Pravděpodobnost & statistika 1

Věty

Základní vlastnosti:

V pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí pro $A, B \in \mathcal{F}$:

1) $P(A) + P(A^c) = 1$

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (subaditivita, Booleova nerovnost) * A_i nemusí být disjunktní

dk

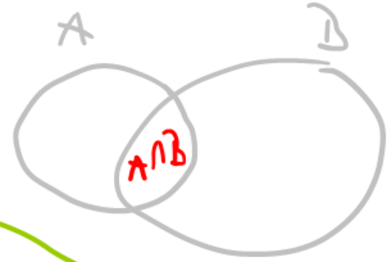
1) $\Omega = A \cup A^c$

$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$

2) $B = A \cup (B \setminus A)$ protože $A \subseteq B$

$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$

3)



$$P(A) = P(A \setminus B) \cup P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) \cup P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = \overbrace{P(A \setminus B) \cup P(A \cap B)} + \overbrace{P(B \setminus A) \cup P(A \cap B)} - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4)

použijeme trik „zdisjunktnění"

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus A_2$

...

$$\rightarrow \boxed{B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j} \rightarrow$$

1) $B_i \subseteq A_i$

2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

3) $\bigcup B_i = \bigcup A_i$

$$\rightarrow P\left(\bigcup A_i\right) = P\left(\bigcup B_i\right) = \sum P(B_i) \leq \underline{\underline{\sum P(A_i)}}$$

Zřetězené podmiňování

Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Dk z definice p.p. RL

důsledek def. podm. psti :

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B)$$

$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

$$= \underline{\underline{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}}$$

∎

Rozklad Ω pro P

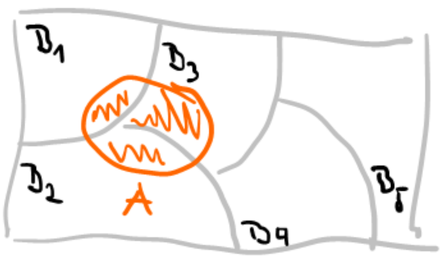
Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$P(A) = \sum (A \mid B_i) P(B_i)$$

Dk z definice p.p. LR

důsledek def. podm. psti:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) P(B)$$



$$\rightarrow \quad A = \bigcup (A \cap B_i)$$

$$P(A) = \bigcup P(A \cap B_i) = \underline{\underline{\sum P(A \mid B_i) P(B_i)}}$$

Bayesova věta

Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω, $A \in \mathcal{F}$ a $P(A), P(B_j) > 0$, tak:

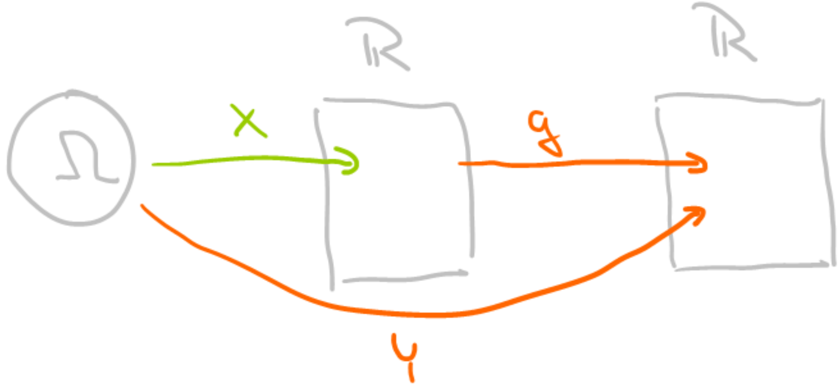
$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{=1}}$$

Dk pomocí věty o rozkladu Ω LR

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} \underbrace{=}_{\text{tohle platí}} \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{\text{věta o Rozkladu } \Omega}}$$

LOTUS

Pro reálnou fci g a diskrétní m.v. X je g(X) také diskrétní m.v.



$Y: \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, Y = g(\mathrm{Im}\, X)$

potřebujeme ověřit 2 podm. d.m.v.

1) $|\mathrm{Im}\, Y| \le |\mathrm{Im}\, X|$

protože Im X je spočetná, je i Im Y spočetná

2) $Y^{-1}(y) = X^{-1}(g^{-1}(y))$

$$= \underbrace{\bigcup_{g(x)=y,\ x\in \mathrm{Im}(X)} X^{-1}(x)}$$

což je spočetné sjednocení a $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$, což je množina uzavřená na spoč. sjednocení

Pokud X je d.m.v a g je reálná fce, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} g(x) P(X=x)$$

Dk

Přeznačme: $Y = g(X)$, $I = \mathrm{Im}(X)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(Y) = g(I)$

z def: $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \sum_{y\in g(I)} y \cdot P(Y=y)$$

suma má jen 1 prvek:

$$= \sum_{y\in g(I)} y \cdot \sum_{g(x)=y,\ x\in I} P(X=x) = \sum_{x\in I} \boxed{\sum_{y=g(x)} y} \cdot P(X=x) = \sum_{x\in I} \boxed{g(x)} \cdot P(X=x)$$

?

Vlastnosti $\mathbb{E}$

Nechť X, Y jsou diskrétní m.v. a $a, b \in \mathbb{R}$

1) Pokud $P(X \geq 0) = 1$ & $\mathbb{E}(X) = 0$ tak $P(X = 0) = 1$ tedy, pokud je X vždy nezáporná a stř. je 0 musí být $P(X=0)=1$

2) Pokud $\mathbb{E}(X) \geq 0$ tak $P(X \geq 0) > 0$

3) $\mathbb{E}(a \cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

4) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Dk

1) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(X = x)}_{\geq 0} = 0$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x) \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0$$ v sumě musí být nezáp. sčítanci

3) $g(x) = (a \cdot x + b)$ pomocí lotusu

$$\sum (ax + b) P(X = x) = a \sum x \cdot P(X = x) + \sum b \cdot (X = x) = a \underbrace{\sum x \cdot P(X = x)}_{\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum P(X = x)}_{1}$$

$$= \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b}}$$

$\mathbb{E}(X) = \sum g(x) P(X = x)$

linearita $\mathbb{E}$, pro $a, b = 1$

4) $g(X,Y) = (x+y)$, $\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} (x+y) P(X=x, Y=y) = \sum\sum x P(X=x, Y=y) + \sum\sum y P(X=x, Y=y)$

věta o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in Im(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in Im(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)} = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x) + \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

■

Rozklad Ω pro $\mathbb{E}$

Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1,2,\ldots} \mathbb{E}(X \mid B_i) P(B_i)$$

kdykoli má součet smysl

(*) sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0

Dk RL

def. podm. stř. hod.

věta o rozkl. Ω pro $P = P(X=x)$

$$\sum_{i=1,2,\ldots} \mathbb{E}(X \mid B_i) P(B_i) = \sum_i \overbrace{\sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x \mid B_i)} \cdot P(B_i) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \overbrace{\sum_i P(X=x \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

$$= \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X)}}$$

■

II. definice rozptylu

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Dk pomocí linearity $\mathbb{E}$ (LR)

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\cdot\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right)$$

(*) použijeme zobecněnou VOL $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}(aX+bY+cZ) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c\mathbb{E}(Z)$

podle ní:

$$\mathbb{E}\Big(X^2 - \underbrace{2\mathbb{E}X}_{\text{konst}}\cdot X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\text{konst}}\Big) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \underline{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$\blacksquare$

Obecný vzorec $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

Mějme disk. n. v. X, Y potom:

1) $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \,\&\, Y=y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P_{X,Y}(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $P_Y(y) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P_{X,Y}(x,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Dk

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P\Big(\bigcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \,\&\, Y(\omega) = y\}\Big)$$

$$= \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \,\&\, Y=y)$$

$\blacksquare$

Funkce náh. vektoru

Nechť X, Y jsou n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a nechť $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom je

$Z = g(X,Y)$ n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a platí: $\quad Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} g(x,y) \underbrace{P(X=x, Y=y)}_{P_{X,Y}(x,y)}$$

Dk (jako Lotus)

Linearita $\mathbb{E}$ ⊛ důsledek věty o fci náh. vektoru

Pro n.v. X, Y a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Dk pomocí věty o fci náh. vektoru LR

$\underbrace{g(x,y) = ax + by}$, potom:

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} g(x,y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} ax \, P(X=x, Y=y) + \sum_{y \in Im(Y)} \sum_{x \in Im(X)} by \, P(X=x, Y=y)$$

$$= a \cdot \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in Im(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + b \cdot \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in Im(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)}$$

⊛ z věty o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= a \cdot \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)}}$$

$\blacksquare$

Součin nezávislých m.v.

Pro nezávislé diskrétní m.v. X, Y platí:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

(*) $\mathbb{E}(X \cdot X) \neq \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X$

skoro vždy je X závislá sama na sobě

(*) je to implikace, takže:

nezávislost $\rightarrow \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$

zato:

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \not\Rightarrow$ nezávislost

Dk

$g(x,y) = x \cdot y$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (x \cdot y) \cdot \underbrace{P(X=x, Y=y)}_{\text{z nezávislosti}} = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} x \cdot y \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)}}$$

$\blacksquare$

Součet nezávislých n.v. "konvoluce"

Pokud X, Y jsou n.n.v., má jejich součet $Z = X + Y$ pstní. funkci:

$$P(Z=z) = \sum_{x \in Im(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

Dk z def. nezávislosti n.v. LR

víme, že pro $Z = X + Y$ platí:

$$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = z\} = \bigsqcup_{x \in Im(X)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \; \& \; Y(\omega) = z - x\}$$

$$P(Z=z) = \sum_{x \in Im(X)} P(X=x, Y=z-x)$$

což platí obecně (tedy i pro závislé n.v.)

(*) pro X, Y nezávislé to ale jde přepsat jako:

$$\sum_{x \in Im(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

$\blacksquare$

Práce s hustotou

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak:

1) $P(X=x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$ pro $\forall a \le b \in \mathbb{R}$

Dk

(*) z (2) $\overset{\text{triviálně}}{\Longrightarrow}$ (1) pro $(a=b=x)$, protože integrál přes nulový interval $=0$

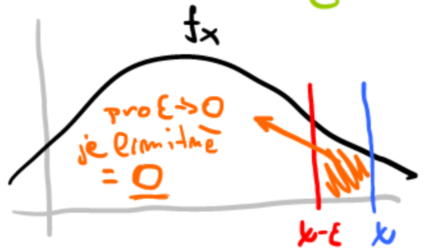
1) LR

podle věty o spojitosti pravděpodobnosti

$$P(X=x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(x-\varepsilon < X \le x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x) - P(X \le x-\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f_X(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{0}}$$

podle nějaké věty z analýzy:



2)

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) + \underbrace{P(X=a)}_{=0,\ \text{plyne z (1)}}$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{\int_a^b f_X(t)\,dt}}$$

∎

Spojitý LOTUS

Pokud je X s.n.v s hustotou f_X a g je reálná funkce, tak:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

Dk

vynecháváme kvůli složitosti, myšlenka:

$$\int_{t}^{t+\varepsilon} f_X = P(t \leq X \leq t+\varepsilon)$$ ... odpovídá psti, že jsme blízko t, poté by se násobilo $g(x)$...

Universalita uniformního rozdělení

Nechť F je rostoucí spojitá funkce s $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)=1$. Potom:

1) Nechť $U\sim U(0,1)$ a $X=F^{-1}(U)$. Pak F je distribuční funkcí X.

2) Nechť X je n.v. s distribuční fcí $F=F_X$. Pak $F(X)\sim U(0,1)$

Př.

$F=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$

$X \to F(X)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} X+\frac{1}{2}$

obecně:

$$\Omega \xrightarrow{X(\omega)} \mathbb{R} \xrightarrow{F(x)} \mathbb{R}$$

„jak se napálit":

$F(x)=P(X\le x)$ z def $\to$ mohli bychom si myslet, že $F(X)=P(X\le X)=1$ to ale NEJDE!

rozepsáno korektně:

$F(X(\omega))=P(X\le X(\omega))$ ta X nejsou stejná věc

Dk

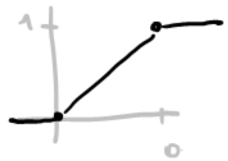
1)

$U \sim U(0,1)$, $X = F^{-1}(U)$ → F^{-1} je dobře def na $(0,1)$ z předpokladů pro F

z def.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

$$\Rightarrow \underline{F_X = F}$$



2)

X má d.fci F, $Y = F(X)$ chceme $Y \sim U(0,1)$

z def. protože F je rostoucí

$$P_Y(y) = P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le \underbrace{F_Y^{-1}(y)}_{y \in (0,1)}) = F_Y(F^{-1}(y)) = y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$ protože $Y = F(X)$ ... kvůli chování $F(X)$

⊛

① ⇒ pokud umíme generovat n.v. $X \in (0,1)$, dokážeme vyrobit n.v. s lib. distribucí

② ⇒ když máme nějakou n.v. a "myslíme si" že má distribuci XY, tak ji do dané distribuční fce dosadíme a otestujeme, že co vyjde má uniformní rozdělení ∎

STOU