Oscillations forcées

Hervé SV

June 2023

Les constantes sont supposées positives sauf si contre-indiqué

1 Oscillations amorties

L'équation différentielle pour un oscillateur harmonique avec variable x :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique en présences d'une force résistive (qui dépend de la vitesse) :

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x}$$

On trouve donc :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On cherche la solution homogène (la solution particulière est nulle). L'équation caractéristique :

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2$$

On s'intéresse au cas $\omega_0 > \gamma$

$$\begin{aligned} r &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= -\gamma/2 \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \end{aligned}$$

le système va donc osciller à une fréquence différente de ω_0 :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$\boxed{x = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}$$

On a une oscillation sinusoïdale avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle. On voit que x tend vers 0 pour grand t.

2 Oscillations forcées

Étudions le cas où l'on applique une force supplémentaire F. Si F est de la forme $F_0 \cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t)$$

On passe par les complexes pour résoudre l'équation différentielle :

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad \cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t})$$

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)x = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} f_0 e^{i\omega t} \\ &= R f_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi}$$

C'est-à-dire que x est égale à la force (divisé par un facteur de masse) multiplié par une valeur complexe R. Le module ρ est un multiplicateur de l'ampltitude de la réaction suite à la force, et l'argument ϕ va induire un déphasage de x par rapport à la force.

$$x = \rho f_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

En revenant dans les réelles

$$x = \rho f_0 \cos(\omega t \phi)$$

Sachant qu'un complexe quelconque multiplié par son conjugé donne le carré du module :

$$\begin{aligned} RR^* &= \rho^2 \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned}$$

Pour trouver ϕ, on peut prendre la réciproque de R pour trouver une expression plus sympa pour la partie réelle et imagninaire.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \\ &= \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma \end{aligned}$$

$$\tan(-\phi) = \frac{\Im(1/R)}{\Re(1/R)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

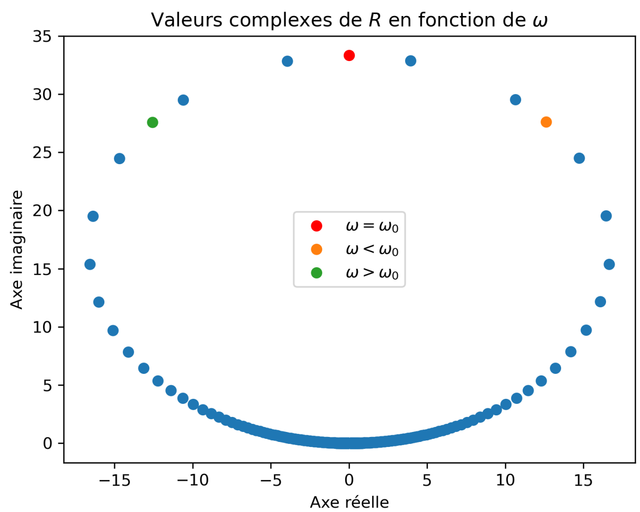

Figure 1: ρ atteint son maximum lorsque $\omega = \omega_0$. Le déphasage ϕ prend des valeurs entre 0 et π radians

ρ^2 prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque ω est proche de ω_0, de même l'amplification tend vers zero le plus ω s'éloigne de ω_0

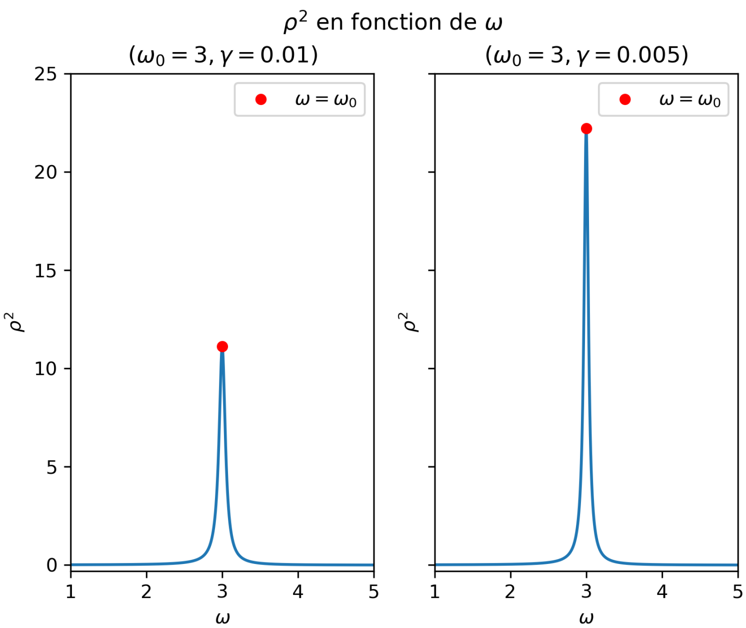

Figure 2: Plus γ est faible plus la courbe est pentue, et plus l'oscillateur va être selective avec la valeur de la pulsation ω