Open in Colab

Student / TD1 : 4TPU279U — Bachelor 1st year — spring 2023

Hervé Schmit-Veiler

Devoir Maison : trajectoire d'un ballon de rugby

</br>

Déposer ce fichier **notebook** complété (ou sa version Python/Spyder) ainsi que le fichier de données sur Moodle via la page consacrée à votre demi-groupe.

Renommer le fichier suivant :

- `DM_NomPrenom_S2.ipynb` pour un fichier *jupyter-notebook*

ou

- `DM_NomPrenom_S2.py` pour un fichier *python* pur

et

- `trajectoire_NomPrenom.txt` pour le fichier de données

ATTENTION : Abolir totalement l'emploi des espaces, lettres accentuées et autres symboles dans le nom du fichier !

Les points suivants seront pris en compte pour l'évaluation :

- respect des consignes
- qualité des données extraites *via* Tracker
- mise en forme des figures (légendes, unités, titre etc...)
- clarté des programmes et mise en page

Tracker

> Créer avec Tracker un echantillonnage de la vidéo. On pourra utiliser la hauteur de la barre transversale (3 mètres) pour la calibration. Sauvegarder le fichier de données au (format `txt` par défaut) sous le nom : `trajectoire_NomPrenom_S2.txt`

Extraction des données et représentation

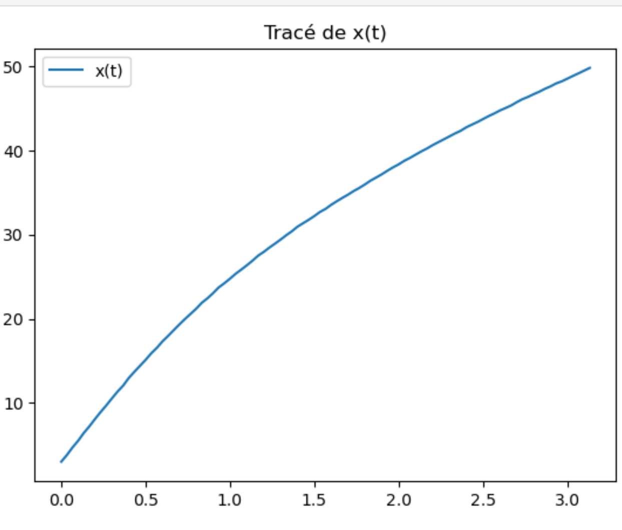
> Extraire les données et stocker le temps dans une liste `t` et les coordonnées dans `x` et `y`. Puis convertir les listes en tableau numpy.

In [ ]:
```python
import numpy as np

t, x, y = np.genfromtxt("trajectoire_SchmitVeilerHerve.txt", dtype=float, skip_header=2, delimiter="    ", unpack=True, usecols=(0,1,2))
print(t, "\nnumber of data points =", len(t))
print(type(t))

tmin = t[0]
for i in range(len(t)):
    t[i] -= tmin
```

```
[4.2   4.233 4.267 4.3   4.333 4.367 4.4   4.433 4.467 4.5   4.533 4.567
 4.6   4.633 4.667 4.7   4.733 4.767 4.8   4.833 4.867 4.9   4.933 4.967
 5.    5.033 5.067 5.1   5.133 5.167 5.2   5.233 5.267 5.3   5.333 5.367
 5.4   5.433 5.467 5.5   5.533 5.567 5.6   5.633 5.667 5.7   5.733 5.767
 5.8   5.833 5.867 5.9   5.933 5.967 6.    6.033 6.067 6.1   6.133 6.167
 6.2   6.233 6.267 6.3   6.333 6.367 6.4   6.433 6.467 6.5   6.533 6.567
 6.6   6.633 6.667 6.7   6.733 6.767 6.8   6.833 6.867 6.9   6.933 6.967
 7.    7.033 7.067 7.1   7.133 7.167 7.2   7.233 7.267 7.3   7.333]
number of data points = 95
<class 'numpy.ndarray'>
```

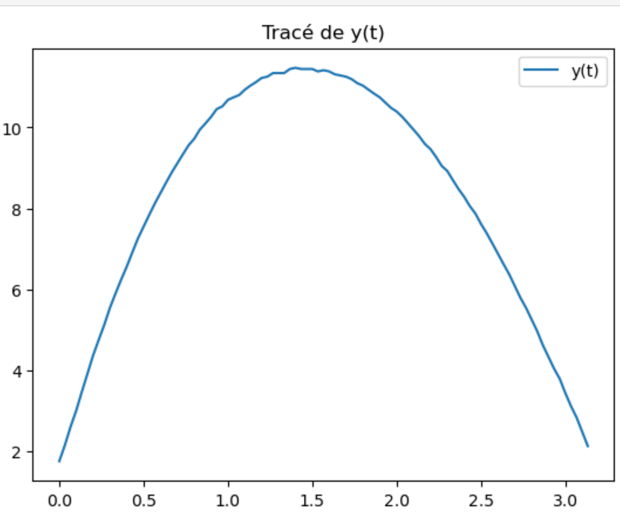
> Tracer la loi horaire : $x(t)$

In [ ]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(t, x, label="x(t)")
plt.legend()
plt.title("Tracé de x(t)")
plt.show()
```



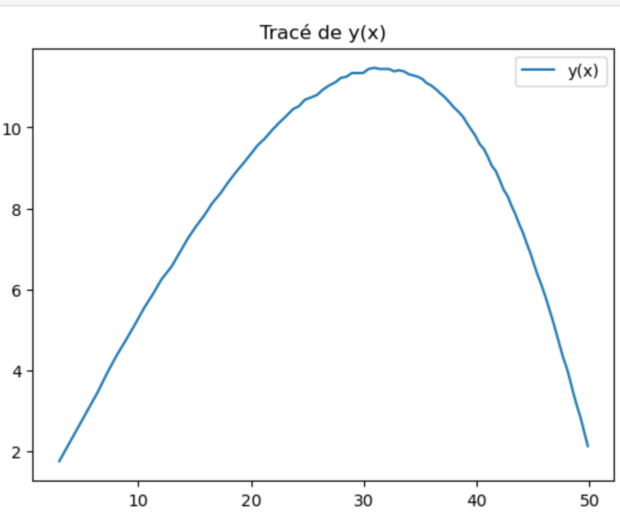
> Tracer la loi horaire : $y(t)$

In [ ]:
```python
plt.plot(t, y, label="y(t)")
plt.legend()
plt.title("Tracé de y(t)")
plt.show()
```



> Tracer la trajectoire du ballon : $y(t)$ en fonction de $x(t)$

In [ ]:
```python
plt.plot(x, y, label="y(x)")
plt.legend()
plt.title("Tracé de y(x)")
plt.show()
```



On voit que la trajectoire n'est pas symmetrique par rapport à son sommet.

Traitement des données

> Calcul des composantes *horizontale* (v_x) et *verticale* (v_y) de la vitesse du ballon en utilisant la méthode des **différences finies centrales**. On créera 2 listes `vx` et `vy` pour stocker les valeurs. Quelle est la taille du vecteur `vx` et de `vy` ? Faire afficher le résultat.

In [ ]:
```python
# central finite diff. to approximate gradient
def cfd_grad(T, X):
    dX = np.zeros(len(X)-2)
    for i in range(len(dX)):
        dX[i] = (X[i+1]-X[i-1])/(T[i+1]-T[i-1])
    return dX

# progressive finite diff.
def fd_grad(T, X):
    dX = np.zeros(len(X))
    for i in range(len(dX)):
        if i == len(dX)-1:
            dX[i] = (X[i]-X[i-1])/(T[i]-T[i-1])
            continue
        dX[i] = (X[i+1]-X[i])/(T[i+1]-T[i])
    return dX
```

In [ ]:
```python
vx = cfd_grad(t, x)
vy = cfd_grad(t, y)

v_norm = np.sqrt(vx**2 + vy**2)

N = len(vx)
print('number of data points = ', N)
```

```
number of data points =  93
```

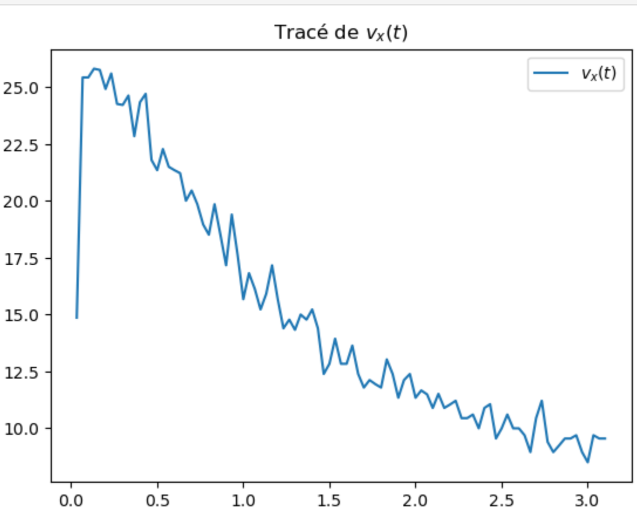
> Eliminer la première et la dernière valeur du tableau `t` de telle sorte que la taille de `t` soit identique à celles de `vx` et `vy`. On appellera ce nouveau vecteur `tv`.

In [ ]:
```python
# starts at element 1 and stops on the last element without including it
tv = t[1:-1]

N = len(tv)
print('number of data points = ', N)
```

```
number of data points =  93
```

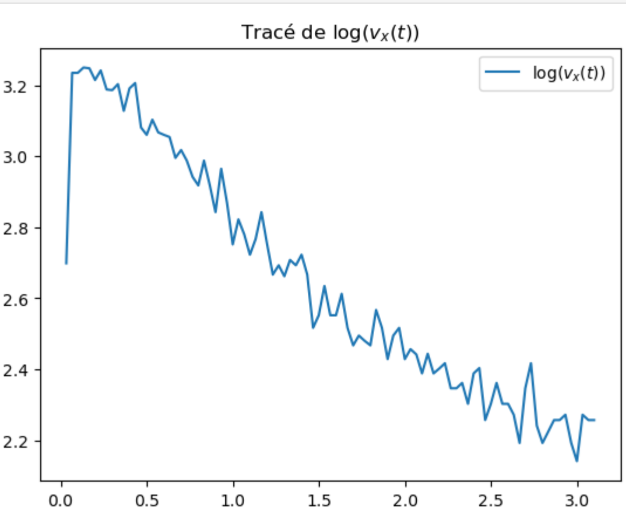
> Tracer les composantes de la vitesse du ballon en fonction du temps, ie. $v_x(t)$ et $v_y(t_v)$

In [ ]:
```python
plt.plot(tv, vx, label="$v_x(t)$")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $v_x(t)$")
plt.show()
```



> Tracer la composante horizontale de la vitesse du ballon en échelle semi-logarithmique, ie. $\log(v_x)$ en fonction de t_v

In [ ]:
```python
from numpy import log # logarithme naturel = "ln"

log_vx = np.log(vx)
plt.plot(tv, log_vx, label="$\log(v_x(t))$")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $\log(v_x(t))$")
plt.show()
```



Régression linéaire et temps caractéristiques

- La composante horizontale de la vitesse doit vérifier la relation suivante :

$$v_x(t) = v_x^0 \, \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $v_x^0 = v_x(t=0)\cos(\alpha)$ où α est l'angle de tir et $v_x(t=0)$ la vitesse initiale suivant (Ox). Le paramètre $\tau = m/\mu$ correspond au temps caractéristique de décroissance de la vitesse.

- La composante verticale de la vitesse doit vérifier la relation suivante :

$$v_y(t) = v_y^0 \, \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

avec $v_y^0 = v_y(t=0)\sin(\alpha)$ et $v_{\lim} = \tau g = \lim_{t\to\infty} v_y(t)$ représente l'asymptote verticale de la vitesse.

> A l'aide d'un ajustement linéaire de $\ln(v_x)$ en fonction de t, déduire la valeur numérique de τ :

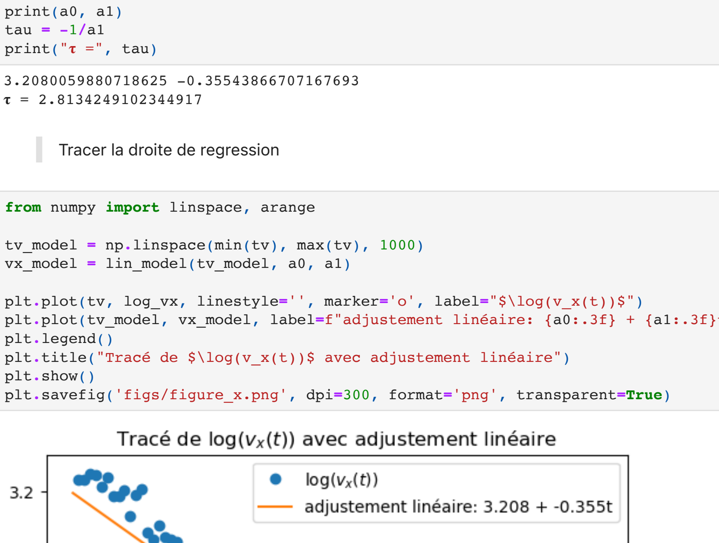
$$\ln(v_x) = \ln(v_x^0) - \frac{t}{\tau} = a_0 + a_1\, t$$

In [ ]:
```python
from scipy.optimize import curve_fit
from numpy import ones, sqrt

# a0 = ln(vx(0))
# a1 = -1/tau
def lin_model(t, a0, a1):
    return a0 + a1*t

[a0, a1], pvar = curve_fit(f=lin_model, xdata=tv, ydata=log_vx)

print(a0, a1)
tau = -1/a1
print("τ =", tau)
```

```
3.2080059880718625 -0.35543866707167693
τ = 2.8134249102344917
```

> Tracer la droite de regression

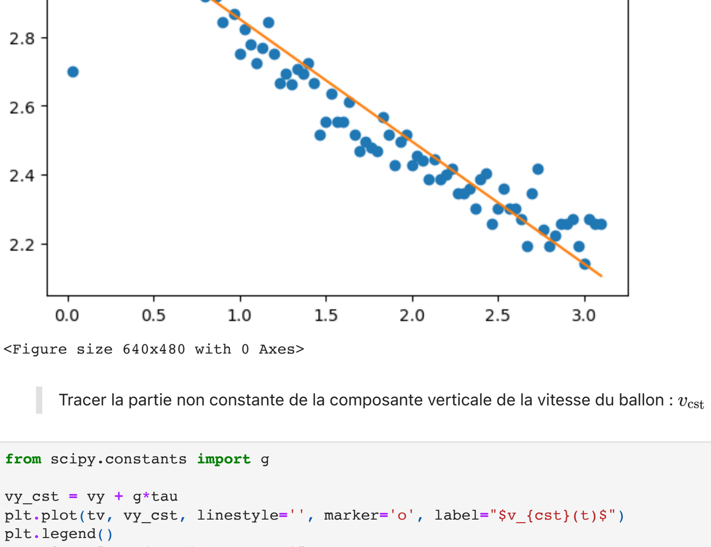
In [ ]:
```python
from numpy import linspace, arange

tv_model = np.linspace(min(tv), max(tv), 1000)
vx_model = lin_model(tv_model, a0, a1)

plt.plot(tv, log_vx, linestyle='', marker='o', label="$\log(v_x(t))$")
plt.plot(tv_model, vx_model, label=f"adjustement linéaire: {a0:.3f} + {a1:.3f}t")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $\log(v_x(t))$ avec adjustement linéaire")
plt.show()
plt.savefig('figs/figure_x.png', dpi=300, format='png', transparent=True)
```




```
<Figure size 640x480 with 0 Axes>
```

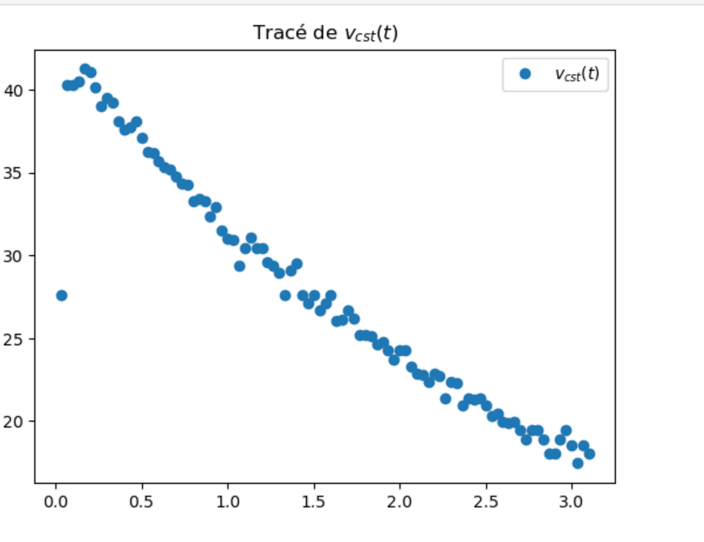
> Tracer la partie non constante de la composante verticale de la vitesse du ballon : $v_{\text{cst}} = v_y(t) - v_{\text{lim}} = v_y(t) + g\tau$. On créera un tableau `vy_cst` à cet effet.

In [ ]:
```python
from scipy.constants import g

vy_cst = vy + g*tau
plt.plot(tv, vy_cst, linestyle='', marker='o', label="$v_{cst}(t)$")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $v_{cst}(t)$")
plt.show()
```



> Tracer la partie non constante de la composante verticale de la vitesse du ballon en échelle semi-logarithmique, ie. $\log(v_y(t) - v_{\text{lim}})$ en fonction de t

In [ ]:
```python
log_vy_cst = np.log(vy_cst)
plt.plot(tv, log_vy_cst, linestyle='', marker='o', label="$\log(v_{cst}(t))$")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $\log(v_{cst}(t))$")
plt.show()
```



> A l'aide d'un ajustement linéaire de $\ln(v_y(t) - v_{\text{lim}})$ en fonction de t, déduire la valeur numérique de τ :

$$\ln\big(v_y(t) - v_{\text{lim}}\big) = \ln\big(v_x^0 - v_{\text{lim}}\big) - \frac{t}{\tau} = a_0 + a_1\, t$$

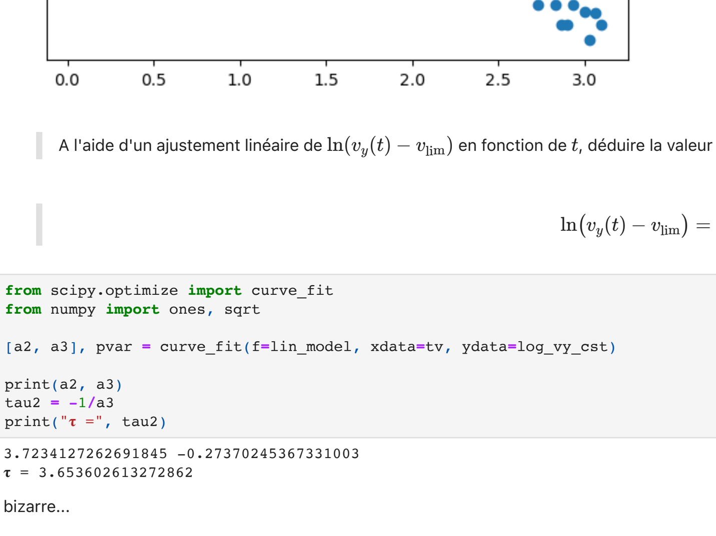
In [ ]:
```python
from scipy.optimize import curve_fit
from numpy import ones, sqrt

[a2, a3], pvar = curve_fit(f=lin_model, xdata=tv, ydata=log_vy_cst)

print(a2, a3)
tau2 = -1/a3
print("τ =", tau2)
```

```
3.7234127262691845 -0.27370245367331003
τ = 3.653602613272862
```

bizarre...

> Tracer la droite de regression

In [ ]:
```python
from numpy import linspace, arange

vcst_model = lin_model(tv_model, a2, a3)

plt.plot(tv, log_vy_cst, linestyle='', marker='o', label="$\log(v_{cst}(t))$")
plt.plot(tv_model, vcst_model, label=f"adjustement linéaire: {a2:.3f} + {a3:.3f}t")
plt.legend()
plt.title("Tracé de $\log(v_{cst}(t))$ avec adjustement linéaire")
plt.show()
plt.savefig('figs/figure_2.png', dpi=300, format='png', transparent=True)
```



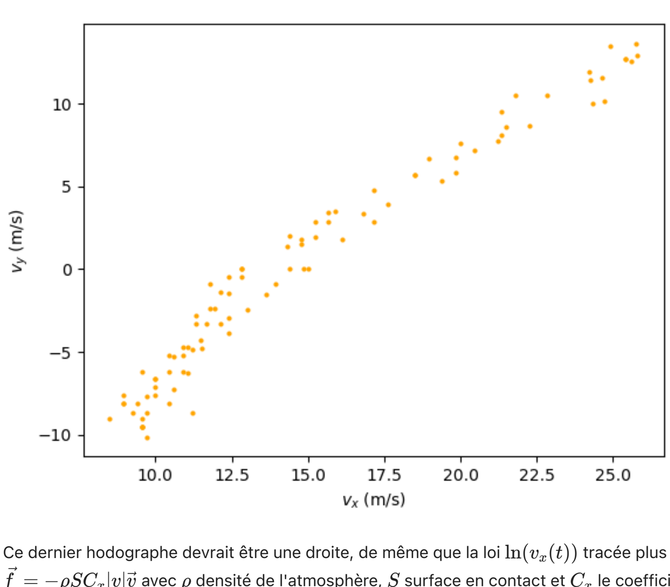

```
<Figure size 640x480 with 0 Axes>
```

Pour aller plus loin

> Tracer l'hodographe (v_x, v_y)

In [ ]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(vx,vy,linestyle='', marker='o', markersize=2, color='orange', linewidth=1.5, label='$v_x(t)$')
plt.xlabel('$v_x$ (m/s)')
plt.ylabel('$v_y$ (m/s)')
```

Out[ ]:
```
Text(0, 0.5, '$v_y$ (m/s)')
```



Ce dernier hodographe devrait être une droite, de même que la loi $\ln(v_x(t))$ tracée plus haut. Dans le cas d'un ballon de rugby, la force de frottement est en fait une force de trainée en $-v^2$, ie. $\vec{f} = -\rho S C_x |v| \vec{v}$ avec ρ densité de l'atmosphère, S surface en contact et C_x le coefficient de trainée.

Ce qui explique la différence de résultat pour les deux calculs de τ. On avait supposé que μ était constante, alors que ce n'est pas le cas.