Pravděpodobnost & Statistika 1

definice

Prostor jevů

$\mathcal{F} \subseteq P(\Omega)$ je prostor jevů (též σ-algebra), pokud:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega / A \in \mathcal{F} = A^c$ neboli A-complement

3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Axiomy pravděpodobnosti

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ se nazývá pravděpodobnost, pokud:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ pro libovolnou posloupnost po-dvou disjunktních jevů

Pravděpodobnostní prostor

je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ taková, že:

1) $\Omega \neq \emptyset$ je libovolná množina
2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je prostor jevů
3) P je pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost

Pokud $A, B \in \mathcal{F}$ a $P(B) > 0$, definujeme podmíněnou pravděpodobnost A při B jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Platí, že pro $\underbrace{Q(A) := P(A|B)}_{\text{„podmíněnou pstní fci"}}$ je $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ pravděpodobnostní prostor.

Rozklad Ω

"rozbor všech možností"

Spočetný systém množin $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ je rozklad Ω, pokud:

1) $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $\forall i \neq j$

2) $\bigcup B_i = \Omega$

Nezávislost jevů

Jevy $A, B \in \mathcal{F}$ jsou nezávislé, pokud:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Pak, pokud je $P(B) > 0$, platí:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{QED}$$

Nezávislost více jevů

Jevy $\{A_i : i \in I\}$ jsou vzájemně nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$ platí:

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

(*) odkaz na def. nez. jevů
„průnik ∀ se spočítá násobením ∀"

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i\}$ po dvou nezávislé.

Náhodná veličina

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme diskrétní náhodná veličina, pokud $\mathrm{Im}(X)$ = obor hodnot X je $\underbrace{\text{spočetná množina}}_{\text{aby ta veličina byla diskrétní}}$ a pokud pro $\forall\ x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

Ω je vlastně $\{X^{-1}(x)\}$, $P(X^{-1}(x))$ ale používáme zapsanou jako $P(X = x)$

Pravděpodobnostní funkce

P. fce. diskrétní náhodné veličiny X je funkce $P_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ taková, že:

$$P_X(x) = P(X=x)$$ = v podstatě hustotní fce pro d.n.v.

1) $\sum_{\forall x \in Im(X)} P_X(x) = 1$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to [0,1]$, $\sum_{a \in Im(A)} f(a) = 1$

2) pstní prostor dokážeme vyrobit z lib. podmnožiny $\mathbb{R}$ a vhodné fce

---

Střední hodnota

"popisuje očekávanou hodnotu n.v."

Pokud je X diskrétní náhodná veličina, tak je její střední hodnota označována $\mathbb{E}(X)$ a definovaná:

$$\mathbb{E}(X) := \underbrace{\sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x)}_{} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

pokud má součet smysl.

(*) $Im(X)$ musí být spočetná, jinak hrozí ("$+\infty - \infty$")

Podmíněná střední hodnota

Pokud je X diskrétní náhodná veličina a $P(B) > 0$, tak podmíněná střední hodnota X za předpokladu B je:

$$\mathbb{E}(X|B) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x | B)$$

pokud má součet smysl

Rozptyl

"popisuje odchylku hodnoty m.v. od její střední hodnoty"

Variance m.v. X nazveme číslo:

"aka střední kvadratická odchylka"

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$$

(*) musí platit: $\mathrm{var}(X) \geq 0$

(*) $\mathrm{var}(X) = 0 \iff P(X \neq \mathbb{E}(X)) = 0$

Bernoulliho (alt.) rozdělení

"X = počet orlů při jednom hodu nespravedlivou mincí"

$$X \sim \mathrm{Bern}(p)$$

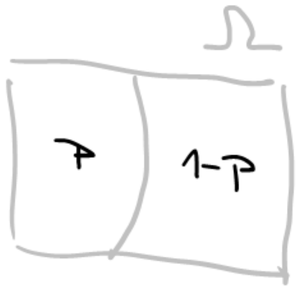
$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathrm{var}(X) = p(1-p)$$

$$P_X(1) = p$$

$$P_X(0) = 1-p$$

$$P_X(k) = 0 \quad \forall k \neq 0,1$$



---

pro libovolný jev $A \in \mathcal{F}$ definujeme indikátorovou m.v. I_A:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \omega \in A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$I_A \sim \mathrm{Bern}(P(A))$$

Binomiální rozdělení

„X = počet orlů při n hodech nespravedlivou mincí"

$X \sim Bin(n,p)$ $\quad$ $n :=$ počet hodů, $p :=$ pravd. že padne orel

$\rightarrow p \in [0,1]$

$$P_X(k) = \underbrace{\binom{n}{k} p^k}_{\#\text{ způsobů jak uspět } * \; P(\text{že } k\text{-krát uspěju})} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{P(\text{že } (n-k)\text{-krát neuspěju})} \quad \text{pro } k \in \{0,1,\dots,n\}$$

⊛ pravd. fce: z n hodů k orlů

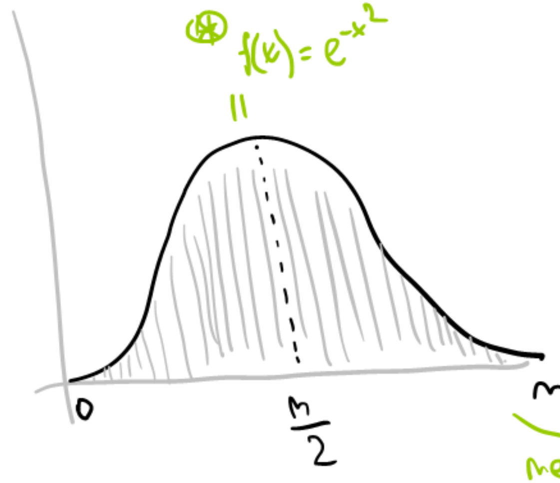
$$E(X) = np$$

$$var(X) = np(1-p)$$

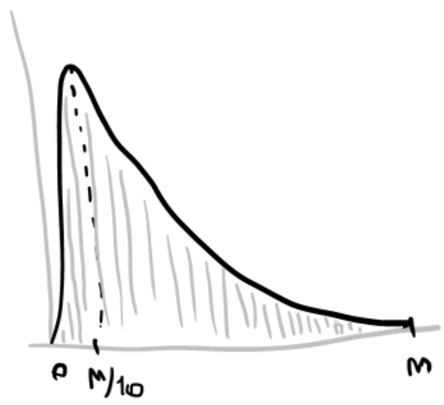
$p = \frac{1}{2}$:

⊛ $f(k) = e^{-x^2}$

||



$p = \frac{1}{10}$:



nejsou spojité, ale líp se to nakreslí...

Poissonovo rozdělení

„X = počet emailů, které dostaneme za časový úsek"

$$X \sim Pois(\lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$$

$$P_X(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$var(X) = \lambda$$

(*) $Pois(\lambda)$ je limitou:

$$Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

máme-li $X_n \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ pak:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{konst}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\text{konv} \to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\text{konv.} \to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\text{konv} \to 1}$$

Geometrické rozdělení

„X = orel poprvé padl k-tým hodem"

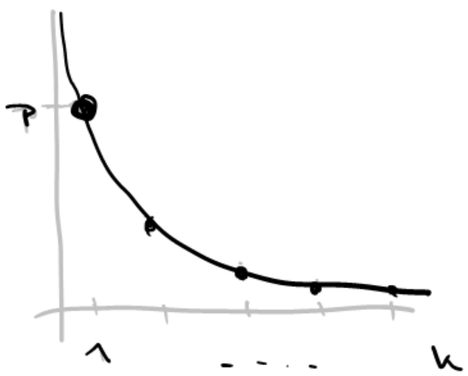
$$X \sim \mathrm{Geom}(p) \qquad p \in [0,1]$$

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

* pro $p = \frac{1}{2}$ je $P_X(k) = p^k$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

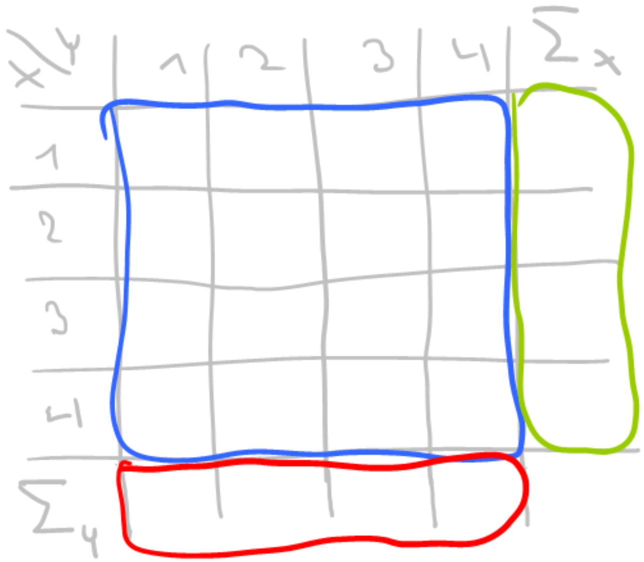


Sdružené rozdělení

Pro diskrétní m.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme jejich sdruženou pravděpodobnostní funkci $P_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ předpisem:

$$P_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \;\&\; Y(\omega) = y\}) = P(X = x, Y = y)$$

(*) definice funguje i pro více než dvě náhodné veličiny: $P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$



(*) sdružené rozdělení $P_{X,Y}$

(*) marginální rozdělení P_X

(*) marginální rozdělení P_Y

$\Rightarrow$

1) z $P_{X,Y}$ lze získat P_X a P_Y

2) z P_X, P_Y nelze získat $P_{X,Y}$

Nezávislost náh. veličin

Diskrétní m.v. X, Y jsou nezávislé, pokud pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X=x\}$ a $\{Y=y\}$ nezávislé, což platí právě když:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

(*) v případě nezávislých X, Y lze def. sdružené rozd. $P_{X,Y} \Leftarrow P_X, P_Y$ právě jako jejich součin

Směrodatná odchylka

Pro m.v. X definujeme její směrodatnou odchylku jako:

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

Obecná náhodná veličina

Náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je zobrazení $X: \Omega \to \mathbb{R}$, které pro $\forall x \in \mathbb{R}$ splní:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

(*) diskrétní m.v. je obecná m.v.

Distribuční funkce

"kumulativní" protože se kumuluje (nasčítá) na $\underline{\underline{1}}$

Dist. fce. náhodné veličiny X je funkce:

$$F_X(x) := P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\})$$

- F_X je neklesající fce
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X je zprava spojitá

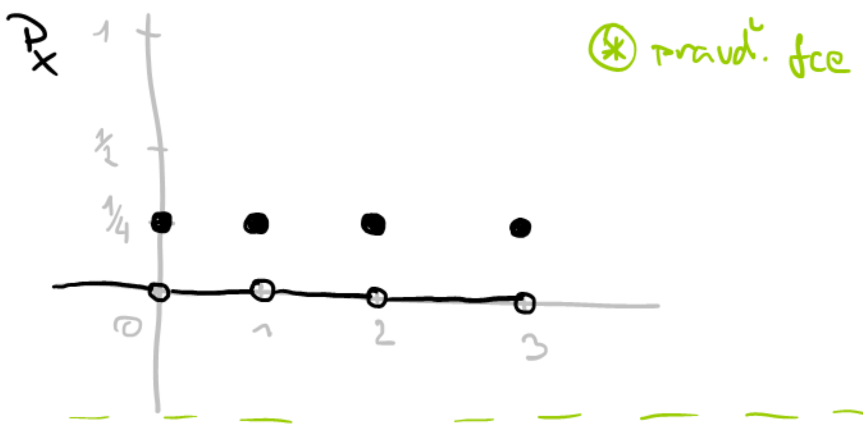
protože jdeme zprava a dojdeme až do bodu, když zleva, v bodě skok

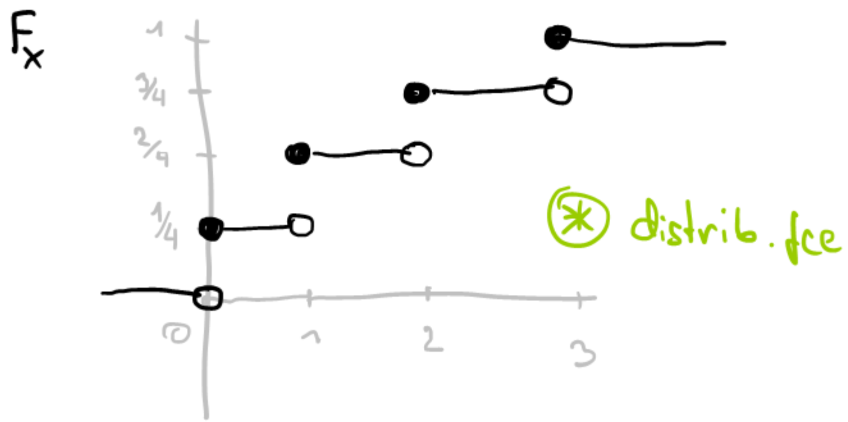
$P(X \le x + \varepsilon) \to P(X \le x)$ pro $\varepsilon \to 0^+$

$x \to +\infty$ do Ω přibývají $\forall$ body $\to P(\Omega) = 1$

$x \to -\infty$ z Ω mizí body $\to P(\emptyset) = 0$

příklad: $X \sim$ uniformní$(\{0,1,2,3\})$





Spojitá náhodná veličina

n.v. X se nazývá spojitá, pokud existuje nezáporná reálná funkce f_X tak, že:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

(*) P_X pravděpodobnostní fce

F_X distribuční fce

f_X hustotní fce

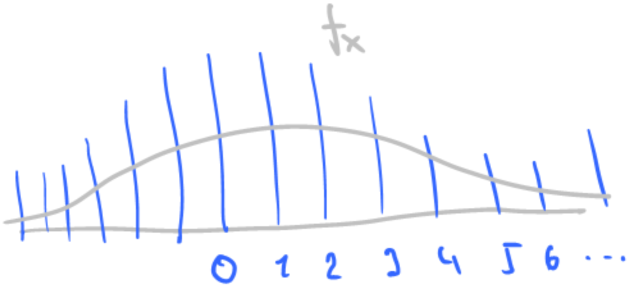
funkce f_X se nazývá HUSTOTA

Střední hodnota spojité n.v.

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak její střední hodnota je označována $\mathbb{E}(X)$ a definována:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx$$

má-li integrál smysl (*) tedy není „$+\infty - \infty$“



$$\mathbb{E}(X) = \sum_n \int_n^{n+1} x \cdot f_X(x)$$

-> platí rovnost protože integrujeme přes celou $\mathbb{R}$, ale po částech

$$\doteq \sum_n n \cdot \int_n^{n+1} f_X(x) = \sum_n n \cdot P(n \leq X \leq n+1)$$

-> n.v. zaokrouhlená dolů na celé číslo

=> pro kroky v $\sum$ -> 0,00....1 -> se blížíme k $\sum x \cdot P(X=x)$

Rozptyl spojité n.v.

Víme:

"1. moment"... $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$

"2. moment"... $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx$ ... spojitý LOTUS pro $g(X) = x^2$

Proto označíme-li $\mu = \mathbb{E}(X)$, tak:

$$\operatorname{var}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx}_{} = \underbrace{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}_{}$$

$\mathbb{E}(X-\mu)^2$

$=$

$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$

$\mathbb{E}(aX) = a\,\mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

(*) rozptyl počítáme "jako u diskrétních n.v.", nejpohodlnější bývá

"k-tý moment" ... $\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)\, dx$

Uniformní rozdělení

$X \sim U(a,b)$

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b \\ 1 & \text{pro } x \geq b \end{cases}$$

$$f_X = \frac{1}{b-a} \quad \text{pro } x \in [a,b]$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \cdot \frac{1}{b-a} = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{\overbrace{b^2 - a^2}^{(b-a)(b+a)}}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

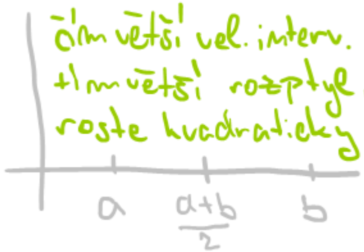
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x) \cdot dx \quad \ldots\ldots \quad \mathbb{E}(X) = \mu$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}_{y=(x-\frac{a+b}{2})^2} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y^2 \cdot \frac{1}{b-a} dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \cdot \frac{1}{b-a} = \left(\frac{(b-a)^3}{3 \cdot 8} + \frac{(b-a)^3}{3 \cdot 8}\right) \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{2(b-a)^3}{24} \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

⊛

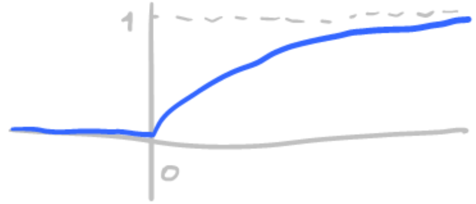
čím větší vel. interv. tím větší rozptyl, roste kvadraticky



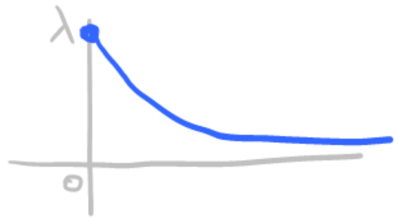
Exponenciální rozdělení

$X \sim Exp(\lambda)$ pro $\lambda > 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ F_X' = \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$



jak se počítá: $\int f_X = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

PER PARTES

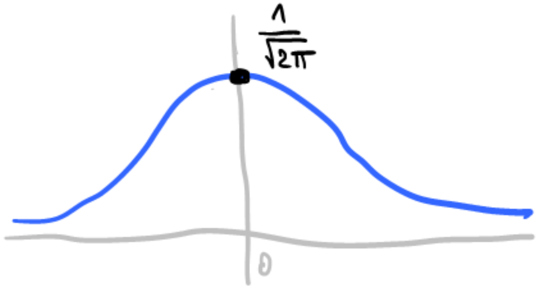
$$= \int_0^\infty \underbrace{x}_{\text{der.}} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{\text{integ.}} = \underbrace{\left[x \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-\lambda x}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} = \left[x^2 \cdot (-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x \cdot (-e^{-\lambda x}) = \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Normální rozdělení



⊛ sudá fce

$$Z \sim \mathrm{Norm}(\overset{\overset{\mathbb{E}(Z)}{\shortparallel}}{0}, \overset{\overset{\mathrm{var}(Z)}{\shortparallel}}{1})$$

$F_Z(z) = \Phi(z)$ = primitivní fce k $\varphi(z)$, nejde vyjádřit pomocí elem. fcí

$f_Z(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$ proč je $\varphi(z)$ hust. fce? $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = c = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) = 1$

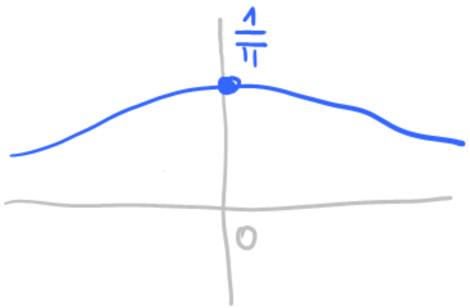
$$\mathbb{E}(Z) = 0 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \overbrace{\varphi(z)}^{\text{sudá}}}_{\text{lichá}} = 0$$

???

$$\mathrm{var}(Z) = 1 = \mathbb{E}(Z^2) - \underbrace{\mathbb{E}(Z)^2}_{0} = \mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = \underbrace{\left[\frac{z}{\sqrt{2\pi}} \cdot -e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(z) = 1$$

Cauchyho rozdělení

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$



$\mathbb{E}(X)$ neexistuje   nelze zintegrovat "$\infty - \infty$"

Gamma rozdělení, Beta rozdělení, χ^2 rozdělení s n° volnosti, Studentovo t-rozdělení

(*) budu dělat až ve statistice

Sdružená distribuční fce

- Pro n.v. X, Y na pstním. prostoru (Ω, F, P) definujeme jejich sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ s předpisem:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \;\&\; Y(\omega) \leq y\})$$

píšeme $F_{X,Y} = P(X \leq x \;\&\; Y \leq y)$

- Dá se definovat: pro více než dvě n.v.

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Sdružená hustota

- sdruženou distribuční funkci můžeme často psát jako integrál přes nezápornou fci $f_{X,Y}$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x}}_{s=-\infty,\dots,x} \underbrace{\int_{-\infty}^{y}}_{t=-\infty,\dots,y} f_{X,Y}(s,t)\,.dt.ds$$

(*) tedy vyjadřujeme distrib. fci jako dvojitý integrál přes hustotní fci

- Potom nazýváme n.v. X,Y sdruženě spojité. Funkce $f_{X,Y}$ je jejich sdružená hust. fce.
- $f_{X,Y} > 1$ je validní

(**) Fubiniho věta => můžu (jsou-li splněny podm.) prohodit integrály

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{t=-\infty}^{y} \int_{s=-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)\,.ds.dt$$

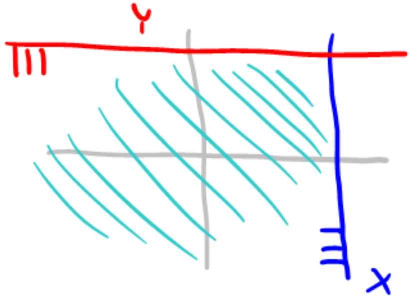
Nezávislost spojitých m.v.

Libovolné m.v. nazveme nezávislé, pokud jevy $\{X \le x\}$ a $\{Y \le y\}$ jsou nezávislé pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$. Ekvivalentně:

dva způsoby jak zapsat totéž

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$



Podmiňování

Platí věta, že distrib. fce je primitivní funkcí k hustotní fci. Proto

X je m.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $B \in \mathcal{F}$

$$F_{X|B}(x) := P(X \le x | B) = \frac{P(X \le x \,\&\, B)}{P(B)} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(s)$$

Podmíněná hustota

chceme pro $D=\{Y=y\}$

umět: $f_{X|D}$ ale $P(D)=0$

proto musíme jinak...

Pro spojité n.v. X,Y definujeme podmíněnou hustotu předpisem:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

pokud je $f_Y(y) > 0$, jinak nedefinujeme

$$= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx}$$

analogie s diskrétními veličinami, vydělením $f_Y(y)$ "zafixujeme" y a "sčítáme" tak přes x

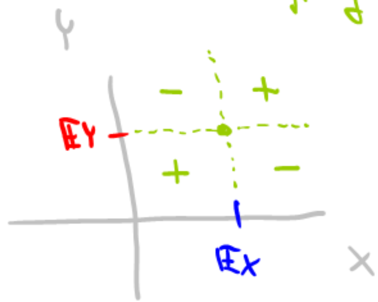
Kovariance

Pro n.v. X,Y definujeme jejich kovarianci předpisem:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\cdot\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big)$$

$X - \mathbb{E}X = \begin{cases} + & \dots X > \mathbb{E}X \\ - & \dots X < \mathbb{E}X \end{cases}$

$Y - \mathbb{E}Y$ analogicky



Korelace

Korelace n.v. X, Y je definována předpisem:

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y)}}$$

někdy se značí $\rho(X,Y)$

korelace je přenormovaná kovariance tak, aby:

$$-1 \leq \operatorname{corr}(X,Y) \leq 1$$

víme:

$$\operatorname{corr}(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } X = Y \\ (-1,1) & \text{jinak} \\ -1 & \text{pro } X = -Y \end{cases}$$

Momentová vytvořující funkce

Pro náhodnou veličinu X označíme $M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{(tX)}\right)$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce.

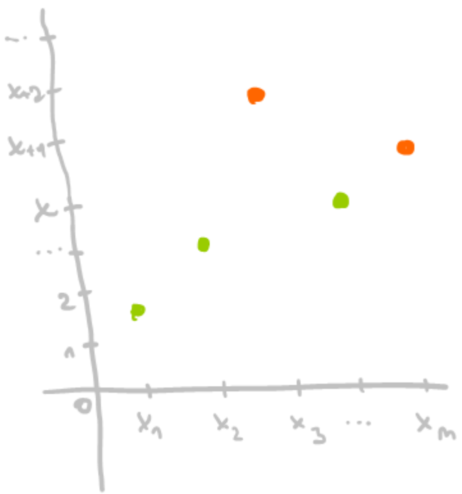
Empirická distribuční funkce

Pro n.n.v. $X_1, \dots, X_n \sim F$, kde F je jejich distribuční fce je definována pomocí indikátorové veličiny

$$I(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (X_i \leq x) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

následovně:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{I(X_i \leq x)}^{\text{dává smysl, známe-li výsledky pokusů}}}{n}$$



$$\hat{F}_n(x) = \frac{\#\text{ tref do intervalu}}{\#\text{ všech pokusů}} = \underline{\underline{\text{podíl úspěšných pokusů}}}$$

Bodový odhad

odhad $\hat{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ parametru ϑ je:

unbiased

nezaujatý $\iff \vartheta = \mathbb{E}(\hat{\Theta}_n)$ → tedy $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) - \vartheta = 0$

asymptoticky nezaujatý $\iff \vartheta = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) - \vartheta$ → tedy $\mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) - \vartheta \xrightarrow{\lim} 0$

konzistentní $\iff \hat{\Theta}_n \to \mu$ $\begin{cases} \text{skoro jistě} \\ \text{v pravděpodobnosti} \end{cases}$

BIAS

$$\text{bias}_\vartheta(\hat{\Theta}_n) = \begin{cases} \mathbb{E}(\tilde{\Theta}_n) \\ \mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) - \vartheta \end{cases}$$

→ $\mathbb{E}$(chyby)

→ $\mathbb{E}$(odhadu) − naměřená hodnota

jsou si rovny podle linearity $\mathbb{E}$

MSE střední kvadratická chyba

$$MSE = \mathbb{E}\left(\left(\hat{\Theta} - \vartheta\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{bias}_{\vartheta}\left(\hat{\Theta}_n\right)^2\right)$$

Metoda momentů

r-tý moment $\quad m_r(\vartheta) = \mathbb{E}(X^r)$, $\quad X \sim F_{\vartheta}$

r-tý výběrový moment $\quad \widehat{m_r}(\vartheta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)^r$, $\quad X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z F_{ϑ}

Metoda maximální věrohodnosti – úvod

máme:

náhodný výběr

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_1, \dots, X_n \sim F_\vartheta$

možný výsledek

$x = (x_1, \dots, x_n)$

pro nějaké $\omega \in \Omega$: $x_1 = X_1(\omega)$
$x_2 = X_2(\omega)$
...

fci:

$$\begin{cases} \text{sdružená pstní fce. } P_X(x, \vartheta) \\ \text{sdružená hustotní fce } f_X(x, \vartheta) \end{cases}$$

věrohodnost: → je to jen značení abychom nemuseli řešit disk. x spoj.

$$L(x, \vartheta) = \begin{cases} P_X(x, \vartheta) \\ f_X(x, \vartheta) \end{cases}$$

využití:

obvykle máme ϑ

=> $L(x, \vartheta)$ je funkce x

může být obráceně: máme x

= $L(x, \vartheta)$ je funkce ϑ

metoda:

Volíme takové ϑ, pro které je $L(x, \vartheta)$ maximální.

Metoda maximální věrohodnosti – def.

metoda

volíme takové ϑ, pro které je $L(x,\vartheta)$ maximální

definujeme také:

$$\ell(x,\vartheta) = \log\left(L(x,\vartheta)\right)$$

díky nezávislosti platí:

$$L(x,\vartheta) = P_X(x,\vartheta) = P_X((x_1,\dots,x_n),\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i,\vartheta)$$

$$\ell(x,\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(P_X(x_i,\vartheta)\right) \quad \text{(*) log součinu = součet log}$$

(*) log je rostoucí fce $\Rightarrow$ $\max\{\ell(x,\vartheta)\} = \max\{L(x,\vartheta)\}$

Intervalové odhady

místo jednoho čísla vypočtáme z dat interval $[\hat{\Theta}^-, \hat{\Theta}^+]$

Nechť jsou $\hat{\Theta}^-$, $\hat{\Theta}^+$ náhodné vel., které závisí na náh. výběru $X = (X_1, \dots, X_n)$

Tyto n.v. určují intervalový odhad, též konfidenční interval

o spolehlivosti: $1-\delta$, pokud:

$$P(\hat{\Theta}^- \leq \vartheta \leq \hat{\Theta}^+) \geq 1-\delta$$

Studentovo t-rozdělení

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$ ... výběrový průměr

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$ ... výběrový rozptyl

nechť $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Studentovo t rozdělení s $n-1$ stupni volnosti je rozdělení n.v.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

nezávisí na μ

nezávisí na σ

(*) distribuční fce Ψ_{n-1}

platí: $\lim_{n\to\infty} \Psi_{n-1}(t) = \Phi(t)$

χ^2_k - rozdělení

$Z_1, \dots, Z_k \sim N(0,1)$ n.n.v. Rozdělení n.v.

$$Q = Z_1^2 + \dots + Z_k^2$$

se nazývá χ-kvadrát s k stupni volnosti

$\mathbb{E}(Q) = k$

$$\mathbb{E}(Q) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Z_i^2) = \sum_{i=1}^{k} 1 = \underline{\underline{k}}$$

$\operatorname{var}(Q) = 2k$

(*) zbytečně pracné

Q je pro velké k blízké $N(k, 2k)$ z CLV

Multinomické a kategoriální rozdělení

Dány $p_1, \dots, p_k \geq 0$ tak, že $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. n-krát zopakuji pokus, kdy může nastat jedna z k možností, z nichž i-tá má p_i. $X_i :=$ kolikrát nastala i-tá možnost.

$(X_1, \dots, X_k)$ má multinomické rozdělení s parametry $n, (p_1, \dots, p_k)$

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{x_k}$$

$X_i \sim \text{Binom}(n, p_i)$

Pearsonova χ^2 statistika

$(X_1, \dots, X_k)$ multinomické rozdělení s parametry $n, (p_1, \dots, p_k)$

$E_i := \mathbb{E}(X_i) = np_i$ $\quad X_i \sim \mathrm{Binom}(n, p_i)$

Pearsonova χ^2 statistika je funkce:

$$T := \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i}$$

Test dobré shody

$$(X_1, \dots, X_k) \sim \text{Multinom}(n, (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)), \quad n \text{ známe}, \quad \vartheta \text{ neznáme}$$

Hypotéza $H_0 : \vartheta = \vartheta^*$

nějaké hodnoty

$E_i := n\vartheta_i^*, \ \forall i$

Použijeme statistiku $$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i}$$

Hypotézu H_0 zamítneme, pokud $T > \gamma$

$$\gamma := F_Q^{-1}(1-\alpha), \quad Q \sim \chi^2_{k-1}$$

$$P(\text{chyby 1. druhu}) = P(T > \gamma; H_0) \xrightarrow{n \to \infty} P(Q > \gamma) = \alpha$$

Lineární regrese

máme data (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, chceme je proložit přímkou $y = \vartheta_0 + \vartheta_1 x$

tak, abychom minimalizovali výraz $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(y_i - (\vartheta_0 + \vartheta_1 x_i)\right)^2}_{\text{kvadratická odchylka}}$

optimální parametry

$\hat{\vartheta}_1 \sim \frac{\text{kovariance}}{\text{variance}}$

$\sim$ korelace

$$\hat{\vartheta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

$$\hat{\vartheta}_0 = \bar{y}_n - \vartheta_1 \bar{x}_n$$

$\bar{X}_n, \bar{y}_n$ = výběrové průměry

model

$Y_i = \underbrace{\vartheta_0 + \vartheta_1 x_i}_{\text{ideální}} + \underbrace{w_i}_{\text{chyba}}$, $w_i \sim N(0, \sigma^2)$, $w_1, \dots, w_n$ nezávislé

met. max. věr.

konstantní část $e^{-(\dots)}$

$$L(y;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \vartheta_0 - \vartheta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}} \quad \xrightarrow{\ell = \log(L)} \quad \ell(y,\vartheta) = a - b \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(y_i - \vartheta_0 - \vartheta_1 x_i)^2}_{\text{jen toto jde minimalizovat}}$$

$\sim$ met. nejm. $\square$

Bayesovská metoda – popis

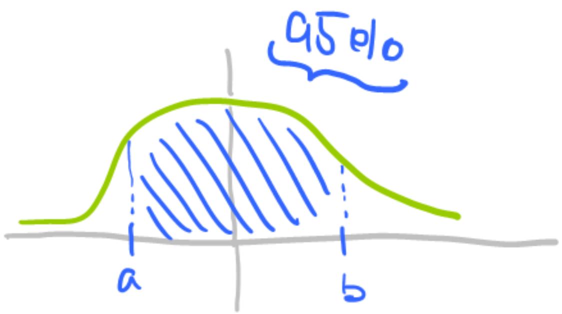
- neznámý parametr považujeme za náhodnou veličinu Θ
- zvolíme apriorní distribuci, neboli hustotu pravděpodobnosti $f_\Theta(\vartheta)$ nezávislou na datech
- zvolíme statistický model $f_{X|\Theta}(x|\vartheta)$, který popisuje co naměříme (pravděpodobnost s jakou to naměříme) v závislosti na parametru ϑ
- pozorujeme hodnotu $X = x$ a potom spočítáme posteriorní distribuci

$$f_{\Theta|X}(\vartheta|x)$$

- z té pak odvodíme co potřebujeme, npř.

najdeme a, b aby:

$$\int_a^b f_{\Theta|X}(\vartheta|x)\, d\vartheta \geq 1-\delta \quad \ldots$$



Bayesovské bodové odhady

MAP Maximum Aposteriori

Volíme $\hat{\vartheta}$ tak, aby maximalizovalo $\begin{cases} p_{\Theta|X}(\vartheta|x) & \text{pro diskrétní} \\ f_{\Theta|X}(\vartheta|x) & \text{pro spojité} \end{cases}$

(*) vlastnost

$P(\Theta = \hat{\vartheta} \mid X = x)$ je největší možná

LMS Least mean square

Volíme $\hat{\vartheta} = \mathbb{E}(\Theta \mid X = x)$

(*) jsme ve střední hodnotě, což bude minimalizovat kvadratickou odchylku naměřené hodnoty od ϑ