## Rozklad $\Omega$ pro $\mathbb{E}$

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$ … čekání na úspěch (posloupnost $\mathrm{Bern}(p)$, první úspěch = konec)
(*) nezávislých

$B_1 =$ "poprvé uspějeme"

$B_2 = B_1^c$

(*) věta o rozkladu $\Omega$ pro $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{P(X|B_1)}_{P(X|B_1)=1} \cdot \underbrace{P(B_1)}_{P(B_1)=p} + \underbrace{P(X|B_2)}_{P(X|B_2)=(1+\mathbb{E}(X))} \cdot \underbrace{P(B_2)}_{P(B_2)=1-p}$$

$$= p + (1+\mathbb{E}(X))(1-p) = p + (1-p) + \mathbb{E}(X)(1-p) = 1 + \mathbb{E}(X)(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)(1-p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(1-(1-p)) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

## $\mathbb{E}(X) \sim Bin(n,p)$

$X \sim Bin(n,p)$

wodo s komb. čísly

proč?!

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P_X(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\text{pro } k=0 \text{ je člen} = 0} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\boxed{(n-1)-(k-1)}}$$

$$= np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}}_{\text{binomická věta říká } = 1} = \underline{\underline{np}}$$

---

## $\mathbb{E}(X) \sim Geom(p)$

alternativní postup, jinak dle věty o rozkladu $\Omega$ pro $\mathbb{E}$

$X$ n. v. $Im(X) \subseteq \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ (*) ze cvika 2 víme, že $P(X>k) - (1-p)^k$

pro $X \sim Geom(p)$:

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

ilustrace

dá se říci, že # úspěchů je $\cong Np$

$\Rightarrow$ průměrné čekání na úspěch bude $\frac{N}{Np} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$

$$\underbrace{x\ x\ x\ O\ x\ x\ O\ x\ OO\ x\ OOO\ x\ x\ \ldots}_{\text{hodně velké } N}$$

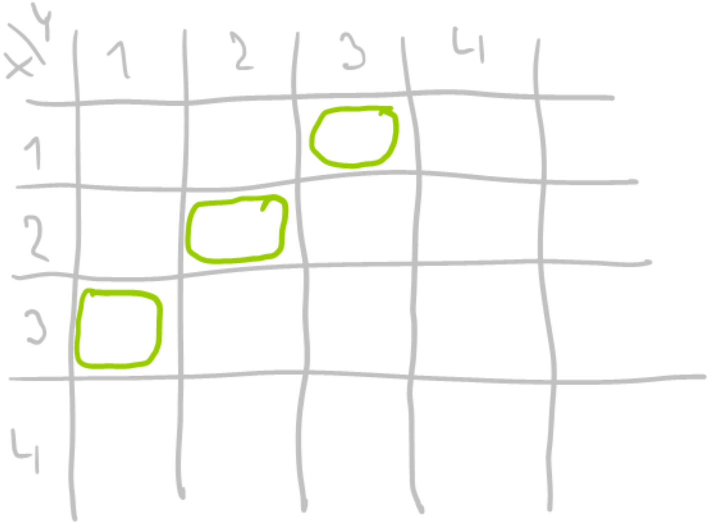
opakujeme $Bern(p)$ výsledky $\begin{cases} O & \text{úspěch} \\ x & \text{neúspěch} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \, P_X(k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{pro } k=0 \text{ je člen } = 0} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda}}_{\substack{\text{MATH WODO} \\ =1}} = \underline{\underline{\lambda}}$$

## Součet nezávislých n.v.

Máme-li dáno $P_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení součtu $Z = X+Y$ ?




$$P(Z=4) = P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)$$

$$\|$$

$$\{\omega\in\Omega : Z(\omega)=4\} =$$

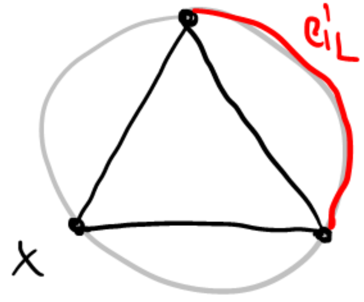
$$\{\omega\in\Omega : X(\omega)=1 \;\&\; Y(\omega)=3\}$$

$$\cup \quad - - - - -$$

$$\cup \quad \{\omega\in\Omega : X(\omega)=3, Y(\omega)=1\}$$

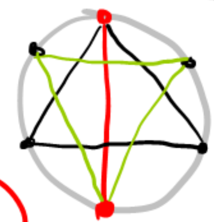
## Náhodná tětiva kruhu

jev D : tětiva je delší než |AB| z ΔABC rovnostrann.




1) náh. výběr X, Y náh. vyberu X, potom vyberu Y a platí:

$$P(D) = P(Y\in \text{cíl}) = \frac{1}{3}$$




2) vybereme směr tětivy a potom náh. polohu
pro t ≡ průsečík tětivy s Δ platí $P(D)=P(t\in A\cup B) = \frac{1}{2}$ !

# Podmíněné rozdělení

$X, Y$ d.n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A \in \mathcal{F}$

1) $P_{X|A}(x) : P(X = x | A)$

příklad: X je výsl. hodu kostkou, A = padlo sudé číslo

| $P_{X\|A}$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 | 1/3 | 0 |

2) $P_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y)$

příklad: X, Z jsou výsledky nezávislých hodů kostkou, $Y = X + Z$

$$\underbrace{P_{X|Y}(6|10)}_{\text{P první 6 když je součet 10}} = \frac{P(X=6, Y=10)}{P(Y=10)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

$$10 \to \begin{matrix} 5+5 \\ 4+6 \\ 6+4 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{3}!$$

OBECNĚ:

3) $P_{X|Y}(x|y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x',y)}$$

když je Y daný sčítáme přes hodnoty X proto x'

4) sdružené vs. podmíněné rozdělení

$Y = X + Z$ ... součet hodů

| $P_{X,Y}$ | ... | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | . | . | . |
| 3 | | . | . | . |
| 4 | | 1/36 | . | . |
| 5 | | 1/36 | 1/36 | . |
| 6 | | 1/36 | 1/36 | 1/36 |

| $P_{X\|Y}$ | ... | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | | . | . | . | |
| 3 | | . | . | . | |
| 4 | | 1/3 | . | . | $\Sigma \neq 1$ |
| 5 | | 1/3 | 1/2 | . | $\Sigma \neq 1$ |
| 6 | | 1/3 | 1/2 | 1 | $\Sigma \neq 1$ |
| | | $\Sigma = 1$ | $\Sigma = 1$ | $\Sigma = 1$ | |

$$\sum_{y'} P_{X|Y}(x|y) \neq 1$$ ... marozdíl od sdruženého se nemusí rovnat 1

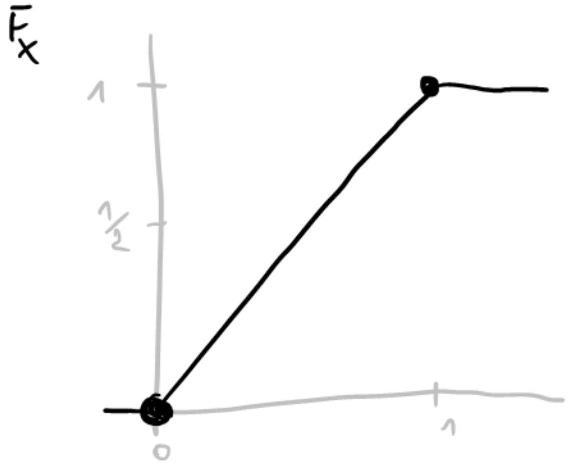
fixní hodnota X

$$\sum_{x'} P_{X|Y}(x,y) = \sum_{x'} P(X=x', Y=y) = 1$$ ... musí se nasčítat na 1

fixní hodnota Y

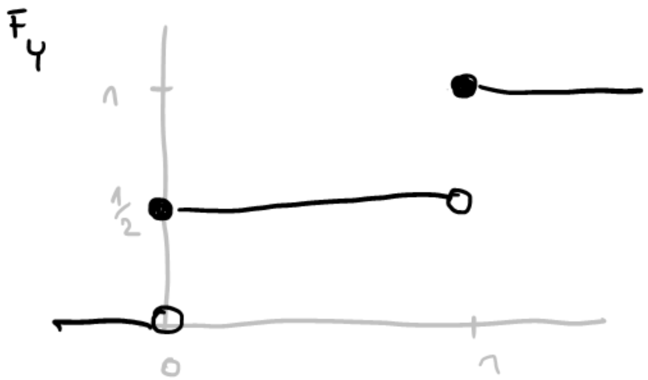
---

## Distribuční funkce




-> uniformě rozdělená

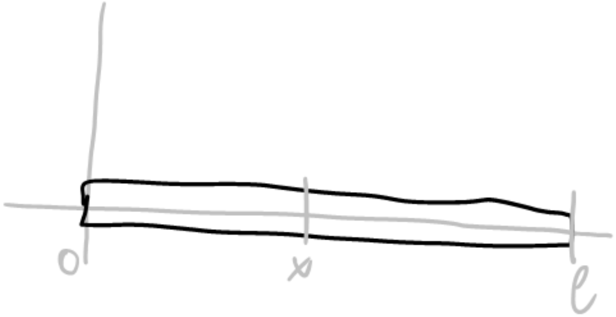
-> $F_X(t) = t$, $t \in [0,1]$




-> $Im(Y) = \{0,1\}$

$Y$ = d.n.v.

# Hustotní fce – trubka




máme $\rho(x)$ … hustotu trubky v bodě $x$

potom:

$$\text{hmotnost trubky} = \int_0^l \rho(t)\,dt = m$$

$$\text{hmotnost úseku} = \int_0^x \rho(t)\,dt = m_x$$

$$\text{těžiště trubky} = \frac{\int_0^l \overbrace{t\cdot\rho(t)\,dt}^{\text{střední hodnota}}}{m}$$