

Licence de Physique
Semestre 3

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE ET
NUMÉRIQUE:
TRAVAUX PRATIQUES

Code UE : 4TPY309U

Partie : Vibrations et Ondes (3 séances)

Responsable de l'UE 4TPY309U Touria Cohen-Bouhacina

Equipe Pédagogique: Delphine Coursault (Responsable de l'UE 4TPY306U) et Laetitia Dalstein

Ce fascicule comprend les 3 TPS "vibrations et ondes". Pour chacun des TP indépendants, une section théorique préparatoire, les manipulations et des questions guidant l'analyse et l'interprétation des résultats.

Fonctionnement des séances de TP :

1. Il est conseillé d'apporter un ordinateur portable personnel par binôme pour traiter les données, tracer les graphes et rédiger les comptes rendus en séance plus efficacement. A l'exception du TP pendule, il n'y aura pas de PC fourni en séance.
2. Avant la séance de TP, lire le fascicule afin de faciliter la compréhension des manipulations à effectuer en séance et de disposer d'assez de temps pour les effectuer entièrement.
3. Effectuer la préparation théorique avant le TP et la **rendre avant le TP sur moodle** (seul(e) ou en binôme).
4. Pendant la séance, les manipulations se font seul(e) ou en binôme.
5. **Les données expérimentales obtenues doivent être récupérées dans des fichiers sur clef USB.** Pour les quantités physiques dimensionnées, il est indispensable d'indiquer les unités. Pour détecter d'éventuelles erreurs de mesure et éviter des problèmes d'interprétation, **faire contrôler les prises de données.**
6. Pendant la séance, rédiger un **compte-rendu** de l'ensemble de la séance et le rendre **en fin de séance** via le MOODLE en ligne ou en version papier.

Plan du compte-rendu pour chaque TP :

- une courte introduction de l'expérience effectuée et de ses objectifs
- un rappel des résultats théoriques (qui seront comparés aux résultats de mesures)
- une courte présentation du dispositif expérimental, avec un schéma
- les résultats de mesure : valeurs mesurées et quantités déduites demandées (éventuellement sous forme de tableau) ; graphe avec comparaison à la théorie sous forme des courbes demandées. Commenter et interpréter les figures.
- une brève conclusion des résultats d'expérience obtenus (en lien avec les objectifs) (par exemple quelle est la loi de variation de la période d'un pendule en fonction de sa géométrie,...).

Présentation des figures

- Une figure type contiendra un titre sous la forme "Figure x : évolution de z en fonction de y (avec p comme paramètre)", et une courbe montrant une grandeur (z) en fonction d'une autre (y).
- Plusieurs courbes pourront éventuellement être présentées sur la même figure si elles sont comparables ou si l'étude est paramétrique (on change à chaque fois le paramètre p).
- Les axes devront présenter le nom (ou lettre) de la grandeur ainsi que son unité. Si la courbe est expérimentale, elle devra être présentée sous forme de points non reliés entre eux.
- On veillera à ce que les symboles soient différents si plusieurs courbes expérimentales sont présentées sur la même figure et qu'ils soient bien différenciables lors d'une impression noir et blanc.

- Le paramètre correspondant à chaque symbole devra être explicité sur la figure.

L'ensemble du texte (hors tableaux et graphes) devrait pouvoir se limiter à environ 4 pages si la rédaction est efficace. Il sera tenu compte de l'orthographe et de la qualité rédactionnelle. Les réponses aux questions doivent s'intégrer dans le compte rendu sans que le lecteur du CR ait à se référer au fascicule de TP pour comprendre.

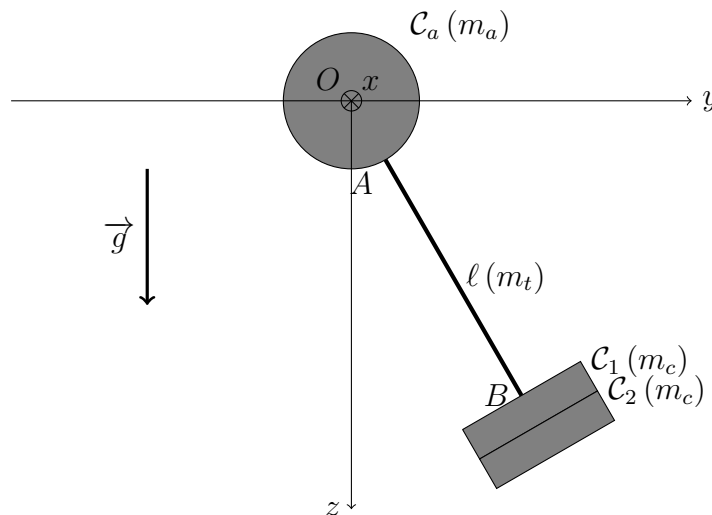
TP 1 : Pendule pesant au-delà du modèle harmonique

Introduction

L'oscillateur harmonique est un modèle de description des mouvements vibratoires qui peut s'appliquer à des systèmes physiques de nature très variée. Dans ce TP, nous allons tester ce modèle (et ses limites) à travers l'étude du comportement oscillatoire d'un pendule non ponctuel. Les expériences seront menées avec trois objectifs:

- étudier le mouvement d'oscillation dans le régime harmonique ("petits angles") : mesure de la période, vérification de l'indépendance de la période vis-à-vis de l'amplitude du mouvement ;
- étudier l'influence de la masse et de la géométrie en régime harmonique ;
- étudier le mouvement d'oscillation au-delà du modèle harmonique : mesure de la période pour des angles importants, mise en évidence de la dépendance de la période avec l'amplitude d'oscillation.

1) Préparation théorique



On attache n cylindres **homogènes** identiques $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ au bout d'une tige rigide \mathcal{T} de masse m_t et de longueur $\ell = AB$ de façon à ce que l'axe de symétrie de chaque cylindre coïncide avec l'axe de la tige (voir figure ci-dessus). Les cylindres ont une hauteur h , un rayon r et une masse m_c . La tige est solidaire d'un cylindre \mathcal{C}_a d'axe (Ox) , de rayon $R = OA$ et de masse m_a . L'ensemble formé par les n cylindres, la tige et le cylindre \mathcal{C}_a est assimilé à un solide indéformable \mathcal{S} appelé pendule pesant.

Le mouvement du pendule autour de l'axe Ox est décrit par l'angle θ et obéit à l'équation du mouvement

$$I_{Ox} \ddot{\theta} + Mg OC \sin \theta = 0 \quad (1)$$

où $M = m_t + nm_c + m_a$ est la masse totale du pendule, I_{Ox} est le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe (horizontal) de rotation (Ox) et C est le centre de masse du pendule. On peut montrer, grâce à la loi de conservation de l'énergie mécanique, que la période T des oscillations s'exprime de façon exacte selon

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

où θ_0 est l'amplitude d'oscillation (angle de déviation maximale par rapport à la verticale descendante), $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg OC}{I_{Ox}}}$. Dans un modèle réaliste du pendule représenté sur la figure ci-dessus, on montre que le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Ox) a pour expression

$$I_{Ox} \approx nm_c \left(R + \ell + \frac{nh}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} nm_c \left(r^2 + \frac{(nh)^2}{3}\right) + \frac{1}{12} m_t \ell^2 + m_t \left(R + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_a R^2,$$

tandis que la position du centre de masse C est telle que

$$OC = \frac{1}{M} \left[nm_c \left(R + \ell + \frac{nh}{2}\right) + m_t \left(R + \frac{\ell}{2}\right) \right].$$

Par un développement de Taylor de la fonction à intégrer autour de $\theta = \theta_0$ dans l'expression de T ci-dessus, suivie d'un développement limité en θ_0 (en radians) à l'ordre 2, on obtient la formule dite de Borda

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

Questions préparatoires :

1. Rappeler la définition du moment d'inertie.
2. À partir de quel principe l'équation (1) est-elle établie?
3. En linéarisant l'équation différentielle en $\theta(t)$ (approximation des petits angles), montrer que la période du mouvement oscillatoire est égale à T_0 . C'est ce que l'on appelle le régime harmonique (θ_0 assez faible en radians). Lorsque θ_0 ne peut être considéré comme petit, le régime oscillatoire est dit anharmonique.
4. Calculer et tracer la fonction $f(\theta) = \sin \theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Conclure sur la validité de l'approximation aux petits angles.
5. Que devient l'expression de T_0 dans le cas du pendule idéal où l'on néglige l'effet de la tige, du disque axial et de l'extension spatiale des cylindres au bout de la tige ?

2) Préparation à l'analyse des données expérimentales :

1. Télécharger depuis moodle le programme python pour l'analyse des données expérimentales "analyse-pendule.py". Lire le programme pour en comprendre le fonctionnement.
En salle de TP, une version de python 2.7 est installée, il est néanmoins conseillé d'utiliser dans la mesure du possible son propre ordinateur.

2. Si vous utilisez votre ordinateur personnel, assurez-vous d'avoir installé python en amont du tp et que le programme tourne. Un jeu de données pour effectuer ce test est également fourni sur moodle.
3. Quelle est la différence fondamentale entre l'évaluation de la période d'oscillation proposée avec le logiciel labview et celle proposée par l'analyse python?

3) Appareillage et initialisation

Pendule : L'axe du pendule est solidaire d'une roue codeuse qui permet de mesurer l'angle du pendule en fonction du temps. L'information angulaire est donc transformée en impulsions électriques comptées par une carte d'acquisition. Ce signal est traduit sous la forme d'un tableau à deux dimensions (θ, t) . La fonction $\theta = f(t)$ est tracée et sa période est calculée par le logiciel d'acquisition.

Logiciel d'acquisition : Le logiciel écrit sous LabView permet de lire les valeurs de la roue codeuse, c'est-à-dire l'angle que fait le pendule avec la verticale à chaque instant.

Initialisation : Le principe d'un codeur incrémentiel est de compter les positions relativement à une position de référence. Il est donc indispensable de "faire le zéro", et de s'assurer ainsi de la définition de la position d'équilibre. L'initialisation consiste d'une part à vérifier que le dispositif d'acquisition fonctionne. Pour cela, il suffit de bouger le balancier du pendule et de constater que l'angle indiqué par l'indicateur à aiguille correspond approximativement à la valeur donnée par le rapporteur solidaire du pendule. **Si, lorsque le pendule est à sa position d'équilibre stable (angle nul), l'indicateur ne donne pas 0, cliquer sur le bouton RAZ.** La position d'équilibre est alors définie comme position angulaire 0 du compteur. Le système est désormais prêt à prendre des mesures.

4) Mesures

4.a) Caractéristiques du pendule

Effectuer les mesures suivantes avec précision :

- dimensions r et h d'un des cylindres \mathcal{C}_i qui seront fixés au bout de la tige ;
- rayon R et épaisseur e du disque axial ;
- diamètre d de la tige.

En négligeant la partie trouée d'un des cylindres \mathcal{C}_i , et sachant que chacun de ces cylindres a une masse de 250 g, déterminer la masse volumique ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ du matériau les composant. On suppose que le disque axial \mathcal{C}_a et la tige sont composés du même matériau. En déduire la masse m_a du disque axial et la masse m_t de la tige en fonction de sa longueur $\ell = AB$ (voir figure ci-dessus).

4.b) Régime harmonique

Montage : L'angle initial du pendule sera compris entre 5° et 20° . Charger le pendule avec une masse variable de 250 g à 1 kg et mesurer la longueur de la tige $\ell = AB$. Dans le logiciel d'acquisition positionner le sélecteur "Partie de TP" sur "Petits angles". La boîte à onglets présente alors trois feuillets : "Acquisition", "Données" et "Graphiques". Le feuillet visible est "Acquisition" ; il permet de configurer le système d'acquisition. **Régler la durée totale de la mesure à 10 s.** Une fois l'acquisition configurée, sélectionner le feuillet "Données". Ce feuillet affiche en partie centrale

un tableau vide qui contiendra les mesures. Au-dessus, se trouvent un bouton “Nouvelle mesure” et un indicateur ”Nombre de mesures” ; en-dessous, un sélecteur et un bouton “Supprimer la mesure”.

Mesure de la période d’oscillation du pendule :

- Pour effectuer une prise de données : lâcher le pendule avec un angle initial non nul puis cliquer sur “Nouvelle mesure”. La prise de donnée dure 10 s, patience !

La nouvelle mesure s’affiche alors dans le tableau central : elle porte le nom “Mesure i ” où i est le numéro de la mesure. En-dessous apparaissent sur la même ligne la période du mouvement T en secondes et l’angle maximal de déviation **en radians** θ_0 , puis un tableau donnant la liste des valeurs mesurées de t à gauche et θ à droite.

Attention : ces valeurs de T et θ_0 ne sont pas celles à prendre en compte en principe dans le tracé des courbes et la comparaison à la théorie : voir la procédure ci-après. En effet il se peut que l’algorithme d’ajustement qui détermine la période ne converge pas ou donne une période légèrement erronée ! Mais en cas de difficulté avec l’analyse Python ci-dessous, on pourra les utiliser quand même en l’indiquant dans le compte rendu.

- Pour analyser les mesures : cliquer sur le bouton en bas à droite pour enregistrer le tableau de valeurs (t, θ) dans un fichier au format csv (Comma-Separated Values) (fichier texte où les couples t et θ apparaissent séparés par une virgule). Choisir un nom de fichier adéquat pour faciliter l’analyse par la suite. Après la prise de données, utiliser le programme en Python disponible sur Moodle pour déterminer la période T et l’angle maximal de déviation θ_0 . En ligne de commande, il suffit d’exécuter : `python analyse_pendule.py <nom-fichier>`.

Travail expérimental à effectuer :

1. Pour quatre ou cinq valeurs de l’angle initial comprises entre 5° et 20° , et pour deux masses différentes accrochées au bout de la tige (250 g et 1 kg), effectuer une prise de données et enregistrer les tableaux de valeurs correspondants dans autant de fichiers csv. Noter aussi T et θ_0 (en rad) fournis directement par le logiciel.
2. Sauvegarder ces fichiers sur clef USB pour l’analyse ultérieure.

Travail d’analyse à effectuer :

1. A l’aide du programme en Python, déterminer la période T et l’angle maximal de déviation θ_0 . Si cela pose problème, utiliser les valeurs directement fournies par le logiciel. Indiquer dans le compte-rendu l’origine des valeurs utilisées pour le tracé.
2. Avec Python afficher sur le même graphe les points de données expérimentales $T = f(\theta_0)$, avec T dans l’intervalle $[1; 2]$ en secondes, pour les deux masses (250 g et 1 kg) accrochées au bout de la tige. Ajouter sur le même graphe la courbe théorique obtenue dans le modèle du pendule **idéal** en régime **harmonique**. Commenter l’allure des points de données pour chaque masse et comparer chaque série à la période théorique. Quelles conclusions peut-on en tirer ?
3. Sur une nouvelle figure, comparer la période mesurée à celle prédite par le modèle de pendule idéal et celle prédite par le modèle **réaliste** du pendule en régime **harmonique** en choisissant l’intervalle $[1.5; 1.7]$ en secondes pour la période. Que peut-on en conclure ?

4.c) Régime anharmonique : limite de l'approximation des petits angles

On va mettre en évidence la dépendance de la période d'oscillation T avec la valeur maximale de déviation θ_0 pour des valeurs de θ_0 comprises entre 20° et 90° .

Montage : Positionner le sélecteur "Partie de TP" sur "Grands angles". La boîte à onglets présente trois feuillets, comme dans la partie précédente "Petits angles". Toutes les données ont été réinitialisées. Charger le pendule avec une masse de 1 kg.

Attention ! On va travailler à grand angle, le pendule va donc faire des mouvements de grande amplitude. Dégager l'espace de travail autour du dispositif afin d'éviter tout accident et d'abîmer le pendule. En particulier, veiller à lâcher le pendule sans lui imprimer de mouvement transverse.

Travail expérimental à effectuer :

1. Pour au moins cinq valeurs de l'angle initial comprises entre 20° et 90° , effectuer une prise de données et enregistrer les tableaux de valeurs correspondants dans autant de fichiers csv. Noter aussi T et θ_0 (en rad) fournis directement par le logiciel.
2. Sauvegarder ces fichiers sur clef USB pour l'analyse.

Analyse des données :

1. A l'aide du programme en Python, déterminer la période T et l'angle maximal de déviation θ_0 . Si cela pose problème, utiliser les valeurs directement fournies par le logiciel. Indiquer dans le compte-rendu l'origine des valeurs utilisées pour le tracé.
2. Avec Python tracer la courbe $T = f(\theta_0)$ avec T dans l'intervalle $[1; 2.5]$ en secondes. Commenter l'allure de la courbe. Comparer la période mesurée à celle prédite par la formule de Borda pour le modèle du pendule **idéal** en ajoutant la courbe théorique sur la figure. Que peut-on en conclure ?
3. Sur une nouvelle figure, comparer la période mesurée à celle prédite par le modèle de pendule idéal et celle prédite par le modèle **réaliste** du pendule en régime **anharmonique** (formule de Borda avec T_0 calculée dans le modèle idéal ou dans le modèle réaliste) en choisissant l'intervalle $[1.5; 2.0]$ en secondes pour la période. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

4.d) Influence de la masse du pendule en régime harmonique

Montage : Positionner le sélecteur "Partie de TP" sur "Dépendance avec la masse". La boîte à onglets présente trois feuillets, comme dans la partie précédente "Petits angles". Toutes les données ont été réinitialisées.

La manipulation consiste à faire la mesure de période pour plusieurs valeurs de la masse du pendule. L'acquisition des données est identique à la partie précédente. On se placera à $\theta_0 \approx 15^\circ$ dans toute cette partie.

Mesures : chacune des quatre rondelles cylindriques ayant une masse de 250 g, la masse du pendule ne peut varier que par pas de 250 g, de 0 à 1 kg.

Afin de changer la masse du pendule, défaire avec précaution l'écrou à oreillettes sous les masses. Enlever le nombre de masses nécessaires et compenser avec les petits tubes en laiton (cales) afin de maintenir le centre de masse de l'ensemble des rondelles cylindriques au même endroit sur la tige.

Questions :

1. Effectuer au moins deux mesures pour chaque valeur de la masse $M_c = nm_c$.
2. Remplir le tableau (M_c, T) sous LibreOffice.
3. Tracer la courbe $T = f(M_c)$. Commenter l'allure de la courbe.
4. Mesurer les dimensions h et r d'un cylindre fixé au bout de la tige (voir figure p. 3 du fascicule). Calculer la masse volumique ρ du matériau composant ce cylindre de masse $m_c = 250$ g. Comparer avec le modèle (b) de la section 1 du fascicule dans l'approximation du pendule non ponctuel avec tige et cylindre axial négligés. Pour cela ajouter au graphe de la question précédente la courbe théorique $T = f(M_c)$. Que peut-on en conclure ?
5. Quelle configuration est la plus appropriée pour déterminer l'influence de la masse m_t de la tige ? Justifier qualitativement la réponse.
6. Déterminer la masse m_a du cylindre axial en le supposant composé du même matériau que les cylindres attachés au bout de la tige. Déduire de la mesure de la période T la valeur de m_t en utilisant le modèle (c) de la section 1 du fascicule (pendule réaliste).

TP 2 : Vibrations transverses d'une corde

Introduction

Cette expérience est consacrée à l'étude des vibrations transverses d'une corde tendue excitée à l'aide d'un vibreur (voir figure 1). Nous allons mettre en évidence l'existence d'onde stationnaires de vibration transverse de la corde de longueur finie L tendue et excitée par un vibreur électromagnétique. On rappelle que les ondes stationnaires résultent de la superposition d'une onde propagative et rétrograde déterminées par des conditions aux limites particulières (voir annexe théorique). Nous allons aussi vérifier la validité de la loi

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (2)$$

où c est la célérité des ondes transverses le long de la corde, T_0 la tension de la corde, μ sa masse linéique. Enfin, nous étudierons les résonances de ce système mécanique.

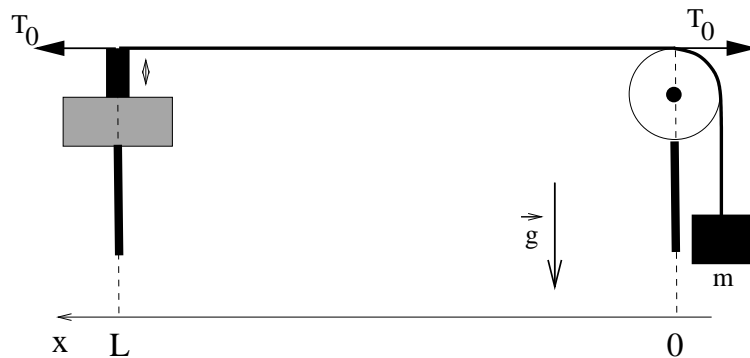


Figure 1: Dispositif expérimental.

1) Préparation théorique

Pour une onde transverse stationnaire établie le long d'une corde, on définit :

- **noeud de déplacement** : point du milieu de propagation constamment immobile, c'est-à-dire d'abscisse x_0 telle que $u(x_0, t) = 0 \forall t$
- **ventre de déplacement** : point du milieu de propagation de déplacement d'amplitude maximale, c'est-à-dire d'abscisse x_0 telle que $|u(x, t)|$ est maximal en $x = x_0 \forall t$

Questions préparatoires :

En vous référant à la partie théorique en annexe:

1. Montrer que, quelle que soit l'excitation en $x = L$ (à déplacement imposé ou force imposée), la distance entre deux ventres de déplacement transverse est égale à $\lambda_0/2$, où $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$

2. Montrer que dans le cas d'une excitation à déplacement imposé, l'amplitude du déplacement transverse de la corde est maximale (résonance) lorsque f_0 coïncide avec une des fréquences de résonance f_n telles que $f_n = n \frac{c}{2L}$, $n \geq 1$.
3. Montrer que dans le cas d'une excitation à force imposée, l'amplitude du déplacement transverse de la corde est maximale (c'est phénomène de résonance) lorsque f_0 coïncide avec une des fréquences de résonance f_n telles que $f_n = \frac{c}{2L}(n - \frac{1}{2})$, $n \geq 1$.

2) Dispositif expérimental

Corde : La corde élastique est tendue le long du banc optique (voir figure 1), entre une poulie et la tige du vibreur électromagnétique. Elle est tendue par le poids d'une masse calibrée.

Vibreur : Le vibreur électromagnétique est alimenté par un signal électrique sinusoïdal produit par une source de tension basse fréquence (GBF) fonctionnant en régime sinusoïdal (fréquence f_0).

Lampe stroboscopique : Une lampe stroboscopique permet d'éclairer la corde par flashes, discrétiser son mouvement, et éventuellement le figer lorsque la fréquence de la lampe est un multiple de la fréquence de vibration de la corde. **L'écran digital indique le nombre de flashes par minute.**

Consignes de travail

Lors de chaque changement de calibre de la fréquence (voir annexe GBF), **il faudra régler l'amplitude du GBF au minimum** (les deux boutons d'atténuation enfoncés, le potentiomètre au minimum).

Le vibreur électromagnétique, analogue à une membrane de haut-parleur, est protégé des surtensions par un fusible, et des suppressions mécaniques par un levier bloquant. **Pour toute manipulation de la tige du vibreur (fixation de la corde, ...), bloquer le vibreur (levier en position LOCK), puis le débloquent avant de l'alimenter (levier en position UNLOCK).**

3) Mesures

3.a) Caractéristiques de la corde

Effectuer les mesures suivantes avec précision :

- la longueur L de la corde ;
- la masse m de la corde ;

En déduire la masse linéique μ de la corde, ainsi que l'incertitude associée à sa mesure.

3.b) Caractère transverse des ondes se propageant le long de la corde

Pendre la masse de 100 g au bout de la corde. En observant le mouvement du point blanc imprimé sur la corde, vérifier que les ondes se propageant le long de la corde sont essentiellement transverses.

3.c) Ventres, noeuds, et longueur d'onde de l'onde stationnaire

- Régler la fréquence du GBF pour maximiser l'amplitude d'oscillation de la corde (fréquence de résonance).

- Régler la fréquence de la lampe stroboscopique pour quasiment figer la mouvement de la corde.
- Observer la forme de la corde, identifier les ventres et les noeuds de vibration.
- Tracer les 4 premiers modes de vibration en précisant la longueur d'onde, la position des noeuds et des ventres. Relier la distance entre deux noeuds et la longueur d'onde de l'onde stationnaire.

4) Etude de la résonance

4.a) Protocole et mesures

- Pendre la masse 100 g (1 N) au bout de la corde.
- Mesurer la longueur de la corde tendue L , c'est-à-dire la longueur de la partie de la corde située entre la poulie et le vibreur.
- En partant d'une fréquence élevée (typiquement 60 Hz), et en baissant progressivement la fréquence, rechercher les fréquences de résonance de la corde (jusqu'à sa plus basse), c'est-à-dire celles pour lesquelles l'amplitude de déplacement transverse est maximale.
 1. À chaque résonance, vérifier que le point de la corde au contact de la poulie est un noeud de vibration, et que l'extrémité à laquelle est attaché le vibreur est aussi approximativement un noeud de vibration.
 2. Compter et relever le nombre de ventres n , en déduire la longueur d'onde λ_0 par la relation

$$\lambda_0 = \frac{L}{n/2}.$$

3. Enfin relever la fréquence de résonance associée f_n .
- Répéter le protocole en augmentant progressivement la masse pendue de 20 g depuis 100 g (1,0 N) jusqu'à 180 g (1,8 N) en fonction de la santé de votre vibreur.
 - Pour une résonance choisie, effectuer une mesure de l'angle entre la corde et l'horizontale. A-t-on toujours l'angle entre la corde et l'horizontale petit devant l'unité (en radians) ?

4.b) Interprétations

1. Représenter la période d'oscillation du vibreur T en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde à résonance sur un même graphe pour toutes les valeurs des masses pendues.
2. **Célérité des ondes**
En déduire la célérité de l'onde pour les cinq valeurs de la tension (on imposera à la meilleure approximation linéaire de $\lambda(T)$ de passer par zéro).
3. Quelle est la relation entre T_0 et la masse des masses calibrées utilisées ? Représenter T_0 en fonction de c^2 . En déduire une mesure indirecte de μ , ainsi que son incertitude expérimentale, et comparer-la à votre mesure directe par pesée. Conclure sur la validité de la relation $c = \sqrt{T_0/\mu}$.
4. **Résonance et type d'excitation**
Représenter sur le même graphe a) la quantité $2Lf_n/c$ en fonction de n pour les cinq tensions de la corde étudiées, b) sa prédiction à amplitude fixée $2Lf_n/c = n$, ainsi que c) sa prédiction à force fixée $2Lf_n/c = n - 1/2$. En déduire si le vibreur impose un forçage à déplacement imposé ou à force imposée ?

TP 3 : Ligne électrique

Introduction

La propagation d'ondes électromagnétiques le long de lignes électriques avec de faibles pertes constitue un exemple courant de propagation unidimensionnelle obéissant à l'équation de d'Alembert. Un exemple de ligne électrique que vous utiliserez souvent dans la suite de votre formation est le câble coaxial, qui sert à transmettre des signaux électriques de haute fréquence entre des appareils de mesure (générateur, oscilloscope, ...), une antenne hertzienne et un téléviseur, une caméra analogique et une carte d'acquisition d'images, ...

Bien qu'un signal semble se transmettre instantanément d'un appareil à un autre lorsqu'ils sont reliés par un câble coaxial de faible longueur, sa propagation le long de la ligne électrique n'est pas instantanée¹.

L'objectif de ce TP est double :

1. mesurer la célérité d'un signal ainsi que son atténuation lors de sa propagation le long d'un câble coaxial
2. en utilisant la notion d'impédance complexe, notion déjà rencontrée en électrocinétique, voir quelle est l'influence du dipôle connecté à l'extrémité du câble coaxial sur la propagation du signal.

1) Description de l'expérience

Principe

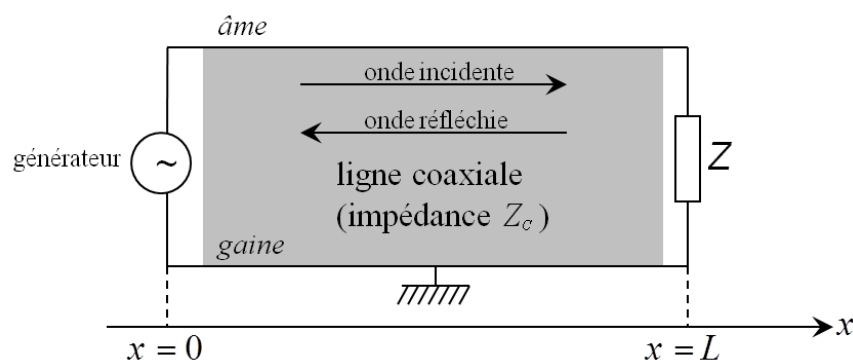


Figure 2: Schéma illustrant la propagation d'un signal électrique incident le long d'un câble coaxial (d'impédance Z_c) et sa réflexion sur un dipôle d'impédance réelle Z .

¹En effet la vitesse de propagation du signal est de l'ordre de grandeur de la célérité de la lumière dans le vide, soit 3.10^8 m.s^{-1} .

Un câble coaxial est constitué au centre d'une partie métallique appelée "âme" entourée d'une gaine isolante. En modélisant le câble coaxial par une chaîne infinie de quadripôles composés d'une bobine et d'un condensateur, on peut décrire de manière réaliste la propagation des ondes électrique en son sein (voir Annexe). Cependant, l'expérience quotidienne montre l'apparition d'une onde réfléchie (renvoi d'un écho par une paroi rocheuse, réflexion de la lumière par un miroir...) lorsque le milieu de propagation de l'onde est limité. Cette constatation s'étend au cas où l'extrémité du câble coaxial (ou de la ligne électrique) est connectée à un dipôle passif. Sur le schéma de la figure 8, on considère un câble coaxial (zone grisée), avec de faibles pertes, connecté en $x = L$ à un dipôle passif d'impédance Z appelée **impédance terminale** de la ligne. L'autre extrémité de la ligne coaxiale, en $x = 0$, est connectée à un générateur de tension.

On suppose que le générateur délivre une impulsion carrée de largeur temporelle négligeable devant le temps de propagation entre les deux extrémités de la ligne.

- à l'instant $t = 0$ en $x = 0$, une impulsion progressive (onde incidente) d'amplitude $V_i(0)$ est générée et se propage dans le sens des x croissants (cf. Fig. 3a),
- à l'instant $\tau = L/c$, l'impulsion progressive d'amplitude $V_i(L)$ atteint l'impédance terminale Z (Fig. 3b),
- simultanément, une impulsion réfléchie d'amplitude $V_r(L)$ est générée aux bornes de l'impédance terminale et se propage dans la direction du générateur (onde rétrograde) (Fig. 3c),
- après propagation le long de la ligne, l'impulsion réfléchie arrive à l'instant $2\tau = 2L/c$ aux bornes du générateur avec une amplitude $V_r(0)$ (Fig. 3d).

Le coefficient de réflexion en tension en $x = L$ est donc défini par:

$$r = \frac{V_r(L)}{V_i(L)}. \quad (3)$$

On peut montrer (voir Annexe) que le coefficient de réflexion en tension est également relié à l'impédance Z du dipôle en bout de ligne et à celle du câble coaxial Z_c par:

$$r = \frac{Z - Z_c}{Z_c + Z}. \quad (4)$$

Conséquences

Analysons les conséquences de la relation (4) en fonction de plusieurs terminaisons de la ligne :

- L'extrémité de la ligne est ouverte : $Z = \infty \implies r = 1$.
- L'extrémité de la ligne est court-circuitée : $Z = 0 \implies r = -1$.
La réflexion est dite totale : l'onde incidente est entièrement réfléchie ($|r| = 1$). Il n'y a pas de dissipation d'énergie dans la terminaison qui est dite parfaite.
- La ligne est fermée sur son impédance caractéristique : $Z = Z_c \implies r = 0$.
Il n'y pas d'onde réfléchie ($|r| = 0$), toute l'énergie de l'onde incidente est absorbée dans la terminaison : on dit qu'il y a adaptation d'impédance.

Effet de l'atténuation du signal

En pratique, il n'est pas possible de mesurer l'amplitude $V_r(L)$ de l'onde réfléchie en $x = L$. C'est pourquoi, on mesure généralement "l'écho" de l'onde réfléchie en $x = 0$ au niveau du générateur. Le rapport des amplitudes $V_r(0)$ et $V_i(0)$ permet donc normalement de déterminer le coefficient de

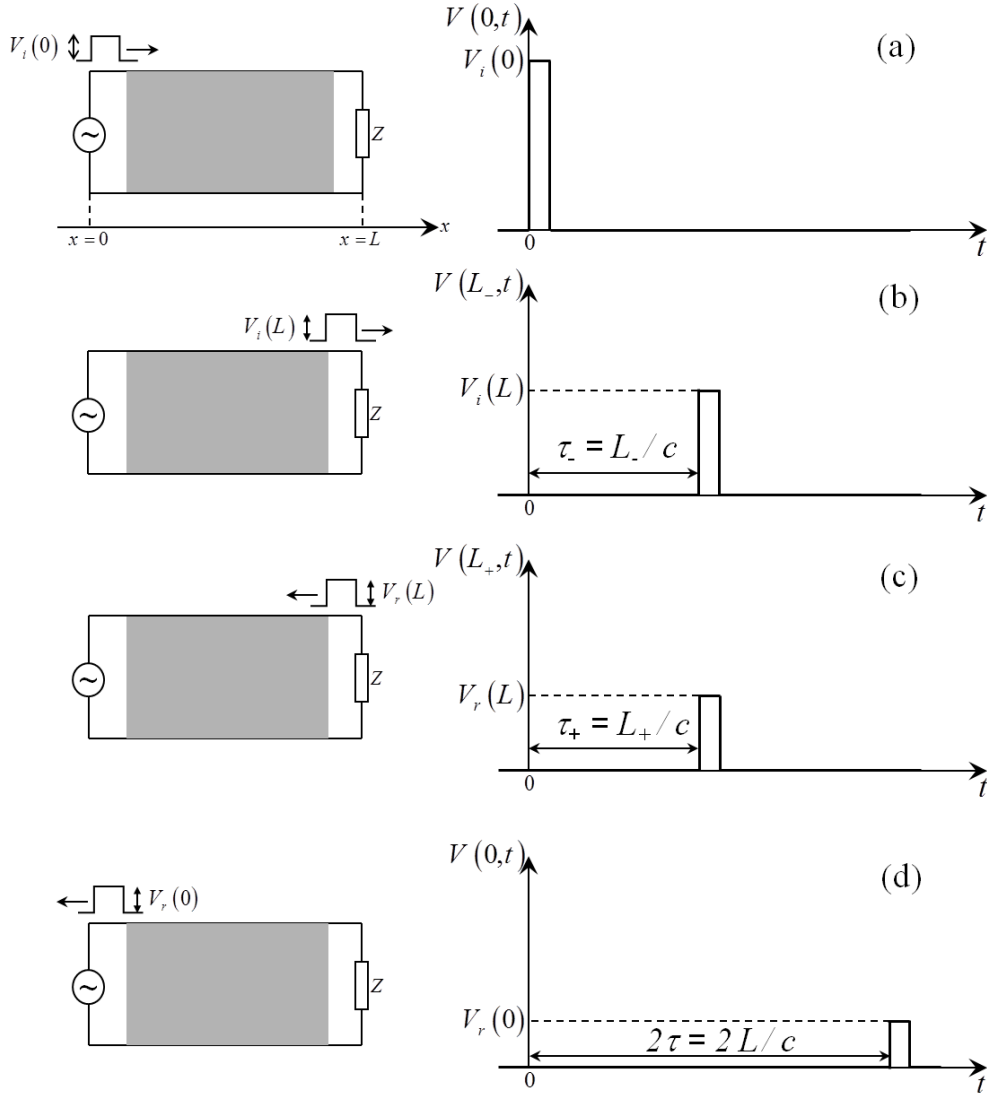


Figure 3: Propagation, réflexion et atténuation d'une impulsion de tension le long d'un câble coaxial terminé par une impédance Z réelle.

réflexion r .

Or, la propagation d'un signal le long d'un câble coaxial provoque des pertes et donc une atténuation de l'amplitude du signal qui vient s'ajouter au phénomène de réflexion. Ces pertes résultent d'une part du fait que l'isolant entre l'âme et la gaine n'est pas parfait et d'autre part de l'effet Joule dans les conducteurs. Cette atténuation de l'amplitude se fait de manière exponentielle le long de la ligne et est caractérisée par un coefficient d'amortissement linéique α . Dans le cas de l'atténuation de l'onde incidente entre $x = 0$ et $x = L$, on obtient (Fig. 3b):

$$V_i(L) = V_i(0) \exp(-\alpha L).$$

L'amplitude de l'onde réfléchiée $V_r(L)$ se déduit alors en utilisant la formule 3. On obtient :

$$V_r(L) = r \times V_i(L) = r V_i(0) \exp(-\alpha L).$$

Enfin, en tenant compte des pertes de l'onde rétrograde, son amplitude $V_r(0)$ en $x = 0$ devient alors :

$$V_r(0) = V_r(L) \exp(-\alpha L) = r V_i(0) \exp(-2\alpha L).$$

On en déduit l'expression du coefficient de réflexion en amplitude r donné par :

$$r = \frac{V_r(L) e^{2\alpha L}}{V_i(0)}. \quad (5)$$

On comprend donc que pour accéder expérimentalement à sa valeur, il faut au préalable mesurer le coefficient d'atténuation linéique α .

2) Travail préparatoire

- On considère le montage et son schéma électrique équivalent représentés sur les figures 5 et 6. Déterminer l'impédance équivalente du dipôle en bout de ligne constitué de l'impédance terminale Z et de la voie 2 de l'oscilloscope, encadré en traits pointillés épais, sachant que Z est du même ordre de grandeur que l'impédance caractéristique de la ligne coaxiale C_1 . Quelle est l'influence de l'oscilloscope ? Comment peut-on modéliser l'oscilloscope ?
- L'atténuation de l'onde progressive le long d'une ligne électrique de longueur L et de coefficient d'amortissement linéique α conduit à la relation : $V_i(L) = V_i(0)e^{-\alpha L}$. Exprimer l'incertitude $\Delta\alpha$ affectant la détermination de α en fonction de celle affectant les mesures de $V_i(0)$ et $V_i(L)$.
- Exprimer la célérité c en fonction du temps de propagation τ d'une onde progressive le long d'une ligne de longueur L et de sa longueur L . Exprimer l'incertitude Δc affectant la détermination de c en fonction de l'incertitude $\Delta\tau$ affectant la mesure de τ .
- Nous avons montré précédemment que le coefficient de réflexion en amplitude r était donné par

$$r = \frac{V_r(0)e^{2\alpha L}}{V_i(0)}.$$

Exprimer son incertitude Δr en fonction de $\Delta V_i(0)$, $\Delta V_r(0)$, et $\Delta\alpha$.

3) Réalisation du montage

Matériel utilisé

On dispose du matériel suivant :

- un générateur de tension, d'impédance interne $Z_g = 50 \Omega$, délivrant un train d'impulsions rectangulaires dont l'amplitude, la largeur et la fréquence (taux de répétition) sont ajustables;
- d'un oscilloscope numérique dont les voies 1 et 2 ont chacune une impédance d'entrée $Z_O = 1 M\Omega$;
- d'une résistance variable;
- d'un câble coaxial, appelé C_1 par la suite, de longueur $L = 50$ m et d'impédance caractéristique $Z_c = 50 \Omega$;
- deux câbles coaxiaux d'impédance caractéristique 50Ω , de longueurs très inférieures à L , et dont on négligera la présence dans toutes les expériences qui suivent;
- de "tés" et de "bouchons" de 50Ω dont les schémas électriques sont donnés sur la figure 4:

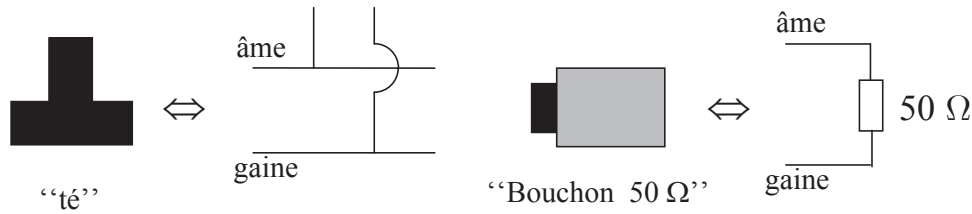


Figure 4: Schémas électriques d'un t   et d'un bouchon.

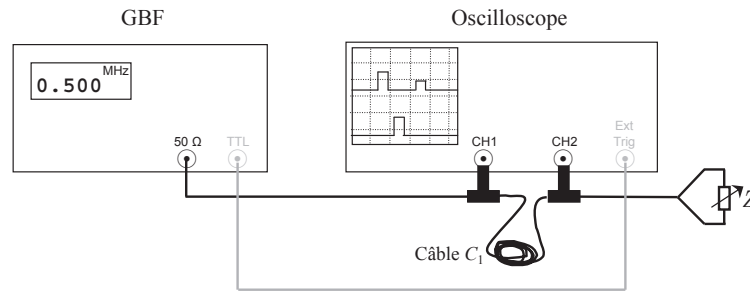


Figure 5: Montage expérimental.

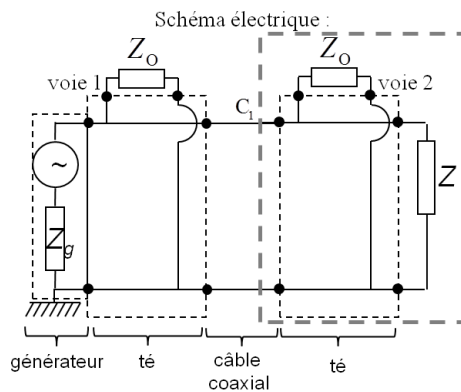


Figure 6: Schéma électrique équivalent du montage expérimental.

Montage

- Réaliser le montage représenté sur la figure 5 en utilisant le câble C_1 . L'oscilloscope sera synchronisé sur la sortie **TTL output** du GBF (câble gris   sur la figure 5).
- En visualisant le signal de la voie CH1 de l'oscilloscope, régler le GBF pour qu'il délivre un signal carré 0-4 V, de fréquence 0,5 MHz. En jouant sur le bouton **Symmetry**, réduire la durée des impulsions délivrées à la valeur la plus courte possible.

Remarque : pour visualiser des signaux stables sur l'écran d'un oscilloscope, le plus sûr est toujours de synchroniser l'oscilloscope sur l'émission du générateur, c'est-à-dire de relier la sortie TTL du générateur (signal périodique carré 0-5V dont la fréquence est identique à celle délivrée sur la sortie 50   du GBF)    l'entrée EXTERNAL TRIGGER de l'oscilloscope, et de régler la synchronisation de l'oscilloscope (menu Trigger) sur EXTERNAL en réglant le niveau de déclenchement à mi-amplitude (on pourra utiliser le bouton 50% ou régler la molette LEVEL.)

4) Mesures et interprétation

4.a) Observations préliminaires

- Représenter sur la feuille de résultats l'allure des deux voies de l'oscilloscope à l'échelle dans les trois cas suivants :
 - l'impédance terminale est débranchée ;
 - elle est égale à $50\ \Omega$;
 - elle est égale à $0\ \Omega$ (court-circuitée);
- Dans le cas d'une impédance terminale égale à $50\ \Omega$, vérifier qu'en remplaçant la résistance variable par un bouchon de $50\ \Omega$ on observe les mêmes signaux.
- En vous aidant de l'équation (4) et de la partie "Conséquences", interpréter les différences observées dans les 3 cas ci-dessus.

4.b) Atténuation

Mesurer les amplitudes de l'impulsion de tension incidente en $x = 0$, notée $V_i(0)$, et en $x = L$, notée $V_i(L)$ ainsi que leur incertitude. En déduire le coefficient d'atténuation α du câble ainsi que son incertitude.

Conseil : pour effectuer ces mesures, moyenner sur 16 acquisitions le signal visualisé sur l'écran de l'oscilloscope (menu ACQUISITION mode AVERAGE) pour réduire le bruit électronique, dilater horizontalement et verticalement les signaux pour minimiser l'incertitude de mesure, et utiliser la fonction CURSEURS pour être précis.

4.c) Célérité

- En adoptant les mêmes précautions de mesures qu'en 4.b), mesurer le temps de propagation τ de l'impulsion progressive entre les deux extrémités de la ligne $x = 0$ et $x = L$ ainsi que son incertitude. Pour cela, repérer les instants auxquels chaque tension dépasse la moitié de son amplitude.
- En déduire la vitesse de propagation c de l'onde de tension le long du câble ainsi que son incertitude.

4.d) Effet de l'impédance terminale

- Dans le cas de l'impédance terminale Z débranchée :
 - en vous référant aux signaux relevés en 4.a), mesurer sur la voie CH1 de l'oscilloscope $V_i(0)$, l'amplitude de l'impulsion de tension incidente en $x = 0$, et $V_r(0)$, amplitude en $x = 0$ de l'impulsion réfléchie.
 - A l'aide des mesures effectuées en 4.b) et de l'équation 5, calculer le coefficient de réflexion r expérimental.
- Répéter la démarche ci-dessus pour une impédance terminale Z égale à $500\ \Omega$, $250\ \Omega$, ainsi que pour Z égale à $50\ \Omega$ et $0\ \Omega$ (pour ces deux derniers points on se servira du 4.a)).
- Reporter sur un graphique $r = f(Z)$ ces mesures expérimentales du coefficient de réflexion r ainsi que les valeurs théoriques correspondantes [cf l'équation (4)]. Commenter.

Annexe 1: Calcul d'incertitude

Incertitude de mesure

Considérons une grandeur physique a . Sa mesure expérimentale donne la valeur a_{exp} avec une incertitude Δa , c'est-à-dire que la valeur réelle de a , notée $a_{\text{réel}}$, est telle que $a_{\text{exp}} - \Delta a \leq a_{\text{réel}} \leq a_{\text{exp}} + \Delta a$. La valeur de l'incertitude dépend de la précision de l'appareil de mesure et de la méthode de mesure employée. Seul son ordre de grandeur, c'est-à-dire son premier chiffre significatif, nous intéresse.

Incertitude d'une détermination expérimentale d'une grandeur

Soit u une fonction des grandeurs a et b dont les mesures sont affectées des incertitudes Δa et Δb . Les incertitudes affectant a et b étant considérées comme indépendantes, leurs effets sur u s'ajoutent, donc une évaluation en ordre de grandeur de l'incertitude Δu affectant la détermination de u est :

$$\Delta u = \sqrt{\left| \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right)_b \right|^2 \Delta a^2 + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial b} \right)_a \right|^2 \Delta b^2}$$

Annexe 2: Théorie TP Corde Vibrante

1) Régime stationnaire

On considère dans ce TP une corde horizontale de longueur L , d'axe (Ox) , tendue par la tension au repos T_0 , de masse linéique μ , fixée en $x = 0$, et excitée en $x = L$ par un vibreur électromagnétique effectuant des vibrations verticales selon la direction (Oz) décrites par le champ de déplacement transverse $u(x, t)$ (voir la figure 1 du TP).

A l'issue d'un court régime transitoire, une onde stationnaire s'établit le long de la corde. En utilisant la notation complexe, le champ de déplacement transverse s'écrit (voir cours):

$$\underline{u}(x, t) = a(x) \exp(j\omega t)$$

u vérifie l'équation de d'Alembert, ce qui impose $a'' + \frac{\omega^2}{c^2}a = 0$, soit :

$$a(x) = A_1 \exp(jkx) + A_2 \exp(-jkx)$$

A_1 et A_2 étant deux constantes complexes, et $k = \frac{\omega}{c}$. La condition à la limite en $x = 0$, $\underline{u}(0, t) = 0$, impose $A_2 = -A_1$.

2) Excitation à déplacement imposé

Si on suppose que ce vibreur permet à l'expérimentateur **d'imposer au point d'attache de la corde un mouvement vertical** de fréquence f_0 et d'amplitude A fixées, la condition à la limite en $x = L$, $u(L, t) = A \cos \omega_0 t$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, soit $\underline{u}(L, t) = A \exp(j\omega_0 t)$ en notation complexe, impose alors $\omega = \omega_0$ et :

$$\underline{u}(x, t) = A \frac{\sin k_0 x}{\sin k_0 L} \exp(j\omega_0 t)$$

soit

$$u(x, t) = \text{Re}(\underline{u}(x, t)) = A \frac{\sin k_0 x}{\sin k_0 L} \cos \omega_0 t$$

3) Excitation à force imposée

Si on suppose que ce vibreur permet à l'expérimentateur **d'imposer au point d'attache de la corde une force verticale** f_z de fréquence f_0 et d'amplitude F fixées, la condition à la limite en $x = L$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_t(L, t) = -\frac{f_z}{T_0} = -\frac{F}{T_0} \cos \omega_0 t$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, soit $\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}|_t(L, t) = -\frac{F}{T_0} \exp(j\omega_0 t)$ en notation complexe, impose alors $\omega = \omega_0$ et :

$$\underline{u}(x, t) = -\frac{F}{T_0} \frac{\sin k_0 x}{\cos k_0 L} \exp(j\omega_0 t)$$

soit

$$u(x, t) = \text{Re}(\underline{u}(x, t)) = -\frac{F}{T_0} \frac{\sin k_0 x}{\cos k_0 L} \cos \omega_0 t$$

4) Résonance

Pour les deux types d'excitation, notre modélisation prédit que lorsque le dénominateur de $u(x, t)$ s'annule alors l'amplitude d'oscillation du déplacement transverse de la corde atteint des valeurs importantes (voire infinies) : la corde entre en **résonance**. En effet pour certaines valeurs de $k_0 L$ c'est-à-dire pour certaines valeurs de la fréquence de forçage f_0 une fois L fixée, le *sin* ou *cos* du dénominateur s'annule et à ces fréquences la corde entre en résonance. Donc , la corde entre en résonance. Expérimentalement, vous constaterez que l'amplitude d'oscillation atteint des valeurs élevées mais pas infinies.

Annexe 3: Théorie TP Ligne électrique

1) Description théorique de la propagation d'une onde électrique dans une ligne

La structure d'un câble coaxial est représentée sur la Figure 7a : il est constitué d'un fil de cuivre cylindrique (l'âme) enrobé d'isolant. Une nappe cylindrique de cuivre (la gaine), entoure l'isolant, et est elle-même enrobée d'un isolant. La gaine est usuellement reliée à la masse du circuit électrique, l'âme étant portée au potentiel dont on veut propager la forme.

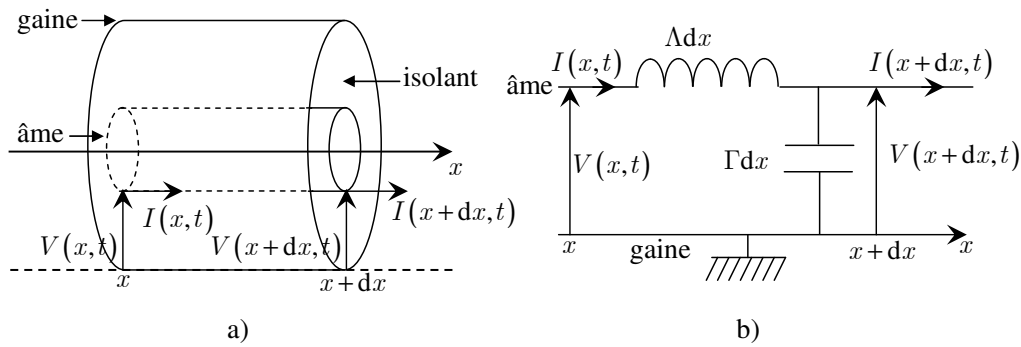


Figure 7: a) Structure d'un câble coaxial. b) Notations.

Moyennant certaines approximations que l'on justifie en électromagnétisme, un câble coaxial peut être considéré comme une succession de tronçons élémentaires, de longueur dx , assimilables à des quadripôles constitués d'une bobine d'inductance de valeur Λdx et d'un condensateur de capacité de valeur Γdx , comme représenté sur la Figure 7b. Λ est l'inductance par unité de longueur de la ligne électrique qui s'exprime en H.m^{-1} , et Γ sa capacité par unité de longueur en F.m^{-1} .

Ce modèle permet de rendre compte de manière réaliste de la propagation d'ondes électriques dans un câble coaxial. Notons cependant qu'il s'agit d'un modèle simplifié, car nous n'avons pas tenu compte de la résistance électrique de la ligne, principale responsable de l'atténuation des signaux électriques au cours de leur propagation. Nous verrons son influence à la section 4).

2) Équations de couplage et équation de propagation

Supposons que l'on branche un générateur de signaux à une extrémité de la ligne, et désignons par $I(x,t)$ et $V(x,t)$ respectivement l'intensité du courant circulant dans l'âme et la tension entre l'âme et la gaine au point d'abscisse x à l'instant t . L'application de la loi des mailles et de la loi des nœuds au tronçon de ligne de longueur dx , situé à l'abscisse x , conduit au système d'équations couplées

suivant (cf. TD) :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_x(x, t) = -\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_t(x, t), \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_x(x, t) = -\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_t(x, t). \quad (7)$$

En combinant ces deux équations, on constate que V et I satisfont à l'équation de d'Alembert :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_x(x, t) - \frac{1}{\Gamma\Lambda} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_t(x, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right)_x(x, t) - \frac{1}{\Gamma\Lambda} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)_t(x, t) = 0.$$

Ainsi, courant et tension se propagent le long de la ligne sous forme d'ondes, de célérité $c = 1/\sqrt{\Lambda\Gamma}$.

3) Ondes progressives. Notion d'impédance caractéristique

Considérons un signal se propageant le long de la ligne dans le sens des x croissants sous la forme d'une onde progressive. On a alors :

$$I(x, t) = f(t - x/c) \quad \text{et} \quad V(x, t) = g(t - x/c).$$

Cependant, du fait que l'équation de propagation découle des équations couplées (6) et (7), les solutions $I(x, t)$ et $V(x, t)$ sont liées.

On montre que pour **une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants** :

$$V(x, t) = Z_c I(x, t), \quad (8)$$

où $Z_c = \sqrt{\Lambda/\Gamma}$, homogène à une impédance, est l'**impédance caractéristique** de la ligne électrique. Naturellement, Z_c s'exprime en ohm (Ω).

De même, pour une **onde rétrograde se propageant dans le sens des x décroissants**, V et I sont reliés par : $V = -Z_c I$.

4) Influence des pertes. Coefficient d'atténuation

Les pertes dans un câble coaxial résultent d'une part du fait que l'isolant entre l'âme et la gaine n'est pas parfait et d'autre part de l'effet Joule dans les conducteurs. Ils sont aisément pris en compte dans le modèle introduit ci-dessus en tenant compte de la résistance interne de la bobine et de la résistance de fuite du condensateur. En reprenant l'analyse menée à la section 2), on obtient une nouvelle équation, appelée équation des télégraphistes, qui diffère de l'équation de d'Alembert par son second membre non nul, traduisant l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation.

Plus précisément, supposons qu'on applique une tension électrique à l'extrémité de la ligne située en $x = 0$. À l'instant t , on peut écrire que

$$V(x = 0, t) = V \times f(t),$$

où V est l'amplitude de la tension et la fonction $f(t)$ est telle que $|f(t)| \leq 1$.

En l'absence de perte, la tension à l'instant t au point de la ligne d'abscisse x s'écrit alors :

$$V(x, t) = V \times f(t - x/c),$$

l'amplitude de l'onde restant constante au cours de sa propagation.

Maintenant, si on tient compte des pertes, l'amplitude de l'onde va s'amortir exponentiellement le long de la ligne, c'est-à-dire que

$$V(x, t) = V(x) f(t - x/c) \quad \text{avec} \quad V(x) = V(0) \exp(-\alpha x),$$

où α est le coefficient d'amortissement linéique de l'onde, grandeur caractéristique des pertes, s'exprimant en m^{-1} .

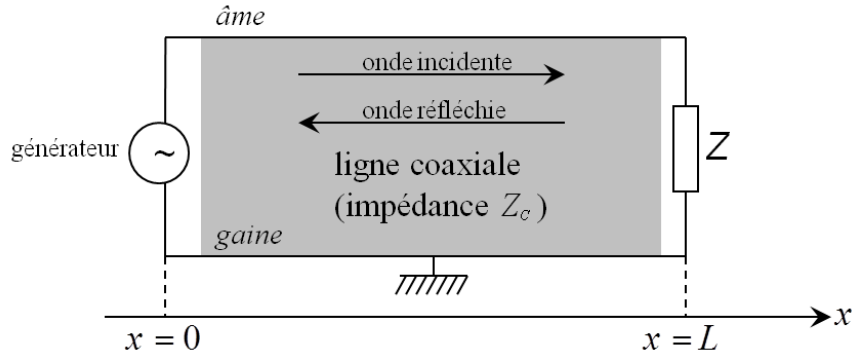


Figure 8: Schéma illustrant la propagation d'un signal électrique incident le long d'un câble coaxial (d'impédance Z_c) et sa réflexion sur un dipôle d'impédance Z .

5) Réflexion à l'extrémité d'une ligne fermée par une impédance terminale

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des limites éventuelles de la ligne, ce qui nous a permis de décrire la propagation d'un signal par des ondes progressives. Cependant, l'expérience quotidienne montre que lorsque le milieu de propagation d'une onde est limité, on observe l'apparition d'une onde réfléchie (renvoi d'un écho par une paroi rocheuse, réflexion de la lumière par un miroir). Cette constatation s'étend au cas où l'extrémité de la ligne électrique est connectée à un dipôle passif.

5.a) Ondes le long de la ligne

Considérons donc une ligne sans perte aboutissant à l'abscisse $x = L$ sur un dipôle passif d'impédance Z (voir figure 8), appelée **impédance terminale** de la ligne. L'autre extrémité de la ligne, en $x = 0$, est connectée à un générateur de tension.

A priori, l'impédance Z est une grandeur complexe, définie pour une pulsation ω donnée. Pour cette raison, nous supposons que les ondes se propageant le long de la ligne sont des ondes monochromatiques de pulsation ω et de vecteur d'onde $k = \omega/c$, et nous emploierons la notation complexe pour décrire leur propagation².

Dans ces conditions, $\underline{I}(x, t) = \underline{I}_i(x, t) + \underline{I}_r(x, t)$ et $\underline{V}(x, t) = \underline{V}_i(x, t) + \underline{V}_r(x, t)$ sont les superpositions :

- d'une onde progressive monochromatique décrite par les champs

$$\underline{I}_i(x, t) = \underline{I}_i e^{j(\omega t - kx)} \quad (9)$$

$$\underline{V}_i(x, t) = \underline{V}_i e^{j(\omega t - kx)} \quad (10)$$

avec $\underline{V}_i(x, t) = Z_c \underline{I}_i(x, t)$;

- et d'une onde rétrograde décrite par les champs

$$\underline{I}_r(x, t) = \underline{I}_r e^{j(\omega t + kx)} \quad (11)$$

$$\underline{V}_r(x, t) = \underline{V}_r e^{j(\omega t + kx)} \quad (12)$$

avec $\underline{V}_r(x, t) = -Z_c \underline{I}_r(x, t)$.

²Un signal quelconque peut toujours être décomposé comme une superposition d'ondes monochromatiques. La réflexion du signal est alors donnée par la superposition des ondes réfléchies associées à chacune des composantes monochromatiques de l'onde incidente. D'où l'intérêt de l'étude menée ici.

Soit

$$\underline{I}(x, t) = \underline{I}_i(x, t) + \underline{I}_r(x, t), \quad (13)$$

$$\underline{V}(x, t) = Z_c [\underline{I}_i(x, t) - \underline{I}_r(x, t)]. \quad (14)$$

Notons, en outre, que si la ligne électrique est connectée en $x = L$ à un dipôle passif d'impédance \underline{Z} , on a :

$$\underline{Z} = \underline{V}(L, t) / \underline{I}(L, t). \quad (15)$$

5.b) Coefficients de réflexion

Afin de caractériser l'onde réfléchie (amplitude et déphasage par rapport à l'onde incidente), on introduit le coefficient de réflexion en amplitude, rapport entre l'amplitude de l'onde après et avant réflexion. Ici, nous nous intéresserons plus particulièrement au coefficient de réflexion en tension \underline{r} :

$$\underline{r} = \underline{V}_r(L, t) / \underline{V}_i(L, t).$$

En utilisant (13) et (14) en $x = L$ et la relation (15), on montre que :

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - Z_c}{Z_c + \underline{Z}}. \quad (16)$$

Dans le cas de ce TP, l'impédance Z étant réelle, toutes les notations complexes sont supprimées de l'énoncé et le coefficient de réflexion réel est simplement noté r .

Annexe 4 : Oscilloscope

