

Rapport de Stage

Hervé SV

Juillet 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappel sur l'oscillateur harmonique	2
2.1	L'oscillateur forcé	2
3	L'oscillateur de Duffing	3
3.1	Adimensionnement de l'équation	5
4	L'oscillateur de Van der Pol	6

1. Introduction

2. Rappel sur l'oscillateur harmonique

Considérons le cas de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \gamma > 0 \quad (2.1)$$

Lorsque $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ le système oscille de manière pseudopériodique et admet des solutions de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos(\omega_\gamma t) + B \sin(\omega_\gamma t)) \quad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.2)$$

Cette solution est caractérisée par des oscillations sinusoïdales avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle selon $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

2.1 L'oscillateur forcé

Étudions le cas où l'on applique une force périodique de la forme $f_0 \cos(\omega t)$:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

Étant donné que la fréquence ω de la force ne correspond généralement pas à la fréquence naturelle de l'oscillateur ω_0 , elle ne se mettra pas à osciller. On s'attend à ce que pour grand t , x finisse par adopter la fréquence d'oscillations ω . On cherche une solution particulière de cette forme en passant par les complexes [1].

$$x(t) = \text{Re}(z(t)) \quad z(t) = A e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient :

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

$$z(t) = R f_0 e^{i\omega t} \quad R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi} \quad (2.6)$$

Le module ρ est le multiplicateur d'amplitude en réponse à la force, et l'argument ϕ va induire un déphasage de x par rapport à la force.

En revenant dans les réels :

$$x(t) = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \dot{x}(t) = -\omega \rho f_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.7)$$

On peut déterminer les expressions pour ρ et ϕ

$$\begin{aligned} \rho^2 &= R R^* \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-\rho\omega\gamma}{\rho(\omega_0^2 - \omega^2) + 1} \quad (2.9)$$

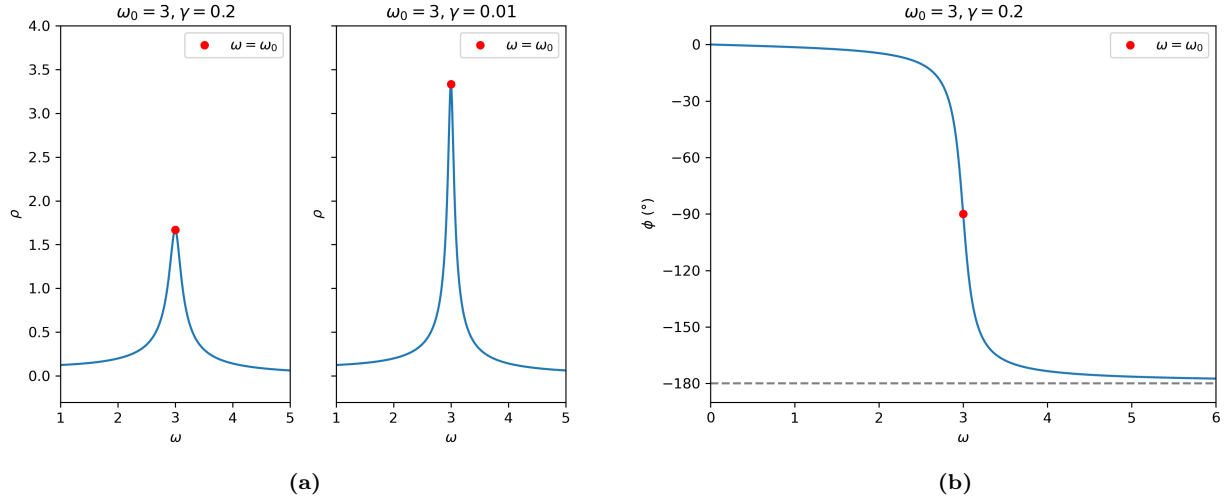


FIGURE 2.1 – (a) Réponse fréquentielle lorentzienne autour de la résonance. (b) Différence de phase en fonction de la fréquence.

ρ prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque ω est proche de ω_0 (effet de résonance), l'amplification tend rapidement vers zéro le plus ω s'éloigne de ω_0 .

Étant donné que la solution homogène tend vers 0, à long terme l'oscillateur va atteindre un état stable où il sera synchronisé avec la force.

3. L'oscillateur de Duffing

Considérons de nouveau un oscillateur forcé, mais maintenant avec un terme en x^3 supplémentaire, nous donnant l'équation de Duffing forcé. Ce n'est plus une équation linéaire, donc on ne peut plus exprimer la solution comme étant une superposition des solutions homogènes et particulières.

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = f_0 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Pour ϵ et f_0 suffisamment faible, on s'attend à trouver un comportement semblable à l'oscillateur harmonique. On cherche donc des solutions de la forme :

$$x(t) = r(t) \cos(\omega t + \phi(t)) \quad \dot{x}(t) = -\omega r(t) \sin(\omega t + \phi(t)) \quad (3.2)$$

$$r(t) = \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\omega)^2}$$

On fait l'hypothèse que comme dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, la vitesse d'évolution de r et de ϕ sont données par le coefficient d'amortissement γ . Donc si $\gamma \ll \omega$, r et ϕ vont varier lentement par rapport à la période d'oscillation de x .

En notation complexe :

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.3)$$

$z(t)$ étant une variable complexe encodant l'amplitude et la phase d'oscillations du système.

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)}$$

Ce changement de variable $(x, \dot{x}) \rightarrow (r, \phi)$ nous place effectivement sur un référentiel tournant à la fréquence ω . En écartant ces oscillations rapides auxquelles on s'attend, on peut mieux se concentrer sur les variations lentes de $r(t)$ et de $\phi(t)$. Lorsque l'oscillateur oscille de manière harmonique, z est constant [2].

En prenant la dérivée de (3.2), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t} + i\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.4)$$

$$\ddot{x}(t) = i\omega [\dot{z}(t)e^{i\omega t} - \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t}] + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] \quad (3.5)$$

À partir de (3.2) et de (3.4), on obtient la condition :

$$\dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^*e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.6)$$

En substituant les equations de x , \dot{x} , et de \ddot{x} dans (3.1) :

$$\begin{aligned} 2i\omega\dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] + i\gamma\omega [z(t)e^{i\omega t} - z(t)^*e^{-i\omega t}] \\ + \omega_0^2 [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}] + \epsilon [z(t)e^{i\omega t} + z(t)^*e^{-i\omega t}]^3 = \frac{f_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Puis en multipliant par $e^{-i\omega t}$:

$$\begin{aligned} 2i\omega\dot{z}(t) + (i\omega)^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + i\gamma\omega [z(t) - \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + \omega_0^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] \\ + \epsilon [z(t)^3e^{i2\omega t} + 3z(t)^2\bar{z}(t) + 3z(t)\bar{z}(t)^2e^{-i2\omega t} + \bar{z}(t)^3e^{-i4\omega t}] = \frac{f_0}{2} [1 + e^{-i2\omega t}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Jusqu'ici, tout est exacte. On procède par une opération de moyennement, qui exploite les deux echelles de temps observé dans notre système. Une échelle 'rapide' marqué par des oscillations rapides avec des periodes de l'ordre $T = 2\pi/\omega$, et une échelle 'lente' selon laquelle évolue $z(t)$.

La méthode de moyennement consiste à remarquer qu'étant donné que z évolue très lentement, il reste quasiment constant au cours d'une periode d'oscillation rapide T . Donc on se permet de traiter $z(t)$ comme étant synonyme à sa moyenne sur une oscillation $\langle z \rangle$. $\langle z \rangle$ étant constant sur une periode d'oscillation.

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t')dt' \approx z(t) \quad (3.9)$$

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t')e^{in\omega t'}dt' \approx z(t) \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'}dt' \quad (3.10)$$

Depuis le principe fondamental de l'analyse, on peut aussi démontrer que :

$$\langle \dot{z} \rangle = \frac{d}{dt} \langle z \rangle \quad (3.11)$$

Et $n\omega t$ étant défini modulo 2π , on remarque que pour $n \neq 0$:

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'}dt' = 0$$

On prend donc la moyenne mobile de l'equation (3.8), ce qui nous permet de négliger les facteurs de $e^{in\omega t}$.

$$\begin{aligned} 2i\omega\langle \dot{z} \rangle &= -(i\omega)^2 \langle z \rangle - i\gamma\omega \langle z \rangle - \omega_0^2 \langle z \rangle - 3\epsilon \langle z^2 \bar{z} \rangle + \frac{f_0}{2} \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2) \langle z \rangle - i\gamma\omega \langle z \rangle - 3\epsilon |z|^2 \langle z \rangle + \frac{f_0}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Une autre façon d'y penser : on discrétise le temps en blocs de T . Donc d'une certaine manière, on réduit la résolution temporelle de nos équations pour ne garder que les parties lentement variables.

Ensuite, comme on s'intéresse surtout au comportement du système près du pic de résonance, on prend l'approximation $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$:

$$\dot{z}(t) = -i(\omega - \omega_0)z(t) - \frac{\gamma}{2}z(t) + \frac{3i\epsilon}{2\omega}|z|^2z(t) - \frac{if_0}{4\omega} \quad (3.13)$$

3.1 Adimensionnement de l'équation

Afin d'adimensionner l'équation, on procède par deux changements de variables :

$$t = t_c \tau \quad z(t) = z_c q(\tau) \quad (3.14)$$

Où t_c et z_c sont des constantes physiques à définir et τ et $q(\tau)$ sont les variable adimensionné analogues à t et $z(t)$. Ce choix de variables nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dq}{d\tau} = q'(\tau) = -i(\omega - \omega_0)t_c q(\tau) - \frac{\gamma}{2}t_c q(\tau) + i\frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c |q|^2 q(\tau) - \frac{if_0}{4\omega}t_c \quad (3.15)$$

Si on pose comme conditions :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{2}t_c = 1 \\ \frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

On retrouve l'équation adimensionné

$$q'(\tau) = -i\Omega q(\tau) - q(\tau) + i|q|^2 q(\tau) - F_0 \quad (3.17)$$

Avec :

$$\tau = \frac{\gamma}{2}t \quad q(\tau) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\omega\gamma}}z(t) \quad \Omega = \frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma/2} \quad F_0 = \frac{\sqrt{3\gamma}f_0}{2(\omega\gamma)^{3/2}} \quad (3.18)$$

On peut trouver la solution stationnaire :

$$q_0 = \frac{F_0}{|q_0|^2 - \Omega + i} \quad (3.19)$$

On s'intéresse surtout à l'amplitude en fonction de la fréquence, mais sous cette forme, l'analyse de la courbe n'est pas facile car on ne peut pas exprimer $|q_0|$ en tant que fonction de Ω . Cependant, il est possible d'exprimer Ω en fonction de $|q_0|$:

$$\Omega = |q_0|^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1} \quad (3.20)$$

Où $\pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1}$ correspondant à une lorentzienne pure, et $|q_0|^2$ forme une épine (*backbone* en anglais) qui donne la forme caractéristique de cette réponse fréquentielle non-linéaire.

Pour $F_0 \rightarrow 0$ la réponse devient lorentzienne. Effectivement, comme $F_0 \propto \sqrt{\gamma}f_0$, si le coefficient de non-linéarité est nulle ou négligeable (et f_0 pas trop grand), alors le système se comportera comme un oscillateur harmonique.

On observe aussi qu'il existe une valeur critique $F_{0,c}$ où pour $F_0 > F_{0,c}$ le système admet jusqu'à trois amplitudes possible, dont deux stables [3]. On parle alors d'un état bistable, l'état pris dépend de l'histoire du système.

On cherche alors à déterminer la valeur de $F_{0,c}$. Pour alléger la notation, on introduit la variable $u = |q_0|$ et on réécrit (3.19) :

$$u^2[(u^2 - \Omega)^2 + 1] = F_0^2 \quad (3.21)$$

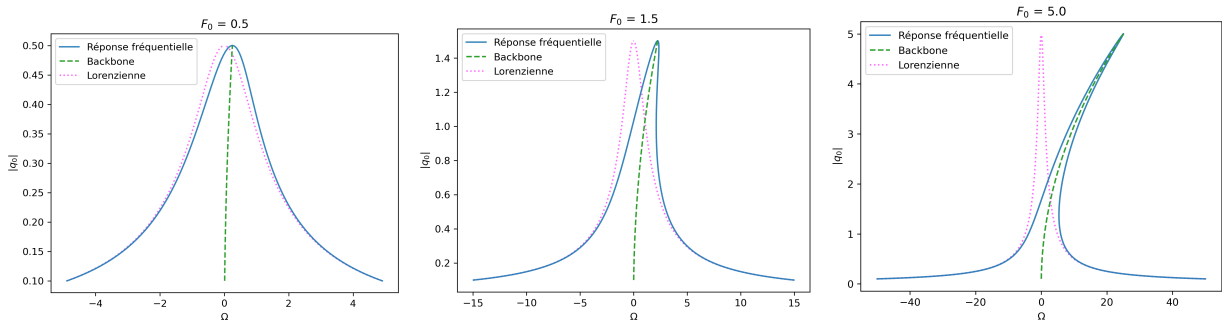


FIGURE 3.1 – Réponse fréquentielle de Duffing

Puis on prend la dérivée par rapport à Ω .

$$2u \frac{du}{d\Omega} (u^4 + \Omega^2 - 2\Omega u^2 + 1) + u^2 (4u^3 \frac{du}{d\Omega} + 2\Omega - 2u^2 - 4\Omega u \frac{du}{d\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} F_0^2 \quad (3.22)$$

On remarque que F_0 et Ω dépendent tout les deux de ω , qui est la vrai fréquence de forçage. Toutefois, pour dériver l'équation d'origine, on à supposé $\omega \approx \omega_0$. Donc :

$$\Omega \propto (\omega - \omega_0) \ll \omega$$

C'est à dire qu'en variant Ω , la variation correspondante que subira F_0 sera très petite. Donc on se permet de la considérer comme étant constante. En isolant $\frac{du}{d\Omega}$ on obtient :

$$\frac{du}{d\Omega} = \frac{-\Omega u + u^3}{3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1} \quad (3.23)$$

On peut d'abord déterminer l'amplitude maximum, qui est atteint lorsque $\frac{du}{d\Omega} = 0$, en réinsérant cette condition dans (3.21) on trouve :

$$|q_0|_{max} = F_0$$

La bistabilité apparait lorsque qu'on à plusieurs point sur la courbe qui satisfaisse $\frac{du}{d\Omega} = \infty$, nous donnant la condition :

$$3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1 = 0 \quad (3.24)$$

Lorsque $F_0 = F_{0,c}$, les points verticaux se rejoignent en un point unique. On peut donc résoudre pour u^2 en posant que le déterminant s'annule. On obtient les conditions :

$$\Omega = \pm\sqrt{3} \quad u^2 = \frac{2\Omega}{3} \quad (3.25)$$

Ce qui nous impose la solution unique $\Omega = \sqrt{3}$. En substituant ces valeurs dans (3.21), on trouve :

$$F_{0,c} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Un observation finale interessante. Etant donné que $F_0 \propto \sqrt{\epsilon} f_0$, on voit que même dans un système ou le terme nonlinéaire est très faible, où normalement on ne va pas observer de non-linéarité. Il suffit d'augmenter l'amplitude de forçage f_0 pour que faire ressortir un comportement non-linéaire (ici un état bistable). On voit donc que l'oscillateur harmonique, dans la plupart des cas physiques, n'est qu'une approximation valable à des amplitudes relativement faibles.

4. L'oscillateur de Van der Pol

Bibliographie

- [1] FEYNMAN, Richard. *The Feynman Lectures on Physics Vol. I*. T. 1. Ch. 23 : Resonance. URL : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_23.html (visité le 24/07/2023).
- [2] PISTOLESI, Fabio. « Duffing response in presence of thermal fluctuations ». Notes, non publié.
- [3] LANDAU, Lev Davidovič et LIFSHITZ, Evgeniĭ Mikhaïlovich. *Mechanics*. 3d ed. Course of theoretical physics v. 1. Oxford New York : Pergamon Press, 1976. ISBN : 978-0-7506-2896-9.