Maths Discrètes

Rappels

Scéance 1

Fonction injective. $\nexists a, b \in A$ tq. $f(a) = f(b)$

si un élément de l'ensemble de départ peut avoir plusieurs éléments liés dans l'ensemble de fin, chaque élément de l'ensemble de fin n'est lié qu'à un et un seul élément de départ.

Fonction surjective $\forall b \in B : \exists a \in A$ tq $f(a) = b$.

chaque élément de l'ensemble de fin est lié à au moins un élément de l'ensemble de départ.

Fonction bijective à la fois <u>injective</u> et <u>surjective</u>.

Scéance 2

Permutations le nombre de permutations possibles de $n \in \mathbb{N}$ est $\underline{n!}$

Choix le nombre de selections possibles de $k \in \mathbb{N}$ indiscernables parmi $n \in \mathbb{N}$ est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Binome de Newton.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Scéance 3

Combinaison avec répétition le nombre de manières de sélectionner $\underline{s}$ objets ~~pa~~ parmi $\underline{d}$ types d'objets ou arranger sur $\underline{d}$ emplacements, sans ordre et avec répétitions

est $\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{s+d-1}{s}$

Sélection.

k objets parmi **n**	ordonnée	non-ordonnée
sans répétition	$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
avec répétition	n^k	$\binom{n+k-1}{n}$

Somme parallèle $\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}$

Scéance 4

Graphes non-dirigés pour $u, v \in V$ et $e \in E$,

$$\{u, v\} = \{v, u\}$$

- u et v sont les extrémités de e
- u et v sont adjacents/voisins
- u et v sont incidents à e

pour $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à v,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$ (handshaking theorem)

Graphes dirigés pour $u, v \in V$ et $e \in E$,

$$\{u, v\} \neq \{v, u\}$$

- e est une arête sortant de u
- e est une arête entrant dans v.
- v est un successeur de u
- u est un prédecesseur de v.

pour $d^+(v)$, le nombre d'arêtes entrant dans v et $d^-(v)$, le nombre d'arêtes sortant de v,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

Scéance 5

Graphe simple non-dirigé, sans boucle ni arête multiple.

- si toutes les arêtes se trouvent dans la même composante connexe, alors si:

→ tous les degrés sont pairs: <u>Circuit d'Euler</u>

→ tous les degrés sont pairs sauf max 2: <u>Chemin d'Euler</u>

Faiblement connexe (graphe dirigé) si 2 sommets sont toujours liés, sans prendre en compte la direction des arcs.

Fortement connexe (graphe dirigé) si 2 sommets sont toujours liés en prenant la direction des arcs en considération.

Maths Discrètes

Rappels.

Scéance 6.

Arbre m-aire entier

- à n sommets ; a :
  - → $i = (n-1)/m$ sommets internes.
  - → $l = [(m-1)n+1]/m$ feuilles
- à i sommets internes ; a :
  - → $n = mi + 1$ sommets
  - → $l = (m-1)i + 1$ feuilles.
- à l feuilles ; a :
  - → $n = (ml-1)/(m-1)$ sommets
  - → $i = (l-1)/(m-1)$ sommets internes
- $n = i + l$.
- $h \geq \lceil \log_m l \rceil$, hauteur de l'arbre

Arbre couvrant minimal

- Algorithme de Prim
  - on ajoute un sommet adjacent dont l'arête à le poids minimal à l'arbre en création.
- Algorithme de Kruskal
  - on ajoute les arêtes par ordre croissant de poids, ignorant celles qui deviennent redondantes (créant un cycle).

Scéance 7

Code de Prüfer

pour chaque sommet n'ayant qu'un et un seul sommet adjacent, celui de poids le plus faible est retiré, et le sommet adjacent est retenu, jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 sommets

Scéance 8

Nombre d'or $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Equations de récurrence eg: $a_n = x a_{n-1} + x a_{n-2}$, $x, y \in \mathbb{R}$

* quand les coefficients sont <u>constants</u>
  - la solution générale de l'équation homogène associée est trouvée.
  - la solution particulière est trouvée si l'équation n'est pas homogène.
* quand les coefficients ne sont <u>pas</u> constants
  - on improvise pour l'equation HA (good luck)
  - idem que quand constant et pas homogène.

→ la somme des solutions fourni la solution spécifique.

Scéance 9.

Comportement asymptotique.

- $f(n) \in O(g(n))$ si:

  $\exists\, C \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ tq $f(n) \leq C g(n) : \forall n \in N$

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ si

  $\exists\, C \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ tq $f(n) \geq C g(n) : \forall n \in N$

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ si:

  $f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$.

Master theorem. pour $a(n) = \alpha\, a\left(\frac{n}{\beta}\right) + f(n)$,
où $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ et $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

1. $f(n) \in O(n^{\log_\beta \alpha - \varepsilon})$* alors (* pour $\varepsilon > 0$).

   $a(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$

2. $f(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$, alors

   $a(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha} \log_2 n)$

3. $f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ et $\alpha f(n/\beta) \leq C f(n)$ pour $C < 1$, alors

   $a(n) \in \Theta(f(n))$.