Maths Discrètes — Solutions

Scéance 8 (suite)

9.4. $na_n - (n+3)\,a_{n-1} = n^2 + n$

- EHA : $na_n - (n+3)\,a_{n-1} = 0$

$$a_n = \frac{(n+3)}{n}\,a_{n-1} = A\prod_{i=0}^{n-1}\frac{i+3}{i} = A\,(n+1)(n+2)(n+3)\,\frac{1}{6}$$

- si $\tilde{a}_n = Bn^2 + Cn + D$, alors $n\tilde{a}_n - (n+3)\tilde{a}_{n-1} = n^2 + n$

$\hookrightarrow -Bn^2 = n^2$
$B = -1$

$\hookrightarrow 5Bn - 2Cn = n$
$C = -3$

$\hookrightarrow -3B + 3C - 3D = 0$
$D = -2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{6}A(n+1)(n+2)(n+3) - n^2 - 3n - 2 \\ &= A'(n+1)(n+2)(n+3) - (n+1)(-n-2) \end{aligned}}, \text{ où } A' = \tfrac{1}{6}A$$

Scéance 9.

1. & 2. voir scéance 8.

3. $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

4.1. cas 1 : mot commençant avec la lettre A.
cas 2 : mot commençant par B ou C.
pour a_n, le nombre de mots de n lettres commançant par A,
et b_n, c_n le nombre de mots de n lettres commençant par B ou C respectivement

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1} \text{ et } b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = c_n$$

pour m_n, le nombre de mots de n lettres,

$$m_n = a_n + b_n + c_n = b_{n-1} + c_{n-1} + m_{n-1} + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 2m_{n-2}$$

$m_n - 2m_{n-1} - 2m_{n-2} = 0$

- EHA : $x^2 - 2x - 2 = 0$; solution : $A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

$\Rightarrow m_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$

pour m_1 ; $A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) = 3$
$2(A+B) + 2(A-B)\sqrt{3} = 6$

pour m_2 ; $4(A+B) + 2(A-B)\sqrt{3} = 8$

$A+B = 1$; $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \boxed{m_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n}$$

2. $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$; $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$; $c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = m_{n-1}$
$m_n = 2m_{n-1} + m_{n-2}$

- EHA : $x^2 - 2x - 1 = 0$; solution : $A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$

et $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$
$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$

$$\Rightarrow m_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$$

3. $m_n = 2m_{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{m_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$$

5\. 1. $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $f(n) = n^2$

$\log_\beta \alpha = 1$

$f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon = 1$

$2f(n/2) \leq Cf(n)$, pour $C < 1$

$2 \times \frac{1}{4} n^2 \leq Cn^2$

$\frac{1}{2} n^2 \leq Cn^2$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

2\. $\alpha = 1$, $\beta = \frac{10}{9}$, $f(n) = n$

$\log_\beta \alpha = 0$

$f(n) \in \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \varepsilon})$ pour $\varepsilon = 1$

$f(9n/10) \leq Cf(n)$, pour $C < 1$

$\frac{9n}{10} \leq n$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$

? X 3. $\log_\beta \alpha = 2$

$f(n) \in \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$ $\qquad (n^2 \log_2 n)$.

4\. $\log_\beta \alpha = \log_3 7$

$f(n) \in \Omega(n^{\log_3 7 + \varepsilon})$ pour $\varepsilon = 2 - \log_3 7$

$7f(n/3) \leq Cf(n)$, pour $C < 1$

$\frac{7}{9} n^2 \leq Cn^2$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

5\. $\log_\beta \alpha = \log_2 7$

$f(n) \in O(n^{\log_2 7 - \varepsilon})$ pour $\varepsilon = \log_2 7 - 2$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$

6\. $\log_\beta \alpha = \frac{1}{2}$

$f(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log_2 n)$

$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

7\. $T(n) - T(n-1) = n$

- EHA : $x - 1 = 0$; solution : $A1^n$
- si $T(n) = Bn^2 + Cn$, alors $2An - A + B = n$

$A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{T(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) + C}$ $\qquad \Theta(n^2)$

6\. $a_n = 2^{b_n}$ pour $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$, si on poursuit n jusqu'à 4 on peut voir

$b_n - \frac{1}{2} b_{n-1} - \frac{1}{2} b_{n-2} = 0$

- EHA : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$; solution : $A + B(-\frac{1}{2})^n$

$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{3}\left[1 - (-\frac{1}{2})^n\right]}$

7\. S_n : nombre de possibilités si la 1ère ligne est dans l'ordre.

alors $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$

donc $S_n = F_{n+1}$

quand la 1ère ligne n'est pas dans l'ordre, alors c'est une permutation de l'ordre.

donc il y a $\underline{n!}\,F_{n+1}$ matrices.

8\.