Scéance 7

07/11/2018

5.

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k}$$

- $A_1^n = \sum_{k=0}^{n} k^1 \binom{n}{k}$

car si $k=0$ alors le tout est 0 donc ne change rien à la somme

$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

propriété : $\binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1}$ Ch1 sl59

$= \sum_{k=1}^{n} \boxed{n \binom{n-1}{k-1}}$

car n constante (et donc indépendante)

$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$

$\ell = k-1$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$

binome de Newton pour $(1+1)^{n-1}$ Ch 1 sl68

$$\boxed{= n\, 2^{n-1}}$$

- $A_2^n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

car si $k=0$ alors ne change rien à la somme

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$

simplification entre k^2 et $k!$

$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

développement de $n!$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$= n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1}$

$\ell = k-1$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \binom{n-1}{\ell}$

développement de $(\ell+1)$

$= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{\ell}$

simplification comme pour A_1^n ; binome de Newton

$\to \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

donc

$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = (n-1) 2^{n-2}$

$= n \cdot \boxed{(n-1) 2^{n-2}} + n \boxed{2^{n-1}}$

$= n \left[(n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1} \right]$

$= n 2^{n-2} \left[(n-1) + 2 \right]$

$$\boxed{= n(n+1) 2^{n-2}}$$

$$\bullet\ A_r^n = n\left(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1}\right)$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} k^{r-1}\binom{n}{k} - n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\binom{n-1}{k}$$

développement
Sans $k=0$
(au cas où)

$$= n\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\left[\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}\right]\right] + n.n^{r-1}\binom{n}{n}$$

Addition/Induction
Ch1 sl61

$$= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\binom{n-1}{k-1}} + n^r\binom{n}{n}$$

Absorption/Extraction
Ch1 sl58

$$= n\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1}\boxed{\frac{k}{n}\binom{n}{k}} + n^r\binom{n}{n}$$

car n constant et $k^{r-1}.k = k^{(r-1)+1} = k^r$

$$= \frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k^{r}\binom{n}{k} + n^r\binom{n}{n}$$

$n^r\binom{n}{n}$ cas où $k=n$ donc ajout à la somme.

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{r}\binom{n}{k}$$

puisque $k=0$ valable aussi

$$\boxed{= A_r^n}$$