

Maths Discrètes

Solutions TP 1

Exercice 1

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B| = ab$
2. $|B^A| = b^a$
3. $|\{f : A \rightarrow B : f \text{ est une projection de } A \text{ dans } B, \text{ injective}\}| = \frac{b!}{(b-a)!} \text{ si } a \leq b, \text{ sinon } 0.$
4. $|S(A)| = a!$

Exercice 2

1. $|F^x| = 1$, donc $|F| = 1$ puisque $|F^x| = f^x$ pour $|F| = f$ et $|X| = x$.
2. $|Y^F| = 1$, donc F n'existe pas si non vide.

Exercice 3

1.

Supposons f non-injective

alors $\exists a, b \in A$ tq $f(a) = f(b)$

et donc $g \circ f(a) = g \circ f(b)$

mais $g \circ f$ est injective, donc f doit être injective

2.

Supposons g non surjective

alors $\exists c \in C : \nexists b \in B$ tq $g(b) = c$

et donc $\exists c \in C : \nexists a \in A$ tq $g \circ f(a) = c$

mais $g \circ f$ est surjective, donc g doit être surjective

3.

si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est surjective et injective
comme démontré en 1, f est injective
comme démontré en 2, g est donc surjective

Exercice 4

Ne sera pas à l'examen.

Supposons :

$$\begin{aligned} A &= \{[n] \rightarrow [n] \text{ bijections}\} \\ B &= \{[n] \times [n-1] \times \dots \times [1]\} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in [n], \dots, a_n \in [1]\} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in [n-i+1]\} \end{aligned}$$

Prenons $n=4$:

Alors une bijection de $[n] \rightarrow [n]$ ressemble à :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 2 \\ 4 &\rightarrow 4, \end{aligned}$$

soit $(3,1,1,1)$, puisque:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3, \text{ donc le 3eme élément de } \{1,2,3,4\}. \\ 2 &\rightarrow 1, \text{ donc le 1er élément de } \{1,2,4\}. \\ 3 &\rightarrow 2, \text{ donc le 1er élément de } \{2,4\}. \\ 4 &\rightarrow 4, \text{ donc le 1er élément de } \{4\}. \end{aligned}$$

Alors étant donné $(4,2,1,1)$, une bijection de $[n] \rightarrow [n]$, on peut retrouver :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 4, \text{ puisque le 4eme élément de } \{1,2,3,4\}. \\ 2 &\rightarrow 2, \text{ puisque le 2eme élément de } \{1,2,3\}. \\ 3 &\rightarrow 1, \text{ puisque le 1er élément de } \{1,3\}. \\ 4 &\rightarrow 3, \text{ puisque le 1er élément de } \{3\}. \end{aligned}$$

Exercice 5

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ et $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} = \begin{cases} n \rightarrow \frac{-n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n \rightarrow \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{injection})$$

$$g = f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} = \begin{cases} n \rightarrow -2n & \text{si } n \leq 0 \\ n \rightarrow 2n - 1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (\text{surjection})$$

Exercice 6

si n est pair, alors n^3 est pair, donc $n^3 - n$ est pair.

si n est impair, alors n^3 est impair, donc $n^3 - n$ est pair. (modulo 2 si poussé)

Exercice 7

supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

alors $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$

alors $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, et $a = 3, b = \sqrt{3}$

mais $b \notin \mathbb{Z}$ quand $b = \sqrt{3}$, donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8

$$18a + 6b = 1$$

$$3a + b = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{1}{6} - 3a$$

Supposons $b \in \mathbb{Z}$, alors $a \notin \mathbb{Z}$ et inversement