

## Rozklad $\Omega$ pro $\mathbb{E}$

$X \sim \text{Geom}(p)$  ... čekání na úspěch (posoupnost  $\text{Bern}(p)$ , první úspěch = konec)  
⊗ nezávislých

$B_1$  = "poprvé uspějeme"

$$B_2 = B_1^c$$

⊗ věta o rozkladu  $\Omega$  pro  $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{P(X|B_1)}_{P(X|B_1)=1} \cdot \underbrace{P(B_1)}_{P(B_1)=p} + \underbrace{P(X|B_2)}_{P(X|B_2)=1+\mathbb{E}(X)} \cdot \underbrace{P(B_2)}_{P(B_2)=1-p}$$

$$= p + (1+\mathbb{E}(X))(1-p) = p + (1-p) + \mathbb{E}(X)(1-p) = 1 + \mathbb{E}(X)(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)(1-p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(1 - (1-p)) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X) \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P_X(k) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

woda s komb. číslý

proč?!

$$= n p \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \underline{\underline{np}}$$

pro  $k=0$  je člen = 0

binomická věta vika = 1

$\mathbb{E}(X) \sim \text{Geom}(p)$  alternativní postup, jinak dle věty o rozkladu  $\Sigma$  pro  $\mathbb{E}$

$X$  n.v.  $\text{Dom}(X) \subseteq \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$  \* ze cvika 2 víme, že  $P(X > k) = (1-p)^k$

pro  $X \sim \text{Geom}(p)$ :

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

ilustrace

dá se říci, že #úspěchů je  $\cong np$

$\Rightarrow$  průměrné čekání na úspěch bude  $\frac{N}{np} = \frac{1}{p}$

x x x o x x o x o o x o o x x ...

lodně velké  $N$

opakuje Bern(p) výsledky { o úspěch  
x neúspěch

$\mathbb{E}(X) \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_X(k) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{pro } k=0 \text{ je člen } = 0}}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}}_{\substack{\text{MATH WORDS} \\ = 1}} = \lambda$$

---

## Součet nezávislých n.v.

Máme-li dáno  $P_{X,Y}$ , jak zjistit rozdělení součtu  $Z = X + Y$ ?

X \ Y	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

$$P(Z=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1)$$

||

$$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = 4\} =$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1 \text{ \& } Y(\omega) = 3\}$$

$$\cup \quad \text{-----}$$

$$\cup \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3, Y(\omega) = 1\}$$

## Náhodná tětiva kruhu

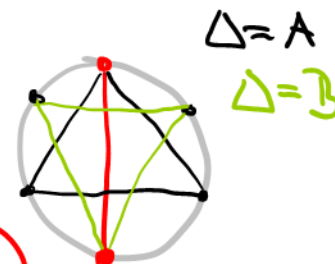
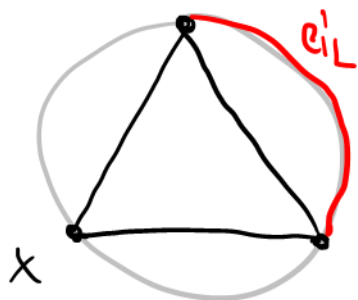
jeu  $D$ : tětiva je delší než  $|AB|$  z  $\triangle ABC$  rovnostrann.

1) náh. výběr  $X, Y$  náh. vyberu  $X$ , potom vyberu  $Y$  a platí:

$$P(D) = P(Y \in c:L) = \frac{1}{3}$$

2) vybereme směr tětivy a potom náh. polohu

pro  $t \equiv$  průsečík tětivy s  $\Delta$  platí  $P(D) = P(t \in A \cup B) = \frac{1}{2}$  !



## Podmíněné rozdělení

$X, Y$  d.m.v. na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $A \in \mathcal{F}$

1)  $P_{X|A}(x) = P(X=x|A)$

příklad:  $X$  je výsl. hodů kostkou,  $A =$  padlo sudé číslo

$P_{X|A}$ :

1	2	3	4	5	6	...
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

2)  $P_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y)$

příklad:  $X, Z$  jsou výsledky nezávislých hodů kostkou,  $Y = X + Z$

$$P_{X|Y}(6|10) = \frac{P(X=6, Y=10)}{P(Y=10)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

$P$  první 6 když je součet 10

$$10 \rightarrow \begin{matrix} 5+5 \\ 4+6 \\ 6+4 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{3}!$$

OBECNĚ:

3)  $P_{X|Y}(x|y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x',y)}$$

kdýž je  $Y$  daný  
sčítáme přes  
hodnoty  $X$   
proto  $x'$

4) sdružené vs. podmíněné rozdělení  
 $Y = X + Z$  ... součet  
hodů

$P_{X,Y}$	...	10	11	12
1		0	0	0
2		.	.	.
3		.	.	.
4		$1/36$	.	.
5		$1/36$	$1/36$	.
6		$1/36$	$1/36$	$1/36$

$P_{X Y}$	...	10	11	12
1		0	0	0
2		.	.	.
3		.	.	.
4		$1/3$	.	.
5		$1/3$	$1/2$	.
6		$1/3$	$1/2$	1

$\Sigma \neq 1$

$\Sigma \neq 1$

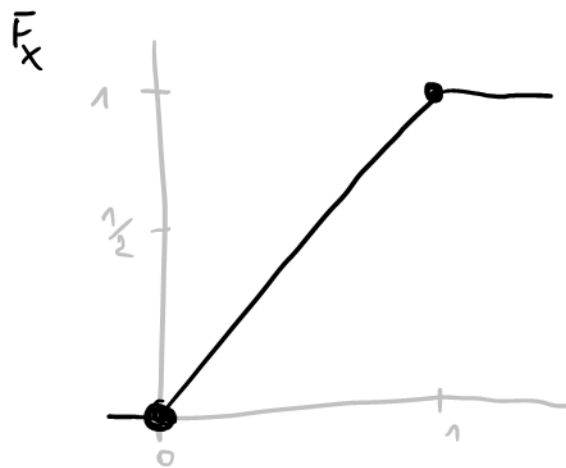
$\Sigma \neq 1$

$\Sigma=1$   $\Sigma=1$   $\Sigma=1$

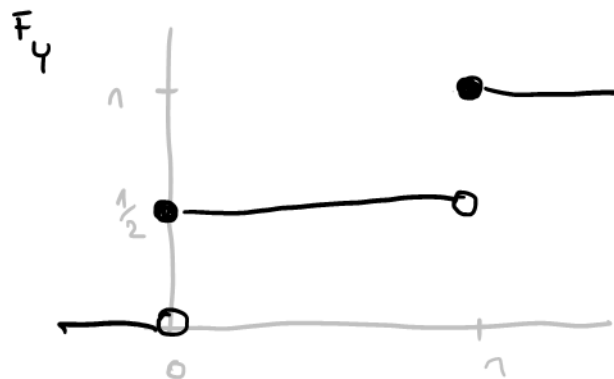
$\sum_{y'} P_{X|Y}(x|y) \neq 1$  ... rozložení od sdruženého se nemusí rovnat 1  
 fixní hodnota  $X$

$\sum_{x'} P_{X|Y}(x|y) = \sum_{x'} P(X=x', Y=y) = 1$  ... musí se nasčítat na 1  
 fixní hodnota  $Y$

## Distribuční funkce

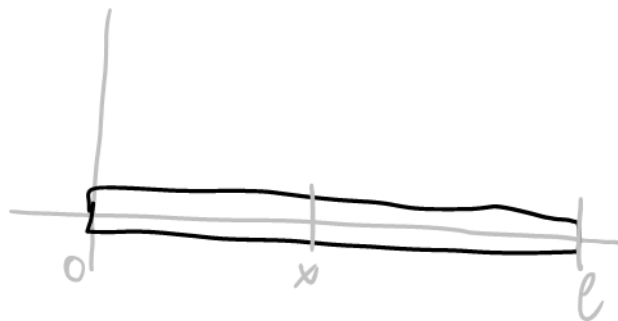


→ uniformně rozdělena!  
 →  $F_X(t) = t, t \in [0, 1]$



→  $\text{Im}(Y) = \{0, 1\}$   
 $Y = \text{d.m.v.}$

## Hustota fce - trubka



máme  $\rho(x)$  ... hustotu trubky v bodě  $x$

potom:

$$\text{hmotnosť trubky} = \int_0^l \rho(t) dt = m$$

$$\text{hmotnosť úseku} = \int_0^x \rho(t) dt = m_x$$

$$\text{ťažisko trubky} = \frac{\int_0^l \overbrace{t \cdot \rho(t) dt}^{\text{střední hodnota}}}{m}$$

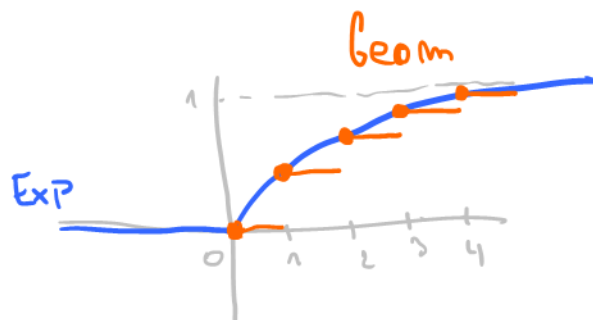


## Souvislost Exp a Geom

$$Y \sim \text{Geom}(p) \quad P(Y > k) = (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$F_Y(k) = \begin{cases} P(Y \leq k) = 1 - (1-p)^k & \text{pro } y \geq 0 \\ 0 & \text{pro } y < 0 \end{cases}$$

$$1 - (1-p)^k = 1 - e^{-\lambda k}, \quad \text{pro } e^{-\lambda} = (1-p)$$



TODO: ještě jedno vyjádření pomocí  $Y_8 = 8.4$   
 $\sim 55 \text{ min}$

## Normální rozdělení

$$X = \mu + \sigma \cdot Z$$

kde

1)  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$

2)  $\sigma > 0$

3)  $Z \sim N(0, 1)$

$$X = \mu + \sigma \cdot Z$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

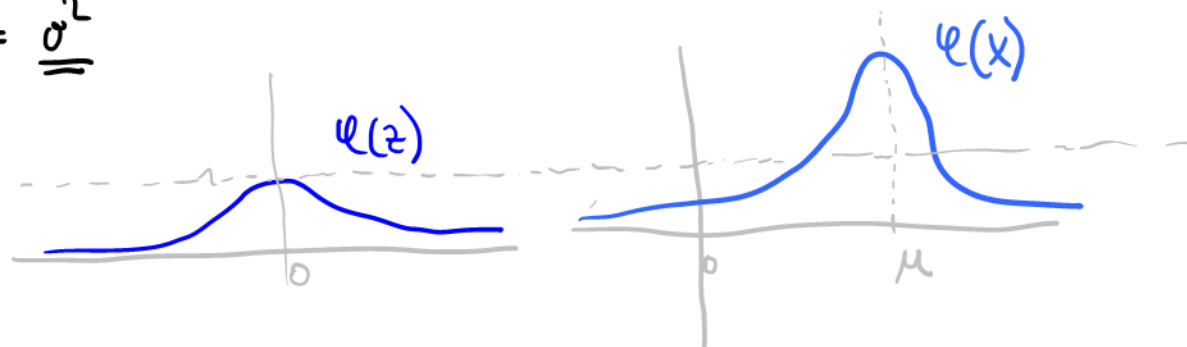
potom píšeme:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ... obecné normální rozdělení

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mu + \sigma \cdot Z) = \mu + \sigma \underbrace{\mathbb{E}(Z)}_{=0} = \underline{\underline{\mu}}$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(\mu + \sigma \cdot Z) = \sigma^2 \cdot \underbrace{\text{var}(Z)}_{=1} = \underline{\underline{\sigma^2}}$$



CLU

$X_1, \dots, X_n$  n. n. v.  $X_i \sim \text{Norm}$

\* pokud máme normálně rozdělené n. n. v.,

$$X_1 + \dots + X_k = \text{Norm}$$

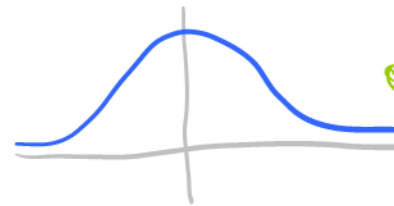
jejich součet, je také norm. rozdělen (přibližně)

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{s } P = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{s } P = \frac{1}{2} \end{cases}$$

mám-li: možím u vytvářet z  $n$   $k$  prvků s  $P = \frac{1}{2}$ , tak:

1) vel. výběru bude zhruba norm. rozd., s  $IE = \frac{k}{2}$

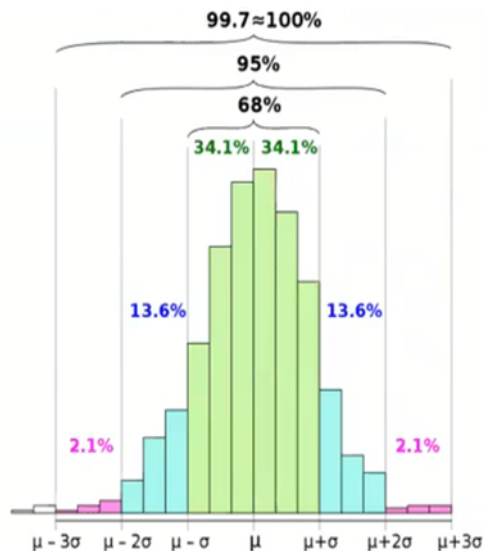
2) odpovídá to kombinačnímu číslu,  $\binom{n}{k}$



je rozděleno asi takhle

## Pravidlo 3σ

mám-li:  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$  tak:

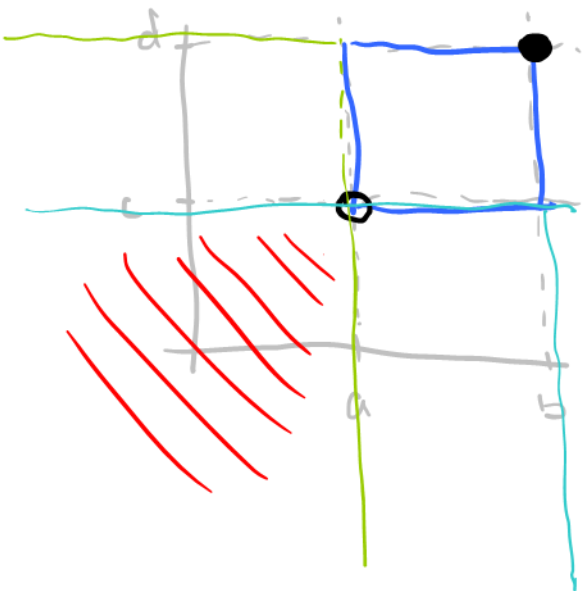


68% výběrů  $\in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)$  ...  $P(|Z - \mu| \leq 1 \cdot \sigma)$

95% výběrů  $\in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  ...  $P(|Z - \mu| \leq 2 \cdot \sigma)$

99.7% výběrů  $\in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  ...  $P(|Z - \mu| \leq 3 \cdot \sigma)$

## Průděpodobnost obdélníku



$$P(X \in (a, b] \text{ \& } Y \in (c, d]) =$$

$$F_{X,Y}(b, d) - \underbrace{F(a, d)} - \underbrace{F(b, c)} + \underbrace{F(a, c)}$$

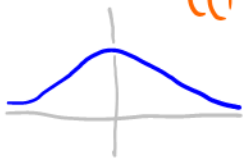
---

---

# Vícerozměrné norm. rozdělení

$\varphi(t)$  ... hustotní fce  $N(0,1)$

$\varphi(t)$  se vhodnou norm. konst. vypadá:



1-rozměrné:  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

$n$ -rozměrné:  $f(t_1, \dots, t_n) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot \dots \cdot \varphi(t_n) = \prod_{i=1}^n \varphi(t_i) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n}_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}{2}}$

budiž:  $r^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$   
potom:

$$f(t_1, \dots, t_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} \quad \dots \text{to je fce, která se mění podle toho, kde}$$

jsme v prostoru, je SFÉRICKY SIMETRICKÁ!  
dobrá pro generování bodů na sféře

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$$
$$= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1 \Rightarrow f \text{ je hustota náhodného vektoru } (z_1, \dots, z_n)$$

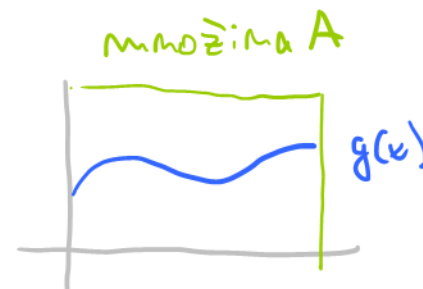
což je  $n$ -rozměrné normální rozdělení (Gaussovo)  
tj. platí, že  $z_1 \sim N(0,1), \dots, z_n \sim N(0,1)$

$z_1, \dots, z_n$  jsou n.m.v., proto:

$Z$  vygeneruji jako matici  $N \sim (0,1)$

## Monte Carlo integrace

- Jak spočítat  $\int_{x \in A} g(x) dx$  ?
- předpokládejme:  $0 \leq g(x) \leq 1$
- budeme náhodně generovat body  
→  $(x, y) \dots$   
 $x \sim U(0, 1)$   
 $y \sim U(0, 1)$



$$\text{pro } \begin{cases} y \leq g(x) & \text{započtu } 1 \\ y > g(x) & \text{započtu } 0 \end{cases}$$

toto buďme m.v.  $I$

$$\bullet \mathbb{E}(I) = P((x, y) \text{ je pod křivkou}) = \int_{x \in A} g(x) dx$$

my ale použijeme zákon velkých čísel:

$$\text{mějme: } S_n = \frac{I_1 + \dots + I_n}{n}, \quad \text{potom } \underline{\underline{S_n \rightarrow \int_{x \in A} g(x) dx}}$$

# 1. příklad na odhady

$$X_1, \dots, X_m \sim \text{Bern}(\theta)$$

chceme odhadnout  $\theta$

odhad<sub>1</sub>:  $\theta = \frac{1}{2}$

odhad<sub>2</sub>:  $\theta = \frac{X_1 + \dots + X_m}{m} = \overline{X_m}$

odhad<sub>3</sub>:  $\theta = X_1 = \overline{X_1}$

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_m) = \begin{cases} 1) \frac{1}{2} & \text{bias} = \frac{1}{2} - \mu \\ 2) \mu & \text{bias} = 0 \text{ mezujeť, konzistentní (podle zvc)} \\ 3) \mu & \text{bias} = 0 \text{ mezujeť, } \hat{\theta}_m = X_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

takže pokud  $0 < \mu < 1$ , tak  $\varepsilon < \min\{\mu, 1-\mu\}$

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_m - \theta| > \varepsilon) = 1$$

## Metoda momente

1)  $X_1, \dots, X_n$  n.v. z  $\text{Bern}(p)$

$$m_1(\theta) = \mathbb{E}(X_1) = p$$

$$\widehat{m}_1(\theta) = \frac{1}{n} (X_1, \dots, X_n) = \overline{X}_n$$

už jsme si ukázali, že  $\overline{X}_n$  je nestranný konzistentní odhad  $\mu$ , což je  $\mathbb{E}(X)$ ...

statistika:  $\widehat{p} = \overline{X}_n$

2)  $X_1, \dots, X_n$  n. výběr na  $U(0, a)$

$$m_1(\theta) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{a}{2}$$

$$\widehat{m}_1(\theta) = \overline{X}_n$$

$$m_1(\theta) = \widehat{m}_1(\theta)$$

$$\frac{a}{2} = \overline{X}_n$$

$$a = 2 \cdot \overline{X}_n$$

statistika:  $\widehat{a} = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)$



## Testování hypotéz

$X_1, \dots, X_n$  náh. výběr  $\sim N(\theta, \sigma^2)$ , známe  $\sigma^2$  ...  $X_i$  = (výška i-tého člověka) - 171 cm

$$H_0: \theta = 0$$

$$H_1: \theta \neq 0$$

$$S(X_1, \dots, X_n) = \frac{\overline{X_n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

přetvářený průměr

užijme toto, protože tak  $S \sim N(0, 1)$

$$W = \{s \in \mathbb{R}, |s| > z_{\frac{\alpha}{2}}\}$$



$$\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

zamítáme  $H_0 \Leftrightarrow |s| > 1,96$

což vytlučeme  $\Phi^{-1}$

$$\Phi^{-1}(0,025) = 1,96$$

