MATH-F307 - Mathématiques discrètes

Séance 7 (7 novembre 2018)

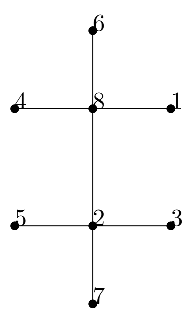
Exercice 1.

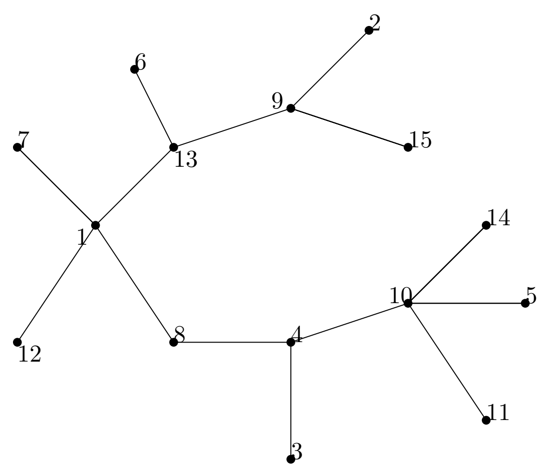
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \quad ?$$

Exercice 2.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^i = \quad ?$$

Exercice 3. Construire le code de Prüfer des arbres suivants:





Exercice 4. Construire l'arbre associé aux codes de Prüfer suivants:

1. $(4, 1, 3, 1)$;
2. $(3, 6, 6, 2, 1, 4)$.

Exercice 5. (Examen août 2011.) Pour des naturels n et r, on pose

$$A_r^n := \sum_{k=0}^{n} k^r \binom{n}{k} .$$

- Sur base de cette relation de récurrence, donner une formule pour A_1^n et A_2^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux, démontrer que les nombres A_r^n vérifient la relation de récurrence $A_r^n = n(A_{r-1}^n - A_{r-1}^{n-1})$.

Exercice 6. Ecrire l'algorithme permettant de calculer le code de Prüfer $c = c(T)$ d'un arbre T sur $[n]$. Trouver ensuite un algorithme permettant, étant donné un code de Prüfer $c \in [n]^{n-2}$, de trouver l'arbre T correspondant. Justifier soigneusement que votre algorithme est correct.

Exercice 7. Vérifier que

$$\sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \binom{n-2}{d_1-1,\ldots,d_n-1} = n^{n-2}$$

où la somme est prise sur les vecteurs des degrés des arbres sur $[n]$.

Exercice 8. [Just for fun] (Difficile) Calculer l'inverse de la matrice $(n+1)\times(n+1)$ formée des $n+1$ premières lignes du triangle de Pascal. Si on appelle cette matrice $A = (a_{ij})$, alors $a_{ij} = \binom{i}{j}$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $j = 0, \ldots, n$.

Maths Discrètes

Solutions TP 7

Exercice 1

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+1)^i \\
&= (2+1)^n \\
&= 3^n
\end{aligned}
$$

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}(i+1)2^i &= \sum_{i=0}^{n}(n+1)\frac{n!}{i!(n-i)!}2^i \\
&= (n+1)(2+1)^n \\
&= 3^n(n+1)
\end{aligned}
$$

Exercice 3

- $8, 2, 8, 2, 8, 2$
- $9, 4, 10, 13, 1, 10, 1, 10, 4, 8, 1, 13, 9$

Exercice 4

1.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 6 \\
 & & 3 \arrow[r] & 5
\end{tikzcd}
$$

2.

5 — 3 — 6 — 2 — 1 — 4 — 8
|
7

Exercice 5

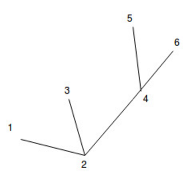
voir page suivante.

Exercice 6

Algorithme pour Prüfer (Wikipédia les enfants!)

Exercice 7

Un vecteur de degré contient les degrés de chaque sommet d'un graphe:



$\Rightarrow (1, 3, 1, 3, 1, 1)$

La suite est à prendre avec des pincettes, je n'ai pas pris le temps d'y réfléchir donc c'est du décodage de notes pas très claires - si vous avez plus d'idées que moi je suis tout ouïe.

Donc la somme des degrés des n sommets est $\sum_{i=0}^{n} d_i - 1 = n - 2$ donc:

$$\begin{aligned}
(n \times 1)^{n-2} &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k \; 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} n^k \\
&= \sum_{(d_1,\ldots,d_n)} \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}
\end{aligned}$$