MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 7 (7 novembre 2018)

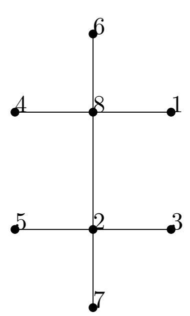
Exercice 1.

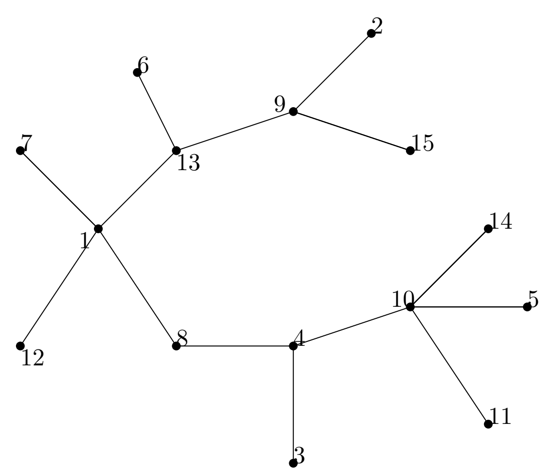
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \quad ?$$

Exercice 2.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^i = \quad ?$$

Exercice 3. Construire le code de Prüfer des arbres suivants:





Exercice 4. Construire l'arbre associé aux codes de Prüfer suivants:

1. $(4, 1, 3, 1)$;
2. $(3, 6, 6, 2, 1, 4)$.

Exercice 5. (Examen août 2011.) Pour des naturels n et r, on pose

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k} .$$

- Sur base de cette relation de récurrence, donner une formule pour A_1^n et A_2^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux, démontrer que les nombres A_r^n vérifient la relation de récurrence $A_r^n = n(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1})$.

Exercice 6. Ecrire l'algorithme permettant de calculer le code de Prüfer $c = c(T)$ d'un arbre T sur $[n]$. Trouver ensuite un algorithme permettant, étant donné un code de Prüfer $c \in [n]^{n-2}$, de trouver l'arbre T correspondant. Justifier soigneusement que votre algorithme est correct.

Exercice 7. Vérifier que

$$\sum_{(d_1,\dots,d_n)} \binom{n-2}{d_1-1,\dots,d_n-1} = n^{n-2}$$

où la somme est prise sur les vecteurs des degrés des arbres sur $[n]$.

Exercice 8. [Just for fun] (Difficile) Calculer l'inverse de la matrice $(n+1)\times(n+1)$ formée des $n+1$ premières lignes du triangle de Pascal. Si on appelle cette matrice $A = (a_{ij})$, alors $a_{ij} = \binom{i}{j}$ pour $i = 0,\dots,n$ et $j = 0,\dots,n$.