Maths Discrètes

Solutions

Séance 8

1. cas 1 : 1 marche , reste $n-1$
   cas 2 : 2 marches, reste $n-2$
   pour a_n, le nombre de marches à monter,
   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
   soit F_{n+1} (et pas F_n car pas de répétition de 1)
   donc pour $n=30$, F_{31}

2. $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ ou F_{n+1}

? 3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt5}\left[\varphi^{n+1} - \bar\varphi^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt5}\left[\varphi^{n} - \bar\varphi^{n}\right]}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt5}(\varphi - \bar\varphi)$$
$$= 1$$

4. $n=1$; $\varphi^1 = 1 \times \varphi + 0$
   $n=2$; $\varphi^2 = 1 \times \varphi + 1$
   $n=n+1$; $\varphi^{n+1} = (F_n + F_{n-1})\varphi + F_n$
   $= F_n(\varphi + 1) + \varphi F_{n-1}$
   $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$

5. $n=3$; $2 > \varphi$
   $n=n-1$; $\varphi^2 F_{n-1} > \varphi^{n-1}$
   $(\varphi+1)F_{n-1} > F_{n-1}\varphi + F_{n-2}$
   $F_{n-1} > F_{n-2}$
   $n=n+1$ $F_n + F_{n-1} > F_{n-1}\varphi + F_{n-2}$
   $F_{n-1} + F_{n-2} > F_{n-1}(\varphi - 1) + F_{n-2}$
   $2F_{n-1} > F_{n-1}\varphi$

6.1. $a_n - \frac{1}{2}a_n = 1$
   - EHA : $x - \frac{1}{2} = 0$; solution : $C\frac{1}{2}^n$
   - si $\hat a_n = A$, alors $A = \frac{1}{2}A + 1$
     $A = 2$; $\hat a_n = 2$

   $\Rightarrow a_n = 2 + C\frac{1}{2}^n$

   pour a_0 ; $2 + C = 1$
   $C = -1$

   $\Rightarrow \boxed{a_n = 2 - \frac{1}{2}^n}$

   $\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

2. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$
   - EHA : $x^2 - 5x + 6 = 0$; solution : $A2^n + B3^n$

   $\Rightarrow a_n = A2^n + B3^n$
   pour a_0 ; $A + B = -1$
   pour a_1 ; $2A + 3B = 1$; $A = -4$ et $B = 3$
   $\Rightarrow a_n = 3(3)^n - 4(2)^n$
   $\boxed{a_n = 3^{n+1} - 2^{n+2}}$

6.3. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$

- EHA : $x^2 - 6x + 9 = 0$; solution : $(An+B)3^n$

$\Rightarrow a_n = (An+B)3^n$

pour a_0 ; $B = 1$

pour a_1 ; $(A+1)3 = 9$

$A = 2$

$\Rightarrow \boxed{a_n = (2n+1)3^n}$

4. $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2^n$

- EHA : $x^2 - 4x + 3 = 0$; solution : $A3^n + B1^n$
- si $\hat{a}_n = C2^n$, alors $C2^n = 4C2^{n-1} - 3C2^{n-2} + 2^n$

$4C2^{n-2} = 8C2^{n-2} - 3C2^{n-2} + (4 \times 2^{n-2})$

$C = -4$

$\Rightarrow a_n = A3^n + B - 2^{n+2}$

pour a_0 ; $A + B - 4 = 1$

$A + B = 5$

pour a_1 ; $3A + B - 8 = 11$

$2A = 14$; $A = 7$ et $B = -2$

$\Rightarrow \boxed{a_n = 7 \times 3^n - 2^{n+2} - 2}$

7.1. $a_n = \frac{1}{5}\left[4^{n+1} + (-1)^n\right]$; solution générale : $a_n = A4^n + B(-1)^n$

2. $a_n = 5 - 2^{n+2} + 3^n$; solution générale : $a_n = A1^n + B2^n + C3^n$
3. $a_n = \frac{1}{9}\left[8 - 6n + (-2)^n\right]$; solution générale : $a_n = A(-2)^n + (Bn + C)$
4. $a_n = An^2 + Bn + C$
5. $a_{n-4} - 4a_n = 0$

- EHA : $x^4 - 4 = 0$

$x^4 = 4$

$x = \sqrt{2}$, racine quadruple

?

$\Rightarrow \boxed{a_n = (An^3 + Bn^2 + Cn + D)(\sqrt{2})^n}$

8. $a_{n+2} - (2\cos x)a_{n+1} + a_n = 0$

- EHA : $x^2 - (2\cos x)x + 1 = 0$

$x = \cos x \pm \sqrt{\cos^2 x - 1}$

$x = \cos x \pm i\sin x$

$\Rightarrow a_n = A(\cos x + i\sin x)^n + B(\cos x - i\sin x)^n$

pour a_1 ; $A(\cos x + i\sin x) + B(\cos x - i\sin x) = \cos x$?

$\Leftrightarrow A i\sin x - B i\sin x = 0$

$A = B$

$\Leftrightarrow A\cos x + B\cos x = \cos x$

$A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$

recalculer avec e^{ix}

$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2}\left[(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n\right]}$

$\frac{1}{2}\left(e^{ixn} + e^{-ixn}\right) = \cos xn$

9.1. $a_n = \frac{1}{6}\left[7(-2)^n + 2n + 11\right]$; solution générale : $a_n = \frac{1}{6}(2n+11) + A(-2)^n$; $\tilde{a}_n = Bn + C$

2. $a_n = 3^n + (-9)^n$; solution générale : $a_n = 3^n + A1^n + B(-9)^n$; $\tilde{a}_n = C3^n$

3. $a_n = 2^n + \frac{1}{4}(n-1) + (An+B)3^n$; pour $\tilde{a}_n = C2^n + Dn + E$

Maths Discrètes

Solutions

Scéance 8 (suite)

9.4. $na_n - (n+3)a_{n-1} = n^2 + n$

• EHA : $na_n - (n+3)a_{n-1} = 0$

$$a_n = \frac{(n+3)}{n} a_{n-1}$$
$$= A \prod_{i=0}^{n-1} \frac{i+3}{i}$$
$$= A\,(n+1)(n+2)(n+3)\,\frac{1}{6}$$

• si $\tilde{a}_n = Bn^2 + Cn + D$, alors $n\tilde{a}_n - (n+3)\tilde{a}_{n-1} = n^2 + n$

↳ $-Bn^2 = n^2$

$B = -1$

↳ $5Bn - 2Cn = n$

$C = -3$

↳ $-3B + 3C - 3D = 0$

$D = -2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{6}A(n+1)(n+2)(n+3) - n^2 - 3n - 2 \\ &= A'(n+1)(n+2)(n+3) - (n+1)(-n-2) \end{aligned}}, \text{ où } A' = \tfrac{1}{6}A$$

Scéance 9

1. & 2. voir scéance 8.

3. $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

4.1. cas 1 : mot commençant avec la lettre A.
cas 2 : mot commençant par B ou C.
pour a_n, le nombre de mots de n lettres commançant par A,
et b_n, c_n le nombre de mots de n lettres commençant par B ou C respectivement

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = c_n$$

pour m_n, le nombre de mots de n lettres,

$$m_n = a_n + b_n + c_n$$
$$= b_{n-1} + c_{n-1} + m_{n-1} + m_{n-1}$$
$$= 2m_{n-1} + 2m_{n-2}$$

$m_n - 2m_{n-1} - 2m_{n-2} = 0$

• EHA : $x^2 - 2x - 2 = 0$; solution : $A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

$\Rightarrow m_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

pour m_1 ; $A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) = 3$

$2(A+B) + 2(A-B)\sqrt{3} = 6$

pour m_2 ; $4(A+B) + 2(A-B)\sqrt{3} = 8$

$A+B = 1$; $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \boxed{m_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n}$$

2. $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$; $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$; $c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = m_{n-1}$

$m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2}$

• EHA : $x^2 - 2x - 1 = 0$; solution : $A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$

et $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{2}{2}(1-\sqrt{2})$

$$\Rightarrow m_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$$

3. $m_n = 2m_{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{m_n = 3.2^{n-1}}$$