

Rapport de Stage

Hervé Schmit-Veiler

Septembre 2023

Remerciements

Je tiens à remercier M. Fabio Pistolesi. En tant que tuteur de stage, il a su être d'un grand soutien pédagogique et moral. Je lui remercie aussi pour ses remarques constructives et critiques qui m'ont permis d'améliorer mon travail et mon approche de la recherche.

J'ai également eu la chance exceptionnelle de bénéficier non pas d'un, mais de deux tuteurs de stage. Je tiens à remercier chaleureusement M. Rémi Avriller pour sa patience, disponibilité et sa bonne humeur. Je lui suis aussi reconnaissant de m'avoir conduit vers les meilleurs tableaux du laboratoire, que j'ai eu le plaisir d'utiliser pour étaler mes calculs à plus d'une occasion.

Je saisir cet instant pour remercier tous les chercheurs et autres personnels du Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine, ainsi que mes chères collègues stagiaires pour leur bienveillance et leur contribution à cette excellente expérience de stage.

Enfin, je tiens à adresser mes remerciements aux responsables du département Licence de m'avoir offert l'opportunité de réaliser ce stage d'excellence.

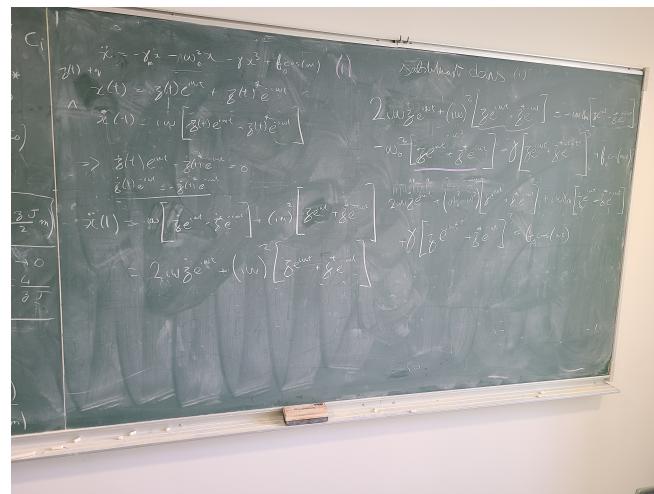


FIGURE 1 – Le tableau en question

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rappel sur l'oscillateur harmonique	3
2.1	L'oscillateur forcé	3
3	L'oscillateur de Duffing forcé	4
3.1	La méthode de moyennement	4
3.2	Adimensionnement de l'équation	6
4	L'oscillateur de Van der Pol	7
4.1	Étude du cycle limite	8
4.2	Étude de l'état transitoire	9
5	Étude de deux oscillateurs de Van der Pol couplés	10
5.1	Analyse de stabilité linéaire	11

1. Introduction

L'oscillation, phénomène omniprésent dans la nature, revêt une importance cruciale dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Les oscillateurs, en particulier, jouent un rôle essentiel dans de nombreuses applications, allant des systèmes électriques et mécaniques aux processus biologiques et chimiques. Si les oscillateurs linéaires ont fait l'objet de nombreuses études approfondies, il existe un autre domaine fascinant et complexe qui mérite une attention particulière : celui des oscillateurs non-linéaires.

Stimulé principalement par les besoins pratiques de l'ingénierie radio, le domaine des oscillations non-linéaires a connu une phase de croissance au début du vingtième siècle [1]. On peut citer le travail novateur de B. van der Pol sur les oscillations de relaxations, ainsi que "la contribution exceptionnelle de l'école d'Andronov et de l'école de Krylov-Bogoliubov", ces derniers étant responsables pour le développement de la méthode de moyennement Krylov-Bogoliubov [2]. Après 1960, la prolifération de l'ordinateur à grandement contribué à l'explosion du nombre de nouveaux résultats [2]. Aujourd'hui, l'étude des oscillateurs non-linéaires ouvre de nouvelles possibilités dans le développement de technologies nanomécanique, tel que les développements de qubits à base d'oscillateurs nanomécaniques [<empty citation>] ou de détecteurs de force ultrasensible à base de resonateurs nanomécaniques [<empty citation>].

Dans ce rapport, nous chercherons à acquérir une compréhension des comportements de plusieurs oscillateurs non-linéaires classiques ainsi que des méthodes mathématiques fréquemment utilisées pour analyser de tels problèmes. Ensuite, nous appliquerons ces méthodes dans l'étude d'un système de deux oscillateurs non-linéaires couplés.

2. Rappel sur l'oscillateur harmonique

Considérons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \gamma > 0 \quad (2.1)$$

Lorsque $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ le système oscille de manière pseudopériodique et a une solution générale de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos(\omega_\gamma t) + B \sin(\omega_\gamma t)) \quad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.2)$$

Cette solution est caractérisée par des oscillations sinusoïdales avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle selon $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

2.1 L'oscillateur forcé

Dans le cas où l'on applique une force périodique de la forme $F_0 \cos(\omega t)$:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad \text{Où} \quad f_0 = F_0/m \quad (2.3)$$

Étant donné que la fréquence ω de la force ne correspondant généralement pas à la fréquence naturelle de l'oscillateur ω_0 , l'oscillateur va initialement résister à la force externe. Mais pour grand t , à mesure que la solution homogène s'estompe, x finira par adopter la fréquence d'oscillations ω . On cherche donc une solution particulière de cette forme en passant par les complexes [3].

$$x(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad z(t) = A e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient :

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

$$z(t) = R f_0 e^{i\omega t} \quad R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi} \quad (2.6)$$

Le module ρ est le multiplicateur d'amplitude en réponse à la force, et l'argument ϕ va induire un déphasage de x par rapport à la force. En revenant dans les réels :

$$x(t) = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \dot{x}(t) = -\omega \rho f_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.7)$$

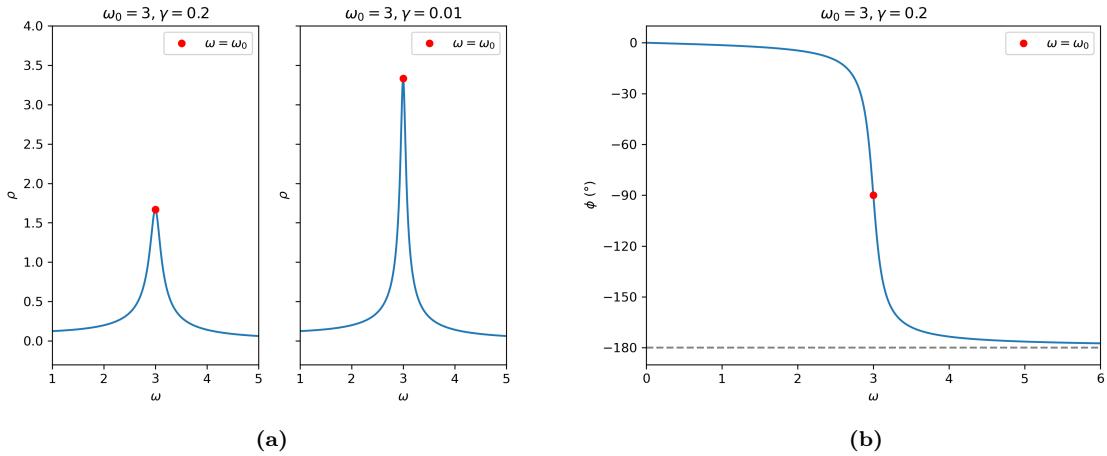


FIGURE 2.1 – (a) Réponse fréquentielle lorentzienne autour de la résonance divisé par f_0 pour ne que garder le facteur multiplicatif. **(b)** Différence de phase en fonction de la fréquence.

On peut déterminer les expressions pour ρ et ϕ

$$\begin{aligned}\rho^2 &= RR^* \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\gamma^2}\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-\rho\omega\gamma}{\rho(\omega_0^2 - \omega^2) + 1}\tag{2.9}$$

Le multiplicateur de force ρ prend la forme d'une courbe lorentzienne (fig. 2.1a), l'amplification de la force est très forte lorsque ω est proche de ω_0 (effet de résonance), et elle tend rapidement vers zéro le plus ω s'éloigne de ω_0 . Étant donné que la solution homogène tend vers 0, à long terme l'oscillateur va atteindre un état stable où il sera synchronisé avec la force avec un déphasage bien défini.

3. L'oscillateur de Duffing forcé

Considérons de nouveau un oscillateur forcé, mais maintenant avec un terme en x^3 supplémentaire, nous donnant l'équation de Duffing forcé. Ce n'est plus une équation linéaire, donc on ne peut plus exprimer la solution comme étant une superposition des solutions homogènes et particulières. Cette équation, comme la plupart des équations différentielles non-linéaires, n'a pas de solution analytique exacte.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon\gamma\dot{x} + \epsilon x^3 = \epsilon f_0 \cos(\omega t)\tag{3.1}$$

3.1 La méthode de moyennement

Afin d'analyser ce problème, nous allons utiliser la méthode de moyennement [4] - un algorithme qui nous permet de chercher des solutions approximatives à des équations de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon g(x, \dot{x}, t)\tag{3.2}$$

Où ϵ est un petit paramètre et g est une fonction non-linéaire. Pour notre problème en particulier, on cherche des solutions sous la forme :

$$x(t) = r(t) \cos(\omega t + \phi(t)) \quad \dot{x}(t) = -\omega r(t) \sin(\omega t + \phi(t))\tag{3.3}$$

En effet, pour $\epsilon = 0$ la solution est celle de l'oscillateur harmonique, avec r et ϕ constants. Donc pour $0 < \epsilon \ll \omega_0$, on s'attend à trouver un comportement semblable, mais cette fois avec $r(t)$ et $\phi(t)$ qui varient lentement avec le temps – un peu comme dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, où la vitesse d'évolution est également lente pour petit γ .

Il est particulièrement important de choisir la fréquence ω est non ω_0 car cela nous permet de faire coïncider la solution au régime permanent (qui est supposé harmonique, avec fréquence ω) au solutions stationnaires de r et ϕ . On peut aussi exprimer (3.3) sous forme complexe :

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.4)$$

$z(t)$ étant une variable complexe encodant l'amplitude et la phase d'oscillations du système. Lorsque l'oscillateur oscille de manière harmonique à fréquence ω , z est constant [5].

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)}$$

Ce changement de variable $(x, \dot{x}) \rightarrow (r, \phi)$ nous place effectivement sur un référentiel tournant à la fréquence ω . En effet, en écartant les oscillations rapides, il est plus facile de travailler avec les variations lentes de $r(t)$ et de $\phi(t)$.

En prenant la dérivée de (3.4), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t} + i\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.5)$$

$$\ddot{x}(t) = i\omega [\dot{z}(t)e^{i\omega t} - \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t}] + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.6)$$

À partir de (3.4) et de (3.5), on obtient la condition :

$$\dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.7)$$

En substituant les équations de x , \dot{x} , et de \ddot{x} dans (3.1) :

$$2i\omega\dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + i\gamma\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + \omega_0^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + \epsilon [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}]^3 = \epsilon \frac{f_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \quad (3.8)$$

Puis en multipliant par $e^{-i\omega t}$:

$$2i\omega\dot{z}(t) + (i\omega)^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + i\gamma\omega [z(t) - \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + \omega_0^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + \epsilon [z(t)^3 e^{i2\omega t} + 3z(t)^2 \bar{z}(t) + 3z(t)\bar{z}(t)^2 e^{-i2\omega t} + \bar{z}(t)^3 e^{-i4\omega t}] = \epsilon \frac{f_0}{2} [1 + e^{-i2\omega t}] \quad (3.9)$$

Jusqu'ici, tout est exact. On procède ensuite par une opération de moyennement, qui exploite les deux échelles de temps observé dans notre système. Une échelle 'rapide' marqué par des oscillations avec des périodes de l'ordre $T = 2\pi/\omega$, et une échelle 'lente' selon laquelle évolue $z(t)$.

La méthode de moyennement consiste à remarquer que : comme z évolue très lentement, il reste quasiment constant au cours d'une période d'oscillation rapide T . Donc, on se permet de la traiter comme étant constante et égale à sa moyenne sur une période d'oscillation $\langle z \rangle$. On appelle cela le moyennement au premier ordre [4].

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t') dt' \approx z(t) \quad (3.10)$$

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t') e^{in\omega t'} dt' \approx z(t) \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' \quad (3.11)$$

Depuis le principe fondamental de l'analyse, on peut aussi démontrer que :

$$\langle \dot{z} \rangle = \frac{d}{dt} \langle z \rangle \quad (3.12)$$

Et $n\omega t$ étant défini modulo 2π , on remarque que pour $n \neq 0$:

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' = 0$$

On prend donc la moyenne mobile de l'équation (3.9), ce qui nous permet de négliger les facteurs de $e^{in\omega t}$.

$$\begin{aligned} 2i\omega \langle \dot{z} \rangle &= -(i\omega)^2 \langle z \rangle - i\gamma\omega \langle z \rangle - \omega_0^2 \langle z \rangle - 3\epsilon \langle z^2 \bar{z} \rangle + \epsilon \frac{f_0}{2} \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2)z(t) - i\gamma\omega z(t) - 3\epsilon|z|^2 z(t) + \epsilon \frac{f_0}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ensuite, on s'intéresse surtout au comportement du système près du pic de résonance, donc on prend l'approximation $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$:

$$\dot{z}(t) = -i(\omega - \omega_0)z(t) - \frac{\gamma}{2}z(t) + \frac{3i\epsilon}{2\omega}|z|^2z(t) - \frac{i\epsilon f_0}{4\omega} \quad (3.14)$$

3.2 Adimensionnement de l'équation

Afin d'adimensionner l'équation, on procède par deux changements de variables :

$$t = t_c\tau \quad z(t) = z_c q(\tau) \quad (3.15)$$

Où t_c et z_c sont des constantes physiques à définir et τ et $q(\tau)$ sont les variables adimensionnées analogues à t et $z(t)$. Ce choix de variables nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dq}{d\tau} = q'(\tau) = -i(\omega - \omega_0)t_c q(\tau) - \frac{\gamma}{2}t_c q(\tau) + i\frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c |q|^2 q(\tau) - \frac{i\epsilon f_0}{4\omega} \frac{t_c}{z_c} \quad (3.16)$$

Si on pose comme conditions :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{2}t_c = 1 \\ \frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2 t_c = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

On retrouve l'équation adimensionnée

$$q'(\tau) = -i\Omega q(\tau) - q(\tau) + i|q|^2 q(\tau) - F_0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$\tau = \frac{\gamma}{2}t \quad q(\tau) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\omega\gamma}}z(t) \quad \Omega = \frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma/2} \quad F_0 = \frac{\sqrt{3}\epsilon^{3/2}f_0}{2(\omega\gamma)^{3/2}} \quad (3.19)$$

On peut trouver la solution stationnaire pour analyser le comportement à $t \rightarrow \infty$:

$$q_0 = \frac{F_0}{|q_0|^2 - \Omega + i} \quad (3.20)$$

On s'intéresse surtout à l'amplitude en fonction de la fréquence, mais sous cette forme, l'analyse de la courbe n'est pas facile, car on ne peut pas exprimer $|q_0|$ en tant que fonction de Ω . Cependant, il est possible d'exprimer Ω en fonction de $|q_0|$:

$$\Omega = |q_0|^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1} \quad (3.21)$$

Où $\pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1}$ correspondant à la lorentzienne pure, et $|q_0|^2$ forme une colonne vertébrale (*backbone* en anglais) qui donne la forme caractéristique de cette réponse fréquentielle non-linéaire. Pour $F_0 \rightarrow 0$ la réponse, devient lorentzienne. À mesure de F_0 augmente, la courbe de la réponse fréquentielle va se déformer en suivant la *backbone* (fig. ??).

On observe aussi qu'il existe une valeur critique $F_{0,c}$, où pour $F_0 > F_{0,c}$ le système admet trois amplitudes possibles, dont deux stables [6]. On parle alors d'un état bistable (fig. ??).

On cherche à déterminer la valeur de $F_{0,c}$. Pour alléger la notation, on introduit la variable $u = |q_0|$ et on réarrange (3.20) :

$$u^2[(u^2 - \Omega)^2 + 1] = F_0^2 \quad (3.22)$$

Puis on prend la dérivée par rapport à Ω .

$$2u \frac{du}{d\Omega} (u^4 + \Omega^2 - 2\Omega u^2 + 1) + u^2 (4u^3 \frac{du}{d\Omega} + 2\Omega - 2u^2 - 4\Omega u \frac{du}{d\Omega}) = \frac{d}{d\Omega} F_0^2 \quad (3.23)$$

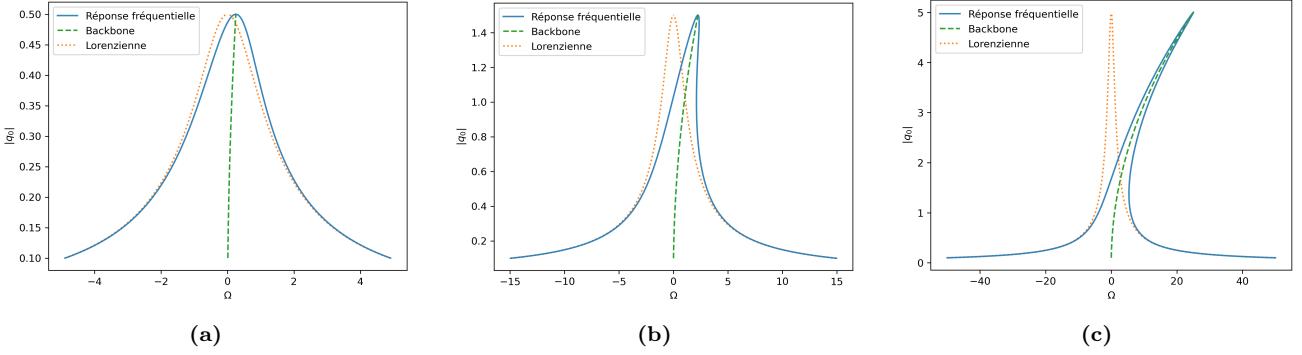


FIGURE 3.1 – Réponses fréquentielles de Duffing obtenu à partir de (3.21) (a) $F_0 = 0.5$ (b) $F_0 = 1.5$ (c) $F_0 = 5.0$

On remarque que F_0 et Ω dépendent tous les deux de ω , qui est la vraie fréquence de forçage. Toutefois, pour dériver l'équation (3.20), on a supposé $\omega \approx \omega_0$. Donc :

$$\Omega \propto (\omega - \omega_0) \ll \omega$$

C'est-à-dire qu'en variant Ω , la variation correspondante que subira F_0 sera très petite. Donc, on se permet de la considérer comme étant constante. En isolant $\frac{du}{d\Omega}$ on obtient :

$$\frac{du}{d\Omega} = \frac{-\Omega u + u^3}{3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1} \quad (3.24)$$

On peut d'abord déterminer l'amplitude maximum, qui est atteint lorsque $\frac{du}{d\Omega} = 0$, en réinsérant cette condition dans (3.22) on trouve :

$$|q_0|_{max} = F_0$$

La bistabilité apparaît lorsque qu'il y a plusieurs points sur la courbe satisfaisant à $\frac{du}{d\Omega} = \infty$, nous donnant la condition :

$$3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1 = 0 \quad (3.25)$$

Lorsque $F_0 = F_{0,c}$, il existe une unique solution en u . On peut donc résoudre pour u^2 en posant que le déterminant de l'équation quadratique s'annule. On obtient les conditions :

$$\Omega = \pm\sqrt{3} \quad u^2 = \frac{2\Omega}{3} \quad (3.26)$$

Ce qui nous impose la solution unique $\Omega = \sqrt{3}$. En substituant ces valeurs dans (3.22), on trouve :

$$F_{0,c} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} \right)^{1/2} \approx 1.241 \quad (3.27)$$

Une observation finale intéressante. Étant donné que $F_0 \propto \epsilon^{3/2} f_0$, on voit que même dans un système où le terme non-linéaire est très faible (où on ne s'attendrait pas à observer de non-linéarité). Il suffit d'augmenter l'amplitude de forçage f_0 pour faire ressortir un comportement non-linéaire (ici un état bistable). L'oscillateur harmonique pour modéliser les situations physiques n'est donc qu'une approximation valable à des amplitudes et à des forces relativement faibles.

4. L'oscillateur de Van der Pol

On s'intéresse ensuite à l'équation de Van der Pol. Un modèle imaginé par le physicien Balthasar van der Pol pendant ses travaux sur des circuits électriques non-linéaires utilisées dans les premières radios [7].

$$\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0 \quad (4.1)$$

C'est un système non conservatif avec une particularité intéressante. Le signe du terme d'amortissement $\epsilon(x^2 - 1)\dot{x}$ change en fonction de x . Lorsque $|x| < 1$, le coefficient d'amortissement négatif fournit de l'énergie au système, et dans le cas contraire $|x| > 1$, il en dissipe. Ce comportement particulier donne lieu à des oscillations entretenues de manière autonome.

Avec une étude numérique du système sur le plan de phase, on constate qu'il tend vers une unique orbite isolée, quelles que soient les conditions initiales imposées. Une telle orbite dans l'espace de phase s'appelle un *cycle limite*. On voit notamment que pour petit ϵ , le cycle limite est quasi-circulaire, alors que pour grand ϵ le cycle est fortement déformé et caractérisé par des oscillations de relaxations [4].

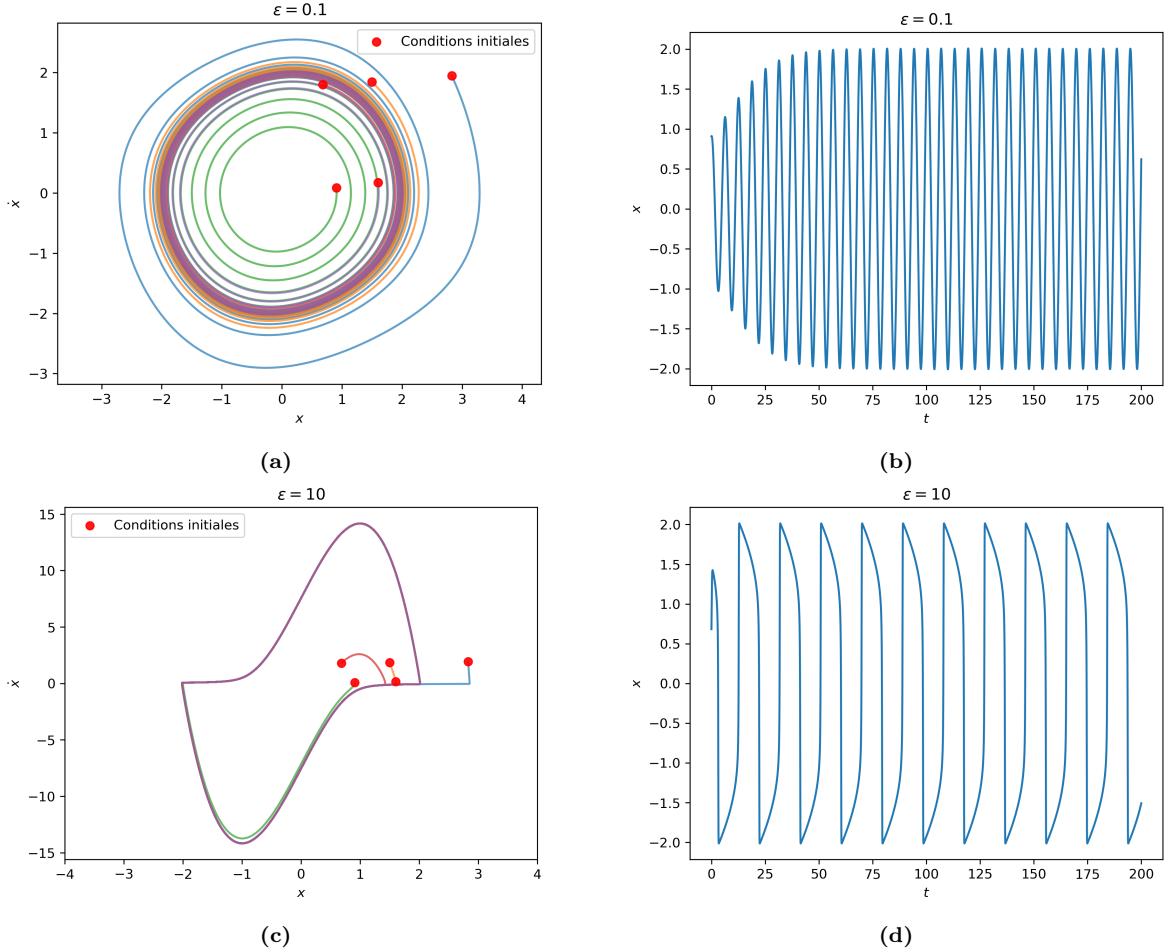


FIGURE 4.1 – Portraits de phase et tracés de l'amplitude de l'oscillateur de Van der Pol, obtenus par intégration numérique avec conditions initiales aléatoires (a) Portrait de phase, $\epsilon = 0.1$ (b) Traçé x contre t , $\epsilon = 0.1$ (c) Portrait de phase, $\epsilon = 10$ (d) Traçé x contre t , $\epsilon = 10$

4.1 Étude du cycle limite

On cherche une solution approximative pour le cycle limite de (4.1) sous forme d'un développement perturbatif valide pour $\epsilon \ll 1$. En comparant les systèmes faiblement et fortement non-linéaires (fig. 4.1), on observe que la fréquence d'oscillation diverge de la fréquence naturelle $\omega_0 = 1$ lorsque ϵ augmente. En raison de cela, on va utiliser la méthode de Lindstedt [4], qui nous permet de prendre en compte la dépendance de la fréquence d'oscillations sur ϵ .

L'approche consiste à définir une échelle de temps dilaté τ et de prendre la fréquence ω du cycle limite comme étant un inconnu qui dépend de ϵ :

$$\tau = \omega t \quad \omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + O(\epsilon^3) \quad (4.2)$$

En résolvant l'équation sous cette nouvelle échelle de temps, on permet à la solution approximative de prendre compte de ce décalage de fréquence. Ce que la méthode perturbative classique ne peut pas faire.

$$x(\tau, \epsilon) = x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + O(\epsilon^3) \quad (4.3)$$

Les termes à l'ordre zéro dans les développements correspondent aux solutions de (4.1) lorsque $\epsilon = 0$. Ce sont les termes de base que l'on va chercher à “perturber” avec des petits termes correcteurs. Suite à la transformation d'échelle $x(t) \rightarrow x(\tau)$, (4.1) devient :

$$\omega^2 x''(\tau) + x''(\tau) + \epsilon\omega(x(\tau)^2 - 1)x'(\tau) = 0 \quad (4.4)$$

Où le prime dénote une dérivée par rapport à τ . En substituant (4.2) et (4.3) dans (4.4) :

$$(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2(x_0'' + \epsilon x_1'' + \epsilon x_2'') + \epsilon(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)[(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)^2 - 1](x_0' + \epsilon x_1' + \epsilon^2 x_2') + x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 = 0 \quad (4.5)$$

On s'attend à ce que cette équation soit valide pour tout ϵ , donc les coefficients de ϵ^n doivent s'annuler indépendamment les un des autres. En négligeant les termes $O(\epsilon^3)$ et en regroupant les coefficients de ϵ^n on obtient les trois équations suivantes :

$$O(\epsilon^0) : \quad x_0'' + x_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$O(\epsilon^1) : \quad x_1'' + x_1 = -2\omega_1 x_0'' - (x_0^2 - 1)x_0' \quad (4.7)$$

$$O(\epsilon^2) : \quad x_2'' + x_2 = -2\omega_2 x_1'' - (2\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - (x_0^2 - 1)x_1' - 2x_0 x_1 x_0' - \omega_1(x_0^2 - 1)x_0' \quad (4.8)$$

On peut constater que si on impose des conditions initiales arbitraires $x(0, \epsilon) = A$, $x'(0, \epsilon) = B$, pour que (4.3) soit valide pour tout ϵ il faut obligatoirement que :

$$x_0(0) = A, \quad x_0'(0) = B \quad x_k(0) = x_k'(0) = 0 \quad \forall k > 0 \quad (4.9)$$

On commence donc par résoudre (4.6), qui correspond à l'oscillateur harmonique de base :

$$x_0(\tau) = A \cos(\tau + \phi_B) \quad (4.10)$$

En raison de la nature autonome de (4.6) (l'absence explicite du temps), on est libre de choisir l'origine du temps de telle sorte à éliminer la phase ϕ_B , ce qui est équivalent à imposer la condition $B = 0$. On résout alors (4.7) en y substituant l'expression de x_0 :

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 &= 2\omega_1 A \cos(\tau) + (A^2 \cos^2(\tau) - 1)A \sin(\tau) \\ &= 2\omega_1 A \cos(\tau) + \left(\frac{1}{4}A^3 - A\right) \sin(\tau) + \frac{1}{4}A^3 \sin(3\tau) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque la présence de termes résonants (aussi appellé termes séculaires) de type $k \cos(\tau)$ et $k \sin(\tau)$ dans l'équation. Or, si on cherche à trouver une solution périodique, les coefficients de ces termes résonants doivent s'annuler. En effet, ils donnent lieu à des solutions de la forme $k'\tau \sin(\tau)$ qui ne sont pas bornées avec le temps. En appliquant cette condition de périodicité :

$$2\omega_1 A = 0 \quad \frac{1}{4}A^3 - A = 0 \quad (4.12)$$

$A = 0$ correspond à la solution stationnaire instable du système et $A = -2$ correspond à une différence de phase de π par rapport à $A = 2$. On conclut donc (sans perte de généralité) que $\omega_1 = 0$ et que $A = 2$. Selon la dernière condition, on conclut que pour ϵ quelconque non-nulle, seule l'orbite circulaire de rayon 2 (sur le plan de phase) reste solution périodique. En effet, le système converge vers une unique solution périodique - un cycle limite.

Ensuite, on résout $x_1'' + x_1 = 2 \sin(3\tau)$ en appliquant les conditions initiales :

$$x_1 = \frac{3}{4} \sin(\tau) - \frac{1}{4} \sin(3\tau) \quad (4.13)$$

Et on répète le processus en substituant les expressions de ω_1 , A et de x_1 dans (4.8) :

$$\begin{aligned} x_2'' + x_2 &= 4\omega_2 \cos(\tau) + 8 \sin(\tau) \cos(\tau) \left(\frac{3}{4} \sin(\tau) - \frac{1}{4} \sin(3\tau) \right) - \left(\frac{3}{4} \cos(\tau) - \frac{3}{4} \cos(3\tau) \right) (4 \cos^2(\tau) - 1) \\ &= (4\omega_2 + \frac{1}{4}) \cos(\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) + \frac{5}{4} \cos(5\tau) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donc, pour éliminer le terme résonant, il faut que $\omega_2 = -\frac{1}{16}$. On résout l'équation qui en résulte pour trouver :

$$x_2(\tau) = \frac{3}{16} \cos(3\tau) - \frac{5}{96} \cos(5\tau) - \frac{41}{304} \cos(\tau) \quad (4.15)$$

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.16)$$

4.2 Étude de l'état transitoire

On cherche maintenant à étudier l'approche du système vers le cycle limite. Pour faire cela, on applique la méthode de moyennement. Pour $\epsilon \ll 1$, on prend la fréquence d'oscillation $\omega = 1$ constante et on cherche de solutions sous la forme :

$$x(t) = z(t)e^{it} + \bar{z}(t)e^{-it} \quad \dot{x}(t) = i [z(t)r^{it} - \bar{z}(t)e^{-it}] \quad (4.17)$$

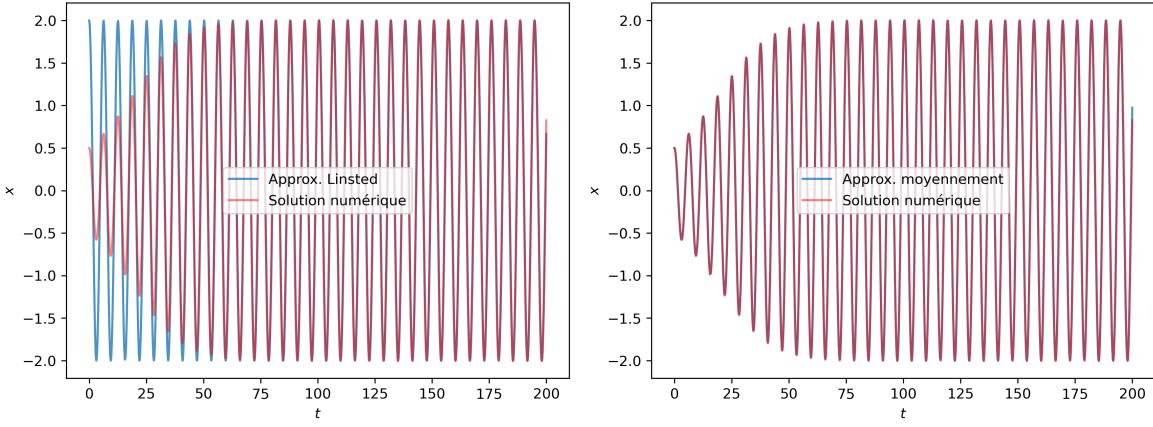


FIGURE 4.2 – Comparaison des deux approximations avec une solution numérique, $\epsilon = 0.1$, $x(0) = 0.5$, $\dot{x}(0) = 0$

Avec :

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)} \quad (4.18)$$

On substitue (4.17) dans (4.1) puis on applique le même raisonnement que pour l'oscillateur de Duffing pour obtenir :

$$2\dot{z}(t) = -\epsilon (z^2(t)\bar{z}(t) - z(t)) \quad (4.19)$$

Sachant que $\dot{z}(t) = \frac{\dot{r}}{2}e^{i\phi} + i\dot{\phi}\frac{r}{2}e^{i\phi}$, on peut séparer la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation pour obtenir le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\epsilon}{8}r(4 - r^2) \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

On fait l'observation que le système Van der Pol n'a pas de fréquence de référence - contrairement à l'oscillateur de Duffing forcée, la phase à l'état stable dépend que des conditions initiales. On retrouve aussi les deux solutions stationnaires stable et instable à $r = 2$ et $r = 0$ trouvé auparavant avec la méthode de Linstedt. On peut résoudre la première équation par séparation des variables pour le cas $r \neq 2$:

$$r(t) = 2\sqrt{\frac{A}{A + e^{-\epsilon t}}} \quad \text{Où} \quad A = \frac{r(0)^2}{4 - r(0)^2} \quad (4.21)$$

Dans fig. 4.2 on voit que l'approximation obtenue par le moyenement est légèrement en avance par rapport à la solution numérique, on peut attribuer cela à l'approximation $\omega \approx 1$ qui a été fait en négligeant les termes en ϵ^2 . De ce fait, l'approximation n'est que fiable jusqu'à des temps de l'ordre $O(\frac{1}{\epsilon^2})$ car au-delà de ça le décalage entre la solution et l'approximation devient non négligeable.

5. Étude de deux oscillateurs de Van der Pol couplés

Étudions maintenant le système suivant, composé de deux oscillateurs de Van der Pol identiques, couplé par une force de rappel linéaire relativement faible. On cherchera à étudier si les oscillateurs se synchronisent, et la manière dont ils se synchronisent.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \epsilon(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 = \epsilon k(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \epsilon(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 = \epsilon k(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Encore une fois, on procède par la méthode de moyenement pour obtenir une approximation de l'enveloppe lentement variable :

$$2\dot{z}_1(t) = \epsilon [z_1(t) - |z_1|^2 z_1(t)] - i\epsilon k(z_2(t) - z_1(t)) \quad (5.2)$$

On sépare les parties réelles des parties imaginaires et on obtient un système d'équation pour \dot{r}_1 , \dot{r}_2 , $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$. Or, l'oscillateur de Van der Pol n'ayant pas de phase de référence (sa phase n'étant pas fixée par une force extérieure), l'évolution du système ne dépend que de la différence entre les phases des oscillateurs. On peut donc réduire le

système à trois équations en introduisant la variable de déphasage $\Theta = \phi_2 - \phi_1$:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_2^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_1^2) + \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \dot{\phi}_1 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos(\phi_2 - \phi_1)\right) \\ \dot{\phi}_2 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_2^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_1^2) - \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{\Theta} = \epsilon \frac{k}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos(\Theta) \end{cases} \quad (5.3)$$

On s'intéresse aux solutions stationnaires. Pour cela, on s'inspire du cas non couplé. Lorsque $k = 0$, la configuration stable correspond à $r_1 = r_2 = 2$ avec Θ arbitraire. On cherche s'il y a quelque chose de similaire pour $k \neq 0$. Si on pose :

$$r_1 = r_2 = 2 \quad \text{et} \quad \dot{r}_1 = \dot{r}_2 = \dot{\Theta} = 0$$

On trouve effectivement une solution stationnaire à condition que $\Theta = 0$ ou $\Theta = \pi$. Donc il existe au moins deux solutions stationnaires, une où les deux oscillateurs sont en phase, et une autre en anti-phase.

5.1 Analyse de stabilité linéaire

Pour déterminer la stabilité de ces solutions stationnaires, on peut faire une analyse de stabilité linéaire dans le voisinage des solutions stationnaires. On notera par la suite les solutions stationnaires par un astérisque :

$$r_1^* = r_2^* = r^* = 2 \quad \Theta_1^* = 0 \quad \Theta_2^* = \pi$$

Nous donnant deux points stationnaires dans l'espace de phase (r_1, r_2, Θ) :

$$\mathbf{x}_1^* = (r^*, r^*, \Theta_1^*) \quad \mathbf{x}_2^* = (r^*, r^*, \Theta_2^*) \quad (5.4)$$

On procède en se plaçant à une petite perturbation près de la solution stationnaire :

$$r_1(t) = r^* + \delta r_1(t) \quad (5.5)$$

On prend la dérivée temporelle et on prend l'approximation linéaire de \dot{r}_1 , \dot{r}_2 et $\dot{\Theta}$ dans le voisinage de la solution stationnaire \mathbf{x}_i^* :

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_1 &= \dot{r}_1(r_1, r_2, \Theta) \\ &= \dot{r}_1(\mathbf{x}_i^*) + (r_1 - r^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_1} + (r_2 - r^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_2} + (\Theta - \Theta_i^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sous forme vectorielle, on a :

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = M \delta \mathbf{x} \quad (5.7)$$

Avec,

$$\delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta \Theta \end{pmatrix} \quad \dot{\delta \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\delta r}_1 \\ \dot{\delta r}_2 \\ \dot{\delta \Theta} \end{pmatrix} \quad M = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{x}_i^*} \quad (5.8)$$

M_i étant la matrice jacobienne du champ vectoriel $(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\Theta})$ évalué au point stationnaire \mathbf{x}_i^* . Cette approximation linéaire nous permet de déduire l'évolution du système dans le voisinage des points stationnaires de manière qualitative, notamment si les points sont stables ou instables. À moins que l'approximation linéaire soit nulle, la stabilité du système sera inchangée par les termes des ordres plus hauts.

Dans le cas général, il est possible d'écrire $\delta \mathbf{x}$ sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de M :

$$\delta \mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3$$

Avec \mathbf{v}_j et λ_j les vecteurs et valeurs propres correspondants, qui ne sont ni tous strictement réel ni strictement distinct le un des autres. Pour un point stationnaire donné, si $\lambda_j < 0$ pour $j = 1, 2, 3$ alors, on voit que la perturbation $\delta \mathbf{x}$ décroît avec le temps, donc le point stationnaire est stable. Sinon, le point est instable. On s'intéresse donc surtout aux signes des valeurs propres de M .

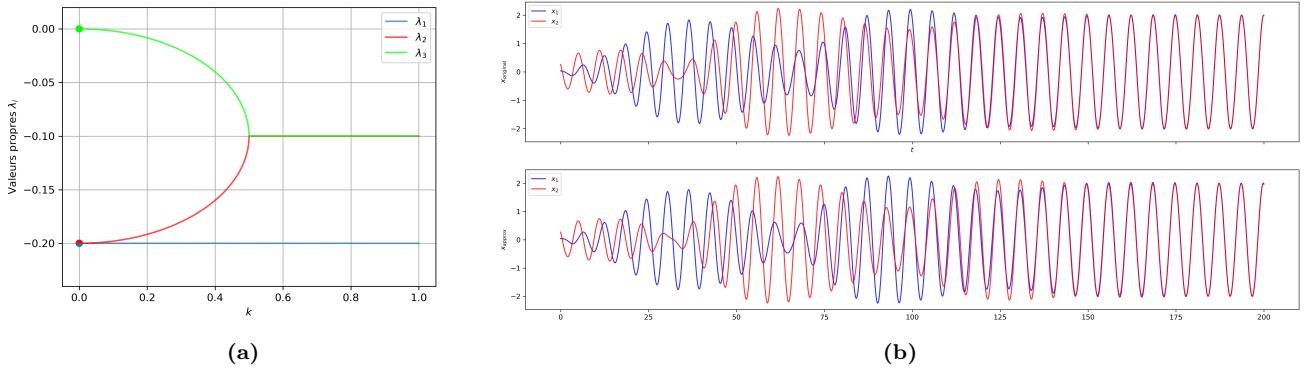


FIGURE 5.1 – (a) Tracé de la partie réelle des valeurs propres λ_i en fonction de k , $\epsilon = 0.2$. **(b)** Comparaison graphique du système original (5.1) avec le système moyen (5.8) faite par intégration numérique, notez les amplitudes oscillantes – $x_1(0) = 0.038$, $x_2(0) = 0.265$, $\dot{x}_1(0) = -0.018$, $\dot{x}_2(0) = -0.486$, $\epsilon = 0.1$, $k = 1$

Procédons par l'évaluation de la matrice jacobienne au deux points stationnaires.

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & +\epsilon k \\ 0 & -\epsilon & -\epsilon k \\ -\epsilon k/2 & +\epsilon k/2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & -\epsilon k \\ 0 & -\epsilon & +\epsilon k \\ +\epsilon k/2 & -\epsilon k/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Les valeurs propres sont déterminées à partir de la condition :

$$\det(M_i - \lambda I) = 0 \quad (5.10)$$

Appliqué à M_1

$$\begin{vmatrix} -\epsilon - \lambda & 0 & +\epsilon k \\ 0 & -\epsilon - \lambda & -\epsilon k \\ -\epsilon k/2 & +\epsilon k/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \epsilon^2 k^2 (-\epsilon - \lambda) - \lambda(-\epsilon - \lambda)^2 = 0 \quad (5.11)$$

On trouve la même équation caractéristique pour M_2 que pour M_1 , signifiant que le dynamique autour des deux points stationnaires sont identiques. Cette équation caractéristique (5.11) peut être résolu pour λ :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\epsilon \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} (-\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} - \epsilon) \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} - \epsilon) \end{cases} \quad (5.12)$$

Il est évident que λ_1 est strictement négatif. Et pour $0 \leq |k| \leq \frac{1}{2}$ on voit que $\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} \leq \epsilon$, donc :

$$-\epsilon \leq \lambda_2 \leq -\frac{\epsilon}{2} \quad -\frac{\epsilon}{2} \leq \lambda_3 \leq 0$$

Lorsque $|k| > \frac{1}{2}$, λ_2 et λ_3 deviennent un couple de complexes conjugués. Géométriquement, cela correspond à des trajectoires spirales oscillant autour du point stationnaire – effectivement, on peut vérifier numériquement que r_1 , r_2 et Θ oscillent dans ces cas-là (fig. 5.1b). La stabilité est déterminée par la partie réelle des valeurs propres. Or :

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = \operatorname{Re}(\lambda_3) = -\frac{\epsilon}{2}$$

La partie réelle des trois valeurs propres étant toujours négatives, on voit donc que dans le cadre de notre approximation, les points stationnaires $(2, 2, 0)$, $(2, 2, \pi)$ sont stables pour tout k . Ce qui nous montre que les deux oscillateurs peuvent se synchroniser soit en phase ou en anti-phase. On n'a pas éliminé la possibilité que l'oscillateur ne se synchronise pas, ni qu'il pourrait y avoir d'autres solutions stables. Pour cela, il faudrait étudier l'existence d'autres solutions stationnaires stables ou de conditions 'neutres' qui ne donnent pas lieu à la synchronisation. Ceci dit, l'analyse numérique du problème avec conditions initiales aléatoires n'a pas révélé d'autre solution stables, ni de cas non synchronisant.

Étant donné que les valeurs propres des deux points stationnaires sont identiques, on s'attend à ce que les deux configurations synchronisées soient aussi stables l'une que l'autre. Donc a priori, si le système n'admet pas d'autres solutions stables, l'état synchronisé devra dépendre des conditions initiales.

Bibliographie

- [1] SAMOILENKO, A M. « N.N. Bogolyubov and non-linear mechanics ». In : *Russian Mathematical Surveys* 49.5 (31 oct. 1994), p. 109-154. ISSN : 0036-0279, 1468-4829. DOI : [10.1070/RM1994v04n05ABEH002432](https://doi.org/10.1070/RM1994v04n05ABEH002432). URL : <https://iopscience.iop.org/article/10.1070/RM1994v04n05ABEH002432> (visité le 12/09/2023).
- [2] MIRA, Christian. « Some historical aspects of nonlinear dynamics—Possible trends for the future ». In : *Journal of the Franklin Institute* 334.5 (sept. 1997), p. 1075-1113. ISSN : 00160032. DOI : [10.1016/S0016-0032\(97\)00030-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(97)00030-6). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0016003297000306> (visité le 12/09/2023).
- [3] FEYNMAN, Richard. *The Feynman Lectures on Physics Vol. I*. T. 1. Ch. 23 : Resonance. URL : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_23.html (visité le 24/07/2023).
- [4] RAND, Richard H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Cornell University, mai 2012. URL : <https://ecommons.cornell.edu/handle/1813/28989>.
- [5] PISTOLESI, Fabio. « Duffing response in presence of thermal fluctuations ». Notes, non publié.
- [6] LANDAU, Lev Davidovič et LIFSHITZ, Evgenij Mikhaïlovich. *Mechanics*. 3d ed. Course of theoretical physics v. 1. Oxford New York : Pergamon Press, 1976. ISBN : 978-0-7506-2896-9.
- [7] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos*. Second edition. Boulder, CO : Westview Press, 2015. 513 p. ISBN : 978-0-8133-4910-7.