

Séance 8 (13 novembre 2018)

Exercice 1. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 30 marches, si on monte à chaque pas soit d'une seule marche soit de deux marches à la fois ?

Exercice 2. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Exercice 3.

Que vaut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ?$$

Exercice 4. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1},$$

où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le **nombre d'or**.

Exercice 5. Prouver que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$F_n > \varphi^{n-2}$$

Exercice 6. Résoudre les récurrences

$$1. \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \text{ pour } n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

$$2. \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2, \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 1$$

$$3. \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 9$$

$$4. \quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n \text{ pour } n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 11$$

Exercice 7. Résoudre les récurrences

1. $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ pour $n \geq 0$, $a_0 = 1, \quad a_1 = 3$
2. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$ pour $n \geq 0$, $a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2$
3. $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$ pour $n \geq 0$, $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$
4. $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$
5. $a_{n+4} - 4a_n = 0$

Exercice 8. Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+2} - (2 \cos \alpha) a_{n+1} + a_n &= 0 \quad \forall n \geq 0 \\ a_1 &= \cos \alpha, \quad a_2 = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre les récurrences

1. $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$ pour $n \geq 1$ $a_0 = 3$
2. $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}$ pour $n \geq 0$ $a_0 = 2, \quad a_1 = -6$
3. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$ pour $n \geq 0$
4. $na_n = (n + 3)a_{n-1} + n^2 + n$ pour $n \geq 1$