1.贝叶斯理论

1.贝叶斯定理

1.1贝叶斯公式

“如果一个袋子中共有 10 个球，分别是黑球和白球，但是我们不知道它们之间的比例是怎么样的，现在，**仅通过摸出的球的颜色，是否能判断出袋子里面黑白球的比例**？”

上述问题可能与我们高中时期所接受的的概率有所冲突，因为你所接触的概率问题可能是这样的：“一个袋子里面有 10 个球，其中 4 个黑球，6 个白球，如果你随机抓取一个球，那么是黑球的概率是多少？”毫无疑问，答案是 0.4。这个问题非常简单，因为我们事先知道了袋子里面黑球和白球的比例，所以很容易算出摸一个球的概率，**但是在某些复杂情况下，我们无法得知“比例”，此时就引出了贝叶斯提出的问题。**

在统计学中有两个较大的分支：一个是“频率”，另一个便是“贝叶斯”，它们都有各自庞大的知识体系，而“贝叶斯”主要利用了**“相关性”**一词。

下面以通俗易懂的方式描述一下“贝叶斯定理”：通常，

事件 A 在事件 B 发生的条件下发生的概率：**P(A|B)**

事件 B 在事件 A 发生的条件下发生的概率：**P(B|A)**

它们两者的概率并不相同，P(A|B) **不等于** P(B|A)

但是它们两者之间存在一定的相关性，并具有以下公式（称之为“贝叶斯公式”）：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

首先我们要了解上述公式中符号的意义：

- P(A) 这是概率中最基本的符号，表示 A 出现的概率
- P(B|A) 是**条件概率**的符号，表示事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，条件概率是“贝叶斯公式”的关键所在，它也被称为**“似然度”**。
- P(A|B) 是**条件概率**的符号，表示事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，这个计算结果也被称为“后验概率”。

有上述描述可知，贝叶斯公式可以预测事件发生的概率，**两个本来相互独立的事件，发生了某种“相关性”，**此时就可以通过“贝叶斯公式”实现预测。

1.2 先验概率

在**贝叶斯**看来，世界并非静止不动的，而是动态和相对的，他希望利用已知经验来进行判断，那么如何用经验进行判断呢？这里就必须要提到“先验”和“后验”这两个词语。

我们先讲解“先验”，其实“先验”就相当于“未卜先知”，在事情即将发生之前，做一个概率预判。比如从远处驶来了一辆车，是轿车的概率是 45%，是货车的概率是 35%，是大客车的概率是 20%，在你没有看清之前基本**靠猜**，此时，我们把这个概率就叫做“先验概率”。

1.3 后验概率

在理解了“先验概率”的基础上，我们来研究一下什么是“后验概率？”

我们知道每一个事物都有自己的特征，比如前面所说的轿车、货车、客车，它们都有着各自不同的特征，距离过远的时候，我们无法用肉眼分辨，而当距离达到一定范围内就可以根据**各自的特征再次做出概率预判**，这就是后验概率。

比如轿车的速度相比于另外两者更快可以记做 P(轿车|速度快) = 55%，而客车体型可能更大，可以记做 P(客车|体型大) = 35%。

如果用**条件概率**来表述 P(体型大|客车)=35%，这种通过“车辆类别”推算出“类别特征”发生的的概率的方法叫作“似然度”。这里的似然就是“可能性”的意思。

1.5 朴素+贝叶斯

了解完上述概念，你可能对贝叶斯定理有了一个基本的认识，**实际上贝叶斯定理就是求解后验概率的过程，而核心方法是通过似然度预测后验概率，通过不断提高似然度，自然也就达到了提高后验概率的目的。**

朴素贝叶斯是一种简单的贝叶斯算法，因为贝叶斯定理涉及到了概率学、统计学，其应用相对复杂，因此我们**只能以简单的方式使用它**，比如天真的认为，所有事物之间的特征都是相互独立的，彼此互不影响。

2.朴素贝叶斯算法

2.1多特征分类问题

下面我们使统计学的相关知识解决上述分类问题，分类问题的样本数据大致如下所示：

C++

```
[特征 X1 的值,特征 X2 的值,特征 X3 的值,......,类别 A1]
[特征 X1 的值,特征 X2 的值,特征 X3 的值,......,类别 A2]
```

解决思路：这里我们先简单的采用 1 和 0 代表特征值的有无，比如当 X1 的特征值等于 1 时，则该样本属于 A1 的类别概率；特征值 X2 值为 1 时，该样本属于类别 A1 的类别的概率。

依次类推，然后最终算出该样本对于各个类别的概率值，哪个**概率值最大**就可能是哪个类。

上述思路就是贝叶斯定理的典型应用，如果使用条件概率表达，如下所示：

Apache

```
P(类别A1|特征X1，特征X2，特征X3，…)
```

上述式子表达的意思是：**在特征 X1、X2、X3 等共同发生的条件下，类别 A1 发生的概率**，也就是**后验概率。**

2.2朴素贝叶斯算法

上一节我们已经了解了贝叶斯公式，下面使用**贝叶斯公式将多特征分类**问题表达出来，如下所示：

$$P(c \mid \boldsymbol{x}) = \frac{P(c)P(\boldsymbol{x} \mid c)}{P(\boldsymbol{x})}$$

来估计**后验概率** P(**x** | c)的主要困难在于: 类条件概率P(**x** | c)是**所有属性**上的**联合概率**，难以从有限的训练样本直接估计而得。

为避开这个障碍，**朴素贝叶斯分类器(naive Bayes classifier)**采用了**"属性条件独立性假设"(attribute conditional independence assumption)**:对已知类别，假设所有属性相互独立。

$$P(c|x) = \frac{P(c)P(x|c)}{P(x)} = \frac{P(c)}{P(x)}\prod_{i=1}^{d} P(x_i|c)$$

换言之，假设每个属性独立地对分类结果发生影响，其表达式为：**（目标方程）**

$$h_{nb}(\boldsymbol{x}) = \arg\max_{c \in \mathcal{Y}} P(c) \prod^{d} P(x_i \mid c)$$

$c \in y \qquad i=1$

2.3朴素贝叶斯分类器的训练

朴素贝叶斯的训练就是基于数据集 D，来估计“类先验概率P(x)" ,并为每个属性估计条件概率。令 Dc表示训练集 D中第c 类样本组成的集合,若有充足的独立同分布样本，则很容易估计出“类先验概率”

$$P(c)=\frac{|D_c|}{|D|}$$

- 对离散属性而言

令 D_{c,x_i} 表示 D_c 中在第 i 个属性上取值为 x_i 的样本组成的集

则条件概率 $P(x_i|c)$ 可估计为

$$P(x_i \mid c)=\frac{|D_{c,x_i}|}{|D_c|}$$

- 对连续属性

可考虑概率密度函数

假定

$$p(x_i \mid c) \sim \mathcal{N}(\mu_{c,i},\sigma_{c,i}^2),$$

其中 $\mu_{c,i}$ 和 $\sigma_{c,i}^2$ 分别是第 c 类样本在第 i 个属性上取值的“均值”和“方差”

则有

$$p(x_i \mid c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{c,i}}\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_{c,i})^2}{2\sigma_{c,i}^2}\right)$$

2.4手算朴素贝叶斯实例

训练集：

表 4.3 西瓜数据集 3.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	密度	含糖率	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	0.697	0.460	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	0.774	0.376	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	0.634	0.264	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	0.608	0.318	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	0.556	0.215	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	0.403	0.237	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	0.481	0.149	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	0.437	0.211	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	0.666	0.091	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	0.243	0.267	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	0.245	0.057	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	0.343	0.099	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	0.639	0.161	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	0.657	0.198	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	0.360	0.370	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	0.593	0.042	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	0.719	0.103	否

测试样例为：

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	密度	含糖率	好瓜
测 1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	0.697	0.460	?

1、计算“类先验概率”

共有17个样本，其中 8个好瓜，9个坏瓜

$$P(\text{好瓜}=\text{是})=\frac{8}{17}\approx 0.471$$
$$P(\text{好瓜}=\text{否})=\frac{9}{17}\approx 0.529$$

2、为每个属性估计条件概率

（1）色泽 = 青绿

好瓜里“色泽=青绿”的 有 3 个，好瓜共 8 个

坏瓜里“色泽=青绿”的 有 3 个，坏瓜共 9 个

$$P_{\text{青绿}|\text{是}}=P(\text{色泽}=\text{青绿}\mid\text{好瓜}=\text{是})=\frac{3}{8}=0.375$$
$$P_{\text{青绿}|\text{否}}=P(\text{色泽}=\text{青绿}\mid\text{好瓜}=\text{否})=\frac{3}{9}\approx 0.333$$

（2）纹理 = 蜷缩

好瓜里“纹理 = 蜷缩”的 有 5 个，好瓜共 8 个

坏瓜里“纹理 = 蜷缩”的 有 3 个，坏瓜共 9 个

$$P_{\text{蜷缩}|\text{是}}=P(\text{根蒂}=\text{蜷缩}\mid\text{好瓜}=\text{是})=\frac{5}{8}=0.375$$
$$P_{\text{蜷缩}|\text{否}}=P(\text{根蒂}=\text{蜷缩}\mid\text{好瓜}=\text{否})=\frac{3}{9}\approx 0.333$$

（3）敲声 = 浊响

（4）纹理 = 清晰

（5）脐部 = 凹陷

（6）触感 = 硬滑

$$P_{\text{浊响}|\text{是}}=P(\text{敲声}=\text{浊响}\mid\text{好瓜}=\text{是})=\frac{6}{8}=0.750$$
$$P_{\text{浊响}|\text{否}}=P(\text{敲声}=\text{浊响}\mid\text{好瓜}=\text{否})=\frac{4}{9}\approx 0.444$$

$$P_{清晰|是} = P(纹理 = 清晰 \mid 好瓜 = 是) = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$P_{清晰|否} = P(纹理 = 清晰 \mid 好瓜 = 否) = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

$$P_{凹陷|是} = P(脐部 = 凹陷 \mid 好瓜 = 是) = \frac{6}{8} = 0.750$$

$$P_{凹陷|否} = P(脐部 = 凹陷 \mid 好瓜 = 否) = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

$$P_{硬滑|是} = P(触感 = 硬滑 \mid 好瓜 = 是) = \frac{6}{8} = 0.750$$

$$P_{硬滑|否} = P(触感 = 硬滑 \mid 好瓜 = 否) = \frac{6}{9} \approx 0.667$$

（7）密度 = 0.697

μ 和 σ^2 分别是“正样本”在密度属性上取值的“均值”和“方差”

$\mu = 0.574, \sigma^2 = 0.129^2$

$$p_{密度:\,0.697|是} = p(密度 = 0.697 \mid 好瓜 = 是)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.129} \exp\left(-\frac{(0.697 - 0.574)^2}{2 \cdot 0.129^2}\right) \approx 1.959$$

μ 和 σ^2 分别是“负样本”在密度属性上取值的“均值”和“方差”

$$p_{密度:\,0.697|否} = p(密度 = 0.697 \mid 好瓜 = 否)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.195} \exp\left(-\frac{(0.697 - 0.496)^2}{2 \cdot 0.195^2}\right) \approx 1.203$$

（8）含糖率 = 0.460

$$p_{含糖:\,0.460|是} = p(含糖率 = 0.460 \mid 好瓜 = 是)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.101} \exp\left(-\frac{(0.460 - 0.279)^2}{2 \cdot 0.101^2}\right) \approx 0.788$$

$$
\begin{aligned}
p_{\text{含糖: 0.460}|\text{否}} &= p(\text{含糖率} = 0.460 \mid \text{好瓜} = \text{否}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.108} \exp\left(-\frac{(0.460 - 0.154)^2}{2 \cdot 0.108^2}\right) \approx 0.066
\end{aligned}
$$

3、**连乘，得出最终结果**

公式：

$$
h_{nb}(\boldsymbol{x}) = \underset{c \in \mathcal{Y}}{\arg\max}\ P(c) \prod_{i=1}^{d} P(x_i \mid c)
$$

好瓜：

$$
\begin{aligned}
&P(\text{好瓜} = \text{是}) \times P_{\text{青绿}|\text{是}} \times P_{\text{蜷缩}|\text{是}} \times P_{\text{浊响}|\text{是}} \times P_{\text{清晰}|\text{是}} \times P_{\text{凹陷}|\text{是}} \\
&\times P_{\text{硬滑}|\text{是}} \times p_{\text{密度: 0.697}|\text{是}} \times p_{\text{含糖: 0.460}|\text{是}} \approx 0.038\ ,
\end{aligned}
$$

坏瓜：

$$
\begin{aligned}
&P(\text{好瓜} = \text{否}) \times P_{\text{青绿}|\text{否}} \times P_{\text{蜷缩}|\text{否}} \times P_{\text{浊响}|\text{否}} \times P_{\text{清晰}|\text{否}} \times P_{\text{凹陷}|\text{否}} \\
&\times P_{\text{硬滑}|\text{否}} \times p_{\text{密度: 0.697}|\text{否}} \times p_{\text{含糖: 0.460}|\text{否}} \approx 6.80 \times 10^{-5}\ .
\end{aligned}
$$

结果：

$$
0.038 > 6.80 \times 10^{-5}
$$

可以看出“好瓜”概率更高，因此最终判别结果为“好瓜”

2.5拉普拉斯修正

2.5.1引入

上面的过程存在一个隐患！若某个属性值在训练集的某个类“没有出现过”，则

$$P(x_i|c)=0$$

例如 好瓜里没有“敲声 = 清脆” 的例子

$$P_{\text{清脆}|\text{是}}=P(\text{敲声}=\text{清脆}\mid\text{好瓜}=\text{是})=\frac{0}{8}=0$$

而在连乘时，如果存在这一项，则整个结果永远为 0。即“无论其他属性怎么样，永远不选择‘瓜=好’这个结果（因为 结果=0）”，这显然是不合理的

2.5.2拉普拉斯修正

为了避免这种情况，在估计概率值时通常需要进行“平滑”

拉普拉斯修正：

$$\hat{P}(c)=\frac{|D_c|+1}{|D|+N},$$
$$\hat{P}(x_i\mid c)=\frac{|D_{c,x_i}|+1}{|D_c|+N_i}.$$

知乎 @程序源

N 表示训练集 D 中可能的类别数

N_i 表示第 i 个属性可能的取值数

理解：

其实就是加入了

$$\frac{1}{\text{类别数}}$$

例如：

1、共有17个样本，其中 8个好瓜，9个坏瓜，类别数2

$$\hat{P}(好瓜=是)=\frac{8+1}{17+2}\approx 0.474\,,\quad \hat{P}(好瓜=否)=\frac{9+1}{17+2}\approx 0.526$$

2、色泽 = 青绿

好瓜里“色泽=青绿”的 有 3 个，好瓜共 8 个

坏瓜里“色泽=青绿”的 有 3 个，坏瓜共 9 个

色泽的可能取值数为 3 （青绿、乌黑、浅白）

$$\hat{P}_{青绿|是}=\hat{P}(色泽=青绿\mid 好瓜=是)=\frac{3+1}{8+3}\approx 0.364$$

$$\hat{P}_{青绿|否}=\hat{P}(色泽=青绿\mid 好瓜=否)=\frac{3+1}{9+3}\approx 0.333$$

效果

拉普拉斯修正避免了因“训练集样本不充分”而导致“概率估计值为零”的问题

并且当训练集变大时，修正过程引入的先验影响也会逐渐变得可以忽略

使得估计值趋向于实际概率值

3.sklearn应用朴素贝叶斯算法

在 sklearn 库中，基于贝叶斯定理的算法集中在 sklearn.naive_bayes 包中，根据对“似然度P(xi|y)”计算方法的不同，我们将朴素贝叶斯大致分为三种：多项式朴素贝叶斯（MultinomialNB）、伯努利分布朴素贝叶斯（BernoulliNB)、高斯分布朴素贝叶斯（GaussianNB）。

另外一点要牢记，**朴素贝叶斯算法的实现是基于假设而来，在朴素贝叶斯看来，特征之间是相互独立的，互不影响的。**

C++

```
高斯朴素贝叶斯适用于特征呈正态分布的，多项式贝叶斯适用于特征是多项式分布的，伯努利贝叶斯适用于二项分布。
```

3.1算法使用流程

使用朴素贝叶斯算法，**具体分为三步**：

- 统计样本数，即统计先验概率 P(y) 和 似然度 P(x|y)。
- 根据待测样本所包含的特征，对不同类分别进行后验概率计算。
- 比较 y1，y2，...yn 的后验概率，哪个的概率值最大就将其作为预测输出。

3.2朴素贝叶斯算法应用

下面通过鸢尾花数据集对朴素贝叶斯分类算法进行简单讲解。如下所示：

```Python
#鸢尾花数据集
from sklearn.datasets import load_iris
#导入朴素贝叶斯模型，这里选用高斯分类器
from sklearn.naive_bayes import GaussianNB

#载入数据集
X,y=load_iris(return_X_y=True)
bayes_modle=GaussianNB()
#训练数据
bayes_modle.fit(X,y)
#使用模型进行分类预测
result=bayes_modle.predict(X)
print(result)
#对模型评分

model_score=bayes_modle.score(X,y)
print(model_score)

预测分类：
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1
 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2
 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
 2 2]
模型评分：
0.96
```

3.判别式模型和生成式模型

对于有监督学习可以将其分为两类模型：判别式模型和生成式模型。**简单地说，判别式模型是针对条件分布建模，而生成式模型则针对联合分布进行建模。**

1.基本概念

假设我们有训练数据(X,Y)，X是属性集合，Y是类别标记。这时来了一个新的样本x，我们想要预测它的类别y。

我们最终的目的是求得最大的条件概率P(y|x)【在特征是x 的条件下标签是y的概率】作为新样本的分类。

1.1 判别式模型这么做：

根据训练数据得到分类函数和分界面，比如说根据SVM模型得到一个分界面，**然后直接计算条件概率 P(y|x)，我们将最大的 P(y|x) 作为新样本的分类。**

判别式模型是**对条件概率建模，学习不同类别之间的最优边界**，无法反映训练数据本身的特性，能力有限，其只能告诉我们分类的类别。

1.2 生成式模型这么做

一般会对每一个类建立一个模型，有多少个类别，就建立多少个模型。比如说类别标签有｛猫，狗，猪｝，那首先根据猫的特征学习出一个猫的模型，再根据狗的特征学习出狗的模型，**之后分别计算新样本 x 跟三个类别的联合概率 P(x,y)，然后根据贝叶斯公式：**

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}$$

分别计算P(y|x)，选择三类中最大的P(y|x)作为样本的分类。

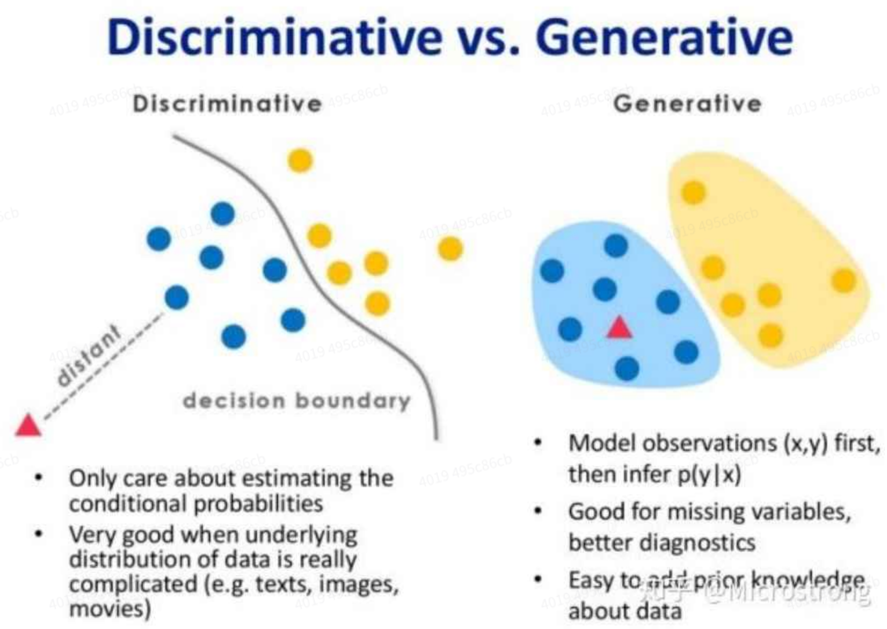
1.3 两个模型的小结

不管是生成式模型还是判别式模型，它们最终的判断依据都是条件概率P(y|x).

但是生成式模型先计算了联合概率P(x,y)，再由贝叶斯公式计算得到条件概率。因此，生成式模型**可以体现更多数据本身的分布信息**，其普适性更广。

2.两者区别

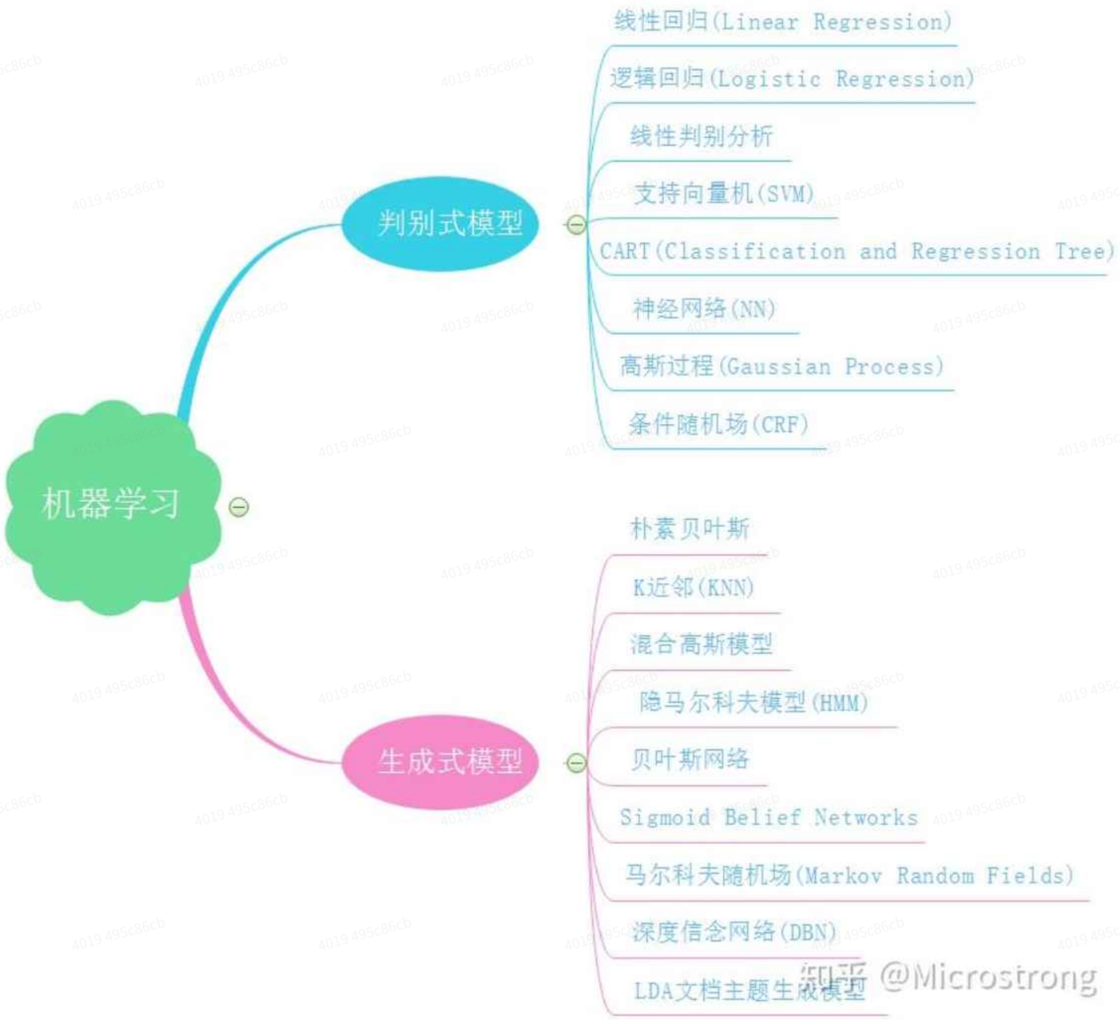
2.1 判别式模型和生成式模型的对比图



上图左边为判别式模型而右边为生成式模型，可以很清晰地看到差别，**判别式模型是在寻找一个决策边界，通过该边界来将样本划分到对应类别。**

而生成式模型则不同，**它学习了每个类别的边界，它包含了更多信息，可以用来生成样本。**

2.2两者所包含的算法



机器学习
判别式模型
线性回归(Linear Regression)
逻辑回归(Logistic Regression)
线性判别分析
支持向量机(SVM)
CART(Classification and Regression Tree)
神经网络(NN)
高斯过程(Gaussian Process)
条件随机场(CRF)
生成式模型
朴素贝叶斯
K近邻(KNN)
混合高斯模型
隐马尔科夫模型(HMM)
贝叶斯网络
Sigmoid Belief Networks
马尔科夫随机场(Markov Random Fields)
深度信念网络(DBN)
LDA文档主题生成模型
知乎 @Microstrong