

Maths Discrètes

Solutions TP 7

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1+1)^i \\
 &= (2+1)^n \\
 &= 3^n
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} (i+1) 2^i &= \sum_{i=0}^n (n+1) \frac{n!}{i!(n-i)!} 2^i \\
 &= (n+1)(2+1)^n \\
 &= 3^n(n+1)
 \end{aligned}$$

Exercice 3

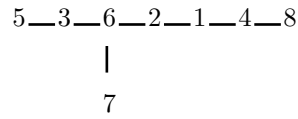
- 8, 2, 8, 2, 8, 2
- 9, 4, 10, 13, 1, 10, 1, 10, 4, 8, 1, 13, 9

Exercice 4

1.

$$\begin{array}{c}
 2 \text{---} 4 \text{---} 1 \text{---} 6 \\
 | \\
 3 \text{---} 5
 \end{array}$$

2.



Exercice 5

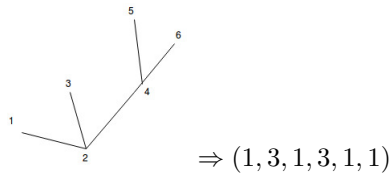
voir page suivante.

Exercice 6

Algorithme pour Prüfer (Wikipédia les enfants!)

Exercice 7

Un vecteur de degré contient les degrés de chaque sommet d'un graphe:



La suite est à prendre avec des pincettes, je n'ai pas pris le temps d'y réfléchir donc c'est du décodage de notes pas très claires - si vous avez plus d'idées que moi je suis tout ouïe.

Donc la somme des degrés des n sommets est $\sum_{i=0}^n d_i - 1 = n - 2$ donc:

$$\begin{aligned}
 (n \times 1)^{n-2} &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k 1^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k \\
 &= \sum_{(d_1, \dots, d_n)} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}
 \end{aligned}$$

5.

$$A_r^n := \sum_{k=0}^n k^r \binom{n}{k}$$

$$A_1^n = \sum_{k=0}^n k^1 \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l}$$

$$= n 2^{n-1}$$

car si $k=0$ alors le tout est 0 donc ne change rien à la somme

propriété: $\binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1}$ Ch 159

car n constante (et donc indépendante)

$l = k-1$

binôme de Newton pour $(1+1)^{n-1}$ Ch 168

$$A_2^n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \cdot n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l}$$

$$= n \sum_{l=0}^{n-1} l \binom{n-1}{l} + n \sum_{l=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{l}$$

$$= n \left[(n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1} \right]$$

$$= n \left[(n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1} \right]$$

$$= n 2^{n-2} [(n-1) + 2]$$

$$= n (n+1) 2^{n-2}$$

car si $k=0$ alors ne change rien à la somme

simplification entre k^2 et $k!$

développement de $n!$

$l = k-1$

développement de $(l+1)$

simplification comme pour A_1^n ; binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = (n-1) 2^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet A_r^n &= n \left(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1} \right) \\
 &= n \sum_{k=1}^n k^{r-1} \binom{n}{k} - n \sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1} \binom{n-1}{k} \quad \begin{array}{l} \text{développement} \\ \text{sans } k=0 \\ \text{(au cas où)} \end{array} \\
 &= n \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1} \left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] \right] + n \cdot n^{r-1} \binom{n}{n} \quad \text{Addition/Induction} \\
 &= n \sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1} \binom{n-1}{k-1} + n^r \binom{n}{n} \quad \text{Ch1 s161} \\
 &= n \sum_{k=1}^{n-1} k^{r-1} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} + n^r \binom{n}{n} \quad \text{Absorption/Extraction} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^r \binom{n-1}{k-1} + n^r \binom{n}{n} \quad \text{Ch1 s158} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^r \binom{n}{k} + n^r \binom{n}{n} \quad \begin{array}{l} \text{car } n \text{ constant et} \\ k^{r-1} \cdot k = k^{(r-1)+1} \\ = k^r \end{array} \\
 &= \sum_{k=1}^n k^r \binom{n}{k} \quad \begin{array}{l} n^r \binom{n}{n} \text{ cas où } k=n \text{ donc} \\ \text{ajout à la somme.} \end{array} \\
 &= A_r^n \quad \text{puisque } k=0 \text{ valable aussi}
 \end{aligned}$$