**MATH-F307 - Mathématiques discrètes**

# Séance 11 (12 décembre 2018)

**Exercice 1.**
Que vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{10^n} \quad ?$$

(Rappel : $H_n$ est le $n$-ème nombre harmonique.)

**Exercice 2.** (Examen janvier 2011.)
Calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{10^n}$

**Exercice 3.** (Examen août 2011.)
Calculer la somme de chacune des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

**Exercice 4.**
Trouver les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle de $(2^n+3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, en forme close.

**Exercice 5.** (Examen Janvier 2018)
Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 4, a_1 = 7$ et pour $n \geq 2$,

$$a_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2} + 7n + 5/2.$$

1. Calculez $a_n$ avec la méthode vue au chapitre sur les récurrences linéaires.

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = 4, b_1 = 7$ et pour $n \geq 2$,

   $$b_n = 7b_{n-1} + 8b_{n-2}.$$

   Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ la fonction génératrice ordinaire de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminez $f(x)$.

3. À l'aide de $f(x)$, retrouvez $b_n$ pour $n \geq 2$.

**Exercice 6.** Un collectionneur excentrique rafolle des pavages de rectangles $2 \times n$ par des dominos verticaux $2 \times 1$ et horizontaux $1 \times 2$. Il paye sans hésiter 4Euro par domino vertical et 1Euro par domino horizontal. Pour combien de pavages sera-t-il prêt à payer $n$Euro ?

**Exercice 7.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par $a_n$ le nombre de manières de rendre $n$ eurocents de monnaie avec des pièces de 1, 5 et 10 eurocents.

1. Déterminer $a_n$ pour $n \in \{0, \dots, 10\}$.

2. Trouver la fonction génératrice ordinaire $A(x)$ de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer $a_n$ pour $n \in \{2010, 2011\}$.

# Mathématiques discrètes

Sceance 11

## Exercice 1

La fonction génératrice ordinaire de la suite de nombre harmoniques $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{1}{1-x} ln \frac{1}{1-x}$

Donc ici, $x = \frac{1}{10}$ et on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{10}{9} ln \left(\frac{10}{9}\right)$$

## Exercice 2

1. $x = \frac{1}{2}$ donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2ln(2)$$

2. La fonction génératrice ordinaire de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé est

   $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

   Ici, $k = 2$ et $x = \frac{1}{10}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{10}{9^3}$$

## Exercice 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0}$, afin d'obtenir une somme depuis $n = 0$

   $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$, voir Ch5 slide 38

   $= 1$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{2^n} - \left(0\frac{1}{2^0}\right)$
$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$, voir Ch5 slide 44 ou juste connaitre pour $n = \binom{n}{1}$
$= 2$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \int \frac{1}{1-x} \ dx$, si on admet $a_0 = 0$
$= ln(\frac{1}{1-x})$, voir Ch5 slide 47
$= ln(2)$

# Exercice 4

$a_n = 2^n + 3^n$
FGO:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 3^n)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3^n)x^n \\ &= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}\end{aligned}$$

FGE:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 3^n)\frac{x^n}{n!} = e^{2x} + e^{3x}$$

puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{x^n}{n!} = e^{\lambda x}$.

# Exercice 5

$a_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2} + 7n + \frac{5}{2}$ $\qquad$ $a_0 = 4,\ a_1 = 7,\ n \geq 2$

1. $a_n = \frac{3}{2}8^n + \frac{7}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}n - 1$

2.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n x^n \\ &= 4 + 7x + \sum_{n=2}^{\infty}(7b_{n-1} + 8b_{n-2})x^n \\ &= 4 + 7x + 7x\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} + 8x^2\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2}x^{n-2} \\ &= 4 + 7x + 7x(f(x) - b_0) + 8x^2 f(x), \text{ et } b_0 = 4 \\ &= 4 - 21x + f(x)(7x + 8x^2) \\ &= \frac{21x - 4}{8x^2 + 7x - 1}\end{aligned}$$

3. on factorise $8x^2 + 7x - 1 = 0$, ce qui donne $(x+1)(8x-1) = 0$

$$\frac{21x-4}{8x^2+7x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{8x-1}$$
$$21x - 4 = A(8x-1) + B(x+1)$$
$$21 = 8A + B \text{ et } -4 = -A + B$$
$$A = \frac{25}{9}$$
$$B = \frac{-11}{9}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{21x-4}{8x^2+7x-1} \\ &= \frac{25}{9}\frac{1}{1+x} + \frac{11}{9}\frac{1}{1-8x} \\ &= \frac{25}{9}\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{11}{9}\sum_{n\geq 0}^{\infty} 8^n x^n \end{aligned}$$

comme $b_n = [x^n]f(x)$,

$$b_n = \frac{25}{9}(-1)^n + \frac{11}{9}8^n$$

## Exercice 6

Pour $n$, le prix total d'un pavage, de montant $4x + 2y$ euros, où $x$ est le nombre de dominos verticaux et $y$ le nombre de dominos horizontaux. Le prix total $n$ est donc toujours pair.
Prenons $a_n$, le nombre de pavages à $n$ euros:
→ si $n$ est impair, $a_n = 0$
→ si $n$ est pair, $a_n = a_{n-4} + a_{n-2}$, puisque si on prend un domino vertical on retire 4 du budget total, et si on prend un domino horizontal on retire 2 du budget total (un domino horizontal en implique un 2ème pour un pavage de hauteur 2)
on connait:
→ $a_0 = 1$, une seule manière de dépenser: rien.
→ $a_1 = 0$, impair
→ $a_2 = 1$, une seule manière de dépenser: 2 horizontaux
→ $a_3 = 0$, impair
→ $a_4 = 2$, soit 4 horizontaux, soit 1 vertical

on se retrouve donc avec:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \sum_{n=4}^{\infty}(a_{n-2} + a_{n-4})x^n \\
&= 1 + x^2 + x^2\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + x^4\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4}x^{n-4} \\
&= 1 + x^2 + x^2(A(x) - a_0) + x^4A(x) \\
&= 1 + A(x)(x^2 + x^4) \\
&= \frac{1}{1 - x^2 - x^4}
\end{aligned}$$

sachant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \tfrac{x}{1-x-x^2}$$

on obtient:

$$a_n = \begin{cases} F_{\frac{n}{2}} & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

# Exercice 7

1. $a_0 = 1$, tout comme $a_1$ à $a_4$
   $a_5 = 2$, comme $a_6$ à $a_9$
   $a_{10} = 4$

2. *Il existe une résolution similaire Ch5 slides 66-71*

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} x^{1n_1}\right)\left(\sum_{n_5=0}^{\infty} x^{5n_5}\right)\left(\sum_{n_{10}=0}^{\infty} x^{10n_{10}}\right) \\
&= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^10} \\
&= \left(\frac{1}{1-x} \times \frac{1+x+x^2+...+x^9}{1+x+x^2+...+x^9}\right)\left(\frac{1}{1-x^5} \times \frac{1+x^5}{1+x^5}\right)\frac{1}{1-x^{10}} \\
&= \frac{1+x+x^2+...+x^9}{(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+...+(x^9-x^{10})} \times \frac{1+x^5}{1-x^{10}} \times \frac{1}{1-x^{10}} \\
&= \frac{(1+x+x^2+...+x^9)(1+x^5)}{(1-x^{10})^3} \\
&= \frac{1}{(1-x^{10})^3}\sum_{i=0}^{14} c_i x^i
\end{aligned}
$$

la somme représente un polynome de degré 14, puisque le plus haut degré est $x^9x^5 = x^{14}$ pour $c = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$

$$
= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+2}{2} x^{10m} \sum_{i=0}^{14} c_i x^i
$$

comme on sait que $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$

on veut couvrir les 14 différentes possibilités de $c_i$ pour $i \in \{0, ..., 14\}$, qui heureusement sont en trois groupes:
$\rightarrow i \in \{0, ..., 4\}$, $c = 1$
$\rightarrow i \in \{5, ..., 9\}$, $c = 2$
$\rightarrow i \in \{10, ..., 14\}$, $c = 1$
on peut couvrir le premier et le troisième cas en même temps, puisque pour $a \in \{0, ..., 4\}$, on a $b = 10 + a$ où $b \in \{10, ..., 14\}$

on pose donc $n = 10m + p$ et $q = 10 + p$, pour $p \in \{0, ..., 9\}$
si $p \in \{0, ..., 4\}$, on peut écrire
$$\begin{aligned} n &= 10m + p \\ &= 10(m-1) + (10+p) \\ n &= 10(m-1) + q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } a_n =& [x^n]A(x) \\ =& [x^{10m+p}]A(x) + [x^{10(m-1)+q}]A(x) \\ =& \binom{m+2}{2} c_p + \binom{(m-1)+2}{2} c_q \\ =& \binom{m+2}{2} + \binom{m+1}{2} \end{aligned}$$

comme $p \in \{0, ..., 4\}$ et $q \in \{10, ..., 14\}$, on sait que $c_p = c_q = 1$

si $p \in \{5, ..., 9\}$, alors $c_p = 2$

$$\text{donc } a_n = 2\binom{m+2}{2}$$

on se retrouve alors avec

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{2} \right) \sum_{p=0}^{4} x^{10n+p} + 2\binom{n+2}{2} \sum_{p=5}^{9} x^{10n+p} \right]$$

3. pour $n = 2010$, $m = 201$ et $p = 0$:

$$\begin{aligned} a_{2010} &= \left[x^{10(201)+0}\right] A(x) \\ &= \binom{201+2}{2} + \binom{201+1}{2} \\ &\text{puisque } p = 0 \\ &= \binom{203}{2} + \binom{202}{2} \end{aligned}$$

pour $n = 2011$, $m = 201$ et $p = 1$, ce qui donne le même résultat.

si on a $n = 2018$, alors $m = 201$ et $p = 8$:

$$\begin{aligned} a_{2018} &= \left[x^{10(201)+8}\right] A(x) \\ &= 2\binom{201+2}{2} \\ &= 2\binom{203}{2} \end{aligned}$$