MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 7 (7 novembre 2018)

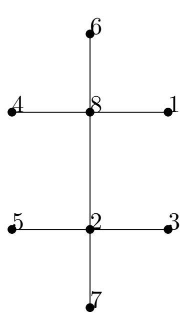
Exercice 1.

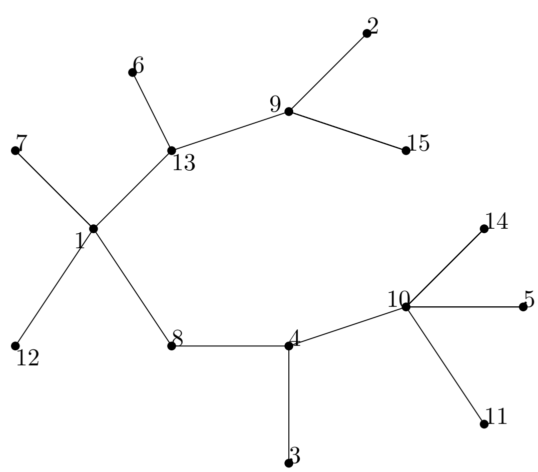
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \quad ?$$

Exercice 2.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^{i} = \quad ?$$

Exercice 3. Construire le code de Prüfer des arbres suivants:





Exercice 4. Construire l'arbre associé aux codes de Prüfer suivants:

1. $(4, 1, 3, 1)$;
2. $(3, 6, 6, 2, 1, 4)$.

Exercice 5. (Examen août 2011.) Pour des naturels n et r, on pose

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k} \ .$$

- Sur base de cette relation de récurrence, donner une formule pour A_1^n et A_2^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux, démontrer que les nombres A_r^n vérifient la relation de récurrence $A_r^n = n(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1})$.

Exercice 6. Ecrire l'algorithme permettant de calculer le code de Prüfer $c = c(T)$ d'un arbre T sur $[n]$. Trouver ensuite un algorithme permettant, étant donné un code de Prüfer $c \in [n]^{n-2}$, de trouver l'arbre T correspondant. Justifier soigneusement que votre algorithme est correct.

Exercice 7. Vérifier que

$$\sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1} = n^{n-2}$$

où la somme est prise sur les vecteurs des degrés des arbres sur $[n]$.

Exercice 8. [Just for fun] (Difficile) Calculer l'inverse de la matrice $(n+1)\times(n+1)$ formée des $n+1$ premières lignes du triangle de Pascal. Si on appelle cette matrice $A = (a_{ij})$, alors $a_{ij} = \binom{i}{j}$ pour $i = 0,\ldots,n$ et $j = 0,\ldots,n$.

Maths Discrètes

Solutions TP 7

Exercice 1

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+1)^{i} \\
&= (2+1)^{n} \\
&= 3^{n}
\end{aligned}
$$

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^{i} &= \sum_{i=0}^{n}(n+1)\frac{n!}{i!(n-i)!}2^{i} \\
&= (n+1)(2+1)^{n} \\
&= 3^{n}(n+1)
\end{aligned}
$$

Exercice 3

- $8, 2, 8, 2, 8, 2$
- $9, 4, 10, 13, 1, 10, 1, 10, 4, 8, 1, 13, 9$

Exercice 4

1.

$$
\begin{tikzcd}
2 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 6 \\
 & & 3 \arrow[r, dash] & 5
\end{tikzcd}
$$

2.

5—3—6—2—1—4—8
       |
       7

Exercice 5

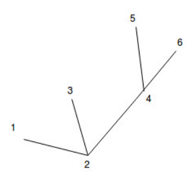
voir page suivante.

Exercice 6

Algorithme pour Prüfer (Wikipédia les enfants!)

Exercice 7

Un vecteur de degré contient les degrés de chaque sommet d'un graphe:



$\Rightarrow (1, 3, 1, 3, 1, 1)$

La suite est à prendre avec des pincettes, je n'ai pas pris le temps d'y réfléchir donc c'est du décodage de notes pas très claires - si vous avez plus d'idées que moi je suis tout ouïe.

Donc la somme des degrés des n sommets est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} d_i - 1 = n - 2$ donc:

$$\begin{aligned}
(n \times 1)^{n-2} &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k \ 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k \\
&= \sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \binom{n-2}{d_1 - 1, ..., d_n - 1}
\end{aligned}$$

Scéance 7

07/11/2018

5.

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k}$$

- $$A_1^n = \sum_{k=0}^{n} k^1 \binom{n}{k}$$

car si $k=0$ alors le tout est 0 donc ne change rien à la somme

$$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

propriété : $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$ Ch1 sl59

$$= \sum_{k=1}^{n} \boxed{n\binom{n-1}{k-1}}$$

car n constante (et donc indépendante)

$$= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$\ell = k-1$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$$

binome de Newton pour $(1+1)^{n-1}$ Ch1 sl68

$$\boxed{= n\, \boxed{2^{n-1}}}$$

- $$A_2^n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

car si $k=0$ alors ne change rien à la somme

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

simplification entre k^2 et $k!$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

développement de $n!$

$$= \sum_{k=1}^{n} k . n . \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}$$

$\ell = k-1$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \binom{n-1}{\ell}$$

développement de $(\ell+1)$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + n\sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{\ell}$$

simplification comme pour A_1^n ; binome de Newton

$\hookrightarrow \sum_{k=0}^{\boxed{n}} k\binom{\boxed{n}}{k} = \boxed{n}2^{n-1}$

donc

$\sum_{k=0}^{\boxed{n-1}} k\binom{\boxed{n-1}}{k} = \boxed{(n-1)}2^{n-2}$

$$= n . \boxed{(n-1)2^{n-2}} + n \boxed{2^{n-1}}$$

$$= n\left[(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}\right]$$

$$= n 2^{n-2}\left[(n-1) + 2\right]$$

$$\boxed{= n(n+1)2^{n-2}}$$

$$\begin{aligned}
A_r^n &= n\left(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1}\right) \\
&= n\sum_{k=1}^{n} k^{r-1}\binom{n}{k} - n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\binom{n-1}{k} \\
&= n\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\left[\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right]\right] + n.n^{r-1}\binom{n}{n} \\
&= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\binom{n-1}{k-1}} + n^r\binom{n}{n} \\
&= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\frac{k}{n}\binom{n}{k}} + n^r\binom{n}{n} \\
&= \frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k^{r}\binom{n}{k} + n^r\binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{r}\binom{n}{k} \\
&\boxed{= A_r^n}
\end{aligned}$$

développement
Sans $k=0$
(au cas où)

Addition/Induction
Ch1 sl61

Absorption/Extraction
Ch1 sl58

Car n constant et $k^{r-1}.k = k^{(r-1)+1} = k^r$

$n^r\binom{n}{n}$ cas où $k=n$ donc ajout à la somme.

puisque $k=0$ valable aussi