Scéance 2.

1.1. $\binom{7}{5} = 21$ $\quad 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

2. $\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 2520$

3. $\binom{4}{1}$ ou $\binom{4}{3} = 4$, puis que 4 emplacements et 1 pot de confiture, 3 pots de miel

2.1. $\binom{4}{1}\binom{10}{4} = 840$, choix de la couleur puis des cartes

pourquoi 3 ? $\propto$ 2. $\binom{4}{2}\binom{20}{4} - \binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{10}{4}$, couleurs puis cartes, moins mains à une seule couleur

3. $\binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{10}{2}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$, couleurs puis couleur à 2 carte, reste des cartes

4. 10^4 ou $\binom{4}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

3.1. $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}$

2. $\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} / 4!$, pour éviter les groupes répétés en ordre différent

4. binome de Newton, $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1^k)(1^{x-k})$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

~~représentation de deux manières de sous-ensembles~~ $\{1, \dots, n\}$

nombre de représentations de $\{1, \dots, n\}$ en 2 sous-ensembles

- chaque élément n pris ou non pour le 1er sous-ensemble, 2^n
- chaque sous-ensemble, de taille k, $\binom{n}{k}$

5. par le binome de Newton, si $x = -1$ et $y = 1$, alors:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k} = (-1+1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

? $\propto$ 6. $n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

7. $\sum_{k \text{ pair}=0}^{n}\binom{n}{k}$; pour $(-1+1)^n$;

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k \text{ impair}}^{n}\binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}}^{n}\binom{n}{k}$$

donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

$$2\sum_{k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

$$\boxed{\sum_{k \text{ pair}}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1}}$$

Maths Discrètes

Solutions

Scéance 2 (suite).

8. dans le triangle de Pascal,

$$\begin{array}{ccccc} & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \\ \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-1-k+1)!}_{\text{ou } (n-k)!}} \times \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \cdots$$

$$= \frac{(n-1)!^2 \quad n!^2 \quad (n+1)!^2}{(k-1)!^2 (n-k)!^2 (k+1)!^2 (n-k-1)!^2 k!^2 (n-k+1)!^2}$$

$$= \binom{n-1}{k-1}^2 \binom{n}{k+1}^2 \binom{n+1}{k}^2$$

9. $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si $k=0$, tout est 0

$k/k! \to 1/(k-1)!$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

où $l = k-1$

$$= n\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!\,(n-1-l)!}$$

$$\boxed{= n\,2^{n-1}}$$

? × 10. $\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$