

definice

Prostor jevů

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je prostor jevů (též σ -algebra), pokud:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F} = A^c$ neboli A -complement

3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Axiomy pravděpodobnosti:

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ se nazývá pravděpodobnost, pokud:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních jevů

Pravděpodobnostní prostor

je trojice (Ω, \mathcal{F}, P) taková, že:

1) $\Omega \neq \emptyset$ je libovolná množina

2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je prostor jevů

3) P je pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost

Pokud $A, B \in \mathcal{F}$ a $P(B) > 0$, definujeme podmíněnou pravděpodobnost A při B jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Platí, že pro $Q(A) := P(A|B)$ je (Ω, \mathcal{F}, Q) pravděpodobnostní prostor.

"podmíněnou psstní fci"

Rozklad Ω

"rozbor všech možností"

Spčetný systém množin $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ je rozklad Ω , pokud:

$$1) B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } \forall i \neq j$$

$$2) \bigcup B_i = \Omega$$

Nezávislost jevů

Jevy $A, B \in \mathcal{F}$ jsou nezávislé, pokud:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Pak, pokud je $P(B) > 0$, platí:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Nezávislost více jevů

Jevy $\{A_i: i \in I\}$ jsou vzájemně nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$ platí:

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

* odkaz na def. nez. jevů
"průnik \neq se spočítá násobením \neq

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J , nazýváme jevy $\{A_i\}$ **po dvou** nezávislé.

Náhodná veličina

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) . Funkci $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme diskrétní náhodná veličina, pokud $\text{Im}(X) = \text{obor hodnot } X$ je spočetná množina a pokud pro $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

aby ta veličina
byla diskrétní

Ω je vlastně $\{X^{-1}(x)\}$, $P(X^{-1}(x))$ ale používáme zapsanou jako $P(X=x)$

Pravděpodobnostní funkce

7. fce. diskretní náhodné veličiny X je funkce $P_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ taková, že:

$$P_X(x) = P(X=x) = \text{v podstatě hustotní fce pro d.m.v.}$$

$$1) \sum_{x \in \text{lm}(X)} P_X(x) = 1$$

$$\rightarrow A \subseteq \mathbb{R}, f: A \rightarrow [0,1], \sum_{a \in \text{lm}(f)} f(a) = 1$$

2) pstní prostor dokážeme vyrobit z lib. podmnožiny \mathbb{R} a vhodné fce

Střední hodnota

"popisuje očekávanou hodnotu m.v."

Pokud je X diskretní náhodná veličina, tak je její střední hodnota označována $E(X)$ a definována:

$$E(X) := \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot P(X=x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

pokud má součet smysl.

⊛ $\text{lm}(X)$ musí být spočetná, jinak hrozí (" $+\infty - \infty$ ")

Podmíněná střední hodnota

Pokud je X diskrétní náhodná veličina a $P(B) > 0$, tak podmíněná střední hodnota X za předpokladu B je:

$$E(X|B) = \sum_{x \in \text{lm}(X)} x \cdot P(X=x|B)$$

pokud má součet smysl

Rozptyl

"popisuje odchylku hodnoty n.v. od její střední hodnoty"

Variance n.v. X nazveme číslo:

"aka střední kvadratická odchylka"

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$$

⊛ musí platit: $\text{var}(X) \geq 0$

⊛ $\text{var}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}(X)) = 0$

Bermoulliho (alt.) rozdělení "X = počet orle při jednom hodu nespravedlivou mincí"

$$X \sim \text{Berm}(p)$$

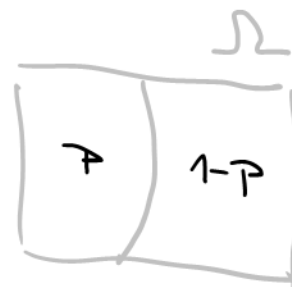
$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\text{var}(X) = p(1-p)$$

$$P_X(1) = p$$

$$P_X(0) = 1-p$$

$$P_X(k) = 0 \quad \forall k \neq 0, 1$$



pro libovolný jev $A \in \mathcal{F}$ definujeme indikátorovou n.v. I_A :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \omega \in A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\underline{I_A \sim \text{Berm}(P(A))}$$

Binomiální rozdělení "X = počet orlů při n hodech nespřavedlivou mincí" ⁿ

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ n = počet hodů, p = pravd. že padne orel
 $\rightarrow p \in [0, 1]$

$$P_X(k) = \underbrace{\binom{n}{k} p^k}_{\text{# způsobů jak uspět}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{P(\text{že } (n-k) \text{ -krát neuspěju)}} \text{ pro } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

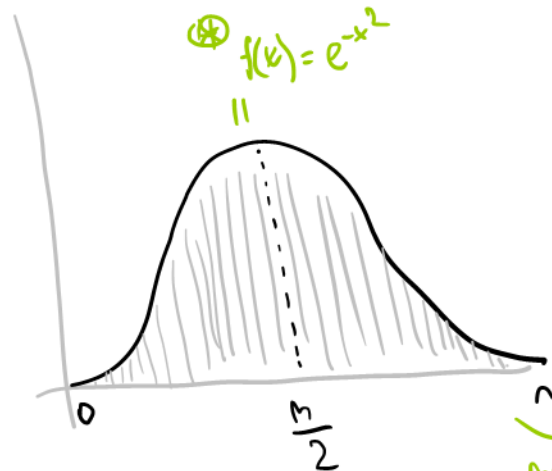
* pravd. že:
z n hodů k orlů

způsobů jak
uspět
*
 $P(\text{že } k \text{ -krát uspěju})$

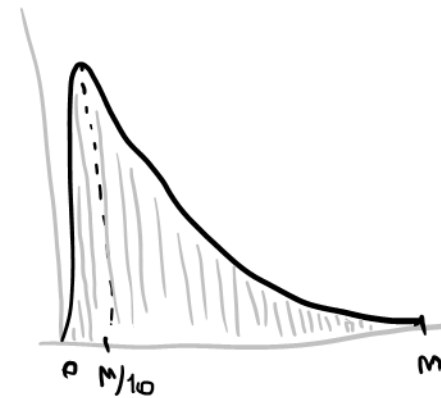
$$E(X) = np$$

$$\text{var}(X) = np(1-p)$$

$p = \frac{1}{2}$:



$p = \frac{1}{10}$:



nejdou spojitě, ale líp se to nakreslí...

Poissonovo rozdělení

" X = počet emailů, které dostaneme za časový úsek"

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

$$P_X(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\text{var}(X) = \lambda$$

⊛ $\text{Pois}(\lambda)$ je limitou:

$$\text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

máme-li $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ pak:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{konst}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\substack{\text{konv} \\ \rightarrow e^{-\lambda}}} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\text{konv.} \rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\text{konv} \rightarrow 1}$$

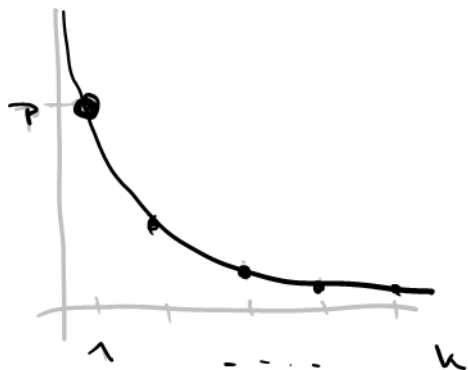
Geometrické rozdělení "X = orel poprvé padl k-tým hodem"

$$X \sim \text{Geom}(p) \quad p \in [0, 1]$$

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad * \text{ pro } p = \frac{1}{2} \text{ je } \underline{P_X(k) = p^k}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{1}{p} \left(\frac{1-p}{p} \right)$$



Sdružené rozdělení

Pro diskrétní m.v. X, Y na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) definujeme jejich sdruženou pravděpodobnostní funkci $P_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$ předpisem:

$$P_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \text{ a } Y(\omega) = y\}) = P(X=x, Y=y)$$

⊛ definice funguje i pro více než dvě náhodné veličiny: $P_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	Σ_x
1					
2					
3					
4					
Σ_y					

⊛ sdružené rozdělení $P_{X,Y}$

⊛ marginální rozdělení P_X

⊛ marginální rozdělení P_Y

\Rightarrow

1) z $P_{X,Y}$ lze získat P_X a P_Y

2) z P_X, P_Y nelze získat $P_{X,Y}$

Nezávislost náh. veličin

Diskrétní m.v. X, Y jsou **nezávislé**, pokud pro $\forall x, y \in P$ jsou jevy $\{X=x\}$ a $\{Y=y\}$ nezávislé, což platí právě když:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

⊛ v případě nezávislých X, Y lze def. sdružené rozd. $P_{X,Y} \leftarrow P_X, P_Y$ právě jako jejich součin

Směrodatná odchylka

Pro m.v. X definujeme její **směrodatnou odchylku** jako:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Obecná náhodná veličina

Náhodná veličina na (Ω, \mathcal{F}, P) je zobrazení $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, které pro $\forall x \in \mathbb{R}$ splní:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

⊛ diskrétní m.v. je obecná m.v.

Distribuční funkce "kumulativní" protože se kumuluje (nasčítá) na 1

Dist. fce. náhodné veličiny X je funkce:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

- F_X je neklesající fce

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

- F_X je zprava spojitá

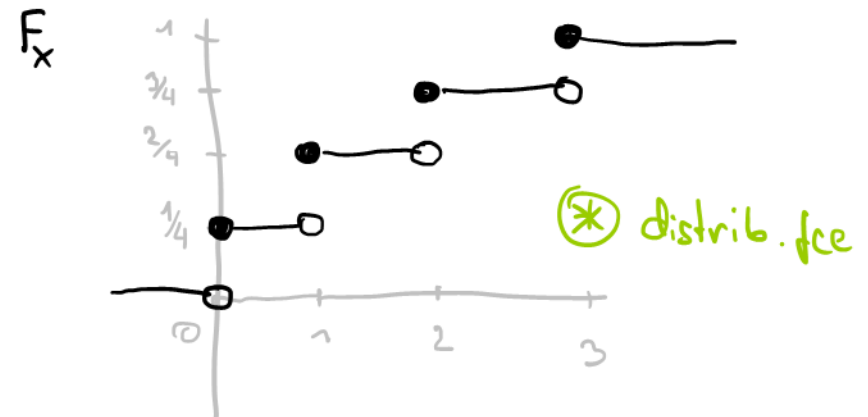
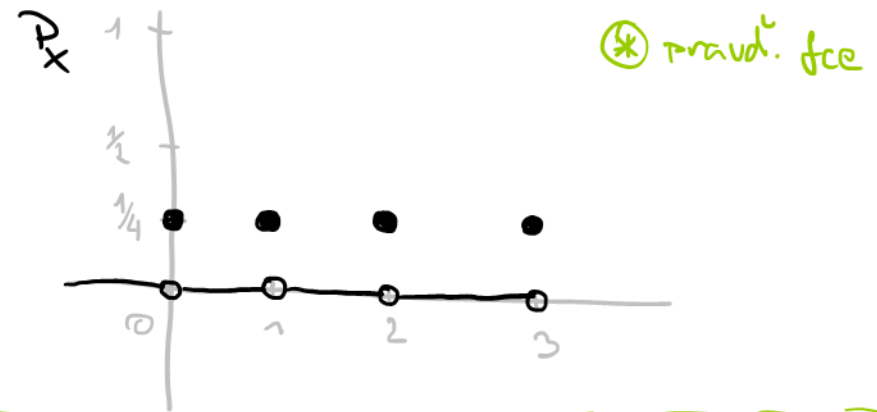
protože jdeme zprava a dojdeme až do bodu, když zleva, v bodě skočí $P(X \leq x + \varepsilon) \rightarrow P(X \leq x)$ pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$x \rightarrow +\infty$ do Ω přibývají \forall body $\rightarrow P(\Omega) = 1$

$x \rightarrow -\infty$ z Ω mizí body $\rightarrow P(\emptyset) = 0$

příklad:

$X \sim \text{uniformní}(\{0, 1, 2, 3\})$



Spojita náhodná veličina

n.v. X se nazývá **spojitá**, pokud existuje nezáporná reálná funkce f_x tak, že:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$$

funkce f_x se nazývá **HUSTOTA**

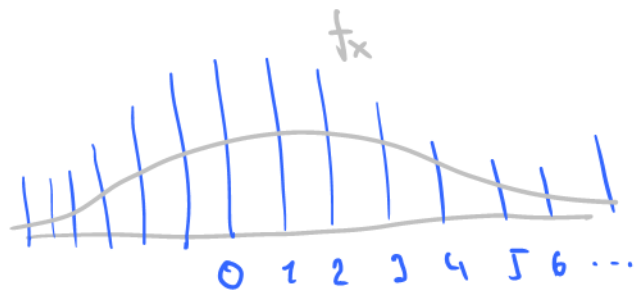
⊗ P_x pravděpodobnostní fce
 F_x distribuční fce
 f_x hustotní fce

Střední hodnota spojitě n.v.

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_x . Pak její **střední hodnota** je označována $E(X)$ a definována:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) \cdot dx$$

má-li integrál smysl ⊗ tedy není " +∞ - ∞ "



$$E(X) = \sum_n \int_n^{n+1} x \cdot f_x(x) \rightarrow \text{platí rovnost protože integrujeme přes celou } \mathbb{R}, \text{ ale to zůstává}$$

$$\stackrel{=}{=} \sum_n n \cdot \int_n^{n+1} f_x(x) = \sum_n n \cdot P(n \leq X \leq n+1) \rightarrow \text{n.v. zaokrouhlená dolů na celé číslo}$$

\Rightarrow pro každý $n \in \mathbb{Z} \rightarrow 0, 0, 0, \dots, 1 \rightarrow$ se blížíme k $\sum x \cdot P(X=x)$

Rozptyl spojité m.v.

Víme:

"1. moment" ... $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$

"2. moment" ... $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx$... spojitý LOTUS pro $g(x) = x^2$

Proto označíme-li: $\mu = \mathbb{E}(X)$, tak:

$$\text{var}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx}_{\mathbb{E}(X - \mu)^2} = \underbrace{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}_{\substack{\text{viz výše} \\ \text{viz výše}}}$$

$$\mathbb{E}(aX) = a \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

⊛ rozptyl počítáme "jako u diskretních m.v.", nejpohodnější bývá

"k-tý moment" ... $\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x) dx$

přednáška 5 ~ 33 min