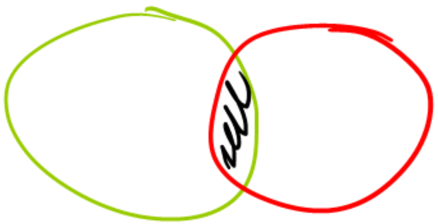
1. cvičení

1) N ... pokud chci jen Σ

N^2 ... pokud chci odlišit kody

---

2)



$$P(A) \cup P(B) =$$

$$\underbrace{P(A\setminus B) \cup P(A\cap B)}_{P(A)} \cup \underbrace{P(B\setminus A) \cup P(A\cap B)}_{P(B)}$$

$$= P(A\setminus B) + 2P(A\cap B) + P(B\setminus A)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = \uparrow - P(A\cap B)$$

---

3) binom ... kolik úspěchů z n pokusů

geom ... po kolika hodech 1. úspěch

4)

11			
1	4	6	6 x
1	5	5	3 x
2	3	6	6 x
2	4	5	6 x
3	3	5	3 x
3	4	4	3 x

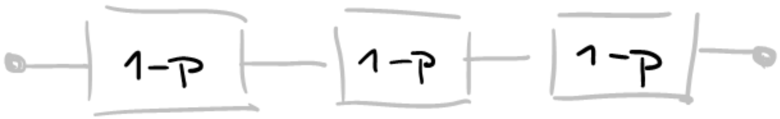
$$27 > 25$$

12			
1	5	6	6 x
2	4	6	6 x
2	5	5	3 x
3	3	6	3 x
3	4	5	6 x
4	4	4	1 x

---

5)

a)

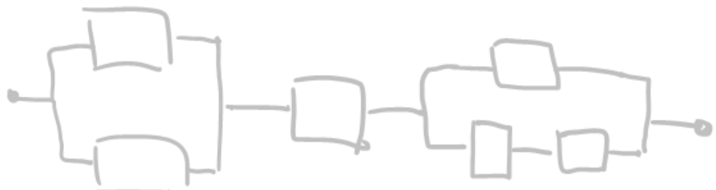


$$P(OK) = (1-p)^3$$

b)

$$P(OK) = 1-p^3$$

c)



$$(1-p^2) * (1-p) * (1 - p * (1 - (1-p)^2))$$

14) $P(K) = p, \quad P(D) = p$

a) $P(O) = P(K \cap D) = \frac{P(K|D)}{P(D)} = \frac{p \cdot p}{p} = \underline{\underline{p}}$

b) padla P alespoň na 1

$\begin{cases} \text{právě na } 1 \to p \\ \text{na víc} \to 1 \end{cases}$

---

15) $P(\text{získáme } k) = \underline{\underline{(1-p)^{k-1}\, p}}$

$P(\text{na všech padne orel}) = \underline{\underline{p^k}}$

---

16) Házíme 2x kostkou

1	2
4	6
5	5
6	4

$\Rightarrow \frac{3}{36}$

SD ... "součet je 10" $= \frac{1}{12}$

PS ... "první padla 6" $= \frac{1}{6}$ druhá mě nezajímá

NS ... "některá padla 6" $= \frac{11}{36}$ $P(1=6) \cup P(2=6) - P(1=2=6)$

možná u obou

$SD | PS = \frac{1}{6}$ musí být (2. = 4)

$= \frac{(SD \cap PS)}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

$$SD|NS = \frac{(SD \cap NS)}{\frac{11}{36}} \left\{ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}\cdot\frac{36}{11} = \underline{\underline{\frac{2}{11}}} \right.$$

$$PS|SD = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} = \frac{(PS \cap SD)}{SD} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6

$$PS|NS = \underline{\underline{\frac{6}{11}}}$$

4.6, 5.5, 6.4

$$NS|SD = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6

$$NS|PS = \underline{\underline{1}}$$

---

17)

a) $\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98} = 0{,}8836\ldots$

b)

3. špatně: $\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{4}{98}$ | 1. špatně: $\frac{4}{100}\cdot\frac{96}{99}\cdot\frac{95}{98}$ | 2. špatně: $\frac{96}{100}\cdot\frac{4}{99}\cdot\frac{95}{98}$

všechny správně (a)

c) vyšší (c), v (a) ubývá dobrých baterií

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3 = 0{,}8847\ldots$$

KOMBINAČNÍ ČÍSLA

a) výběry bez opakování!

$$\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98} = \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}$$

b)

$$\frac{\binom{96}{3}+\binom{95}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{100}{3}}$$

c) výběry s opakováním

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3$$

2. cvičení

1) jevy A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

A, B^c

$$P(A\cap B^c) \overset{!}{=} P(A)P(B^c)$$

$P(B^c) = 1 - P(B)$

$A\cap B^c = A\setminus(A\cap B)$

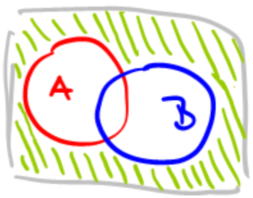
$$\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B))$$

$\Rightarrow$ A, B^c nezávislé

A^c, B^c

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(B^c) = 1 - P(B)$

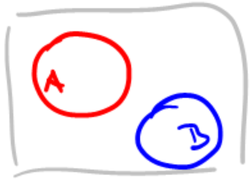
$A^c\cap B^c =$ 

použiju

$$P(A^c\cap B^c) = 1 - P(A)\,P(B^c) = \underbrace{(1-P(A))(1-P(B))}_{}$$

$\Rightarrow$ A^c, B^c nezávislé

2) jevy nezávislé a disjunktní



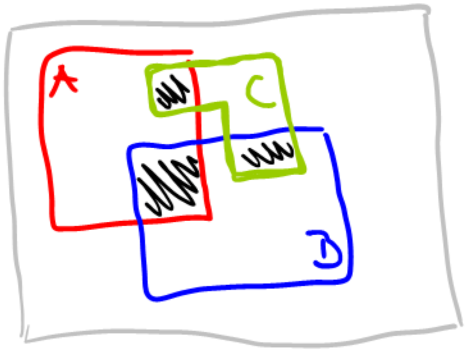
disjunktní $\iff (A \cap B) = \emptyset$

nezávislé $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(\emptyset) = 0$ $\implies$ mohou, pro $P(A)=0$ OR $P(B)=0$

---

3)



kde $P(A)=0$ OR $P(B)=0$ OR $P(C)=0$

---

4) spamů ze $\forall$ emailů... 80% $SC = 0{,}8$ $DC = 0{,}2$

filtr označí
- 90% spamů jako spam ... $SS = 0{,}9$
- 5% dobrých jako spam $DS = 0{,}05$

a) $0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 \doteq 0{,}73$ 73% označeno jako spam

b) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}73} \doteq 0{,}01$ 1% dobrých mailů chybně označeno jako spam

c) $\dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}1} \doteq 0{,}3$ $\underline{30\ \%}$ spamů neodhalíme filtrem

5) $0_S = 0{,}9$

$1_S = 0{,}8$

a) $\dfrac{0{,}9}{0{,}9 + 0{,}2} \doteq 0{,}818$ $\underline{82\%}$

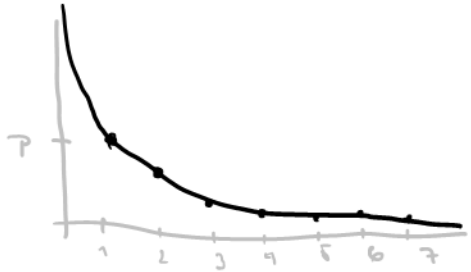
b) $\left(\dfrac{0{,}9}{0{,}9+0{,}2}\right)^3 * \left(\dfrac{0{,}8}{0{,}8+0{,}1}\right) = 0{,}486$ $\underline{49\%}$

c)

7)

$X \sim \mathrm{Geom}(1/2)$, $? \sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1}\,p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$



$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum\limits_{n=2,4,6,\ldots} P_X(n) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \\ 1 & = \sum\limits_{m=1,3,5,\ldots} P_X(m) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{cases}$$

$$\sum_{i=2,4,6,\ldots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\sum_{i=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

8)

$X \sim Bin(n,p)$, ? $\sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum_{k=2,4,\dots}^{n} P_X(k) \\ 1 & = \sum_{k=1,3,\dots}^{n} P_X(k) \end{cases}$$

$$P(Y=1) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = q$$

$$P(Y=0) = 1-q$$

⊛ protože jsme v binomickém, je to snazší, "slodíme" to na Bernoulliho rozdělení

$$\Rightarrow \underline{\underline{Y \sim Bern(q)}}$$

a)

$X \sim \mathrm{Geom}(p), \quad P(X>k) = ?$

$$\sum_{n=k+1,\,k+2,\,\dots} P(X=n) = \sum_{n=k+1,\,k+2,\,\dots} (1-p)^{n-1} p = \frac{(1-p)^k \cdot p}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^k \cdot p}{p} = \underline{\underline{(1-p)^k}}$$

nebo

X = čas 1. úspěchu

$X>k$ = první úspěch v čase $>k$

= prvních k pokusů neuspělo = $\underline{\underline{(1-p)^k}}$

(*) dobře se tak řeší konkrétní příklady
např. týpek s míčem házící na koš
má podotázku na tohle

---

10)

a) $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\mathbb{E}(X) = 10$

když je $X \geq 10$,
je $X \geq 5$ => musí
nastat vždy když $X \geq 10$

c) $$P(X \geq 10 \mid X \geq 5) = \frac{P(X \geq 10 \cap \cancel{X \geq 5})}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X>9)}{P(X>4)} = \frac{(1-p)^9}{(1-p)^4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$$

c II)

× × × × ? ? ? ? ? ? = $P(X>4)$

× × × × × × × × × ? = $P(X>9)$

řešíme P(otazníčky neuspěly) → stejnou část můžu „zapomenout"

$(1-p)^{9-4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$

11 – 12 – 13) byly v příkladech z teorie

---

17)

vím že je to zbytečně složité, zkoumal jsem komb. čísla

D = "vytáhli jsme dvouorlovou minci"

$$P(D) = 1 - \frac{\binom{99}{1}}{\binom{100}{1}} = 0{,}01$$

O6 = "padlo 6 orlů"

je dobře ?

$O6 \sim \mathrm{Binom}(6, p)$

$$P(D|O6) = \frac{P(O6|D)}{0{,}01 * 1 + 0{,}99 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{200}{101}} = \frac{101}{200} = \underline{0{,}505}$$

---

19)

kandidáti: A, B   při odchodu jsou náhodně tázáni koho volili

E ... množina voličů, kteří se zúčastní

$P(E|A) = 0{,}7$

$P(E|A^c) = 0{,}4$

výsledek exit-pollu je $0{,}6 * |E|$ hlasovalo pro A

kolik lidí celkem hlasovalo pro A ?

3. cvičení

1)

20 otázek $\qquad\qquad$ $P(\text{zná opověď}) = p$

správná odpověď $+1$ bod

špatná odpověď $-1/4$ bod

a) X_i ... bodový zisk v i-té otázce, $X_1, \dots, X_{20} \sim \mathrm{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = np = \underline{\underline{20p}}$$

b)

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i \mid \text{zná}) \cdot P(\text{zná}) + \mathbb{E}(X_i \mid \text{nezná}) \cdot P(\text{nezná})$$

$$= 1 \cdot p + \mathbb{E}(X_i \mid \text{nezná}) \cdot (1-p)$$

$$= p + \mathbb{E}(X_i \mid \text{tipne správně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1} + \mathbb{E}(X_i \mid \text{tipne špatně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1}$$

$$= p + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot (1-p) = p + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)(1-p) = p + \frac{1}{16}(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) = \underline{20\left(p + \frac{1}{16}(1-p)\right)}$$

c) aby byl bodový zisk při typování nulový → specielně $\mathbb{E}(X_i \mid \text{nezná}) = 0$

$$\frac{1}{4} - \boxed{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

---

2) je to geom. rozdělení, takže čím víc peněz, tím větší výhra & nižší šance

---

3) $Y = X^2$

a) $\mathbb{E}(Y) = 0$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \operatorname{Im}(Y)} \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(Y = y)}_{\geq 0} \Rightarrow P(Y=0) = 1$$ protože pro lib. jiné x by se přičetla kladná hodnota a $\mathbb{E}(Y)$ by nemohla být $= 0$

b) předp. $\operatorname{var}(X) = 0$ „očekávaná odchylka X od $\mathbb{E}(X)$"

$\mathbb{E}(X)$ $\exists$ a je konečná

$$\operatorname{var}(X) = 0 = \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}(X)}_{\text{musí být } = 0})^2 \Rightarrow X - \mathbb{E}(X) = 0$$

$$X = \mathbb{E}(X)$$

4)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \quad ?$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = P(X>1) + 2 \cdot P(X>2) + 3 \cdot P(X>4) + \dots + k \cdot P(X > k)$$

$$P(X>0) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots$$
$$P(X>1) = \qquad P(X=2) + P(X=3) + \dots$$
$$P(X>2) = \qquad\qquad P(X=3) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(X=n) = \mathbb{E}(X)$$

5)

a) $$\operatorname{var}(aX) = \mathbb{E}(aX)^2 - (\mathbb{E}(aX))^2 = a^2 \cdot \mathbb{E}(X^2) - a^2 (\mathbb{E}(X))^2 = a^2 \cdot (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2) = \underline{\underline{a^2 \cdot \operatorname{var}(X)}}$$

b) $$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(X+b - \mathbb{E}(X+b)\right)^2\right) = \operatorname{var}(X+b)$$

pro $b = 2$

$$E(X) = \frac{10}{5} = 2$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{1+4+9+16}{5} - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

$$\mathbb{E}(X+2) = \frac{20}{5} = 4$$

$$\operatorname{var}(X+2) = \frac{4+9+16+25+36}{5} - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

věta o vlastnostech stř. hodnoty

c)

$$\operatorname{var}(X+Y) = \mathbb{E}\left(\left(X+Y-\mathbb{E}(X+Y)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\underbrace{X-\mathbb{E}(X)}_{A}+\underbrace{Y-\mathbb{E}(Y)}_{D}\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(A^2+2AD+D^2\right) = \mathbb{E}(A^2)+\mathbb{E}(2AD)+\mathbb{E}(D^2)$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2-2X\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2\right)+2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)+\mathbb{E}\left(Y^2-2Y\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(Y)^2\right)$$

nevím jak to dokázat + 6)

7) X má uniformní rozdělení na $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$ pro $a < b \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{x=a}^{b} x}{b-a+1} = \frac{a+b}{2}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\sum_{x=a}^{b} x^2}{b-a+1} - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2}{3}$$

→ můžu to celé posunout tak, že $a=1$ a $b = b-a+1$ a rozptyl vyjde stejně

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2+2^2+\dots+b^2}{b} = \frac{\frac{1}{3}b\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{b} = \frac{\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{3} \sim \frac{b^2}{3}$$

---

8) X … součet $X_{1,\dots,n} \sim \mathrm{Bern}(p)$

a) $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}$

k úspěchů z $X_1, \dots, X_n$ → vyberu těch k a vynásobím p * zbytek, protože zbytek musí být neúspěch, jinak by jich nebylo k

b) npř. pro $P(X_2 | X_1) = 1$, nikdy nemůžu mít $X_1 = 1$ & $k=1$

9)

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_i) * \#\text{pokusů} = n \cdot p$$

$\mathbb{E}(X_i) = p$

$var(X_i) = p(1-p)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}$$

(*) řešeno v příkladech z teorie

$$var(X) = Var(X_i) * \#\text{pokusů} = np(1-p)$$

10)

$\boxed{Z = X+Y} \sim Bin(z, p)$ => věta o konvoluci

$$P(Z=k) = \sum_{x \in Im(X)} P_X(X=x) \cdot P_Y(Y=z-x) = \sum_{x \in Im(X)} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \cdot \Big({}^{n}$$