Rapport de Stage

Hervé SV

Juillet 2023

Table des matières

1. Introduction

2. Rappel sur l'oscillateur harmonique

Considérons le cas de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \gamma > 0 \tag{2.1}$$

Lorsque $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ le système oscille de manière pseudopériodique et admet des solutions de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos(\omega_\gamma t) + B\sin(\omega_\gamma t)) \qquad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \tag{2.2}$$

Cette solution est caractérisé par des oscillations sinusoïdales avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle selon $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

2.1 L'oscillateur forcé

Étudions le cas où l'on applique une force periodique de la forme $f_0 \cos(\omega t)$:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \tag{2.3}$$

Étant donné que la fréquence ω de la force ne correspondant géneralement pas à la fréquence naturelle de l'oscillateur ω_0, elle ne se mettra pas à osciller On s'attend a ce pour grand t, x finisse par adopter la fréquence d'oscillations ω. On cherche une solution particulière de cette forme en passant par les complexes [1].

$$x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) \quad z(t) = Ae^{i\omega t} \tag{2.4}$$

L'équation (2.3) devient :

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z = f_0 e^{i\omega t} \tag{2.5}$$

$$z(t) = Rf_0 e^{i\omega t} \qquad R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi} \tag{2.6}$$

Le module ρ est un multiplicateur de l'ampltitude de la réaction suite à la force, et l'argument ϕ va induire un déphasage de x par rapport à la force.

En revenant dans les réels :

$$x(t) = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad \dot{x}(t) = -\omega \rho f_0 \sin(\omega t + \phi) \tag{2.7}$$

On peut aisement déteminer des expressions pour ρ et ϕ

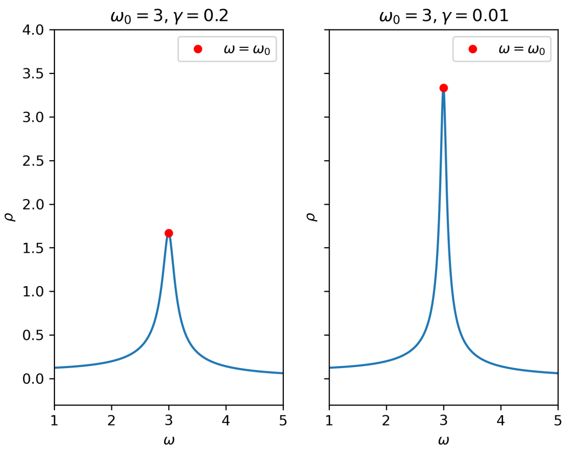
$$\begin{aligned} \rho^2 &= RR^* \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-\rho\omega\gamma}{\rho(\omega_0^2 - \omega^2) + 1} \tag{2.9}$$

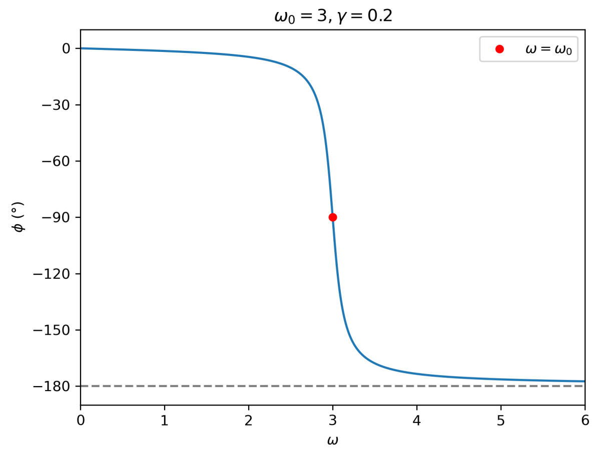
MONTRER PLOTS, PARLER DE LA LORENZTIENNE

ρ prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque ω est proche de ω_0 (effet de résonance), l'amplification tend rapidement vers zero le plus ω s'éloigne de ω_0.

Étant donné que la solution homogène tend vers 0, à long terme l'oscillateur va atteindre un état stable où il sera synchronisé avec la force.


ω0 = 3, γ = 0.2
ω0 = 3, γ = 0.01
ω = ω0
ρ
ω
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
1
2
3
4
5

(a)


ω0 = 3, γ = 0.2
ω = ω0
ϕ (°)
ω
0
−30
−60
−90
−120
−150
−180
0
1
2
3
4
5
6

(b)

3. L'oscillateur de Duffing

Considéront l'oscillateur forcé, mais maintenant avec un terme en x^3 supplémentaire, nous donnant l'équation de Duffing forcé. Ce n'est plus une équation linéaire, donc on ne peut plus exprimer la solution comme étant une superposition des solutions homogènes et particulières.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = f_0 \cos(\omega t) \tag{3.1}$$

Pour ϵ et f_0 suffisamenent faible, on s'attend à trouver un comportement semblable à l'oscillateur harmonique. On cherche donc des solution de la forme :

$$x(t) = r(t)\cos(\omega t + \phi(t)) \qquad \dot{x}(t) = -\omega r(t)\sin(\omega t + \phi(t)) \tag{3.2}$$

$$r(t) = \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\omega)^2}$$

On fait l'hypothèse que comme dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, la vitesse d'évolution de r et de ϕ sont données par le coefficient d'amortissement γ. Donc si $\gamma \ll \omega$, r et ϕ vont varier lentement par rapport à la periode d'oscillation de x.

En notation complexe :

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + z(t)^* e^{-i\omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\omega\left[z(t)e^{i\omega t} - z(t)^* e^{-i\omega t}\right] \tag{3.3}$$

$z(t)$ étant une variable complexe encodant l'amplitude et la phase d'oscillations du système.

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)}$$

Ce changement de variable $(x, \dot{x}) \to (r, \phi)$ nous place effectivement sur un référentiel tournant à la fréquence ω. En écartant ces oscillations rapides auquelles on s'attend, on peut mieux se concentrer sur les oscillations lentes de $r(t)$ et de $\phi(t)$. Lorsque l'oscillateur oscille de manière harmonique, z est constant [2].

En prenant la dérivée de (3.2), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^* e^{-i\omega t} + i\omega\left[z(t)e^{i\omega t} - z(t)^* e^{-i\omega t}\right] \tag{3.4}$$

$$\ddot{x}(t) = i\omega\left[\dot{z}(t)e^{i\omega t} - \dot{z}(t)^* e^{-i\omega t}\right] + (i\omega)^2\left[z(t)e^{i\omega t} + z(t)^* e^{-i\omega t}\right] \tag{3.5}$$

À partir de (3.2) et de (3.2), on obtient la condition :

$$\dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{z}(t)^* e^{-i\omega t} = 0 \tag{3.6}$$

En substituant les equations de x, $\dot{x}$, et de $\ddot{x}$ dans (3.1) :

$$\begin{aligned} &2i\omega\dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2\left[z(t)e^{i\omega t} + z(t)^* e^{-i\omega t}\right] + i\gamma\omega\left[z(t)e^{i\omega t} - z(t)^* e^{-i\omega t}\right] \\ &+ \omega_0^2\left[z(t)e^{i\omega t} + z(t)^* e^{-i\omega t}\right] + \epsilon\left[z(t)e^{i\omega t} + z(t)^* e^{-i\omega t}\right]^3 = \frac{f_0}{2}\left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Puis en multipliant par $e^{-i\omega t}$:

$$\begin{aligned} &2i\omega\dot{z}(t) + (i\omega)^2\left[z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}\right] + i\gamma\omega\left[z(t) - \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}\right] + \omega_0^2\left[z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}\right] \\ &+ \epsilon\left[z(t)^3 e^{i2\omega t} + 3z(t)^2\bar{z}(t) + 3z(t)\bar{z}(t)^2 e^{-i2\omega t} + \bar{z}(t)^3 e^{-i4\omega t}\right] = \frac{f_0}{2}\left[1 + e^{-i2\omega t}\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jusqu'ici, tout est éxacte. On procède par une opération de moyennement, qui exploite les deux echelles de temps observé dans notre système. Une échelle 'rapide' marqué par des oscillations rapides avec des periodes de l'ordre $T = 2\pi/\omega$, et une échelle 'lente' selon laquelle évolue $z(t)$.

La méthode de moyennement consiste à remarquer qu'étant donné que z évolue très lentement, il reste quasiment constant au cours d'une periode d'oscillation rapide T.

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t')dt' \approx z(t)$$

ωt étant défini modulo 2π, on remarque aussi que pour $n \neq 0$:

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' = 0$$

Donc on peut prendre la moyenne mobile de l'equation (3.9) tout en traitant $\dot{z}$, z et $\bar{z}$ comme étant constants, ce qui nous permet de négliger les facteurs de $e^{in\omega t}$.

$$\begin{aligned} 2i\omega\dot{z}(t) &= -(i\omega)^2 z(t) - i\gamma\omega z(t) - \omega_0^2 z(t) - 3\epsilon|z|^2 z(t) + \frac{f_0}{2} \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2)z(t) - i\gamma\omega z(t) - 3\epsilon|z|^2 z(t) + \frac{f_0}{2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

On s'interesse surtout au comportement du système près du pic de résonance, donc on prend l'approximation $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$:

$$\dot{z}(t) = -i(\omega - \omega_0)z(t) - \frac{\gamma}{2} z(t) + \frac{3i\epsilon}{2\omega}|z|^2 z(t) - \frac{if_0}{4\omega} \tag{3.10}$$

Bibliographie

[1] Richard FEYNMAN. *The Feynman Lectures on Physics Vol. I*. T. 1. Ch. 23 : Resonance. URL : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_23.html.

[2] Fabio PISTOLESI. « Duffing response in presence of thermal fluctuations ». Notes, non publié.