

# Rapport de Stage

Hervé SV

Juillet 2023

# Table des matières

<b>2</b>	<b>Rappel sur l'oscillateur harmonique</b>	<b>2</b>
2.1	L'oscillateur forcé . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>L'oscillateur de Duffing</b>	<b>3</b>
3.1	Adimensionnement de l'équation . . . . .	5
<b>4</b>	<b>L'oscillateur de Van der Pol</b>	<b>6</b>

# 1. Introduction

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Nemo enim ipsam voluptatem quia voluptas sit aspernatur aut odit aut fugit, sed quia consequuntur magni dolores eos qui ratione voluptatem sequi nesciunt. Neque porro quisquam est, qui dolorem ipsum quia dolor sit amet, consectetur, adipisci velit, sed quia non numquam eius modi tempora incidunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur?

## 2. Rappel sur l'oscillateur harmonique

Considérons le cas de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \gamma > 0 \quad (2.1)$$

Lorsque  $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$  le système oscille de manière pseudopériodique et admet des solutions de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos(\omega_\gamma t) + B \sin(\omega_\gamma t)) \quad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.2)$$

Cette solution est caractérisé par des oscillations sinusoïdales avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle selon  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ .

### 2.1 L'oscillateur forcé

Étudions le cas où l'on applique une force périodique de la forme  $f_0 \cos(\omega t)$  :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

Étant donné que la fréquence  $\omega$  de la force ne correspondant généralement pas à la fréquence naturelle de l'oscillateur  $\omega_0$ , l'oscillateur va initialement résister à la force externe. Mais on s'attend à ce pour grand  $t$ , à mesure que la solution homogène s'estompe,  $x$  finisse par adopter la fréquence d'oscillations  $\omega$ . On cherche donc une solution particulière de cette forme en passant par les complexes [1].

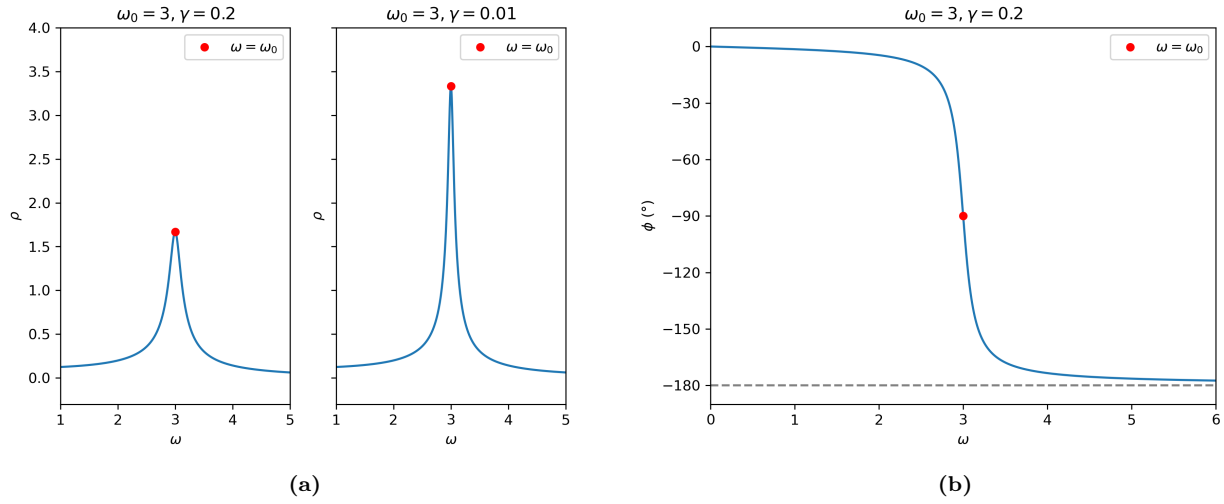
$$x(t) = \text{Re}(z(t)) \quad z(t) = A e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient :

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

$$z(t) = R f_0 e^{i\omega t} \quad R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi} \quad (2.6)$$

Le module  $\rho$  est le multiplicateur d'amplitude en réponse à la force, et l'argument  $\phi$  va induire un déphasage de  $x$  par rapport à la force.



**FIGURE 2.1** – (a) Réponse fréquentielle lorentzienne autour de la résonance. (b) Différence de phase en fonction de la fréquence.

En revenant dans les réels :

$$x(t) = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \dot{x}(t) = -\omega \rho f_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.7)$$

On peut déterminer les expressions pour  $\rho$  et  $\phi$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= RR^* \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-\rho \omega \gamma}{\rho(\omega_0^2 - \omega^2) + 1} \quad (2.9)$$

$\rho$  prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque  $\omega$  est proche de  $\omega_0$  (effet de résonance), l'amplification tend rapidement vers zéro le plus  $\omega$  s'éloigne de  $\omega_0$ .

Étant donné que la solution homogène tend vers 0, à long terme l'oscillateur va atteindre un état stable où il sera synchronisé avec la force.

### 3. L'oscillateur de Duffing

Considérons de nouveau un oscillateur forcé, mais maintenant avec un terme en  $x^3$  supplémentaire, nous donnant l'équation de Duffing forcé. Ce n'est plus une équation linéaire, donc on ne peut plus exprimer la solution comme étant une superposition des solutions homogènes et particulières.

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = f_0 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Pour  $\epsilon$  et  $f_0$  suffisamment faible, on s'attend à trouver un comportement semblable à l'oscillateur harmonique. On cherche donc des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(\omega t + \phi(t)) & \dot{x}(t) &= -\omega r(t) \sin(\omega t + \phi(t)) \\ r(t) &= \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\omega)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

On fait l'hypothèse que comme dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, la vitesse d'évolution de  $r$  et de  $\phi$  sont données par le coefficient d'amortissement  $\gamma$ . Donc si  $\gamma \ll \omega$ ,  $r$  et  $\phi$  vont varier lentement par rapport à la période d'oscillation de  $x$ .

En notation complexe :

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.3)$$

$z(t)$  étant une variable complexe encodant l'amplitude et la phase d'oscillations du système.

$$z(t) = \frac{r(t)}{2}e^{i\phi(t)}$$

Ce changement de variable  $(x, \dot{x}) \rightarrow (r, \phi)$  nous place effectivement sur un référentiel tournant à la fréquence  $\omega$ . En écartant ces oscillations rapides auxquelles on s'attend, on peut mieux se concentrer sur les variations lentes de  $r(t)$  et de  $\phi(t)$ . Lorsque l'oscillateur oscille de manière harmonique,  $z$  est constant [2].

En prenant la dérivée de (3.2), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t} + i\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.4)$$

$$\ddot{x}(t) = i\omega [\dot{z}(t)e^{i\omega t} - \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t}] + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.5)$$

À partir de (3.2) et de (3.4), on obtient la condition :

$$\dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.6)$$

En substituant les equations de  $x$ ,  $\dot{x}$ , et de  $\ddot{x}$  dans (3.1) :

$$\begin{aligned} 2i\omega\dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] + i\gamma\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \\ + \omega_0^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] + \epsilon [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}]^3 = \frac{f_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Puis en multipliant par  $e^{-i\omega t}$  :

$$\begin{aligned} 2i\omega\dot{z}(t) + (i\omega)^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + i\gamma\omega [z(t) - \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + \omega_0^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] \\ + \epsilon [z(t)^3e^{i2\omega t} + 3z(t)^2\bar{z}(t) + 3z(t)\bar{z}(t)^2e^{-i2\omega t} + \bar{z}(t)^3e^{-i4\omega t}] = \frac{f_0}{2} [1 + e^{-i2\omega t}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Jusqu'ici, tout est exacte. On procède par une opération de moyennement, qui exploite les deux echelles de temps observé dans notre système. Une échelle 'rapide' marqué par des oscillations rapides avec des periodes de l'ordre  $T = 2\pi/\omega$ , et une échelle 'lente' selon laquelle évolue  $z(t)$ .

La méthode de moyennement consiste à remarquer qu'étant donné que  $z$  évolue très lentement, il reste quasiment constant au cours d'une periode d'oscillation rapide  $T$ . Donc on se permet de traiter  $z(t)$  comme étant synonyme à sa moyenne sur une oscillation  $\langle z \rangle$ .  $\langle z \rangle$  étant constant sur une periode d'oscillation.

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t')dt' \approx z(t) \quad (3.9)$$

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t')e^{in\omega t'} dt' \approx z(t) \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' \quad (3.10)$$

Depuis le principe fondamental de l'analyse, on peut aussi démontrer que :

$$\langle \dot{z} \rangle = \frac{d}{dt} \langle z \rangle \quad (3.11)$$

Et  $n\omega t$  étant défini modulo  $2\pi$ , on remarque que pour  $n \neq 0$  :

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' = 0$$

On prend donc la moyenne mobile de l'équation (3.8), ce qui nous permet de négliger les facteurs de  $e^{in\omega t}$ .

$$\begin{aligned} 2i\omega\langle\dot{z}\rangle &= -(i\omega)^2\langle z\rangle - i\gamma\omega\langle z\rangle - \omega_0^2\langle z\rangle - 3\epsilon\langle z^2\bar{z}\rangle + \frac{f_0}{2} \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2)z(t) - i\gamma\omega z(t) - 3\epsilon|z|^2 z(t) + \frac{f_0}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Une autre façon d'y penser : on discrétise le temps en blocs de  $T$ . Donc d'une certaine manière, on réduit la résolution temporelle de nos équations pour ne garder que les parties lentement variables.

Ensuite, comme on s'intéresse surtout au comportement du système près du pic de résonance, on prend l'approximation  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$  :

$$\dot{z}(t) = -i(\omega - \omega_0)z(t) - \frac{\gamma}{2}z(t) + \frac{3i\epsilon}{2\omega}|z|^2 z(t) - \frac{if_0}{4\omega} \quad (3.13)$$

### 3.1 Adimensionnement de l'équation

ETAPE APPENDIX

Afin d'adimensionner l'équation, on procède par deux changements de variables :

$$t = t_c \tau \quad z(t) = z_c q(\tau) \quad (3.14)$$

Où  $t_c$  et  $z_c$  sont des constantes physiques à définir et  $\tau$  et  $q(\tau)$  sont les variable adimensionné analogues à  $t$  et  $z(t)$ . Ce choix de variables nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dq}{d\tau} = q'(\tau) = -i(\omega - \omega_0)t_c q(\tau) - \frac{\gamma}{2}t_c q(\tau) + i\frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c |q|^2 q(\tau) - \frac{if_0}{4\omega}t_c \quad (3.15)$$

Si on pose comme conditions :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{2}t_c = 1 \\ \frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

On retrouve l'équation adimensionné

$$q'(\tau) = -i\Omega q(\tau) - q(\tau) + i|q|^2 q(\tau) - F_0 \quad (3.17)$$

Avec :

$$\tau = \frac{\gamma}{2}t \quad q(\tau) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\omega\gamma}}z(t) \quad \Omega = \frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma/2} \quad F_0 = \frac{\sqrt{3\gamma}f_0}{2(\omega\gamma)^{3/2}} \quad (3.18)$$

On peut trouver la solution stationnaire :

$$q_0 = \frac{F_0}{|q_0|^2 - \Omega + i} \quad (3.19)$$

On s'intéresse surtout à l'amplitude en fonction de la fréquence, mais sous cette forme, l'analyse de la courbe n'est pas facile car on ne peut pas exprimer  $|q_0|$  en tant que fonction de  $\Omega$ . Cependant, il est possible d'exprimer  $\Omega$  en fonction de  $|q_0|$  :

$$\Omega = |q_0|^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1} \quad (3.20)$$

Où  $\pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1}$  correspondant à une lorentzienne pure, et  $|q_0|^2$  forme une épine (*backbone* en anglais) qui donne la forme caractéristique de cette réponse fréquentielle non-linéaire.

Pour  $F_0 \rightarrow 0$  la réponse devient lorentzienne. Effectivement, comme  $F_0 \propto \sqrt{\gamma}f_0$ , si le coefficient de non-linéarité est nulle ou négligeable (et  $f_0$  pas trop grand), alors le système se comportera comme un oscillateur harmonique.

On observe aussi qu'il existe une valeur critique  $F_{0,c}$  où pour  $F_0 > F_{0,c}$  le système admet jusqu'à trois amplitudes possible, dont deux stables [3]. On parle alors d'un état bistable.

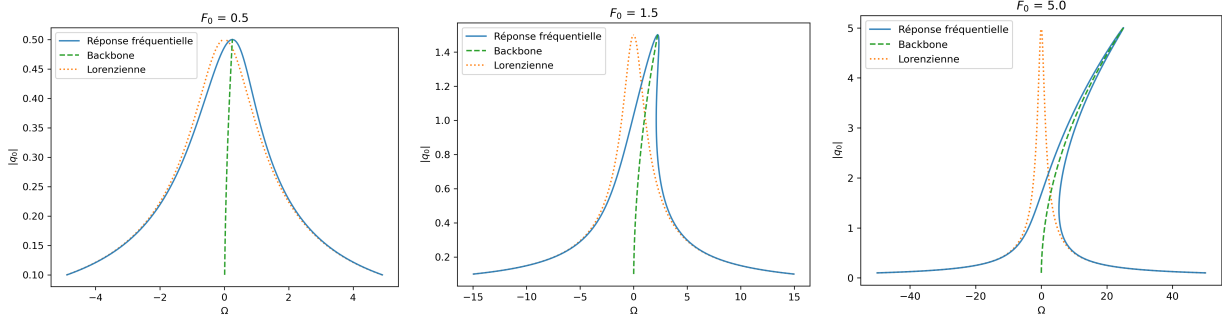


FIGURE 3.1 – Réponse fréquentielle de Duffing

On cherche à déterminer la valeur de  $F_{0,c}$ . Pour alléger la notation, on introduit la variable  $u = |q_0|$  et on réarrange (3.19) :

$$u^2[(u^2 - \Omega)^2 + 1] = F_0^2 \quad (3.21)$$

Puis on prend la dérivée par rapport à  $\Omega$ .

$$2u \frac{du}{d\Omega} (u^4 + \Omega^2 - 2\Omega u^2 + 1) + u^2 (4u^3 \frac{du}{d\Omega} + 2\Omega - 2u^2 - 4\Omega u \frac{du}{d\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} F_0^2 \quad (3.22)$$

On remarque que  $F_0$  et  $\Omega$  dépendent tout les deux de  $\omega$ , qui est la vrai fréquence de forçage. Toutefois, pour dériver l'équation d'origine, on a supposé  $\omega \approx \omega_0$ . Donc :

$$\Omega \propto (\omega - \omega_0) \ll \omega$$

C'est à dire qu'en variant  $\Omega$ , la variation correspondante que subira  $F_0$  sera très petite. Donc on se permet de la considérer comme étant constante. En isolant  $\frac{du}{d\Omega}$  on obtient :

$$\frac{du}{d\Omega} = \frac{-\Omega u + u^3}{3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1} \quad (3.23)$$

On peut d'abord déterminer l'amplitude maximum, qui est atteint lorsque  $\frac{du}{d\Omega} = 0$ , en réinsérant cette condition dans (3.21) on trouve :

$$|q_0|_{max} = F_0$$

La bistabilité apparait lorsque qu'on a plusieurs point sur la courbe qui satisfait  $\frac{du}{d\Omega} = \infty$ , nous donnant la condition :

$$3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1 = 0 \quad (3.24)$$

Lorsque  $F_0 = F_{0,c}$ , les points verticaux se rejoignent en un point unique. On peut donc résoudre pour  $u^2$  en posant que le déterminant s'annule. On obtient les conditions :

$$\Omega = \pm\sqrt{3} \quad u^2 = \frac{2\Omega}{3} \quad (3.25)$$

Ce qui nous impose la solution unique  $\Omega = \sqrt{3}$ . En substituant ces valeurs dans (3.21), on trouve :

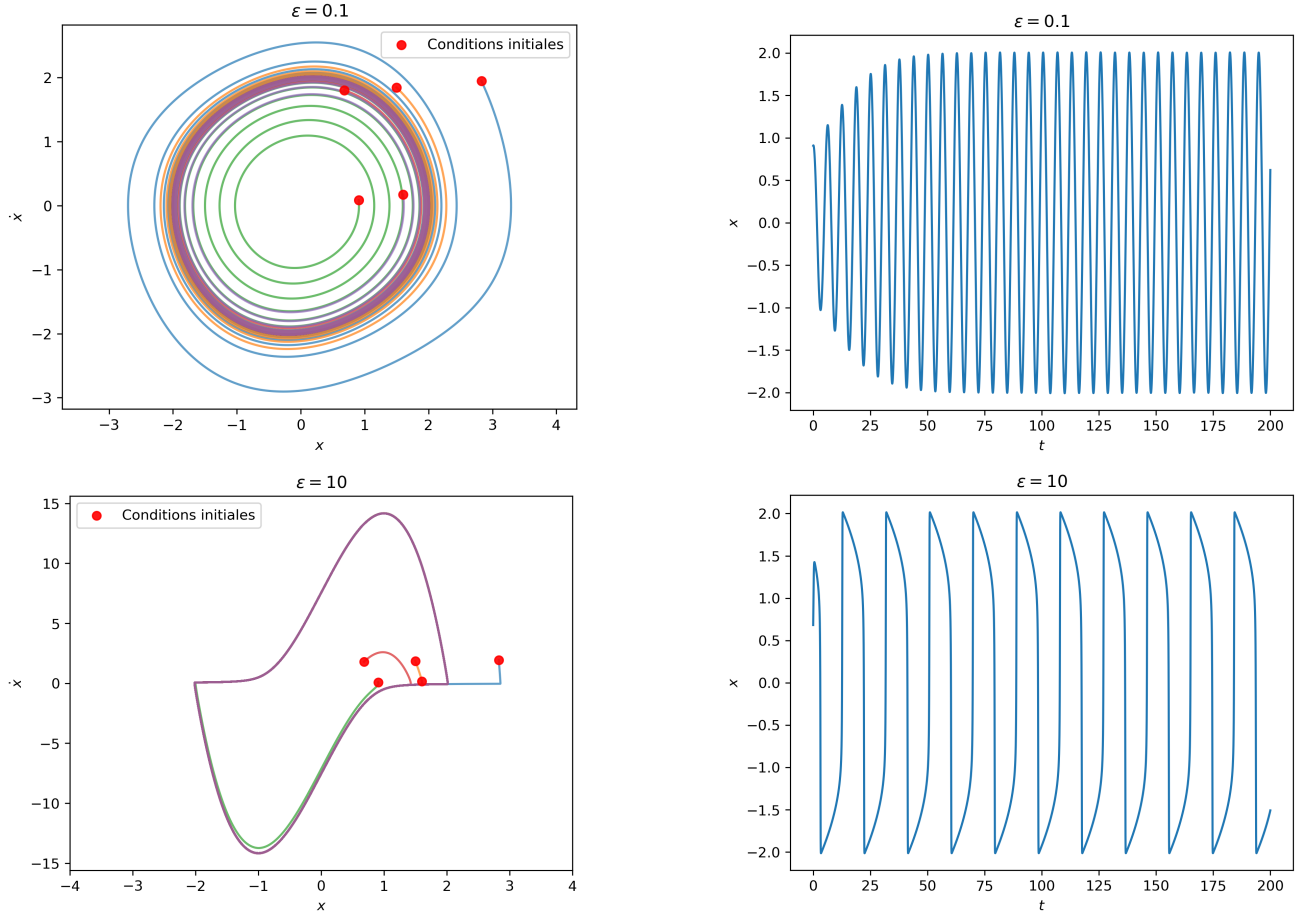
$$F_{0,c} = \left( \frac{8\sqrt{3}}{9} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Un observation finale interessante. Etant donné que  $F_0 \propto \sqrt{\epsilon} f_0$ , on voit que même dans un système ou le terme nonlinéaire est très faible, où normalement on ne va pas observer de non-linéarité. Il suffit d'augmenter l'amplitude de forçage  $f_0$  pour que faire ressortir un comportement non-linéaire (ici un état bistable). On voit donc que l'oscillateur harmonique, dans la plupart des cas physiques, n'est qu'une approximation valable à des amplitudes relativement faibles.

## 4. L'oscillateur de Van der Pol

L'équation de Duffing forcé On s'intéresse à l'équation de Van der Pol. Qui fut créée en — par Van der Pol pour modeliser un certain phénomène.

$$\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0 \quad (4.1)$$



**FIGURE 4.1** — Portraits de phase de l'oscillateur Van der Pol obtenu par intégration numérique pour faible et grand  $\epsilon$ , conditions initiales aléatoires

C'est un système non conservatif avec une particularité intéressante. Le signe du terme d'amortissement  $\epsilon(x^2 - 1)\dot{x}$  change en fonction... Lorsque  $|x| < 1$ , le coefficient d'amortissement négatif fournit de l'énergie au système et dans le cas contraire  $|x| > 1$ , il en dissipe. Ce comportement particulier donne lieu à des oscillations entretenues de manière autonome.

Avec une étude numérique du système sur le plan de phase, on constate que le système tend vers une unique orbite isolée, quelles que soient les conditions initiales imposées. Une telle orbite dans l'espace de phase s'appelle un *cycle limite*. On voit notamment que pour petit  $\epsilon$ , que le cycle limite est fortement elliptique avec des oscillations quasi-circulaire, alors que pour grand  $\epsilon$  le cycle est fortement déformé et caractérisé par des oscillations de relaxations.

En comparant les oscillations du système faiblement et fortement non-linéaire, on observe aussi que la fréquence d'oscillation diverge de la fréquence naturelle  $\omega_0 = 1$  lorsque  $\epsilon$  augmente. On va chercher une solution approximative de (4.1) sous forme d'un développement perturbatif. En particulier, on va utiliser la méthode de Lindstedt, qui nous permet de prendre en compte la dépendance qu'a  $\epsilon$  sur la fréquence d'oscillations. L'approche consiste à définir une échelle de temps normalisée et de prendre la fréquence  $\omega$  du cycle limite comme étant un inconnu qui dépend de  $\epsilon$  :

$$\tau = \omega(\epsilon)t \quad \omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + O(\epsilon^3) \quad (4.2)$$

La justification derrière cette transformation d'échelle de temps est qu'elle nous permet de définir  $x(\tau)$  comme étant  $2\pi$  périodique, alors que  $x(t)$  a une période qui nous est inconnue en raison de sa dépendance sur  $\omega$ .

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + O(\epsilon^3) \quad (4.3)$$

Notre hypothèse de départ étant que la fréquence  $\omega$  du cycle limite est un inconnu qui dépend de  $\epsilon$ , ce qui fait que  $x(t)$  a une période qui elle aussi est inconnue. En changeant d'échelle de temps, on peut

dépend de  $\epsilon$ , la solution  $x(t)$  aura donc une période qui lui aussi dépend de  $\epsilon$ . Or, on aimerait trouver une solution



# Bibliographie

- [1] FEYNMAN, Richard. *The Feynman Lectures on Physics Vol. I*. T. 1. Ch. 23 : Resonance. URL : [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_23.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_23.html) (visité le 24/07/2023).
- [2] PISTOLESI, Fabio. « Duffing response in presence of thermal fluctuations ». Notes, non publié.
- [3] LANDAU, Lev Davidovič et LIFSHITZ, Evgeniĭ Mikhaĭlovich. *Mechanics*. 3d ed. Course of theoretical physics v. 1. Oxford New York : Pergamon Press, 1976. ISBN : 978-0-7506-2896-9.