

Séance 9 (21 novembre 2018)

Exercice 1. Finir les exercices 1 et 2 du TP 8

Exercice 3. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Exercice 4. Avec l'alphabet $\{A, B, C\}$, combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas

1. deux lettres A côte-à-côte ?
2. deux lettres A ni deux lettres B côte-à-côte ?
3. deux lettres A ni deux lettres B ni deux lettres C côte-à-côte ?

Exercice 5. Donner le comportement asymptotique des suites $T(n)$ pour chacune des récurrences suivantes :

1. $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
2. $T(n) = T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$
3. $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
4. $T(n) = 7T(\lceil n/3 \rceil) + n^2$
5. $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
6. $T(n) = 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + \sqrt{n}$
7. $T(n) = T(n-1) + n$

Exercice 6. Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 &= 1, \quad a_1 = 2 \end{aligned}$$

Exercice 7. (Examen août 2011.)

Combien y a-t-il de matrices $2 \times n$ à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?

- Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers $1, 2, \dots, n$ apparaît une et une seule fois.
- Dans chacune des n colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus 1.

Exercice 8. (Just for fun.)

Résoudre la récurrence (discuter en fonction de a_0)

$$a_n = a_{n-1}^2 + 2 \quad \forall n \geq 1$$

(Hint : poser $a_n = b_n + 1/b_n$.)

Mathématiques discrètes

Solutions TP 9

Exercice 1 & 2

Voir séance 8

Exercice 3

$$D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$$

Exercice 4

- cas 1: mot commençant par la lettre A
cas 2: mot commençant par B ou C
pour a_n , le nombre de mots de n lettres commençant par la lettre A,
et b_n , c_n , le nombre de mots de n lettres commençant par la lettre B et C
respectivement:
 $a_n = b_{n-1} + cn - 1$, puisque qu'un mot commençant par A ne peut contenir qu'un mot de $n - 1$ lettres de cas 2.
 $b_n = c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$
Pour m_n , le nombre de mots de n lettres:

$$\begin{aligned} m_n &= a_n + b_n + c_n \\ &= b_{n-1} + c_{n-1} + 2m_{n-1} \\ &= 2m_{n-1} + 2m_{n-2} \end{aligned}$$

On résout ensuite la récurrence:

solution générale: $m_n = A(1 + \sqrt{3})^n + B(1 - \sqrt{3})^n$

$$m_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1 - \sqrt{3})^n$$

- $a_n = b_{n-1} + cn - 1$
 $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$$

Pour m_n , le nombre de mots de n lettres:

$$m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2}$$

On résout ensuite la récurrence:

$$\text{solution générale: } m_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

$$m_n = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}]$$

$$3. \quad a_n = b_{n-1} + cn - 1$$

$$b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

Pour m_n , le nombre de mots de n lettres:

$$m_n = 2m_{n-1}$$

On résout ensuite la récurrence:

$$\text{solution générale: } m_n = A2^n$$

$$m_n = 3(2)^{n-1}$$

Exercice 5

$$1. \quad \alpha = 2, \beta = 2, f(n) = n^2$$

$$\log_\beta \alpha = 1$$

$$f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon}), \text{ pour } \epsilon = 1.$$

$$2f\left(\frac{n}{2}\right) \leq Cf(n), \text{ pour } C < 1$$

$$2 \times \frac{1}{4}n^2 \leq Cn^2$$

$$\frac{1}{2} \leq C$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n^2).$$

$$2. \quad \alpha = 1, \beta = \frac{10}{9}, f(n) = n$$

$$\log_\beta \alpha = 0$$

$$f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon}), \text{ pour } \epsilon = 1.$$

$$f\left(\frac{9n}{10}\right) \leq Cf(n), \text{ pour } C < 1$$

$$\frac{9}{10} \leq C$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n).$$

$$3. \quad \alpha = 16, \beta = 4, f(n) = n^2$$

$$\log_\beta \alpha = 2$$

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n^2 \log_2 n).$$

$$4. \alpha = 7, \beta = 2, f(n) = n^2$$

$$\log_\beta \alpha = \log_2 7$$

$$f(n) \in O(n^{\log_\beta \alpha - \epsilon}), \text{ pour } \epsilon = \log_2 7 - 2.$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}).$$

$$5. \alpha = 2, \beta = 4, f(n) = \sqrt{n}$$

$$\log_\beta \alpha = \frac{1}{2}$$

$$f(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log_2 n).$$

$$6. T(n) - T(n-1) = n$$

$$\text{EHA: } x - 1 = 0, \text{ donc solution: } A1^n$$

$$\text{si } \tilde{T}(n) = Bn^2 + C, \text{ alors } 2An - -A + B = n, \text{ soit } A = B = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } T(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) + A.$$

$$\text{Donc } T(n) \in \Theta(n^2).$$

Exercice 6

$$a_n = 2^{b_n}, \text{ pour } b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$$

Ici, bête observation si vous essayez de a_0 à a_4

$$b_n - \frac{1}{2}b_{n-1} - \frac{1}{2}b_{n-2} = 0$$

$$\text{EHA: } x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0, \text{ donc solution: } A + B(-\frac{1}{2})^n$$

$$\text{donc } b_n = \frac{2}{3} \left[1 - (-\frac{1}{2})^n \right].$$

$$\text{Donc } a_n = 2^{\frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n]}.$$

Exercice 7

Prenons S_n , le nombre de potentiels 2^{ndes} lignes si la première est dans l'ordre:

$$\text{alors } S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

$$\text{donc } S_n = F_{n+1}$$

Quand la 1^{ere} ligne n'est pas dans l'ordre, elle est simplement une permutation possible de celle-ci, soit $n!$.

On a donc $n!F_{n+1}$ matrices possibles.