

# Oscillations forcées

Hervé SV

June 2023

Les constantes sont supposées positives sauf si contre-indiqué

## 1 Oscillations amorties

L'équation différentielle pour un oscillateur harmonique avec variable  $x$  :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique en présence d'une force résistive (qui dépend de la vitesse) :

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x}$$

On trouve donc :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On cherche la solution homogène (la solution particulière est nulle). L'équation caractéristique :

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2$$

On s'intéresse au cas  $\omega_0 > \gamma/2$

$$\begin{aligned} r &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ &= -\gamma/2 \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \end{aligned}$$

le système va donc osciller à une fréquence différente de  $\omega_0$  :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

On a une oscillation sinusoïdale avec une amplitude qui décroît de manière exponentielle. On voit que  $x$  tend vers 0 pour grand  $t$ .

## 2 Oscillations forcées

Étudions le cas où l'on applique une force supplémentaire  $F$ . Si  $F$  est de la forme  $F_0 \cos(\omega t)$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t)$$

On passe par les complexes pour trouver la solution particulière :

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad \cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t})$$

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)x = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} f_0 e^{i\omega t} \\ &= R f_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \rho e^{i\phi}$$

C'est-à-dire que  $x$  est égale à la force (divisé par un facteur de masse) multiplié par une valeur complexe  $R$ . Le module  $\rho$  est un multiplicateur de l'amplitude de la réaction suite à la force, et l'argument  $\phi$  va induire un déphasage de  $x$  par rapport à la force.

$$x = \rho f_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

En revenant dans les réelles

$$x = \rho f_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Sachant qu'un complexe quelconque multiplié par son conjugué donne le carré du module :

$$\begin{aligned} RR^* &= \rho^2 \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned}$$

Pour trouver  $\phi$ , on peut prendre la réciproque de  $R$  pour trouver une expression plus sympa pour la partie réelle et imaginaire.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \\ &= \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma \end{aligned}$$

$$\tan(-\phi) = \frac{\Im(1/R)}{\Re(1/R)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

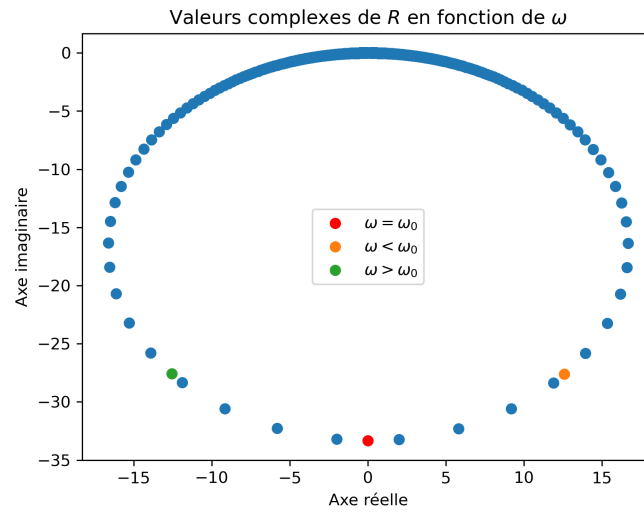


Figure 1:  $\rho$  atteint son maximum lorsque  $\omega = \omega_0$ . Le déphasage  $\phi$  prend des valeurs entre 0 et  $-\pi$  radians

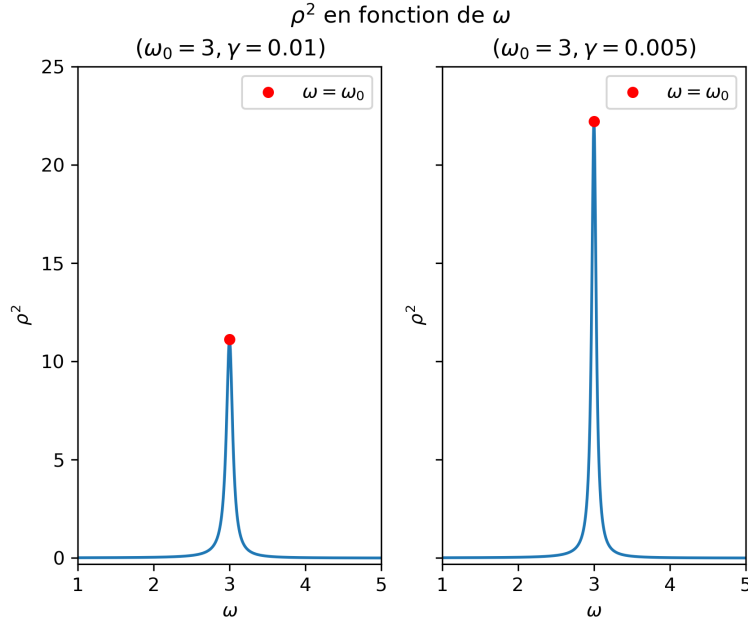


Figure 2: Plus  $\gamma$  est faible plus la courbe est pentue, et plus l'oscillateur va être selective avec la valeur de la pulsation  $\omega$

$\rho^2$  prend la forme d'une courbe lorentzienne, l'amplification de la force est très forte lorsque  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ , de même l'amplification tend vers zero le plus  $\omega$  s'éloigne de  $\omega_0$

On dit que c'est un système résonant car elle privilegie une faible gamme de et ne répond quasiment pas au fréquences en dehors de cette gamme centré autour de  $\omega_0$ .

En additionnant la solution homogène et la solution particulière, on trouve notre solution générale de la forme.

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad \cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t}) + \rho f_0 \cos(\omega t \phi)$$

Puisque la solution homogène tend assez rapidement vers zéro, après ce court état transient, on retrouve

On peut aussi définir un facteur de quality

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Lorsque  $\omega \approx \omega_0$ ,

### 3 Étude de cas : circuit RLC