MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 3 (3 octobre 2018)

Exercice 1.
Trouver le nombre de solutions de l'équation $x + y + z + w = 15$, dans les naturels (0,1,2, ...)

Exercice 2.
Combien l'équation

$$x + y + z + t + u = 60$$

possède-t-elle de solutions entières (x, y, z, t, u) telles que

$$x > 0 \ , \quad y \geqslant 9 \ , \quad z > -2 \ , \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

Exercice 3.
Trouver le nombre de solutions de l'inéquation

$$x + y + z + t \leqslant 6$$

1. dans les naturels;
2. dans les entiers > 0;
3. dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2$, $y > -2$, $z > 0$ et $t > -3$.

Exercice 4. Combien le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 415 \\ x + y + z + u &= 273 \end{cases}$$

possède-t-il de solutions (x, y, z, t, u) en entiers > 0 ?

Exercice 5.
Combien l'inéquation

$$x + y + z + t < 100$$

possède-t-elle de solutions (x, y, z, t) en entiers > 0 ?

Exercice 6. Avec les lettres du mot

H U M U H U M U N U K U N U K U A P U A A

("poisson" en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Exercice 7.
Combien de personnes doivent être sélectionné dans une collection de 15 couples mariés afin d'être certain qu'au moins 2 personnes choisies soient marié l'un à l'autre?

Exercice 8.
Montrer que dans une collection de $n^2 + 1$ objets, il en existe soit $n + 1$ identiques ou $n + 1$ qui sont tous différents.

Exercice 9.
Une boulangerie vend 8 variétés de muffins: pomme, banane, myrtille, fromage, chocolat, café , pêche et le préféré de tout le monde brocoli.
De combien de manières peut-on sélectionner:

1. 16 muffins?
2. 16 muffins avec au moins 1 de chaque type?
3. 16 muffins avec au moins 2 à la pêche et au moins 3 au chocolat?
4. 16 muffins avec au plus 2 brocolis?
5. 16 muffins avec au moins 2 fromages, au moins 3 chocolat et pas plus de 2 brocolis?

Exercice 10.
Soit un groupe de 6 personnes dans lequel chaque paire d'individus sont soit deux amis soit deux ennemis. Montrer qu'il existe trois amis mutuels ou trois ennemis mutuels.

Maths Discrètes

Solutions TP 3

Exercice 1

$s = 15, \qquad d = 4$

$$\binom{s+d-1}{s} = \binom{18}{15}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{lcllr}
x > 0 \rightarrow x \geq 1 & ; & x' = x - 1 & \text{ou} & x = x' + 1 \\
y \geq 9 & ; & y' = y - 9 & & y = y' + 9 \\
z > -2 \rightarrow z \geq -1 & ; & z' = z + 1 & & z = z' - 1 \\
t \geq 0 & ; & t' = t & & t = t' \\
u > 10 \rightarrow u \geq 11 & ; & u' = u - 11 & & u = u' + 11
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x + y + z + t + u &= 60 \\
(x' + 1) + (y' + 9) + (z' - 1) + t' + (u' + 11) &= 60 \\
x' + y' + z' + t' + u' &= 40
\end{aligned}$$

donc: $s = 40, d = 5$

$$\binom{s+d-1}{s} = \binom{44}{40}$$

Exercice 3

1. $s \leq 6$ et $s \in \mathbb{N}$, d $= 4$

$$\sum_{n=0}^{6} \binom{n+4-1}{4-1} = \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{6} \binom{n+3}{0+3}$$

$$= \sum_{n=0}^{6} \binom{6+1+3}{0+1+3}$$

$$= \binom{10}{4} = 210$$

2. $0 < s \leq 2$ et $s \in \mathbb{Z}$, $d = 4$
   puisque $x, y, z, t \geq 1$, alors $s \leq 6 - 4(1)$.

$$\sum_{n=0}^{2} \binom{n+4-1}{4-1} = \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{4-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{2} \binom{n+3}{0+3}$$

$$= \binom{6}{4}$$

$$= 15$$

3.

$$\begin{aligned} &x \geq 3 \;\; ; x = x' + 3 \\ &y \geq -1 ; y = y' - 1 \\ &z \geq 1 \;\; ; z = z' + 1 \\ &t \geq -2 \, ; t = t' - 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x'+3) + (y'-1) + (z'+1) + (t'-2) \leq 6$
$\Leftrightarrow x' + y' + z' + t' \leq 5$
$\Rightarrow s \leq 5$ et $s \in \mathbb{Z}, d = 4$ $\in \mathbb{Z}$ parce que $x, y, z, t \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{5} \binom{n+4-1}{4-1} = \sum_{n=0}^{5} \binom{n+3}{3}$$

$$= \binom{9}{4} = 126$$

Exercice 4

$$x + y + z = 415 - t$$
$$(415 - t) + u = 273$$
$$t - u = 142$$
$$\text{si on conniat } u \text{ on connait } t$$
$$(\text{et } u < t \text{ donc } \mathbb{Z}_+)$$
$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (u' + 1) = 273$$
$$x' + y' + z' + u' = 269$$
$$\binom{269 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{272}{3}$$

Exercice 5

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (t' + 1) \leq 99$$
$$x' + y' + z' + t' \leq 95$$
$$\sum_{n=0}^{95} \binom{n+3}{3} = \binom{99}{4}$$

Exercice 6

Sans les U, il y a 12 lettres, avec lesquelles on peut composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!}$ mots (*voir coefficient multinomial*).
Il y a 13 emplacements pour U dans un mot de 12 lettres pour qu'il n'en ait jamais 2 côte à côte: devant le mot, entre chaque lettre, à la fin du mot.
On a 9 U, soit $\binom{13}{9}$ possibilités.
On peut donc composer $\frac{12!}{2!2!2!2!3!1!} \times \binom{13}{9}$ mots.

Exercice 7

16

Exercice 8

[Preuve par contradiction]
Pour n éléments, on a
$\rightarrow$ maximum n éléments identiques
$\rightarrow$ maximum n éléments différents
Pour chaque type d'élément dans n, on a au plus n élements, soit n^2 objets au total.
Si on a $n^2 + 1$ objets, alors on doit avoir soit $n + 1$ éléments différents soit $n + 1$ objets d'un type.

Exercice 9

1. 8^{16}
2. 8^{8}
3. 8^{11}
4. $7^{14} + 7^{15} + 7^{16}$
5. $7^{11} + 7^{10} + 7^{9}$

Exercice 10

[Preuve par contradiction]
voir *Ramsey number*: $R_{3 \cdot 3}$

Soit une 2-coloration (*qu'on peut facilement utiliser représenter comme relations amies/ennemies*) du graphe complet à six sommets K_6. Chaque sommet de ce graphe possède donc 5 arêtes. D'après le *principe des tiroirs*, au moins 3 d'entre elles sont de la même couleur.
Soient les arêtes $\{v, r\}, \{v, s\}, \{v, t\}$ de la première couleur, pour $v, r, s, t \in K_6$. Si l'une des arêtes $\{r, s\}, \{t, s\}, \{t, r\}$ est également de la première couleur, alors le triangle correspondant est entièrement de la première couleur, sinon c'est le triangle formé par ces trois dernières arêtes qui est entièrement de la deuxième couleur.