Věta o rozptylu součtu náh. veličin

Pro n.v. X, Y platí:

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$$

$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\operatorname{var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$

z věty: $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right)$

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\mathbb{E}(X^2 - 2X\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{KONST}} + \underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{\text{KONST}})$

$\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2$

$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y)^2$

dk

$$\operatorname{var}(X+Y) = \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - \mathbb{E}(X+Y)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2 + XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2$$

$$= \mathbb{E}\left(\left((X+Y) - (\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big((X+Y)^2 - 2(X+Y)\underbrace{(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)}_{\text{KONST}} + \underbrace{(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)^2}_{\text{KONST}}\Big)$$

špatná cesta ...

$$\mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2 - 2(X+Y)(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y) + \mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y)^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2 - 2X(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y) - 2Y(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y) + \mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y)^2\right)$$

$$\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - 2(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)(\mathbb{E}X) - 2(\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)(\mathbb{E}Y)$$

$$= \mathbb{E}(X+Y)^2 - 2(\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y)(\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y) + (\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y)^2$$

$$= \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \left(\mathbb{E}(X)^2 + 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}(Y)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

$$= \underline{\underline{\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)}}$$