MATH-F307 - Mathématiques discrètes

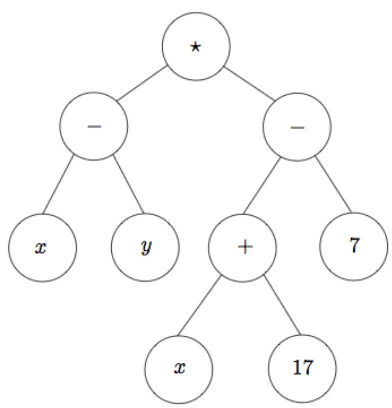
Séance 6 (24 octobre 2018)

Exercice 1. Soit un arbre 3-aire entier et équilibré avec 521 feuilles. Combien de sommets contient cet arbre? Quelle est la hauteur de l'arbre? Combien de sommets internes contient-il? Combien de feuilles contient-il à chaque niveau?

Exercice 2.
Construire l'arbre d'expression pour chacune des expressions suivantes:

1. $((x - y) + ((2 + z) \star y))$
2. $((((x \star y) + (a + b)) \star z) - 2)$.

Exercice 3. Soit l'arbre enraciné ci-dessous.

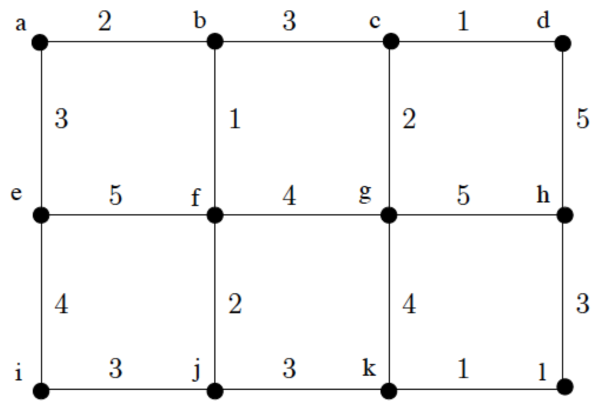


1. Lister les labels des sommets de l'arbre selon le "pre-order" algorithm.
2. Lister les labels des sommets de l'arbre selon le "post-order" algorithm.

Exercice 4.
Combien d'arbres sous-tendants différents existe-t-il pour les graphes suivants?

(a) C_3 $(= K_3)$ (b) C_4 (c) C_5 (d) K_4.

Exercice 5.
Trouver l'arbre sous-tendant minimal du graphe pondéré suivant.



Exercice 6.
Soit W un graphe pondéré formé en prenant le graphe complet K_5 sur 5 sommets $1, 2, 3, 4, 5$. Le poids de l'arête $\{x, y\}$ est donné par

$$w(\{x, y\}) = |x - y| \mod 5.$$

Trouver l'arbre sous-tendant minimal de W.

Exercice 7. Soit F une forêt qui contient t arbres. Soit n le nombre de sommets dans F et m le nombre d'arêtes dans F. Utiliser la récurrence sur n pour montrer que $m = n - t$ pour $n \geq t$.

Exercice 8.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \quad ?$$

Exercice 9. Si $0 \leqslant m \leqslant n$, que vaut

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} \binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Exercice 10. Si on jette simultanément n dés identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, . . . , le même nombre de 6.)

Maths Discrètes

Solutions TP 6

Exercice 1

$$\begin{aligned} n &= \frac{mL-1}{m-1} \\ &= \frac{3\times 521-1}{3-1} \\ &= 781 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= \lceil log_3(521) \rceil \\ &= \lceil 5.69 \rceil \\ &= 6 \end{aligned}$$

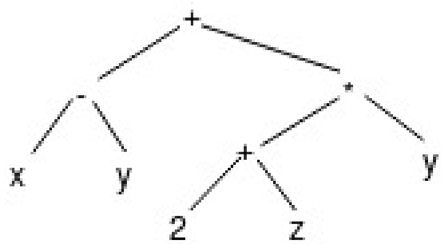
$$\begin{aligned} i &= \frac{l-1}{m-1} \\ &= \frac{l-1}{2} \\ &= 26 \end{aligned}$$

Comme entier et équilibré, seuls les deux derniers niveaux possèdent des feuilles.

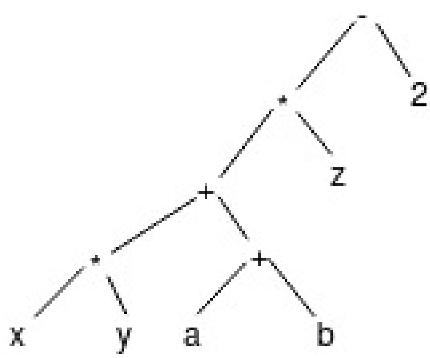
- h_5 possède $i - \sum_{k=0}^{4} 3^k = 139$ sommets.
  si h_5 n'avait pas de feuilles, il avait $3^5 = 243$ sommets donc h_5 possède $243 - 139 = 104$ feuilles.
- h_6 possède donc $521 - 104$ ou $139 \times 3 = 417$ feuilles.

Exercice 2

1.



2.



Exercice 3

1. * - x y - + x 17 7
2. x y - x 17 + 7 - *

Exercice 4

(a) 3 arbres sous-tendants

(b) 4 arbres sous-tendants

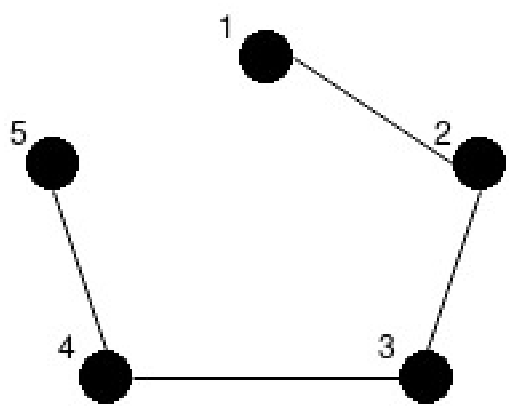
(c) 5 arbres sous-tendants

(d) 16 arbres sous-tendants

Exercice 5

$$\begin{array}{cccc}
a\,- & b\,- & c\,- & d \\
| & | & | & \\
e & f & g & h \\
 & | & & | \\
i\,- & j\,- & k\,- & l
\end{array}$$

Exercice 6



Exercice 7

Même principe que TP 4 exercice 5.

Exercice 8

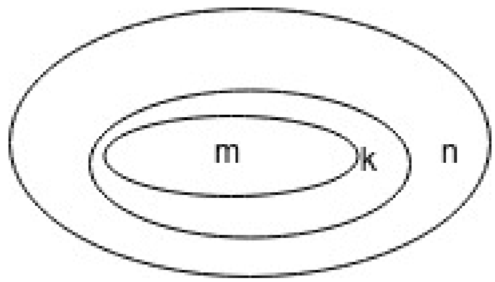
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\
&= (2+1)^n \\
&= 3^n
\end{aligned}$$

Exercice 9

$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} \binom{n}{k} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$

le nombre de façons de choisir m parmi k, et k parmi n soit :

le nombre de façons de choisir m parmi n ($\binom{n}{m}$) et d'inclure ou non un élément de n dans k (2^n), m y étant par définition donc sans choix ($n-m$).
Il existe une solution algébrique, mais même moi qui les préfère en général, je vous dit: ça n'en vaut pas la peine. Mais je l'ai dans mes feuilles si vous êtes curieux.



Exercice 10

Pour
$x_1 = \#1$, $x_2 = \#2$,..., $x_6 = \#6$ $\qquad x_i \geq\in \mathbb{N}$
où x_i = le nombre de dés qui tombent sur la valeur i.
Si on les additionne tous, on a toujours le nombre de dés qu'on a lancé:
$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_6 = n$
On peut donc utiliser un coefficient multinomial.