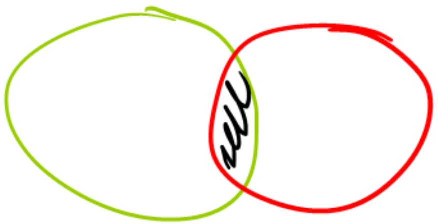
1. cvičení

1) $\mathbb{N}$ ... pokud chci jen Σ

$\mathbb{N}^2$ ... pokud chci odlišit kody

2)



$$P(A) \cup P(B) =$$

$$\underbrace{P(A/B) \cup P(A\cap B)}_{P(A)} \cup \underbrace{P(B/A) \cup P(A\cap B)}_{P(B)}$$

$$= P(A\setminus B) + 2P(A\cap B) + P(B\setminus A)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = \uparrow - P(A\cap B)$$

3) binom ... kolik úspěchů z n pokusů

geom ... po kolika hodech 1. úspěch

4)

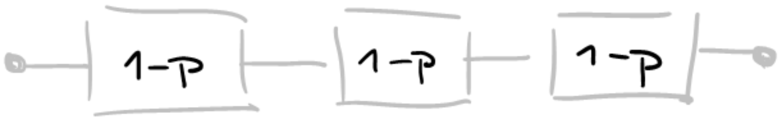
11			
1	4	6	6 ×
1	5	5	3 ×
2	3	6	6 ×
2	4	5	6 ×
3	3	5	3 ×
3	4	4	3 ×

$27 > 25$

12			
1	5	6	6 ×
2	4	6	6 ×
2	5	5	3 ×
3	3	6	3 ×
3	4	5	6 ×
4	4	4	1 ×

5)

a)

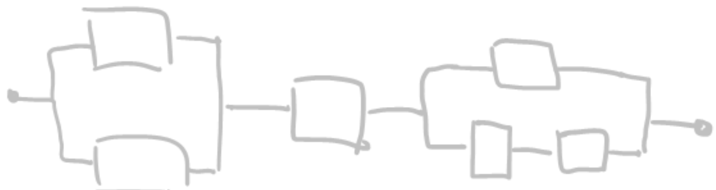


$$P(OK) = (1-p)^3$$

b)

$$P(OK) = 1-p^3$$

c)



$$(1-p^2) * (1-p) * (1- p * (1-(1-p)^2))$$

14) $P(K) = p$, $P(D) = p$

a) $P(O) = P(K \cap D) = \frac{P(K \cap D)}{P(D)} = \frac{p \cdot p}{p} = \underline{\underline{p}}$

b) padla P alespoň na 1

$\begin{cases} \text{právě na } 1 \to p \\ \text{na víc} \to 1 \end{cases}$

---

15) $P(\text{získáme } k) = \underline{\underline{(1-p)^{k-1} p}}$

$P(\text{na všech padne orel}) = \underline{\underline{p^k}}$

---

16) Házíme 2x kostkou

SD ... "součet je 10" $= \frac{1}{12}$

1	2
4	6
5	5
6	4

$\Rightarrow \frac{3}{36}$

PS ... "první padla 6" $= \frac{1}{6}$ druhá mě nezajímá

NS ... "někdy padla 6" $= \frac{11}{36}$ $P(1=6) \cup P(2=6) - P(1=2=6)$

možná v obou

$SD | PS = \frac{1}{6}$ musí být $2. = 4$

$= \frac{(SD \cap PS)}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

$$SD|NS = \frac{(SD \cap NS)}{\frac{11}{36}} \quad \left\{ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{11} = \underline{\underline{\frac{2}{11}}} \right.$$

$$PS|SD = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} = \frac{(PS \cap SD)}{SD} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6

$$PS|NS = \underline{\underline{\frac{6}{11}}}$$

4.6, 5.5, 6.4

$$NS|SD = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6

$$NS|PS = \underline{\underline{1}}$$

---

17)

a) $\frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} = 0{,}8836\ldots$

c) vyšší (c), u (a) ubývá dobrých baterií

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3 = 0{,}8847\ldots$$

b) 3. špatně | 1. špatně | 2. špatně

$$\frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{4}{98} \;\Big|\; \frac{4}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \;\Big|\; \frac{96}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98}$$

všechny správně (a)

KOMBINAČNÍ ČÍSLA

!

a) výběry bez opakování!

$$\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98} = \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}$$

b)

$$\frac{\binom{96}{3}+\binom{95}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{100}{3}}$$

c) výběry s opakováním

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3$$

2. cvičení

1) jevy A, B jsou nezávislé $\iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$

A, B^c

$$P(A\cap B^c) \overset{!}{=} P(A)P(B^c)$$

$$P(B^c) = 1-P(B)$$

$$A\cap B^c = A\setminus(A\cap B)$$

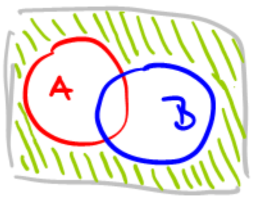
$$\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B))$$

$\Rightarrow$ A, B^c nezávislé

A^c, B^c

$$P(A^c) = 1-P(A)$$

$$P(B^c) = 1-P(B)$$

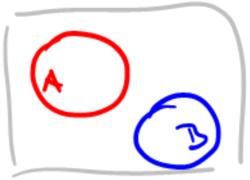
$A^c\cap B^c =$ 

použiju

$$P(A^c\cap B^c) = 1-P(A)\,P(B^c) = (1-P(A))(1-P(B))$$

$\Rightarrow$ A^c, B^c nezávislé

2) jevy nezávislé a disjunktní

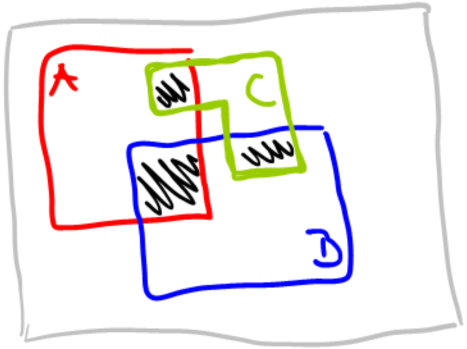


disjunktní $\Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset$

nezávislé $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(\emptyset) = 0$ $\Rightarrow$ mohou, pro $P(A)=0$ OR $P(B)=0$

3)



kde $P(A)=0$ OR $P(B)=0$ OR $P(C)=0$

4) spamů ze $\forall$ emailů... 80% $SC = 0{,}8$ $DC = 0{,}2$

filtr označí $\begin{cases} \text{90\% spamů jako spam} & \dots \quad SS = 0{,}9 \\ \text{5\% dobrých jako spam} & \quad DS = 0{,}05 \end{cases}$

a) $0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 \doteq 0{,}73$ 73% označeno jako spam

b) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}73} \doteq 0{,}01$ 1% dobrých mailů chybně označeno jako spam

c) $\frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}1} \doteq 0{,}3$ $\quad$ $\underline{30\ \%}$ spamů neodhalíme filtrem

---

5) $0_S = 0{,}9$

$1_S = 0{,}8$

a) $\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}2} \doteq 0{,}818$ $\quad$ $\underline{82\%}$

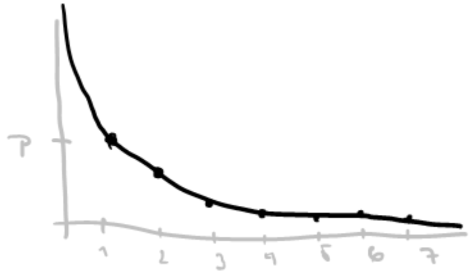
b) $\left(\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}2}\right)^3 * \left(\frac{0{,}8}{0{,}8+0{,}1}\right) = 0{,}486$ $\quad$ $\underline{49\%}$

c)

7)

$X \sim \mathrm{Geom}(1/2)$, ? $\sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$



$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum\limits_{n=2,4,6,\dots} P_X(n) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \\ 1 & = \sum\limits_{m=1,3,5,\dots} P_X(m) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{cases}$$

$$\sum_{i=2,4,6,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

8)

$X \sim Bin(n,p)$, $? \sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum_{k=2,4,\dots}^{n} P_X(k) \\ 1 & = \sum_{k=1,3,\dots}^{n} P_X(k) \end{cases}$$

$$P(Y=1) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = q$$

$$P(Y=0) = 1-q$$

(*) protože jsme v binomickém, je to snažší, „slodíme“ to na Bernoulliho rozdělení

$$\Rightarrow \quad Y \sim Bern(q)$$

a)

$$X \sim \mathrm{Geom}(p), \quad P(X > k) = ?$$

$$\sum_{n=k+1,\,k+2,\ldots} P(X=n) = \sum_{n=k+1,\,k+2,\ldots} (1-p)^{n-1}\,p = \frac{(1-p)^k \cdot p}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^k \cdot p}{p} = \underline{\underline{(1-p)^k}}$$

nebo

X = čas 1. úspěchu

$X > k$ = první úspěch v $\underline{\text{čase} > k}$

= prvních k pokusů neuspělo = $\underline{\underline{(1-p)^k}}$

⊛ dobře se tak řeší konkrétní příklady např. týpek s míčem házící na koš má podotázku na tohle

---

10)

a) $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\mathbb{E}(X) = 10$

když je $X \geq 10$, je $X \geq 5 \Rightarrow$ musí nastat vždy když $X \geq 10$

c) $$P(X \geq 10 \mid X \geq 5) = \frac{P(X \geq 10 \cap \cancel{X \geq 5})}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X > 9)}{P(X > 4)} = \frac{(1-p)^9}{(1-p)^4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$$

c II)

× × × × ? ? ? ? ? ? $= P(X > 4)$

× × × × × × × × × ? $= P(X > 9)$

řeším P(otazníčky neuspěly) $\Rightarrow$ stejnou část můžu „zapomenout“

$(1-p)^{9-4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$

11 – 12 – 13) bylo v příkladech z teorie

17)

vím že je to zbytečně složitě, zkoumal jsem komb. čísla

D = "vytáhli jsme dvouorlovou minci"

$$P(D) = 1 - \frac{\binom{99}{1}}{\binom{100}{1}} = 0{,}01$$

O6 = "padlo 6 orlů"

$O6 \sim Binom(6, p)$

je dobře ?

$$P(D|O6) = \frac{P(O6|D)}{0{,}01 * 1 + 0{,}99 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{200}{101}} = \frac{101}{200} = \underline{0{,}505}$$

19)

kandidáti: A, B   při odchodu jsou náhodně tázáni koho volili

E ... množina voličů, kteří se zúčastní

$P(E|A) = 0{,}7$

$P(E|A^c) = 0{,}4$

výsledek exit-pollu je $0{,}6 * |E|$ hlasovalo pro A

kolik lidí celkem hlasovalo pro A ?

3. cvičení

1)

20 otázek

správná odpověď + 1 bod

špatná odpověď − 1/4 bod

$P(\text{zná opověď}) = p$

a) X_i … bodový zisk v i-té otázce, $X_1, \dots, X_{20} \sim Bern(p)$

$$\mathbb{E}(X) = np = \underline{\underline{20p}}$$

b)

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i|\text{zná}) \cdot P(\text{zná}) + \mathbb{E}(X_i|\text{nezná}) \cdot P(\text{nezná})$$

$$= 1 \cdot p + \overbrace{\mathbb{E}(X_i|\text{nezná})} \cdot (1-p)$$

$$= p + \overbrace{\mathbb{E}(X_i|\text{tipne správně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1} + \mathbb{E}(X_i|\text{tipne špatně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1}}$$

$$= p + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot (1-p) = p + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)(1-p) = p + \frac{1}{16}(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) = \underline{20\left(p + \frac{1}{16}(1-p)\right)}$$

c) aby byl bodový zisk při typování nulový → speciálně $\mathbb{E}(X_1 | \text{nezná}) = 0$

$$\frac{1}{4} - \boxed{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

---

2) je to geom. rozdělení, takže čím víc peněz, tím větší výhra & nižší šance

---

3) $Y = X^2$

a) $\mathbb{E}(Y) = 0$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(Y=y)}_{\geq 0}$$ $\Rightarrow$ $P(Y=0)=1$ protože pro lib. jiné x by se přičetla kladná hodnota a $\mathbb{E}(Y)$ by nemohla být $=0$

b) předp. $\mathrm{var}(X) = 0$ "očekávaná odchylka X od $\mathbb{E}(X)$"

$\mathbb{E}(X)$ $\exists$ a je konečná

$$\mathrm{var}(X) = 0 = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}(X)}_{\text{musí být } = 0})^2 \Rightarrow X - \mathbb{E}(X) = 0$$

$$X = \mathbb{E}(X)$$

4)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{m=0}^{\infty} P(X>m) \quad ?$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(X>m) = P(X>1) + 2\cdot P(X>2) + 3\cdot P(X>4) + \dots + k\cdot P(X>k)$$

$$P(X>0) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots$$
$$P(X>1) = \qquad P(X=2) + P(X=3) + \dots$$
$$P(X>2) = \qquad\qquad P(X=3) + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m\cdot P(X=m) = \mathbb{E}(X)$$

5)

a) $$\mathrm{var}(aX) = \mathbb{E}(aX)^2 - (\mathbb{E}(aX))^2 = a^2\cdot\mathbb{E}(X^2) - a^2(\mathbb{E}(X))^2 = a^2\cdot(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2) = \underline{\underline{a^2\cdot \mathrm{var}(X)}}$$

b) $$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left((X+b - \mathbb{E}(X+b))^2\right) = \mathrm{var}(X+b)$$

pro $b = 2$

$$E(X) = \frac{10}{5} = 2 \qquad\qquad \mathbb{E}(X+2) = \frac{20}{5} = 4$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1+9+9+16}{5} - 2^2 = 6 - 4 = 2 \qquad \mathrm{var}(X+2) = \frac{4+9+16+25+36}{5} - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

c)

věta o vlastnostech stř. hodnoty

$$var(X+Y) = \mathbb{E}\left(\left(X+Y-\mathbb{E}(X+Y)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\underbrace{X-\mathbb{E}(X)}_{A}+\underbrace{Y-\mathbb{E}(Y)}_{B}\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(A^2+2AB+B^2\right) = \mathbb{E}(A^2)+\mathbb{E}(2AB)+\mathbb{E}(B^2)$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2-2X\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2\right)+2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)+\mathbb{E}\left(Y^2-2Y\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(Y)^2\right)$$

nevím jak to dokázat + 6)

$$var(X+Y) = var(X)+var(Y)$$

$$\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X)+a$$

6)

6. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$I_A = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P(A \cap B)$$

$$I_B = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

7) X má uniformní rozdělení na $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$ pro $a < b \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{x=a}^{b} x}{b-a+1} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\sum_{x=a}^{b} x^2}{b-a+1} - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2}{3}$$

→ můžu to celé posunout tak, že $a=1$ a $b = b-a+1$ a rozptyl vyjde stejně

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2+2^2+\dots+b^2}{b} = \frac{\frac{1}{3}b\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{b} = \frac{\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{3} \sim \frac{b^2}{3}$$

---

8) X … součet $X_{1,\dots,n} \sim \mathrm{Bern}(p)$

a) $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}$ k úspěchů z $X_1, \dots, X_n$ → vyberu těch k a vynásobím p * zbytek, protože zbytek musí být neúspěch, jinak by jich nebylo k

b) npř. pro $P(X_2 | X_1) = 1$, nikdy nemůžu mít $X_1 = 1$ & $k=1$

9)

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_i) * \#\text{pokusů} = n \cdot p$$

$\mathbb{E}(X_i) = p$

$var(X_i) = p(1-p)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p \cdot (1-p)^{n-k}$$

(*) řešeno v příkladech z teorie

$$var(X) = Var(X_i) * \#\text{pokusů} = np(1-p)$$

---

10)

$$\boxed{Z = X + Y} \sim Bin(j, p) \quad j = n + m$$

$\Rightarrow$ věta o konvoluci

ROZBOR MOŽNOSTÍ JAK $X + Y = j$

$$P(Z=k) = \sum_{x \in Im(X)}^{k} P_X(X=x) \cdot P_Y(Y=k-x) = \sum_{x \in Im(X)}^{k} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cdot \binom{m}{k-x} p^{k-x} (1-p)^{m-(k-x)}$$

$X \sim Bin(n, p)$

$Y \sim Bin(m, p)$

$(X+Y) \sim Bin(n+m, p)$

$n = 3 \rightarrow X + Y =$
- $0 \rightarrow (0,0)$
- $1 \rightarrow (1,0)(0,1)$
- $2 \rightarrow (2,0)(0,2)(1,1)$
- $3 \rightarrow (3,0)(0,3)(1,2)(2,1)$

$p = \frac{1}{3}$	$n = 3,\ j = 2$
$x = 0$	$1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \cdot \frac{4}{27} = \frac{32}{2187}$
$x = 1$	$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
$x = 2$	$2 \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}^3 = \frac{4}{27} \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{2187}$

$$k = 1: \underset{x=0}{\frac{32}{2187}} + \underset{x=1}{\frac{16}{81}} = \frac{464}{2187} \sim 21\%$$

$k = 0:$

$$\frac{496}{2187} \sim 22\%$$

4. cvičení

1) Balíček má 52 karet. Vytáhnu 2.

X ... # vytažených es

Y ... # vytažených králů

jsou 4 esa a 4 králi

$P_{X,Y}$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	P_X
$X=0$	$\frac{473}{663}$	$\frac{88}{663}$	$\frac{3}{663}$	$\frac{564}{663}$
$X=1$	$\frac{88}{663}$	$\frac{8}{663}$	0	$\frac{96}{663}$
$X=2$	$\frac{3}{663}$	0	0	$\frac{3}{663}$
P_Y	$\frac{564}{663}$	$\frac{96}{663}$	$\frac{3}{663}$	1

$$P_{X,Y}(X=0,Y=0) = \frac{\binom{44}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{473}{663}$$

$$(X=1,Y=0) = \frac{\binom{4}{1}\binom{44}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{88}{663}$$

$$(X=2,Y=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221}$$

$$(X=1,Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{8}{663}$$

15 14 95 60 12 | 2030

2) 3. hody mincí $X = \#$ orlů v hodech 1, 2

$Y = \#$ pan v hodech 2, 3

a)

$P_{X,Y}$	0	1	2	P_X
0	0	1/8	1/8	$\frac{1}{4}$
1	1/8	1/4	1/8	$\frac{2}{4}$
2	1/8	1/8	0	$\frac{1}{4}$
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$P_{X,Y}(X=0, Y=0) = 0$

$(X=1, Y=0) = POO = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

$(X=2, Y=0) = OOO = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

$(X=1, Y=1) = POP \mid OPO = \frac{1}{2}^3 + \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{4}$

$(X=2, Y=1) = OOP = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$

b) nejsou $P(X=1 \,\&\, Y=1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{64}$

c) $P(0,0)$ $P(1,0)$ $P(0,1)$ $P(1,1)$ $P(2,0)$ $P(0,2)$ $P(2,1)$ $P(1,2)$ $P(2,2)$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

d)

$P_{X\mid Y}$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

$P(X=0 \mid Y=0) = \emptyset$

$(X=1 \mid Y=0) = \begin{matrix} POO \\ OOO \end{matrix} = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=0) = \begin{matrix} OOO \\ POO \end{matrix} = \frac{1}{2}$

$(X=1 \mid Y=1) = \begin{matrix} OOP \\ OPP \\ POP \\ PPP \end{matrix} = \frac{1}{4}$

$(X=0 \mid Y=2) = \begin{matrix} OPP \\ PPP \end{matrix} = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=1) = \begin{matrix} OOP \\ OPP \\ POP \\ PPP \end{matrix} = \frac{1}{4}$

$(X=1 \mid Y=2) = \begin{matrix} OPP \\ PPP \end{matrix} = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=2) = \emptyset$

3) $\quad X_1, X_2, X_3 \in \{1,2,3,4\}$

3. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly $1, \ldots, 4$).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?

(c) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli, o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X_1)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \le k)$, $P(Z \le k)$?

a) $P \ldots Y = \max(X_1, X_2)$

P_{X_1,X_2}	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2		1/16	1/16	1/16
3			1/16	1/16
4				1/16

$= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

ŠPATNĚ

b) $P \ldots Z = \max(X_1, X_2, X_3)$
$= \max(Y, X_3)$

P_{Y,X_3}	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}$	·	·	·
2		·	·	·
3			·	·
4				·

$= \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

c) $P(Y \le k) = P(X_1 \le k, X_2 \le k)$

$P(Z \le k) = P(X_1 \le k, Y_2 \le k, Y_3 \le k)$

správně

4)