Maths Discrètes

Solutions TP 2

Beltus Marcel

Exercice 1

1. $\binom{7}{5} = 21$
2. $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 2520$
3. $\binom{4}{1} = 4$ ou $\binom{4}{3} = 4$ puisque 4 emplacements et 1 pot d econfiture, 3 pots de miel

Exercice 2

1. $\binom{4}{1}\binom{10}{4} = 840$ choix de la couleur puis des cartes
2. $\binom{4}{2}\binom{20}{4} - \binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{10}{4}$ couleurs puis cartes, moins les mains à une seule couleur
3. $\binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{10}{2}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$, couleurs puis couleurs à 2 carte,puis reste des cartes
4. 10^4 ou $\binom{4}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

Exercice 3

1. $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$
2. $\dfrac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{4!}$, pour éviter les groupes répétés en ordre différent

Exercice 4

Binome de Newton,

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1^k\right) \left(1^{x-k}\right)$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Nombre de représentations de $\{1, \ldots, n\}$ en deux sous-ensembles

- chaque élément n pris ou non pour le 1er sous-ensemble, 2^n
- chaque sous-ensemble, de taille k, $\binom{n}{k}$

Exercice 5

par le binome de Newton, si $x = -1$ et $y = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-1\right)^k \left(1\right)^{n-k} = (-1+1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Exercice 6

$$n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Exercice 7

$\sum_{k \text{ pair}=0}^{n} \binom{n}{k}$; pour $(-1+1)^n$;

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k}$$

Exercice 8

Dans le triangle de Pascal

$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}$

$= \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdots$

$= \dfrac{(n-1)!^2 \;\; n!^2 \;\; (n+1)!^2}{(k-1)!^2(n-k)!^2(k+1)!^2(n-k-1)!^2k!^2(n-k+1)!^2}$

$= \binom{n-1}{k-1}^2 \binom{n}{k+1}^2 \binom{n+1}{k}^2$

Exercice 9

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\Downarrow$ si $k = 0$, tout es à 0. $k/k! \to 1/(k-1)$ $\Downarrow$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$\Downarrow$ où L = k =1 $\Downarrow$

$$= n\sum_{L=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{L!(n-1-L)!}$$

$$= n2^{n-1}$$

Exercice 10

$\frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$