MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 8 (13 novembre 2018)

Exercice 1. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 30 marches, si on monte à chaque pas soit d'une seule marche soit de deux marches à la fois ?

Exercice 2. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Exercice 3.
Que vaut

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ?$$

Exercice 4. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1} \ ,$$

où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le **nombre d'or**.

Exercice 5. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$F_n > \varphi^{n-2}$$

Exercice 6. Résoudre les récurrences

1. $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$ pour $n \geqslant 1$, $\qquad a_0 = 1$
2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$, $\qquad a_0 = -1, \quad a_1 = 1$
3. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$, $\qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 9$
4. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n$ pour $n \geqslant 2$, $\qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 11$

Exercice 7. Résoudre les récurrences

1. $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ pour $n \geqslant 0$, $\qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 3$
2. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$ pour $n \geqslant 0$, $\qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -2$
3. $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$ pour $n \geqslant 0$, $\qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$
4. $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$
5. $a_{n+4} - 4a_n = 0$

Exercice 8. Résoudre la récurrence

$$\begin{array}{l} a_{n+2} - (2\cos\alpha)a_{n+1} + a_n = 0 \quad \forall n \geqslant 0 \\ a_1 = \cos\alpha, \quad a_2 = \cos 2\alpha \end{array}$$

Exercice 9. Résoudre les récurrences

1. $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$ pour $n \geqslant 1$ $\qquad a_0 = 3$
2. $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}$ pour $n \geqslant 0$ $\qquad a_0 = 2, \quad a_1 = -6$
3. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$ pour $n \geqslant 0$
4. $na_n = (n+3)a_{n-1} + n^2 + n$ pour $n \geqslant 1$

Mathématiques discrètes

Solutions TP 8

Exercice 1

cas 1 : 1 marche, reste n-1
cas 2 : 2 marches, reste n-2

pour a_n, le nombre de marches à monter,

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
F_{n+1} (et pas F_n car pas de répétition de 1)
donc pour n=30, F_{31}

Exercice 2

$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ ou F_{n+1}

Exercice 3

Prenons $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}} \\
&= 1 + \frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
&= \phi
\end{aligned}$$

Exercice 4

$$
\begin{aligned}
&n = 1, \;\; \phi^1 = 1 \times \phi + 0 \\
&n = 2, \;\; \phi^2 = 1 \times \phi + 1 \\
&n = n+1, \;\; \phi^{n+1} = (F_n + F_{n-1})\phi + F_n \\
&\qquad\qquad\quad = F_n(\phi + 1) + \phi F_{n-1} \\
&\qquad\qquad \phi^n = F_n\phi + F_{n-1}
\end{aligned}
$$

Exercice 5

$$
\begin{aligned}
&n = 3, \;\; 2 > \phi \\
&n = n-1, \;\; \phi^2 F_{n-1} > \phi^{n-1} \\
&\qquad (\phi + 1)F_{n-1} > F_{n-1}\phi + F_{n-2} \\
&\qquad\qquad F_{n-1} > F_{n-2} \\
&n = n+1, \;\; F_n + F_{n-1} > F_{n-1}\phi + F_{n-2} \\
&\qquad F_{n-1} + F_{n-2} > F_{n-1}(\phi - 1) + F_{n-2} \\
&\qquad\qquad 2F_{n-1} > F_{n-1}\phi
\end{aligned}
$$

Exercice 6

Si vous avez le moindre doute sur les exos suivants, Wolfram Alpha est votre ami.

1. $a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = 1$

   $$
   \begin{aligned}
   &\text{EHA: } x - \frac{1}{2} = 0, \text{ donc solution: } C\frac{1}{2}^n \\
   &\text{si } \tilde{a}_n = A, \text{ alors } A = \frac{1}{2}A + 1, \text{ soit } A = 2 \\
   &\text{donc } a_n = 2 + C\frac{1}{2}^n.
   \end{aligned}
   $$

   Sachant que $a_0 = 1$, $2 + C = 1$, $C = -1$.
   Donc $a_n = 2 - \frac{1}{2}^n$.

2. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$

   $$
   \begin{aligned}
   &\text{EHA: } x^2 - 5x + 6 = 0, \text{ donc solution: } A2^n + B3^n \\
   &\text{donc } a_n = A2^n + B3^n.
   \end{aligned}
   $$

   Sachant que $a_0 = -1$, $A + B = -1$.
   Sachant que $a_1 = 1$, $2A + 3B = 1$, $A = -4$ et $B = 3$.
   Donc $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+2}$.

3. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$

   $$\text{EHA: } x^2 - 6x + 9 = 0, \text{ donc solution: } (An + B)3^n$$
   $$\text{donc } a_n = (An + B)3^n.$$

   Sachant que $a_0 = 1$, $B = 1$.
   Sachant que $a_1 = 9$, $(A + 1)3 = 9$, $A = 2$.
   Donc $a_n = (2n + 1)3^n$.

4. $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2^n$

   $$\text{EHA: } x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ donc solution: } A3^n + B1^n$$
   $$\text{si } \tilde{a}_n = C2^n, \text{ alors } C2^n = 4C2^{n-1} - 3C2^{n-2} + 2^n$$
   $$4C2^{n-2} = 8C2^{n-2} - 3C2^{n-2} + 4(2^{n-2})$$
   $$C = -4$$
   $$\text{donc } a_n = A3^n + B - 2^{n+2}.$$

   Sachant que $a_0 = 1$, $A + B - 4 = 1$, $A + B = 5$.
   Sachant que $a_1 = 11$, $3A + B - 8 = 11$, $A = 7$ et $B = -2$.
   Donc $a_n = 7(3^n) - 2^{n+2} - 2$.

Exercice 7

1. $a_n = \frac{1}{5}\left[4^{n+1} + (-1)^n\right]$
   solution générale: $a_n = A4^n + B(-1)^n$

2. $a_n = 5 - 2^{n+2} + 3^n$
   solution générale: $a_n = A1^n + B2^n + C3^n$

3. $a_n = \frac{1}{9}\left[8 - 6n + (-2)^n\right]$
   solution générale: $a_n = A(-2)^n + (Bn + C)$

4. $a_n = An^2 + Bn + C$

5. $a_n = 2^{-n/2}(Ai^n + B(-1)^n + C(-i)^n + D)$
   Racine quadruple imaginaire, bon amusement, sans moi, merci bien.

Exercice 8

$a_{n+2} - 2Cos(\alpha)a_{n+1} + a_n = 0$

Petit rappel:
$Cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$

$$\text{EHA: } x^2 - (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})x + 1 = 0, \text{ donc solution: } Ae^{i\alpha n} + Be^{-i\alpha n}$$
$$\text{donc } a_n = Ae^{i\alpha n} + Be^{-i\alpha n}.$$

Sachant que $a_1 = Cos(\alpha)$, $Ae^{i\alpha} + Be^{-i\alpha} = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$, $A = B = \frac{1}{2}$.
Donc $a_n = Cos(\alpha n)$.

Exercice 9

1. $a_n = \frac{1}{6}\left[7(-2)^n + 2n + 11\right]$
   solution générale: $a_n = \frac{1}{6}\left[2n + 11\right] + A(-2)^n$
   $\tilde{a}_n = Bn + C$

2. $a_n = 3^n + (-9)^n$
   solution générale: $a_n = 3^n + A1^n + B(-9)^n$
   $\tilde{a}_n = C3^n$

3. $a_n = 2^n + \frac{1}{4}(n-1) + (An + B)3^n$
   $\tilde{a}_n = C2^n + Dn + E$

4. $na_n = (n+3)a_{n-1} + n^2 + n$

$$\begin{aligned}
\text{EHA: } na_n &= (n+3)a_{n-1} \\
a_n &= \frac{1}{n}(n+3)a_{n-1} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{i+3}{i}\right) C \\
&\Downarrow \text{Comme c'est un produit, certains éléments vont s'annuler,} \\
&\text{puisqu'on va de } \frac{4 \to (n+3)}{1 \to n} \text{on peut retirer tout ce qui est entre 4 et } n \Downarrow \\
&= \frac{(n+1)\ \ (n+2)\ \ (n+3)}{3 \times 2 \times 1} C \\
a_n &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)C
\end{aligned}$$

si $\tilde{a}_n = An^3 + Bn^2 + Cn$, alors $A = -1$, $B = -3$, $C = -2$

donc $a_n = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)C - (n^3 + 3n^2 + 2n)$.