

# Rapport de Stage

Hervé SV

Juillet 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rappel sur l'oscillateur harmonique</b>	<b>2</b>
2.1	L'oscillateur forcé . . . . .	2
<b>3</b>	<b>L'oscillateur de Duffing forcé</b>	<b>3</b>
3.1	La méthode de moyennement . . . . .	4
3.2	Adimensionnement de l'équation . . . . .	4
<b>4</b>	<b>L'oscillateur de Van der Pol</b>	<b>6</b>
4.1	Étude du cycle limite . . . . .	6
4.2	Étude de l'état transitoire . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Étude de deux oscillateurs Van der Pol couplés</b>	<b>8</b>
5.1	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	9

# 1. Introduction

L'oscillateur, **système** omniprésent dans la nature, joue un rôle essentiel dans de nombreuses applications, allant des systèmes électriques et mécaniques aux processus biologiques et chimiques. Si les oscillateurs linéaires ont fait l'objet de nombreuses études approfondies, il existe un autre domaine fascinant et complexe qui mérite une attention particulière : celui des oscillateurs non-linéaires.

Un domaine qui a joué un rôle particulièrement important dans le développement de nouvelles technologies électroniques au vingtième siècle, tel que la radio, le radar et le laser.

Dans ce rapport, nous chercherons à acquérir une compréhension des comportements de plusieurs oscillateurs non-linéaires classiques ainsi que des méthodes mathématiques fréquemment utilisées pour analyser de tels problèmes. Ensuite nous appliquerons ces méthodes dans l'étude d'un système de deux oscillateurs non-linéaires couplées.

## 2. Rappel sur l'oscillateur harmonique

Considérons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \gamma > 0 \quad (2.1)$$

Lorsque  $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$  le système oscille de manière pseudopériodique et admet des solutions de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A \cos(\omega_\gamma t) + B \sin(\omega_\gamma t)) \quad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.2)$$

Cette solution est caractérisée par des oscillations sinusoïdales avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle selon  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ .

### 2.1 L'oscillateur forcé

Étudions le cas où l'on applique une force périodique de la forme  $f_0 \cos(\omega t)$  :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

Étant donné que la fréquence  $\omega$  de la force ne correspond pas généralement à la fréquence naturelle de l'oscillateur  $\omega_0$ , l'oscillateur va initialement résister à la force externe. Mais on s'attend à ce pour grand  $t$ , à mesure que la solution homogène s'estompe,  $x$  finisse par adopter la fréquence d'oscillations  $\omega$ . On cherche donc une solution particulière de cette forme en passant par les complexes [1].

$$x(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad z(t) = A e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient :

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

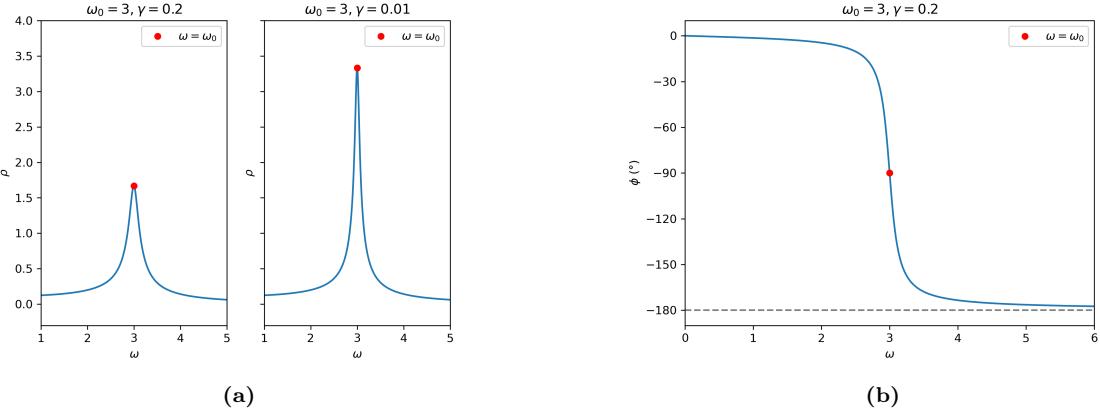
$$z(t) = R f_0 e^{i\omega t} \quad R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi} \quad (2.6)$$

Le module  $\rho$  est le multiplicateur d'amplitude en réponse à la force, et l'argument  $\phi$  va induire un déphasage de  $x$  par rapport à la force. En revenant dans les réels :

$$x(t) = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \dot{x}(t) = -\omega \rho f_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.7)$$

On peut déterminer les expressions pour  $\rho$  et  $\phi$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= RR^* \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$



**FIGURE 2.1 – (a)** Réponse fréquentielle lorentzienne autour de la résonance. **(b)** Différence de phase en fonction de la fréquence.

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-\rho\omega\gamma}{\rho(\omega_0^2 - \omega^2) + 1} \quad (2.9)$$

$\rho$  prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque  $\omega$  est proche de  $\omega_0$  (effet de résonance), l'amplification tend rapidement vers zero le plus  $\omega$  s'éloigne de  $\omega_0$ . Étant donné que la solution homogène tend vers 0, à long terme l'oscillateur va atteindre un état stable où il sera synchronisé avec la force avec un déphasage bien défini.

### 3. L'oscillateur de Duffing forcé

Considérons de nouveau un oscillateur forcé, mais maintenant avec un terme en  $x^3$  supplémentaire, nous donnant l'équation de Duffing forcé. Ce n'est plus une équation linéaire, donc on ne peut plus exprimer la solution comme étant une superposition des solutions homogènes et particulières.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x + \epsilon x^3 = \epsilon f_0 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Lorsque  $0 < \epsilon \ll 1$ , on s'attend à trouver un comportement semblable à l'oscillateur harmonique forcé. On cherche donc des solution de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(\omega t + \phi(t)) & \dot{x}(t) &= -\omega r(t) \sin(\omega t + \phi(t)) \\ r(t) &= \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\omega)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

On fait l'hypothèse que comme dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti, la vitesse d'évolution de  $r$  et de  $\phi$  sont données par le coefficient d'amortissement  $\gamma$ . Donc si  $\gamma \ll \omega$ ,  $r$  et  $\phi$  vont varier lentement par rapport à la période d'oscillation de  $x$ . En notation exponentielle :

$$x(t) = z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t} \quad \dot{x}(t) = i\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.3)$$

$z(t)$  étant une variable complexe encodant l'amplitude et la phase d'oscillations du système.

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)}$$

Ce changement de variable  $(x, \dot{x}) \rightarrow (r, \phi)$  nous place effectivement sur un référentiel tournant à la fréquence  $\omega$ . En écartant ces oscillations rapides auxquelles on s'attend, on peut mieux se concentrer sur les variations lentes de  $r(t)$  et de  $\phi(t)$ . Lorsque l'oscillateur oscille de manière harmonique,  $z$  est constant [2].

En prenant la dérivée de (3.2), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t} + i\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.4)$$

$$\ddot{x}(t) = i\omega [\dot{z}(t)e^{i\omega t} - \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t}] + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \quad (3.5)$$

À partir de (3.2) et de (3.4), on obtient la condition :

$$\dot{z}(t)e^{i\omega t} + \dot{\bar{z}}(t)e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.6)$$

En substituant les équations de  $x$ ,  $\dot{x}$ , et de  $\ddot{x}$  dans (3.1) :

$$\begin{aligned} & 2i\omega \dot{z}(t)e^{i\omega t} + (i\omega)^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + i\gamma\omega [z(t)e^{i\omega t} - \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] \\ & + \omega_0^2 [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}] + \epsilon [z(t)e^{i\omega t} + \bar{z}(t)e^{-i\omega t}]^3 = \epsilon \frac{f_0}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Puis en multipliant par  $e^{-i\omega t}$  :

$$\begin{aligned} & 2i\omega \dot{z}(t) + (i\omega)^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + i\gamma\omega [z(t) - \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] + \omega_0^2 [z(t) + \bar{z}(t)e^{-i2\omega t}] \\ & + \epsilon [z(t)^3 e^{i2\omega t} + 3z(t)^2 \bar{z}(t) + 3z(t)\bar{z}(t)^2 e^{-i2\omega t} + \bar{z}(t)^3 e^{-i4\omega t}] = \epsilon \frac{f_0}{2} [1 + e^{-i2\omega t}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.1 La méthode de moyennement

Jusqu'ici, tout est exacte. On procède ensuite par une opération de moyennement, qui exploite les deux échelles de temps observé dans notre système. Une échelle 'rapide' marqué par des oscillations avec des périodes de l'ordre  $T = 2\pi/\omega$ , et une échelle 'lente' selon laquelle évolue  $z(t)$ .

La méthode de moyennement consiste à remarquer que **puisque**  $z$  évolue très lentement, il reste quasiment constant au cours d'une période d'oscillation rapide  $T$ . Donc on se permet de traiter  $z(t)$  comme étant égale à sa moyenne sur une oscillation  $\langle z \rangle$ ,  $\langle z \rangle$  étant constant sur une période d'oscillation. On appelle cela le moyennement au premier ordre [3].

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t') dt' \approx z(t) \quad (3.9)$$

$$\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} z(t') e^{in\omega t'} dt' \approx z(t) \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' \quad (3.10)$$

Depuis le principe fondamental de l'analyse, on peut aussi démontrer que :

$$\langle \dot{z} \rangle = \frac{d}{dt} \langle z \rangle \quad (3.11)$$

Et  $n\omega t$  étant défini modulo  $2\pi$ , on remarque que pour  $n \neq 0$  :

$$\frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{in\omega t'} dt' = 0$$

On prend donc la moyenne mobile de l'équation (3.8), ce qui nous permet de négliger les facteurs de  $e^{in\omega t}$ .

$$\begin{aligned} 2i\omega \langle \dot{z} \rangle &= -(i\omega)^2 \langle z \rangle - i\gamma\omega \langle z \rangle - \omega_0^2 \langle z \rangle - 3\epsilon \langle z^2 \bar{z} \rangle + \epsilon \frac{f_0}{2} \\ &= (\omega^2 - \omega_0^2)z(t) - i\gamma\omega z(t) - 3\epsilon |z|^2 z(t) + \epsilon \frac{f_0}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ensuite, on s'intéresse surtout au comportement du système près du pic de résonance, donc on prend l'approximation  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$  :

$$\dot{z}(t) = -i(\omega - \omega_0)z(t) - \frac{\gamma}{2}z(t) + \frac{3i\epsilon}{2\omega}|z|^2z(t) - \frac{i\epsilon f_0}{4\omega} \quad (3.13)$$

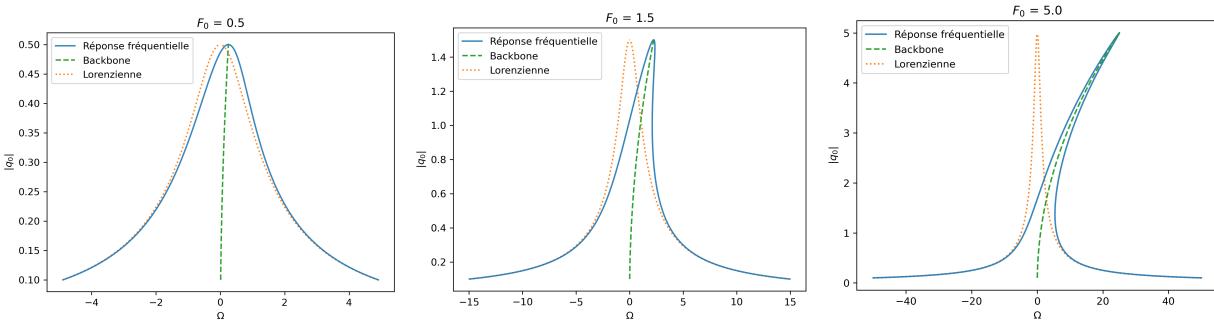
### 3.2 Adimensionnement de l'équation

Afin d'adimensionner l'équation, on procède par deux changements de variables :

$$t = t_c\tau \quad z(t) = z_c q(\tau) \quad (3.14)$$

Où  $t_c$  et  $z_c$  sont des constantes physiques à définir et  $\tau$  et  $q(\tau)$  sont les variables adimensionnées analogues à  $t$  et  $z(t)$ . Ce choix de variables nous donne l'équation suivante :

$$\frac{dq}{d\tau} = q'(\tau) = -i(\omega - \omega_0)t_c q(\tau) - \frac{\gamma}{2}t_c q(\tau) + i\frac{3\epsilon}{2\omega} z_c^2 t_c |q|^2 q(\tau) - \frac{i\epsilon f_0}{4\omega} t_c \quad (3.15)$$



**FIGURE 3.1 – Réponse fréquentielle de Duffing**

Si on pose comme conditions :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{2}t_c = 1 \\ \frac{3\epsilon}{2\omega}z_c^2t_c = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

On retrouve l'équation adimensionné

$$q'(\tau) = -i\Omega q(\tau) - q(\tau) + i|q|^2q(\tau) - F_0 \quad (3.17)$$

Avec :

$$\tau = \frac{\gamma}{2}t \quad q(\tau) = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\omega\gamma}}z(t) \quad \Omega = \frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma/2} \quad F_0 = \frac{\sqrt{3}\epsilon^{3/2}f_0}{2(\omega\gamma)^{3/2}} \quad (3.18)$$

On peut trouver la solution **stationnaire** :

$$q_0 = \frac{F_0}{|q_0|^2 - \Omega + i} \quad (3.19)$$

On s'intéresse surtout à l'amplitude en fonction de la fréquence, mais sous cette forme, l'analyse de la courbe n'est pas facile car on ne peut pas exprimer  $|q_0|$  en tant que fonction de  $\Omega$ . Cependant, il est possible d'exprimer  $\Omega$  en fonction de  $|q_0|$  :

$$\Omega = |q_0|^2 \pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1} \quad (3.20)$$

Où  $\pm \sqrt{\frac{F_0^2}{|q_0|^2} - 1}$  correspondant à la lorentzienne pure, et  $|q_0|^2$  forme une épine (*backbone* en anglais) qui donne la forme caractéristique de cette réponse fréquentielle non-linéaire. Pour  $F_0 \rightarrow 0$  la réponse devient lorentzienne. À mesure de  $F_0$  augmente, la courbe de la réponse fréquentielle va se déformer en suivant la *backbone*.

On observe aussi qu'il existe une valeur critique  $F_{0,c}$ , où pour  $F_0 > F_{0,c}$  le système admet trois amplitudes possible, dont deux stables [4]. On parle alors d'un état bistable.

On cherche à déterminer la valeur de  $F_{0,c}$ . Pour alléger la notation, on introduit la variable  $u = |q_0|$  et on réarrange (3.19) :

$$u^2[(u^2 - \Omega)^2 + 1] = F_0^2 \quad (3.21)$$

Puis on prend la dérivée par rapport à  $\Omega$ .

$$2u \frac{du}{d\Omega}(u^4 + \Omega^2 - 2\Omega u^2 + 1) + u^2(4u^3 \frac{du}{d\Omega} + 2\Omega - 2u^2 - 4\Omega u \frac{du}{d\Omega}) = \frac{d}{d\Omega}F_0^2 \quad (3.22)$$

On remarque que  $F_0$  et  $\Omega$  dépendent tout les deux de  $\omega$ , qui est la vrai fréquence de forçage. Toutefois, pour dériver l'équation d'origine, on a supposé  $\omega \approx \omega_0$ . Donc :

$$\Omega \propto (\omega - \omega_0) \ll \omega$$

C'est à dire qu'en variant  $\Omega$ , la variation correspondante que subira  $F_0$  sera très petite. Donc on se permet de la considérer comme étant constante. En isolant  $\frac{du}{d\Omega}$  on obtient :

$$\frac{du}{d\Omega} = \frac{-\Omega u + u^3}{3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1} \quad (3.23)$$

On peut d'abord déterminer l'amplitude maximum, qui est atteint lorsque  $\frac{du}{d\Omega} = 0$ , en réinsérant cette condition dans (??) on trouve :

$$|q_0|_{max} = F_0$$

La bistabilité apparaît lorsque qu'il y a plusieurs points sur la courbe satisfaisant  $\frac{du}{d\Omega} = \infty$ , nous donnant la condition :

$$3u^4 + \Omega^2 - 4\Omega u^2 + 1 = 0 \quad (3.24)$$

Lorsque  $F_0 = F_{0,c}$ , il existe une unique solution en  $u$ . On peut donc résoudre pour  $u^2$  en posant que le déterminant de l'équation quadratique s'annule. On obtient les conditions :

$$\Omega = \pm\sqrt{3} \quad u^2 = \frac{2\Omega}{3} \quad (3.25)$$

Ce qui nous impose la solution unique  $\Omega = \sqrt{3}$ . En substituant ces valeurs dans (3.21), on trouve :

$$F_{0,c} = \left( \frac{8\sqrt{3}}{9} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Une observation finale intéressante. Étant donné que  $F_0 \propto \epsilon^{3/2} f_0$ , on voit que même dans un système où le terme nonlinéaire est très faible, où normalement on ne va pas observer de non-linéarité. Il suffit d'augmenter l'amplitude de forçage  $f_0$  pour que faire ressortir un comportement non-linéaire (ici un état bistable). L'oscillateur harmonique pour modéliser les situations physiques n'est donc qu'une approximation valable à des amplitudes et à des forces relativement faibles.

## 4. L'oscillateur de Van der Pol

On s'intéresse à l'équation de Van der Pol. Un modèle imaginé par le physicien Balthasar van der Pol pendant ses travaux sur des circuit électriques non-linéaires utilisées dans les premières radios [5].

$$\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0 \quad (4.1)$$

C'est un système non conservatif avec une particularité intéressante. Le signe du terme d'assassinissement  $\epsilon(x^2 - 1)\dot{x}$  change en fonction de  $x$ . Lorsque  $|x| < 1$ , le coefficient d'assassinissement négatif fournit de l'énergie au système, et dans le cas contraire  $|x| > 1$ , il en dissipe. Ce comportement particulier donne lieu à des oscillations entretenues de manière autonome. Avec une étude numérique du système sur le plan de phase, on constate que le système tend vers une unique orbite isolée, quelles que soient les conditions initiales imposées. Une telle orbite dans l'espace de phase s'appelle un *cercle limite*. On voit notamment que pour petit  $\epsilon$ , le cercle limite est quasi-circulaire, alors que pour grand  $\epsilon$  le cercle est fortement déformé et caractérisé par des oscillations de relaxations.

### 4.1 Étude du cercle limite

En comparant les oscillations du système faiblement et fortement non-linéaire, on observe aussi que la fréquence d'oscillation diverge de la fréquence naturelle  $\omega_0 = 1$  lorsque  $\epsilon$  augmente. On va chercher une solution approximative pour le cercle limite de (4.1) sous forme d'un développement perturbatif valide pour  $\epsilon \ll 1$ . En particulier, on va utiliser la méthode de Lindstedt, qui nous permet de prendre en compte la dépendance de la fréquence d'oscillation sur  $\epsilon$ . L'approche consiste à définir une échelle de temps dilaté  $\tau$  et de prendre la fréquence  $\omega$  du cercle limite comme étant un inconnu qui dépend de  $\epsilon$  :

$$\tau = \omega t \quad \omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + O(\epsilon^3) \quad (4.2)$$

En résolvant l'équation sous cette nouvelle échelle de temps, on permet à la solution approximative de prendre compte de ce décalage de fréquence. Ce que la méthode perturbative classique ne peut pas faire.

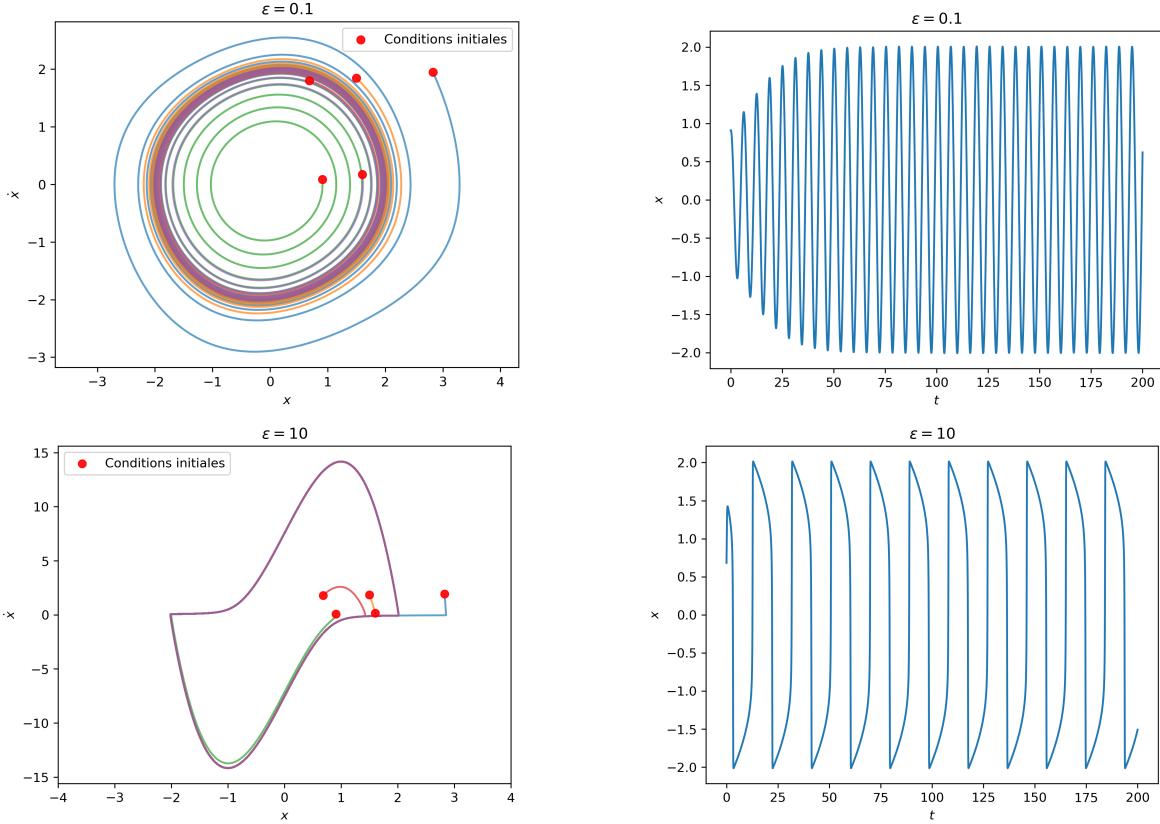
$$x(\tau, \epsilon) = x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + O(\epsilon^3) \quad (4.3)$$

Les termes à l'ordre zéro dans les développements correspondent aux solutions de (4.1) lorsque  $\epsilon = 0$ . Ce sont les termes de base que l'on va chercher à "perturber" avec des petits termes correcteurs. Suite à la transformation d'échelle  $x(t) \rightarrow x(\tau)$ , (4.1) devient :

$$\omega^2 x''(\tau) + x''(\tau) + \epsilon\omega(x(\tau)^2 - 1)x'(\tau) = 0 \quad (4.4)$$

Où le prime dénote une dérivée par rapport à  $\tau$ . En substituant (4.2) et (4.3) dans (4.4) :

$$(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)^2(x_0'' + \epsilon x_1'' + \epsilon^2 x_2'') + \epsilon(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2)[(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)^2 - 1](x_0' + \epsilon x_1' + \epsilon^2 x_2') + x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 = 0 \quad (4.5)$$



**FIGURE 4.1** – Portraits de phase de l’oscillateur Van der Pol obtenu par intégration numérique pour faible et grand  $\epsilon$ , conditions initiales aléatoires

On s’attend à ce que cette équation soit valide pour tout  $\epsilon$ , donc les coefficients de  $\epsilon^n$  doivent s’annuler indépendamment les un des autres. En négligeant les termes  $O(\epsilon^3)$  et en regroupant les coefficients de  $\epsilon^n$  on obtient les trois équations suivantes :

$$O(\epsilon^0) : \quad x_0'' + x_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$O(\epsilon^1) : \quad x_1'' + x_1 = -2\omega_1 x_0'' - (x_0^2 - 1)x_0' \quad (4.7)$$

$$O(\epsilon^2) : \quad x_2'' + x_2 = -2\omega_2 x_1'' - (2\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - (x_0^2 - 1)x_1' - 2x_0 x_1 x_0' - \omega_1(x_0^2 - 1)x_0' \quad (4.8)$$

On peut constater que si on impose des conditions initiales arbitraires  $x(0, \epsilon) = A$ ,  $x'(0, \epsilon) = B$ , pour que (4.3) soit valide pour tout  $\epsilon$  il faut obligatoirement que :

$$x_0(0) = A, \quad x_0'(0) = B \quad x_k(0) = x_k'(0) = 0 \quad \forall k > 0 \quad (4.9)$$

On commence donc par résoudre (4.6), qui correspond à l’oscillateur harmonique de base :

$$x_0(\tau) = A \cos(\tau + \phi_B) \quad (4.10)$$

En raison de la nature autonome de (4.6) (l’absence explicite du temps), on est libre de choisir l’origine du temps de tel sorte à éliminer la phase  $\phi_B$ , ce qui est équivalent à imposer la condition  $B = 0$ . On résout alors (4.7) en y substituant l’expression de  $x_0$  :

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 &= 2\omega_1 A \cos(\tau) + (A^2 \cos^2(\tau) - 1)A \sin(\tau) \\ &= 2\omega_1 A \cos(\tau) + \left(\frac{1}{4}A^3 - A\right) \sin(\tau) + \frac{1}{4}A^3 \sin(3\tau) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque la présence de termes résonant (aussi appellé termes séculaires) de type  $k \cos(\tau)$  et  $k \sin(\tau)$  dans l’équation. Or, si on cherche à trouver une solution périodique, les coefficients de ces termes résonants doivent s’annuler. En effet, ils donnent lieu à des solutions de la forme  $k'\tau \sin(\tau)$  qui ne sont pas bornées avec le temps. En appliquant cette condition de périodicité :

$$2\omega_1 A = 0 \quad \frac{1}{4}A^3 - A = 0 \quad (4.12)$$

$A = 0$  correspond à la solution stationnaire instable du système et  $A = -2$  correspond à une différence de phase de  $\pi$  par rapport à  $A = 2$ . On conclut donc que  $\omega_1 = 0$  et que  $A = 2$ . Selon la dernière condition, on conclut que pour  $\epsilon$  quelconque non-nulle, seule l'orbite circulaire de rayon 2 (sur le plan de phase) reste solution périodique. En effet, le système converge vers une unique solution périodique - un cycle limite.

Maintenant on résout  $x_1'' + x_1 = 2 \sin(3\tau)$  en appliquant les conditions initiales :

$$x_1 = \frac{3}{4} \sin(\tau) - \frac{1}{4} \sin(3\tau) \quad (4.13)$$

Et on répète le processus en substituant les expressions de  $\omega_1$ ,  $A$  et de  $x_1$  dans (4.8) :

$$\begin{aligned} x_2'' + x_2 &= 4\omega_2 \cos(\tau) + 8 \sin(\tau) \cos(\tau) \left( \frac{3}{4} \sin(\tau) - \frac{1}{4} \sin(3\tau) \right) - \left( \frac{3}{4} \cos(\tau) - \frac{3}{4} \cos(3\tau) \right) (4 \cos^2(\tau) - 1) \\ &= (4\omega_2 + \frac{1}{4}) \cos(\tau) - \frac{3}{2} \cos(3\tau) + \frac{5}{4} \cos(5\tau) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Donc, pour éliminer le terme résonant, il faut que  $\omega_2 = -\frac{1}{16}$ . On résout l'équation qui en résulte pour trouver :

$$x_2(\tau) = \frac{3}{16} \cos(3\tau) - \frac{5}{96} \cos(5\tau) - \frac{41}{304} \cos(\tau) \quad (4.15)$$

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (4.16)$$

## 4.2 Étude de l'état transitoire

On cherche maintenant à étudier l'approche du système vers le cycle limite. Pour faire cela, on applique la méthode de moyennement. Pour  $\epsilon \ll 1$ , on prend la fréquence d'oscillation  $\omega = 1$  constante et on cherche de solutions sous la forme :

$$x(t) = z(t)e^{it} + \bar{z}(t)e^{-it} \quad \dot{x}(t) = i [z(t)r^{it} - \bar{z}(t)e^{-it}] \quad (4.17)$$

Avec :

$$z(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\phi(t)} \quad (4.18)$$

On substitue (4.17) dans (4.1) puis on applique le même raisonnement que pour l'oscillateur de Duffing pour obtenir :

$$2\dot{z}(t) = -\epsilon (z^2(t)\bar{z}(t) - z(t)) \quad (4.19)$$

Sachant que  $\dot{z}(t) = \frac{\dot{r}}{2} e^{i\phi} + i\dot{\phi} \frac{r}{2} e^{i\phi}$ , on peut séparer la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation pour obtenir le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\epsilon}{8} r(4 - r^2) \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

On fait l'observation que le système Van der Pol n'a pas de fréquence de référence - contrairement à l'oscillateur de Duffing forcé, la phase ne dépend que des conditions initiales. On retrouve aussi les deux solutions stationnaires stable et instable à  $r = 2$  et  $r = 0$  trouvé auparavant avec la méthode de Linstedt. On peut résoudre la première équation par séparation des variables pour le cas  $r \neq 2$  :

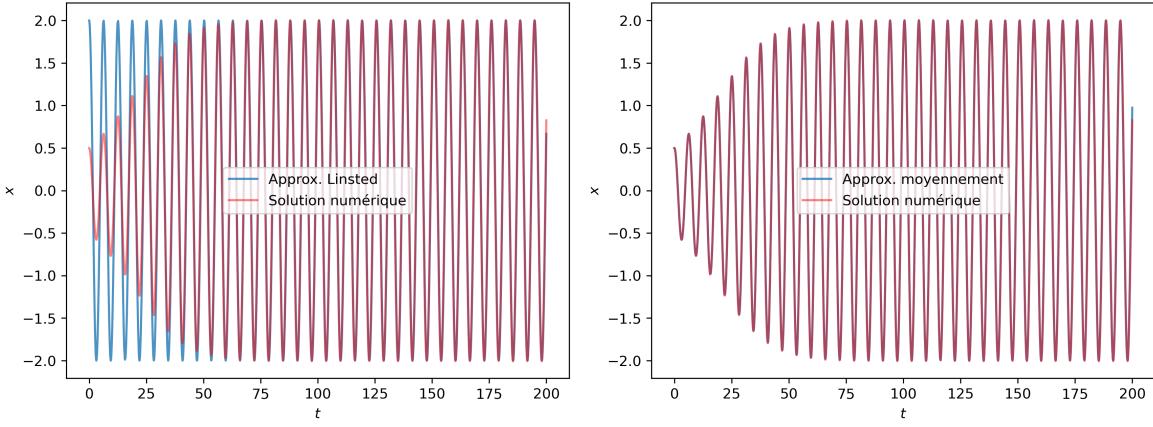
$$r(t) = 2\sqrt{\frac{A}{A + e^{-\epsilon t}}} \quad \text{Où} \quad A = \frac{r(0)^2}{4 - r(0)^2} \quad (4.21)$$

Dans fig. 4.2 on voit que l'approximation obtenue par le moyenement est légèrement en avance par rapport à la solution numérique, on peut attribuer cela à l'approximation  $\omega \approx 1$  qui a été fait en négligeant les termes en  $\epsilon^2$ . De ce fait, l'approximation n'est que fiable jusqu'à des temps de l'ordre  $O(\frac{1}{\epsilon^2})$  car au delà de ça le décalage entre la solution et l'approximation devient non-négligeable.

## 5. Étude de deux oscillateurs Van der Pol couplés

Étudions maintenant le système suivant, composé de deux oscillateurs de Van der Pol identiques couplé par une force de rappel linéaire relativement faible.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \epsilon(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 = \epsilon k(x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \epsilon(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 = \epsilon k(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (5.1)$$



**FIGURE 4.2** – Comparaison des deux approximations avec une solution numérique,  $\epsilon = 0.1$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $\dot{x}(0) = 0$

Encore une fois, on procède par la méthode de moyennement pour obtenir une approximation de l'enveloppe lentement variable :

$$2\dot{z}_1(t) = \epsilon [z_1(t) - |z_1|^2 z_1(t)] - i\epsilon k (z_2(t) - z_1(t)) \quad (5.2)$$

On sépare les parties réelles et imaginaires et on obtient un système d'équation pour  $\dot{r}_1$ ,  $\dot{r}_2$ ,  $\dot{\phi}_1$  et  $\dot{\phi}_2$ . Or, l'oscillateur de Van der Pol n'ayant pas de phase de référence (sa phase n'étant pas fixée par une force extérieure), l'évolution du système ne dépend que de la différence entre les phases des oscillateurs. On peut donc réduire le système à trois équations en introduisant la variable de déphasage  $\Theta = \phi_2 - \phi_1$  :

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_2^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_1^2) + \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \dot{\phi}_1 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \cos(\phi_2 - \phi_1)\right) \\ \dot{\phi}_2 = \epsilon \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)\right) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{r}_1 = \frac{\epsilon}{8} r_1 (4 - r_2^2) + \epsilon k \frac{r_2}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{r}_2 = \frac{\epsilon}{8} r_2 (4 - r_1^2) - \epsilon k \frac{r_1}{2} \sin(\Theta) \\ \dot{\Theta} = \epsilon \frac{k}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos(\Theta) \end{cases} \quad (5.3)$$

On s'intéresse aux solutions stationnaires. Pour cela, on s'inspire du cas non couplé. Lorsque  $k = 0$ , la configuration stable correspond à  $r_1 = r_2 = 2$  avec  $\Theta$  arbitraire. On cherche s'il y a quelque chose de similaire pour  $k \neq 0$ . Si on pose :

$$r_1 = r_2 = 2 \quad \text{et} \quad \dot{r}_1 = \dot{r}_2 = \dot{\Theta} = 0$$

On trouve effectivement une solution stationnaire à condition que  $\Theta = 0$  ou  $\Theta = \pi$ . Donc il existe au moins deux solutions stationnaires, une où les deux oscillateurs sont en phase, et une autre en anti-phase.

## 5.1 Analyse de stabilité linéaire

Pour déterminer la stabilité de ces solutions stationnaires, on peut faire une analyse de stabilité linéaire dans le voisinage des solutions stationnaires. On notera par la suite les solutions stationnaires par un astérisque :

$$r_1^* = r_2^* = r^* = 2 \quad \Theta_1^* = 0 \quad \Theta_2^* = \pi$$

Nous donnant deux points stationnaires dans l'espace de phase  $(r_1, r_2, \Theta)$  :

$$\mathbf{x}_1^* = (r^*, r^*, \Theta_1^*) \quad \mathbf{x}_2^* = (r^*, r^*, \Theta_2^*) \quad (5.4)$$

On procède en se plaçant à une petite perturbation près de la solution stationnaire :

$$r_1(t) = r^* + \delta r_1(t) \quad (5.5)$$

On prend la dérivée temporelle et on prend l'approximation linéaire de  $\dot{r}_1$ ,  $\dot{r}_2$  et  $\dot{\Theta}$  dans le voisinage de la solution stationnaire  $\dot{\mathbf{x}}_i^*$  :

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_1 &= \dot{r}_1(r_1, r_2, \Theta) \\ &= \dot{r}_1(\mathbf{x}_i^*) + (r_1 - r^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_1} + (r_2 - r^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_2} + (\Theta - \Theta_i^*) \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sous forme vectorielle on a :

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = M\delta\mathbf{x} \quad (5.7)$$

Avec,

$$\delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta\Theta \end{pmatrix} \quad \dot{\delta\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\delta r}_1 \\ \dot{\delta r}_2 \\ \dot{\delta\Theta} \end{pmatrix} \quad M = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{r}_2}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{x}_i^*} \quad (5.8)$$

$M_i$  étant la matrice jacobienne du champ vectoriel ( $\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{\Theta}$ ) évalué au point stationnaire  $\mathbf{x}_i^*$ . Cette approximation linéaire nous permet de déduire l'évolution du système dans le voisinage des points stationnaires de manière qualitatif, notamment si les points sont stables ou instables. A moins que l'approximation linéaire soit nulle, la stabilité du système sera inchangé par les termes des ordres plus hauts. Dans le cas général, il est possible d'écrire  $\delta\mathbf{x}$  sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de  $M$  :

$$\delta\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3$$

Avec  $\mathbf{v}_j$  et  $\lambda_j$  les vecteurs et valeurs propres correspondants, qui ne se ni strictement réel ni strictement distinct l'un des autres. Pour un point stationnaire donné, si  $\lambda_j < 0$  pour  $j = 1, 2, 3$  alors, on voit que la perturbation  $\delta\mathbf{x}$  décroît avec le temps, donc le point stationnaire est stable. Sinon, le point est instable. On s'intéresse donc surtout aux signes des valeurs propres de  $M$ . On évalue la matrice jacobienne au deux points stationnaires.

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & +\epsilon k \\ 0 & -\epsilon & -\epsilon k \\ -\epsilon k/2 & +\epsilon k/2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & -\epsilon k \\ 0 & -\epsilon & +\epsilon k \\ +\epsilon k/2 & -\epsilon k/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Les valeurs propres sont déterminées à partir de la condition :

$$\det(M_i - \lambda I) = 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{vmatrix} -\epsilon - \lambda & 0 & +\epsilon k \\ 0 & -\epsilon - \lambda & -\epsilon k \\ -\epsilon k/2 & +\epsilon k/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \epsilon^2 k^2 (-\epsilon - \lambda) - \lambda(-\epsilon - \lambda) = 0 \quad (5.11)$$

On trouve la même équation caractéristique pour  $M_2$ , qui peut être résolu pour obtenir :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\epsilon \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} (-\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} - \epsilon) \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} - \epsilon) \end{cases} \quad (5.12)$$

Il est évident que  $\lambda_1$  est strictement négatif. Et pour  $0 \leq |k| \leq \frac{1}{2}$  on voit bien que  $\sqrt{\epsilon^2 - 4\epsilon^2 k^2} \leq \epsilon$ , donc :

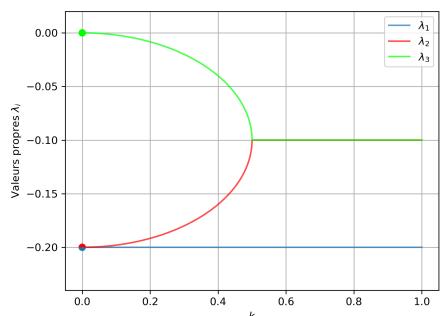
$$-\epsilon \leq \lambda_2 \leq -\frac{\epsilon}{2} \quad -\frac{\epsilon}{2} \leq \lambda_3 \leq 0$$

Lorsque  $|k| > \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  deviennent un couple de complexes conjugués. Géométriquement, cela correspond à des trajectoires spirales oscillant autour du point stationnaire – effectivement, on peut vérifier numériquement que  $r_1, r_2$  et  $\Theta$  oscillent dans ces cas-là (fig. ??). La stabilité est déterminée par la partie réelle des valeurs propres. Or :

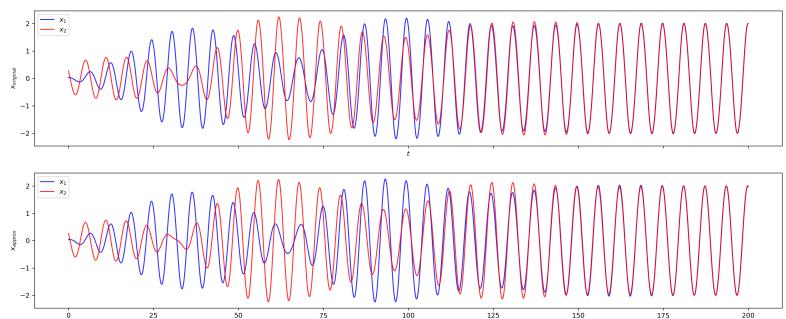
$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = \operatorname{Re}(\lambda_3) = -\frac{\epsilon}{2}$$

La partie réelle des trois valeurs propres étant toujours négatives, on voit donc que dans le cadre de notre approximation, les points stationnaires  $(2, 2, 0), (2, 2, \pi)$  sont stables pour tout  $k$ . Ce qui nous montre que les deux oscillateurs peuvent se synchroniser soit en phase ou en anti-phase. On n'a pas éliminé la possibilité que l'oscillateur ne se synchronise pas, ni qu'il pourrait y avoir d'autres solutions stables. Pour cela, il faudrait étudier de plus près l'étendue des bassins d'attraction - s'il y a des conditions 'neutres' qui ne donnent pas lieu à de la synchronisation

Étant donné que les valeurs propres sont identiques pour les deux points stationnaires, on s'attend à ce que les deux configurations synchronisées soient aussi stables l'une que l'autre. Donc, l'état synchronisé que va choisir le système va dépendre des conditions initiales.



(a)



(b)

**FIGURE 5.1 – (a)** Tracé de la partie réelle des valeurs propres  $\lambda_i$  en fonction de  $k$ ,  $\epsilon = 0.2$ . **(b)** Comparaison graphique du système original (5.1) avec le système moyené (5.8) faite par intégration numérique –  $x_1(0) = 0.038$ ,  $x_2(0) = 0.265$ ,  $\dot{x}_1(0) = -0.018$ ,  $\dot{x}_2(0) = -0.486$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $k = 1$

# Bibliographie

- [1] FEYNMAN, Richard. *The Feynman Lectures on Physics Vol. I.* T. 1. Ch. 23 : Resonance. URL : [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_23.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_23.html) (visité le 24/07/2023).
- [2] PISTOLESI, Fabio. « Duffing response in presence of thermal fluctuations ». Notes, non publié.
- [3] RAND, Richard H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Cornell University. URL : [https://www.academia.edu/64661053/Lecture\\_Notes\\_on\\_Nonlinear\\_Vibrations](https://www.academia.edu/64661053/Lecture_Notes_on_Nonlinear_Vibrations).
- [4] LANDAU, Lev Davidovič et LIFSHITZ, Evgenij Mikhaïlovich. *Mechanics*. 3d ed. Course of theoretical physics v. 1. Oxford New York : Pergamon Press, 1976. ISBN : 978-0-7506-2896-9.
- [5] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Second edition. OCLC : ocn842877119. Boulder, CO : Westview Press, a member of the Perseus Books Group, 2015. 513 p. ISBN : 978-0-8133-4910-7.