

# Oscillations non-linéaires et synchronisation

Hervé Schmit-Veiler

October 5, 2023

# Plan

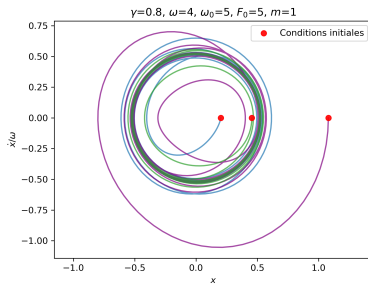
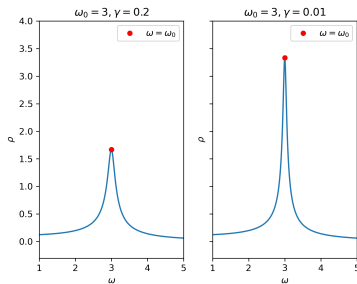
- 1 Introduction
- 2 Oscillateur Harmonique
- 3 Oscillateurs non-linéaires
- 4 Synchronisation
- 5 Conclusion

- Stage au LOMA
- Étude de systèmes d'oscillateurs non-linéaires
- But : appliquer ces méthodes d'analyse à un système d'oscillateurs non-linéaires couplés
- Applications
  - Radios, lasers
  - Qubits [1], détecteurs de force ultrasensible [2]

# Oscillateur Harmonique Forcé

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

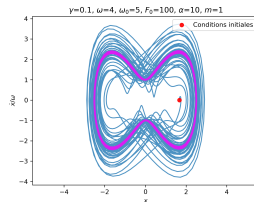
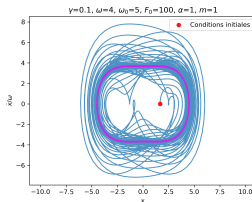
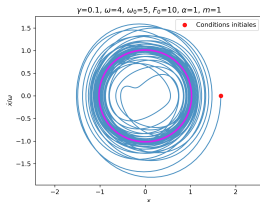
- Réponse fréquentielle lorentzienne
- Régime permanent qui ne dépend que des paramètres de l'équation



# Oscillateur de Duffing - 1

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} + \alpha x^3 = f_0 \cos(\omega t)$$

- Modèle pour structures élastiques en régime forcé et pour grandes amplitudes [3]
- Régime permanent presque harmonique pour des 'petits' paramètres
- Doublement des périodes si  $f_0$  augmente suffisamment (chaos)



Régime permanent en magenta

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(\dot{x}, x, t) \quad 0 < \epsilon \ll \omega_0$$

- Méthodes d'analyse approximative pour équations harmoniques perturbés
- On suppose pouvoir trouver solutions sous la forme [3] :

$$x(t) = r(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 r(t) \sin(\omega_0 t + \phi(t))$$

- $r(t)$  et  $\phi(t)$  sont lentement variable pour petit  $\epsilon$ , permet de faire moyennement au premier ordre

$$r(t) \approx \langle r \rangle \quad \phi(t) \approx \langle \phi \rangle$$

# Oscillateur de Duffing - 2

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}]$$

- Substitution dans l'équation différentielle

$$2i\omega\dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + i\epsilon\gamma\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \\ + \omega_0^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + \epsilon\alpha [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}]^3 = \epsilon\frac{f_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$$

- Moyennement

$$2i\omega\dot{z} = (\omega^2 - \omega_0^2)z(t) - i\epsilon\gamma\omega z(t) - 3\epsilon\alpha|z|^2z(t) + \epsilon\frac{f_0}{2}$$

- Adimensionnement

$$q'(\tau) = -i\Omega q(\tau) - q(\tau) + i|q|^2q(\tau) - F_0$$

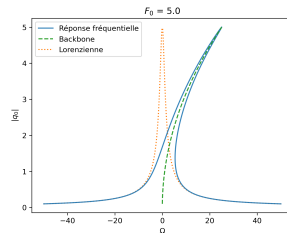
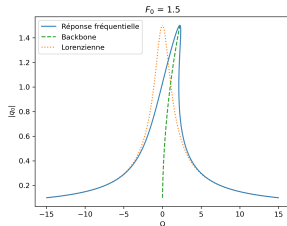
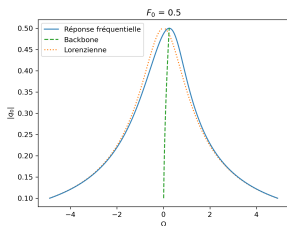
$$\tau = \frac{\epsilon\gamma}{2}t \quad q(\tau) = \sqrt{\frac{3\alpha}{\omega\gamma}}z(t) \quad \Omega = \frac{(\omega - \omega_0)}{\epsilon\gamma/2} \quad F_0 = \frac{\sqrt{3\alpha}f_0}{2(\omega\gamma)^{3/2}}$$

# Oscillateur de Duffing - 3

- Après moyennement et adimensionnement, on trouve l'amplitude complexe  $q_0$  du régime permanent pour  $\omega \approx \omega_0$  [4].  $\Omega \propto (\omega - \omega_0)$

$$q_0 = \frac{F_0}{|q_0|^2 - \Omega + i} \implies \Omega = |q_0|^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1}$$

- Bistabilité d'amplitude et hystérèse [5]

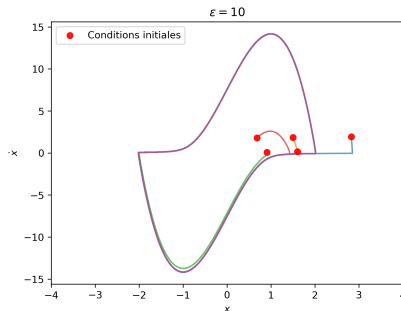
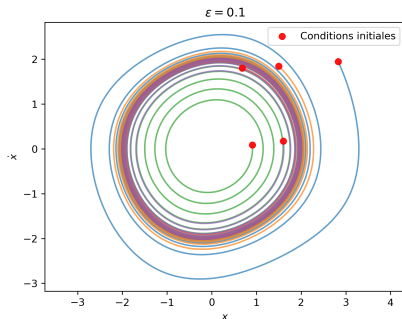




# Oscillateur de Van der Pol - 1

$$\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$$

- Modèle simple d'un oscillateur présentant un cycle limite
  - unique orbite isolée dans l'espace de phase
- Signe changeant du terme en  $\dot{x}$  qui injecte/dissipe de l'énergie
- Cycle limite quasi-circulaire pour petit  $\epsilon$



# Oscillateur de Van der Pol - 2

- On peut trouver la fréquence angulaire  $\omega$  du régime permanent avec méthode de Linsted [3] :

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

- Équations de mouvement après moyennement au premier ordre

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\epsilon}{8}r(4 - r^2) \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad x(t) = r(t) \cos(t + \phi_0)$$

- Pas de phase de référence, c.a.d que  $\phi_0$  dépend purement des conditions initiales et non du système

# Que est-ce la synchronisation ?

- Phénomène où plusieurs oscillateurs verouille leurs phase l'un par rapport à l'autre [6]
- *Phase locking*

# Oscillateurs à cycle limite couplés

- Système de deux oscillateurs de Van der Pol couplée

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \epsilon(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 = \epsilon k(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \epsilon(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 = \epsilon k(x_1 - x_2) \end{cases}$$

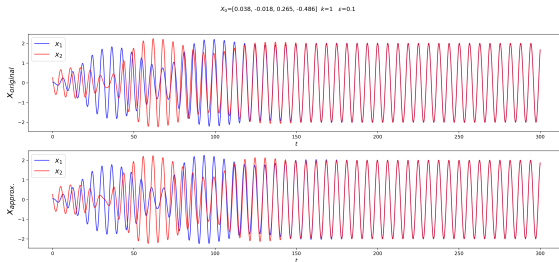
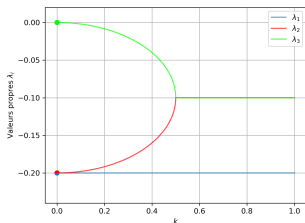
- Après moyennement,  $\Theta = \phi_2 - \phi_1$

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_1^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_2^2) + \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \dot{\phi}_1 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos(\phi_2 - \phi_1)\right) \\ \dot{\phi}_2 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_1^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_2^2) - \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{\Theta} = \epsilon \frac{k}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos(\Theta) \end{cases}$$

- On peut vérifier l'existence des solutions stationnaires  $r_1 = r_2 = 2$  avec  $\Theta = 0$  ou  $\Theta = \pi$

# Oscillateurs à cycle limite couplés - 2

- L'analyse de stabilité linéaire montre que ce sont des solutions stationnaires stable (valeurs propres négatives)
- La dynamique autour des deux points sont identiques



# Conclusion et autres perspectives

- Oscillateurs non-identiques
- Réseau d'oscillateurs
- Modéliser systèmes réelles

- [1] Pistolesi, F., Cleland, A. N., and Bachtold, A. “Proposal for a Nanomechanical Qubit”. In: *Physical Review X* 11.3 (Aug. 3, 2021), p. 031027. ISSN: 2160-3308. DOI: 10.1103/PhysRevX.11.031027. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.031027> (visited on 09/13/2023).
- [2] Moser, J. et al. “Ultrasensitive force detection with a nanotube mechanical resonator”. In: *Nature Nanotechnology* 8.7 (July 2013), pp. 493–496. ISSN: 1748-3387, 1748-3395. DOI: 10.1038/nnano.2013.97. URL: <https://www.nature.com/articles/nnano.2013.97> (visited on 09/13/2023).
- [3] Rand, Richard H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Cornell University, May 2012. URL: <https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/28989> (visited on 07/16/2023).

- [4] Pistolesi, Fabio. “Duffing response in presence of thermal fluctuations”. *Notes, non publié.*
- [5] Landau, Lev Davidovič and Lifshitz, Evgeniĭ Mikhaĭlovich. *Mechanics*. 3d ed. Course of theoretical physics v. 1. Oxford New York: Pergamon Press, 1976. ISBN: 978-0-7506-2896-9.
- [6] Matheny, Matthew H. et al. “Phase Synchronization of Two Anharmonic Nanomechanical Oscillators”. In: *Physical Review Letters* 112.1 (Jan. 6, 2014), p. 014101. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.014101. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.014101> (visited on 10/05/2023).