

Séance 2 (26 septembre 2018)

Exercice 1.

1. Soit une rangée de 5 chaises dans une pièce. Il y a 7 personnes dans la pièce. De combien de manières peut-on assoir 5 personnes le long de la rangée?
2. De combien de manières peut-on distribuer 10 livres (tous différents) si Elisa reçoit 5 livres, Mathieu 3 livres et Julie 2 livres?
3. Trois pots de confiture et trois pots de miel doivent être placés sur une étagère. De combien de manières peut-on arranger les pots afin qu'il y ait deux pots de confiture aux deux extrémités de l'étagère?

Exercice 2. Dans un jeu non-standard de 40 cartes (10 cartes de valeurs différentes dans 4 couleurs), combien de main de 4-cartes contiennent

1. 4 cartes d'une seule et même couleur?
2. 4 cartes de deux couleurs?
3. 4 cartes de trois couleurs?
4. 4 cartes de quatre couleurs?

Exercice 3. Une classe de 12 étudiants doit être divisée en groupes d'études de chacun trois étudiants. De combien de manières cela peut-il être fait si

1. les groupes ont tous des sujets d'étude différents?
2. les groupes étudient le même sujet?

Exercice 4. Donner deux démonstrations de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

Exercice 5. Prouver, pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 .$$

Exercice 6. Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?

Exercice 7. Pour $n \geq 1$, que vaut la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec k pair ?

Exercice 8. Dans le triangle de Pascal, montrer que le produit des 6 voisins d'un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est toujours un carré parfait.

Exercice 9. Que vaut

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad ?$$

Exercice 10. Que vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad ?$$

Maths Discrètes

Solutions TP 2

Exercice 1

1. $\binom{7}{5} = 21$
2. $\binom{10}{5} \binom{5}{3} \binom{2}{2} = 2520$
3. $\binom{4}{1} = 4$ ou $\binom{4}{3} = 4$ puisque 4 emplacements et 1 pot de confiture, 3 pots de miel

Exercice 2

1. $\binom{4}{1} \binom{10}{4} = 840$, choix de la couleur puis des cartes
2. $\binom{4}{2} \binom{10}{2} \binom{10}{2} + \binom{4}{1} \binom{10}{3} \binom{3}{1} \binom{10}{1}$, choix des cartes pour une main de 2 cartes de chaque couleur, plus choix des cartes pour une main de 3 cartes d'une couleur, 1 de l'autre
3. $\binom{4}{3} \binom{3}{1} \binom{10}{2} \binom{10}{1} \binom{10}{1}$, choix des couleurs puis de celle sur 2 cartes, puis choix des cartes
4. 10^4 ou $\binom{4}{4} \binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1}$

Exercice 3

1. $\binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}$
2. $\frac{\binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{4!}$, pour éviter les groupes répétés en ordre différent

Exercice 4

Binome de Newton,

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1^k) (1^{n-k})$$
$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Nombre de représentations de $\{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles

- chaque élément pris ou non pour le 1^{er} sous-ensemble, 2^n
- chaque sous-ensemble, de taille k , $\binom{n}{k}$

Exercice 5

par le binome de Newton, si $x = -1$ et $y = 1$, alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = (-1+1)^n$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Exercice 6

$$((x+y)^n)' = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)'$$
$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}$$
$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}$$
$$\Downarrow \text{comme } \binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1} \Downarrow$$
$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} y^{n-k},$$
$$n(x+y)^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

↓ si on prend $x = y = 1$, alors: ↓

$$n2^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$$

Exercice 7

$$\sum_{k \text{ pair}=0}^n \binom{n}{k}; \text{ pour } (-1+1)^n;$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}}^n \binom{n}{k}$$

Exercice 8

Dans le triangle de Pascal

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdots \\ &= \frac{(n-1)!^2}{(k-1)!^2(n-k)!^2} \frac{n!^2}{(k+1)!^2(n-k-1)!^2} \frac{(n+1)!^2}{k!^2(n-k+1)!^2} \\ &= \binom{n-1}{k-1}^2 \binom{n}{k+1}^2 \binom{n+1}{k}^2 \end{aligned}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k! (n-k)!} \\
 &\Downarrow \text{si } k=0, \text{ le tout vaut } 0. \quad k/k! \rightarrow 1/(k-1) \Downarrow \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \\
 &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \\
 &\Downarrow \text{où } L = k-1 \Downarrow \\
 &= n \sum_{L=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{L! (n-1-L)!} \\
 &= n 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{n! (n+1)}{(k+1) k! (n-k)!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\
 &\Downarrow \text{pour arriver à } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}, \text{ il faut pour } k=0 \Downarrow \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{0} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)
 \end{aligned}$$