

# Pravděpodobnost & statistika 1

Věty

## Základní vlastnosti:

V pravděpodobnostním prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  platí pro  $A, B \in \mathcal{F}$ :

$$1) P(A) + P(A^c) = 1$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$3) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$4) P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{subaditivita, Booleova nerovnost}) \quad (*) \quad A_i \text{ nemusí být disjunktní}$$

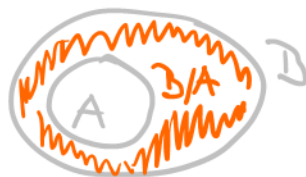
Dk

$$1) \Omega = A \cup A^c$$

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

$$2) B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{protože } A \subseteq B$$

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$$



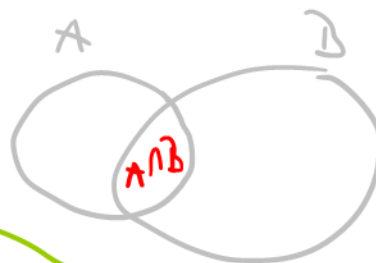
3)

$$P(A) = P(A \setminus B) \cup P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) \cup P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) \cup P(A \cap B) + P(B \setminus A) \cup P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$



4)

použijeme trik "zdisjunktnění"

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$

$$\dots$$

$$\rightarrow \boxed{B_i = A_i \setminus \bigcup_{j < i} A_j}$$

$$\rightarrow 1) B_i \subseteq A_i$$

$$2) B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$3) \bigcup B_i = \bigcup A_i$$

$$\rightarrow P(\bigcup A_i) = P(\bigcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \underline{\underline{\sum P(A_i)}}$$



## Zřetěžené podmínování

Pokud  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$  a  $P(A_1 \cap \dots \cap A_m) > 0$ , tak:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_m|A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})$$

Dk z definice P.P. (RL)

důsledek def. podm. Pstí :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_m|A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_m)}}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1})}} \\ &= \underline{\underline{P(A_1 \cap \dots \cap A_m)}} \end{aligned}$$



## Rozklad $\Omega$ pro $P$

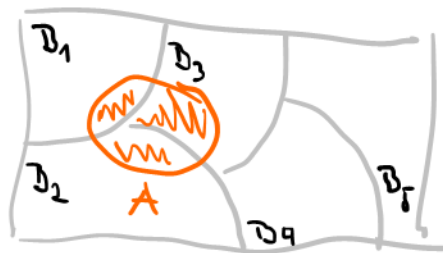
Pokud  $B_1, B_2, \dots$  je rozklad  $\Omega$  a  $A \in \mathcal{F}$ , tak:

$$P(A) = \sum (A | B_i) P(B_i)$$

Dk z definice P.p. (LR)

důsledek def. podm. p.sti. :

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$



$$\rightarrow A = \bigcup (A \cap B_i)$$

$$P(A) = \bigcup P(A \cap B_i) = \underline{\underline{\sum P(A|B_i) P(B_i)}}$$



## Bayesova věta

Pokud  $B_1, B_2, \dots$  je rozklad  $\Omega$ ,  $A \in \mathcal{F}$  a  $P(A), P(B_i) > 0$ , tak:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{=1}}$$

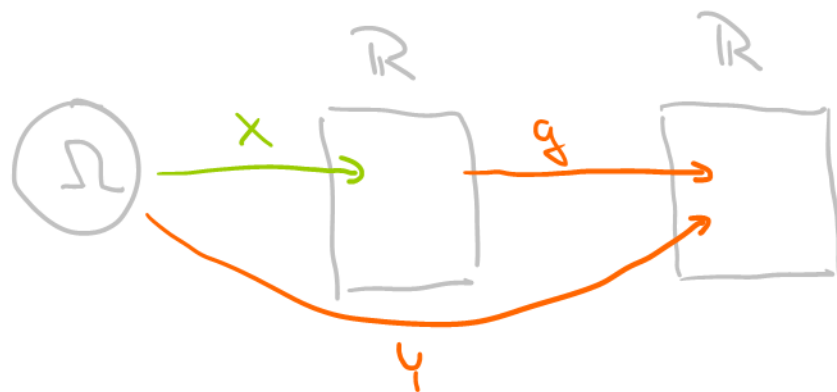
Dk pomocí věty o rozkladu  $\Omega$  (LR)

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} \stackrel{\text{tolle platí}}{=} \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{\text{věta o rozkladu } \Omega}}$$



# LOTUS

Pro reálnou fci  $g$  a diskretní m.v.  $X$  je  $g(X)$  také diskretní m.v.



$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Im } Y = g(\text{Im } X)$$

potřebujeme ověřit 2 podm. d.m.v.

1)  $|\text{Im } Y| \leq |\text{Im } X|$   
 protože  $\text{Im } X$  je spočetná,  
 je i  $\text{Im } Y$  spočetná

$$2) Y^{-1}(y) = X^{-1}(g^{-1}(y))$$

$$= \bigcup X^{-1}(k)$$

$$g(k)=y, k \in \text{Im}(X)$$

což je spočetné sjednocení

a  $X^{-1}(k) \in \mathcal{F}$ , což je množina uzavřená na spoč. sjednocení

Pokud  $X$  je d.m.v a  $g$  je reálná fce, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \text{Im}(X)} g(k) P(X=k)$$

Dk

Přeznáme:  $Y = g(X), I = \text{Im}(X)$

$$\Rightarrow \text{Im}(Y) = g(I)$$

$$\text{z def: } \mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \text{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \sum_{y \in g(I)} y \cdot P(Y=y)$$

suma má jen 1 prvek:

$$= \sum_{y \in g(I)} y \cdot \sum_{g(k)=y, k \in I} P(X=k) = \sum_{k \in I} \left[ \sum_{y=g(k)} y \cdot P(X=k) \right] = \sum_{k \in I} [g(k) \cdot P(X=k)]$$



## Vlastnosti $\mathbb{E}$

Nechť  $X, Y$  jsou diskrétní m.v. a  $a, b \in \mathbb{R}$

1) Pokud  $P(X \geq 0) = 1$  &  $\mathbb{E}(X) = 0$  tak  $P(X=0) = 1$  tedy, pokud je  $X$  vždy nezáporná a stř. je 0 musí být  $P(X=0)=1$

2) Pokud  $\mathbb{E}(X) \geq 0$  tak  $P(X \geq 0) > 0$

3)  $\mathbb{E}(a \cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

4)  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Dk

$$1) \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(X=x)}_{\geq 0} = 0$$

$$2) \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \cdot P(X=x) \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0 \quad \text{v sumě musí být nezp. sčítanci}$$

$$3) g(x) = (a \cdot x + b) \quad \text{pomocí lotusu}$$

$$\sum (ax + b) P(X=x) = a \sum x \cdot P(X=x) + \sum b \cdot P(X=x) = a \underbrace{\sum x \cdot P(X=x)}_{\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum P(X=x)}_1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum g(x) P(X=x) \quad \uparrow \quad = \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b}}$$

4) <sup>lineární  $\mathbb{E}$ , pro  $a, b = 1$</sup>   
 $g(X, Y) = (X + Y), \quad \mathbb{E}(X + Y) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} \sum_{y \in \text{lm}(Y)} (x + y) P(X=x, Y=y) = \sum \sum x P(X=x, Y=y) + \sum \sum y P(X=x, Y=y)$

<sup>věta o  $P_{X,Y} \rightarrow P_X, P_Y$</sup>   
 $= \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in \text{lm}(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + \sum_{y \in \text{lm}(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in \text{lm}(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)} = \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot P(X=x) + \sum_{y \in \text{lm}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$

## Rozklad $\Omega$ pro $\mathbb{E}$

Pokud  $B_1, B_2, \dots$  je rozklad  $\Omega$  a  $A \in \mathcal{F}$ , tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(X|B_i) P(B_i)$$

*kdysi má součet smysl*

\* sčítance s  $P(B_i) = 0$  považujeme za 0

Dk (RL)

<sup>def. podm. stří. lod.</sup> <sup>věta o rozkl.  $\Omega$  pro  $P = P(X=x)$</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(X|B_i) P(B_i) &= \sum_i \underbrace{\sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot P(X=x|B_i)}_{\text{def. podm. stří. lod.}} \cdot P(B_i) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_i P(X=x|B_i) \cdot P(B_i)}_{\text{věta o rozkl. } \Omega \text{ pro } P = P(X=x)} \\ &= \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot P(X=x) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X)}} \end{aligned}$$



## II. definice rozptylu

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Dk pomocí linearity  $\mathbb{E}$  (LR)

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2)$$

⊗ použijeme zobecněnou VOL  $\mathbb{E}$ :  $\mathbb{E}(aX + bY + cZ) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c\mathbb{E}(Z)$   
podle n.:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2 - \underbrace{2\mathbb{E}X}_{\text{konst}} \cdot X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\text{konst}}) &= \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}(X)}_{\text{konst}} + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \underline{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2} \end{aligned}$$



## Obeční vzorec $P_{X,Y} \rightarrow P_X, P_Y$

Mějme disj. m. v.  $X, Y$  potom:

$$1) P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \text{lm}(Y)} P(X=x \& Y=y) = \sum_{y \in \text{lm}(Y)} P_{X,Y}(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) P_Y(y) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} P_{X,Y}(x,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Dk

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P\left(\bigcup_{y \in \text{lm}(Y)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \& Y(\omega) = y\}\right)$$

$$= \sum_{y \in \text{lm}(Y)} P(X=x \& Y=y)$$

---

---



## Funkce máh. vektoru

Nechť  $X, Y$  jsou n.v. na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , a nechť  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Potom je

$Z = g(X, Y)$  n.v. na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , a platí:  $z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$

$$\hookrightarrow E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} \sum_{y \in \text{lm}(Y)} g(x, y) \underbrace{P(X=x, Y=y)}_{P_{X,Y}(x,y)}$$

Dk (jako Lotus)

## Linearita $\mathbb{E}$

⊛ důsledek věty o fci máh. vektoru

Pro m.v.  $X, Y$  a  $a, b \in \mathbb{R}$  platí:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Dk

pomocí věty o fci máh. vektoru LR

$g(x, y) = ax + by$ , potom:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = \mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} \sum_{y \in \text{lm}(Y)} g(x, y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in \text{lm}(X)} \sum_{y \in \text{lm}(Y)} ax P(X=x, Y=y) + \sum_{y \in \text{lm}(Y)} \sum_{x \in \text{lm}(X)} by P(X=x, Y=y)$$

$$= a \cdot \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in \text{lm}(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + b \cdot \sum_{y \in \text{lm}(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in \text{lm}(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)}$$

⊛  $\geq$  věty o  $P_{X,Y} \rightarrow P_X, P_Y$

$$= a \cdot \sum_{x \in \Omega_m(X)} x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_{y \in \Omega_m(Y)} y \cdot P(Y=y)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)}}$$



### Součin nezávislých m.v.

Pro **nezávislé** diskrétní m.v.  $X, Y$  platí:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Dk

$$g(x, y) = x \cdot y$$

$$E(XY) = \sum_{x \in \Omega_m(X)} \sum_{y \in \Omega_m(Y)} (x \cdot y) \cdot P(X=x, Y=y) \overset{\text{z nezávislosti}}{=} \sum_{x \in \Omega_m(X)} \sum_{y \in \Omega_m(Y)} x \cdot y \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_{x \in \Omega_m(X)} x \cdot P(X=x) \cdot \sum_{y \in \Omega_m(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\underline{E(X) \cdot E(Y)}}$$



$$(*) \quad E(X \cdot X) \neq E(X) \cdot E(X)$$

skoro vždy je  $X$  závislá sama na sobě

$(*)$  je to implikace, takže:  
nezávislost  $\rightarrow E(X) \cdot E(Y) = E(XY)$

zato:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \rightarrow \text{nezávislost}$$

## Součet nezávislých n.v. "konvoluce"

Pokud  $X, Y$  jsou n.m.v., má jejich součet  $Z = X + Y$  pstmi. funkci:

$$P(Z=z) = \sum_{x \in \Omega(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

Dk z def. nezávislosti n.v. (LR)

víme, že pro  $Z = X + Y$  platí:

$$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = z\} = \bigcup_{x \in \Omega(X)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \text{ \& \& } Y(\omega) = z - x\}$$

$$P(Z=z) = \sum_{x \in \Omega(X)} P(X=x, Y=z-x) \quad \text{což platí obecně (tedy i pro závislé n.v.)}$$

⊛ pro  $X, Y$  nezávislé to ale jde přepsat jako:

$$\sum_{x \in \Omega(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

---

---



## Práce s hustotou

Nechť spojitá n.v.  $X$  má hustotu  $f_X$ . Pak:

$$1) P(X=x) = 0 \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt \text{ pro } \forall a \leq b \in \mathbb{R}$$

Dk

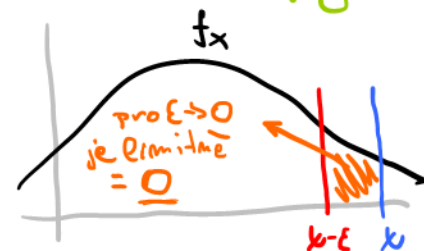
①  $\stackrel{\text{triviálně}}{=} ② \Rightarrow ①$  pro  $(a=b=x)$ , protože integrál přes nulový interval = 0

1) LR podle věty o spojitosti pravděpodobnosti

$$P(X=x) \stackrel{!}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(x-\varepsilon < X \leq x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq x) - P(X \leq x-\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^x f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f_X(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x-\varepsilon}^x f_X(x) dx \stackrel{!}{=} \underline{\underline{0}}$$

podle nějaké věty z mat. analýzy:



2)

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) + \underbrace{P(X=a)}_{=0, \text{ plyne z } ①}$$

$$= \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx = \underline{\underline{\int_a^b f_X(t) dt}}$$



## Spojité LOTUS

Pokud je  $X$  s.m.v. s hustotou  $f_X$  a  $g$  je reálná funkce, tak:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

Dk

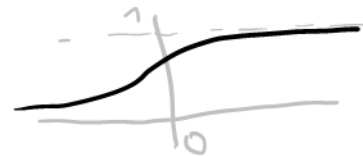
vymedčujeme kvůli složitosti, myšlenka:

$$\int_t^{t+\varepsilon} f_X = P(t \leq X < t+\varepsilon) \dots \text{odpovídá } P, \text{ že jsme blízko } t, \\ \text{poté by se násobilo } g(x) \dots$$



# Univerzalita uniformního rozdělení

Nechť  $F$  je rostoucí spojitá funkce s  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$ . Potom:



1) Nechť  $U \sim U(0,1)$  a  $X = F^{-1}(U)$ . Pak  $F$  je distribuční funkce  $X$ .

2) Nechť  $X$  je n.v. s distribuční fci  $F = F_X$ . Pak  $F(X) \sim U(0,1)$

pr

$$F = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$$

obecně:



"jak se mapá-li":

$F(x) = P(X \leq x)$  z def  $\rightarrow$  mohli bychom si myslet, že  $F(x) = P(X \leq x) = 1$  to ale NEJDE!

rozepsáno korektně:

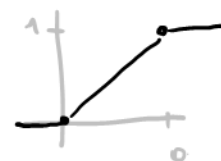
$$F(X(\omega)) = P(\underline{X} \leq \underline{X(\omega)}) \quad \text{to } X \text{ nejsou stejná věc}$$

Dk

1)

$U \sim U(0,1), X = F^{-1}(U) \rightarrow F^{-1}$  je dobře def na  $(0,1)$  z předpokladů pro  $F$   
z def.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$
$$\Rightarrow \underline{F_X = F}$$



2)

$X$  má d.f.  $F$ ,  $Y = F(X)$  chceme  $Y \sim U(0,1)$   
z def.

$$P_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) \stackrel{\text{protože } F \text{ je rostoucí}}{=} P(X \leq \underbrace{F^{-1}(y)}_{y \in (0,1)}) = F_Y(F^{-1}(y)) = y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$

protože  $Y = F(X) \dots$  kvůli hodnotám  $F(X)$

①  $\Rightarrow$  pokud umíme generovat n.v.  $X \in (0,1)$ , dokážeme vyrobit n.v. s lib. distribucí

②  $\Rightarrow$  když máme nějakou n.v. a "myslíme si že má distribuci  $XY$ , tak ji do dané distribuce  $F$  dosadíme a otestujeme, že co vyjde má uniformní rozdělení



