chaque sommet est soit de degré 3 soit de degré 4. Combien des 40 sommets ont un degré 3 et combien un degré 4?

Exercice 8. Soit $G = (V, E)$ une graphe dont la matrice d'incidence est donnée ci-dessous.

$$Inc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dessiner G et trouver sa matrice d'adjacence A.
2. Déterminer si le graphe est biparti.
3. Déterminer le nombre de circuits de longueur 4 dans G.

Exercice 9. (Question d'examen 2017)

On coupe une pizza le long de n lignes disjointes afin d'obtenir le nombre maximum de pièces. On suppose donc que chaque paire de lignes a un point d'intersection à l'intérieur de la pizza et que chaque triplet de lignes n'a aucun point d'intersection.

On note G_n le graphe dont les sommets sont les points d'intersection des lignes entre elles et avec le pourtour de la pizza, et dont les arêtes sont les segments de lignes ou de pourtour entre deux points.

(a) Combien de sommets et d'arêtes comptent G_4 et G_5 ?

(b) Combien de sommets ajoute-t-on à la $i$ème coupe ?

(c) Combien de sommets a G_n ?

(d) Combien d'arètes a G_n ?

(e) *(facultatif)* Vérifiez vos formules pour $n = 4$ et $n = 5$.

Maths Discrètes

Solutions TP 4

Exercice 1

voir Algo 2

$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1+0$
On a n éléments :

- Le 1er a une arête vers tous les autres nœuds : $n-1$
- Le 2ème a une arête vers tous les autres nœuds sauf le 1er (déjà fait) : $n-2$
- Le 3ème a une arête vers tous les autres nœuds sauf les deux précedents (déjà fait) : $n-3$
- Etc ...
- L'avant dernier a une arête vers le dernier, les autres sont déjà fait : 1
- Le dernier est déjà relié à tous les autres nœuds, il n'y a rien a ajouter : 0

Cela nous donne :

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1+0=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 2

Rappel du « Handshaking theorem » : $\sum_{v\in V} deg(v)=2|E|$

En Français : la somme du degré de tous les sommets (V) vaut deux fois le nombre de sommet (E) (Parce qu'une arête a deux extrémités : elle ajoute 1 au compte des degrés de chacune de ces extrémitées).

Pour 8 sommets avec chacun 3 arêtes, nous avons :

$$\sum_{v\in V} dev(v)=8*3=24$$

24 est pair et « marche » donc dans $24=2|E|$: chaque arête a deux sommet.

Pour 7 et 9 sommets avec chacun 3 arêtes, nous avons :

$\sum_{v \in V} dev(v) = 7 * 3 = 21$ et $\sum_{v \in V} dev(v) = 9 * 3 = 27$

21 et 27 ne sont pas pair et ne respectent donc pas $2|E|$, dans chacun de ces cas, une des arête n'a pas de « deuxième sommet ».

Exercice 3

Dans un graphe a n sommets, il existe toujours deux nœuds de même degré :

Soit un graphe $G = (V, E)$ alors : $\exists a, b \in E : deg(a) = deg(b)$

Demontrons cela par l'absurde :

Tous les nœuds ont un degré différent.

Nous avons n nœuds auxquels nous devons attribuer n degrés différents. La répartition des degrés la plus pertinente est la suivante :

$\{n-1, n-2, \cdots, 0\}$

Notons que un degré plus petit que 0 ou un degré plus grand que $n-1$ n'ont pas de sens : On ne peut connaitre un nombre négatif de personne, on ne peut se connaitre soit-même (en plus de tous les autres : degré n) et on ne connait pas 2 fois une personne (degré $> n$).

Selon cette répartition, nous avons donc que :

- Le premier nœud est donc relié à tous les autres nœuds : $n-1$
  Il connait donc tout le monde.
- Le dernier nœud est relié à aucun nœuds : 0
  Il ne connait donc personne.

C'est impossible, nous ne pouvons pas avoir dans un même groupe une personne qui connait tout le monde et en même temps une personne qui ne connait personne.

Il est donc impossible que tous les nœuds aient des degrés différents donc au moins deux nœuds ont le même degré.

Exercice 4

Nous avons un total de $2n$ nœuds. Démontrons que ce graphe est connexe si le degré de chaque nœud est plus grand que n.

Commençons par diviser nos nœuds en deux sous-ensemble connexe de $\frac{2n}{2} = n$ nœuds.

Prenons a dans le premier sous-ensemble et b dans le second sous-ensemble.

Dans leurs sous-ensembles respectif, a et b sont relié à tous les autres nœuds $(n-1)$, ils ont donc, dans leur sous-ensemble, un degré de $n-1$.

Nous avons deux possiblitées :

a **et** b **sont adjacent :** Ils ont donc un degré de, au moins $(n-1)+1=n$ et le graphe est connexe.

a **et** b **ne sont adjacent :** Un degré de $n-1$ ne suffit pas à respecter la condition de l'énoncé. Ils doivent donc être relié à au moins un nœud de l'autre sous-ensemble pour avoir un degré de au moins n. Si les deux sous-ensemble sont relié, le graphe est connexe.

Exercice 5

Soit C, le nombre de composantes connexes de G.
On souhaite ajouter v, un sommet quelquonque, à G en le reliant à $k \in C$ composantes connexes de G.
Alors $G' = G + v$, et G' a $C' = C - k + 1$ composantes connexes (puisque v les relie, on perd k composantes, sauf celle qui les contient toutes: $-k+1$).
Donc G' a au moins $m' = m + k$ arêtes et a $n' = n + 1$ sommets.
Alors si on prend $C' \geq n' - m'$,
on obtient $C - k + 1 \geq n + 1 - m + k$,
soit $C \geq n - m$, l'idée de départ.

Exercice 6

Déterminons le nombre de sommets si

- **G à 12 arêtes et tous les sommets sont de degré 3 :**
  Utilisons le « Handshaking theorem » : $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

  $$\begin{aligned} \sum_{v \in V} 3 &= 2 * 12 \\ 3 + 3 + (...) + 3 &= 24 \\ |V| * 3 &= 24 \\ |V| &= \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

  Il y a donc 8 sommets.

- **G à 10 arêtes avec 2 sommets de degré 3 et tous les autres de degré 2 :**
  Séparons V en deux sous-ensemble : V_1 qui contient les deux sommets de degré 3 et V_2 qui contient les autres sommet de degré 2. Toujours avec le théorème des poignées de main :

$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in V_1} 3 + \sum_{v\in V_2} 2 &= 2 * 10 \\
2 * 3 + \sum_{v\in V_2} 2 &= 20 \\
\sum_{v\in V_2} 2 &= 20 - 6 \\
|V_2| * 2 &= 14 \\
|V_2| &= \frac{14}{2} = 7
\end{aligned}
$$

Il y a donc 7 sommets de degré 3 (V_2) et 2 sommets de degré 2 (V_1). Le total est de 9 sommets.

Exercice 7

G à 65 arêtes et 40 sommets. Chaque sommet est soit de degré 3 ou 4.

Pour :
$x = $ #sommets de degré 3
$y = $ #sommets de degré 4

Nous avons :

$$
\begin{cases}
x + y = 40 \\
3x + 4y = 2 * 65 = 130
\end{cases}
$$

Isolons x :

$$x = 40 - y$$

Calculons y :

$$
\begin{aligned}
3(40 - y) + 4y &= 130 \\
120 - 3y + 4y &= 130 \\
-3y + 4y &= 130 - 120 \\
y &= 10
\end{aligned}
$$

Et maintenant x :

$$
\begin{aligned}
x &= 40 - 10 \\
x &= 30
\end{aligned}
$$

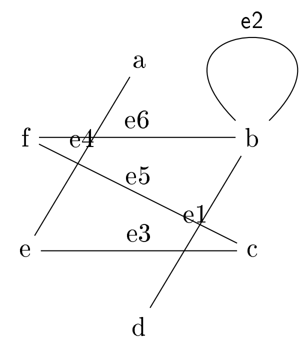
Nous avons donc :

- 30 sommets de degré 3
- 10 sommets de degré 4

Exercice 8

Exercice 8.1

$$\text{Inc} = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (e1) & (e2) & (e3) & (e4) & (e5) & (e6) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\text{Adj} = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (a) & (b) & (c) & (d) & (e) & (f) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 8.2

Ce graphe n'est pas biparti car il possède une boucle sur b.

Exercice 8.3

(cfr théorème 42: slides 93 Chap2F307.pdf ou example 2 dans Revision.pdf)

Le nombre de chemins de taille n allant de v_i à v_j est (i, j) dans $(Adj)^n$.

Commençons par calculer[1] $(Adj)^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 5 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Le nombre de circuit de longeur 4 dans G correspond à la somme des valeurs pour $i = j$, c'est à dire, la diagonal : $2 + 12 + 6 + 3 + 5 + 7 = 35$.

[1] Ça n'est que du produit matriciel : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_matriciel`

Exercice 9

Exercice 9.a

$|V_{G_4}| = 14, |E_{G_4}| = 24$
$|V_{G_5}| = 20, |E_{G_5}| = 35$

Exercice 9.b

$2+(i-1)$ sommets: 2 sommets au cercle puis 1 à chaque intersection intérieure.

Exercice 9.c

$$\begin{aligned}|V_{G_n}| &= 2n + \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= 2n + \frac{(n-1)(n)}{2}\end{aligned}$$

Exercice 9.d

$2n$ sommets de degré 3 (autour du cercle)
$\sum_{i=0}^{n-1} i$ sommets de degré 4 (intersections internes)

$$|E|G_n = \frac{2*(2n)+4(\sum_{i=0}^{n-1} i)}{2} = 2n + 2\sum_{i=0}^{n-1} i \qquad 3n + (n-1)(n)$$

Exercice 9.e

$|V_{G_4}| = 2*4 + (3+2+1) = 14$
$|E_{G_4}| = 3*4 + 2*(3+2+1) = 24$
$|V_{G_5}| = 2*5 + (4+3+2+1) = 20$
$|E_{G_5}| = 3*5 + 2*(4+3+2+1) = 35$