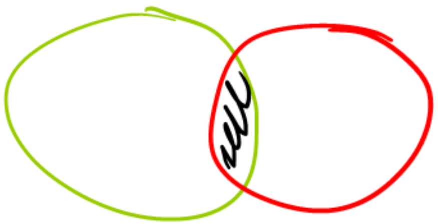
1. cvičení

1) $\mathbb{N}$ ... pokud chci jen Σ

$\mathbb{N}^2$ ... pokud chci odlišit kody

2)



$P(A) \cup P(B) =$

$\underbrace{P(A/B) \cup P(A \cap B)}_{P(A)} \cup \underbrace{P(B/A) \cup P(A \cap B)}_{P(B)}$

$= P(A \setminus B) + 2P(A \cap B) + P(B \setminus A)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \uparrow - P(A \cap B)$

3) binom ... kolik úspěchů z n pokusu

geom ... po kolika hodech 1. úspěch

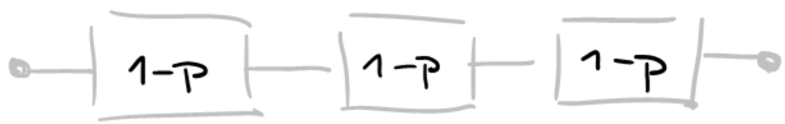
4)

11				12			
1	4	6	6 ×	1	5	6	6 ×
1	5	5	3 ×	2	4	6	6 ×
2	3	6	6 ×	2	5	5	3 ×
2	4	5	6 ×	3	3	6	3 ×
3	3	5	3 ×	3	4	5	6 ×
3	4	4	3 ×	4	4	4	1 ×

$$27 > 25$$

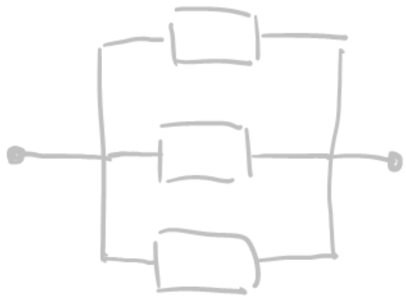
5)

a)



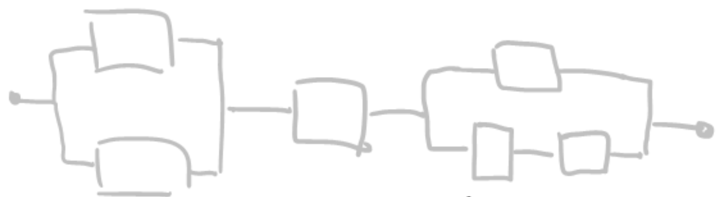
$$\underline{\underline{P(OK) = (1-p)^3}}$$

b)



$$\underline{\underline{P(OK) = 1-p^3}}$$

c)



$$(1-p^2) * (1-p) * (1- p*(1-(1-p)^2))$$

$\boxed{1}$

14) $P(K) = p \,, \quad P(D) = p$

a) $P(0) = P(K \cap D) = \dfrac{P(K \mid D)}{P(D)} = \dfrac{p \cdot p}{p} = \underline{\underline{p}}$

b) padla P alespoň na 1

$\begin{cases} \text{právě na } 1 \rightarrow p \\ \text{na víc} \rightarrow 1 \end{cases}$

---

15) $P(\text{získáme } k) = \underline{\underline{(1-p)^{k-1}\, p}}$

$P(\text{na všech padne orel}) = \underline{\underline{p^k}}$

---

16) Házíme 2x kostkou

SD ... "součet je 10" $= \dfrac{1}{12}$

1	2
4	6
5	5
6	4

$\Rightarrow \dfrac{3}{36}$

PS ... "první padla 6" $= \dfrac{1}{6}$ druhá mě nezajímá

NS ... "některý padla 6" $= \dfrac{11}{36}$ $P(1=6) \cup P(2=6) - P(1=2=6)$

možná v obou

$SD \mid PS = \dfrac{1}{6}$ musí být 2. = 4

$= \dfrac{(SD \cap PS)}{\frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{6}$

1

$$SD|NS = \frac{(SD \cap NS)}{\frac{11}{36}} \left\{ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{2}{11} \right.$$

$$PS|SD = \frac{1}{3} = \frac{(PS \cap SD)}{SD} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6

$$PS|NS = \frac{6}{11}$$

4.6, 5.5, 6.4

$$NS|SD = \frac{2}{3}$$

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6

$$NS|PS = 1$$

---

17)

a) $\frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} = 0{,}8836\ldots$

b) 3. špatně | 1. špatně | 2. špatně

$\frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{4}{98} \,\Big|\, \frac{4}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \,\Big|\, \frac{96}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98}$

všechny správně a

c) vyšší c, v a ubývá dobrých baterií

$\left(\frac{96}{100}\right)^3 = 0{,}8847\ldots$

$\boxed{1}$

KOMBINAČNÍ ČÍSLA

a) výběry bez opakování!

$$\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98} = \frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}}$$

b)

$$\frac{\binom{96}{3}+\binom{95}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{100}{3}}$$

c) výběry s opakováním

$$\left(\frac{96}{100}\right)^3$$

---

2. cvičení

1) jevy A, B jsou nezávislé $\iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$

A, B^c

$$P(A\cap B^c) \overset{!}{=} P(A)P(B^c)$$

$$P(B^c) = 1-P(B)$$

$$A\cap B^c = A\setminus(A\cap B)$$

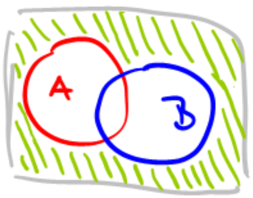
$$\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = \underbrace{P(A)\,(1-P(B))}$$

$\Rightarrow$ A, B^c nezávislé

A^c, B^c

$$P(A^c) = 1-P(A)$$

$\boxed{2}$ $P(B^c) = 1-P(B)$

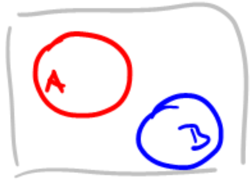
$A^c\cap B^c =$ 

použiju

$$P(A^c\cap B^c) = 1-P(A)\,P(B^c) = \underbrace{(1-P(A))(1-P(B))}_{A^c,\,B^c \text{ nezávislé}}$$

$\Rightarrow$

2) jevy nezávislé a disjunktní



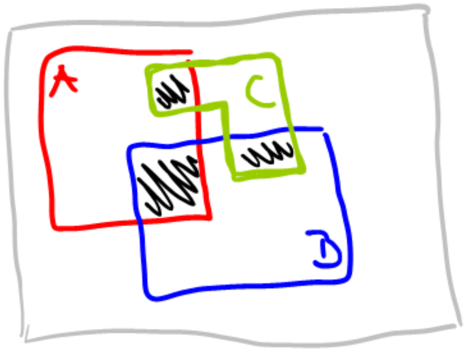
disjunktní $\Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset$

nezávislé $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(\emptyset) = 0$ $\Rightarrow$ mohou, pro $P(A)=0$ OR $P(B)=0$

---

3)



kde $P(A)=0$ OR $P(B)=0$ OR $P(C)=0$

---

4) spamů ze $\forall$ emailů... 80% $SC = 0{,}8$ $DC = 0{,}2$

filtr označí { 90% spamů jako spam ... $SS = 0{,}9$

5% dobrých jako spam $DS = 0{,}05$

a) $0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 \doteq 0{,}73$ 73% označeno jako spam

b) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}73} \doteq 0{,}01$ 1% dobrých mailů chybně označeno jako spam

$\boxed{2}$

c) $$\frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}1} \doteq 0{,}3$$ 30 %

spamů neodhaleno filtrem

---

5) $0_S = 0{,}9$

$1_S = 0{,}8$

a) $$\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}2} \doteq 0{,}818$$ 82%

b) $$\left(\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}2}\right)^3 * \left(\frac{0{,}8}{0{,}8+0{,}1}\right) = 0{,}486$$ 49%

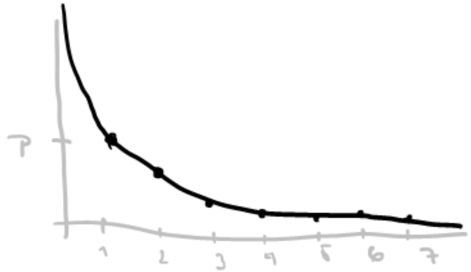
c)

2

7)

$X \sim \mathrm{Geom}(1/2)$, $? \sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1}\, p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$



$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum\limits_{n=2,4,6,\dots} P_X(n) = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}} \\[2ex] 1 & = \sum\limits_{m=1,3,5,\dots} P_X(m) = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}} \end{cases}$$

$$\sum_{i=2,4,6,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$\boxed{2}$

8)

$X \sim Bin(n,p)$, ? $\sim Y = X \bmod 2$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(Y) = \begin{cases} 0 & = \sum_{k=2,4,\dots}^{n} P_X(k) \\ 1 & = \sum_{k=1,3,\dots}^{n} P_X(k) \end{cases}$$

$$P(Y=1) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = q$$

$$P(Y=0) = 1-q$$

(*) protože jsme v binomickém, je to snažší, „sodíme" to na Bernoulliho rozdělení

$$\Rightarrow \underline{\underline{Y \sim Bern(q)}}$$

2

a)

$X \sim \mathrm{Geom}(p), \quad P(X>k) = ?$

$$\sum_{n=k+1,\,k+2,\,\ldots} P(X=n) = \sum_{n=k+1,\,k+2,\ldots} (1-p)^{n-1} p = \frac{(1-p)^k \cdot p}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^k \cdot p}{p} = \underline{\underline{(1-p)^k}}$$

nebo

X = čas 1. úspěchu

$X>k$ = první úspěch v $\underline{\text{čase} > k}$

= prvních k pokusů neuspělo = $\underline{\underline{(1-p)^k}}$

⊛ dobře se tak řeší konkrétní příklady
např. týpek s míčem házící na koš
má podotázku na tohle

---

10)

a) $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\mathbb{E}(X) = 10$

c) $$P(X \geq 10 \mid X \geq 5) = \frac{P(X \geq 10 \cap \overbrace{\cancel{X \geq 5}}^{\text{když je } X\geq 10,\ \text{je } X \geq 5 \Rightarrow \text{musí nastat vždy když } X \geq 10})}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X>9)}{P(X>4)} = \frac{(1-p)^9}{(1-p)^4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$$

c II) × × × × ? ? ? ? ? ? = $P(X>4)$

× × × × × × × × × ? = $P(X>9)$

řešíme P(otazníčky neuspěly) → stejnou část můžu „zapomenout"

$(1-p)^{9-4} = \underline{\underline{(1-p)^5}}$

$\boxed{2}$

11 – 12 – 13) byli v příkladech z teorie

---

17)

vím že je to zbytečně složité, zkoumal jsem komb. čísla

D = "vytáhli jsme dvouorlovou minci"

$$P(D) = 1 - \frac{\binom{99}{1}}{\binom{100}{1}} = 0{,}01$$

O6 = "padlo 6 orlů"

$O6 \sim \mathrm{Binom}(6, p)$

je dobře ?

$$P(D|O6) = \frac{P(O6|D)}{0{,}01 * 1 + 0{,}99 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{200}{101}} = \frac{101}{200} = \underline{0{,}505}$$

---

19)

kandidáti: A, B — při odchodu jsou náhodně tázáni koho volili

E ... množina voličů, kteří se zúčastní

$P(E|A) = 0{,}7$

$P(E|A^c) = 0{,}4$

výsledek exit-pollu je $0{,}6 * |E|$ hlasovalo pro A

kolik lidí celkem hlasovalo pro A ?

$\boxed{2}$

3. cvičení

1)

20 otázek

správná odpověď + 1 bod

špatná odpověď − 1/4 bod

$P(\text{zná opověď}) = p$

a) X_i … bodový zisk v i-té otázce , $X_1, \dots, X_{20} \sim \mathrm{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}(X) = np = \underline{\underline{20p}}$$

b)

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i \mid \text{zná}) \cdot P(\text{zná}) + \mathbb{E}(X_i \mid \text{nezná}) \cdot P(\text{nezná})$$

$$= 1 \cdot p + \mathbb{E}(X_i \mid \text{nezná}) \cdot (1-p)$$

$$= p + \overbrace{\mathbb{E}(X_i \mid \text{tipne správně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1} + \mathbb{E}(X_i \mid \text{tipne špatně}) \cdot \underbrace{P(\text{tipne})}_{1}}$$

$$= p + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot (1-p) = p + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)(1-p) = p + \frac{1}{16}(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) = \underline{20\left(p + \frac{1}{16}(1-p)\right)}$$

$\boxed{3}$

c) aby byl bodový zisk při typování nulový → speciálně $\mathbb{E}(X_1 | \text{nezná}) = 0$

$$\frac{1}{4} - \boxed{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

---

2) je to geom. rozdělení, takže čím víc peněz, tím větší výhra & nižší šance

---

3) $Y = X^2$

a) $\mathbb{E}(Y) = 0$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \underbrace{y}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(Y=y)}_{\geq 0} \Rightarrow P(Y=0) = 1$$ protože pro lib. jiné x by se přičetla kladná hodnota a $\mathbb{E}(Y)$ by nemohla být $= 0$

b) předp. $\mathrm{var}(X) = 0$ „očekávaná odchylka X od $\mathbb{E}(X)$"

$\mathbb{E}(X)$ $\exists$ a je konečná

$$\mathrm{var}(X) = 0 = \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \mathbb{E}(\underbrace{X - \mathbb{E}(X)}_{\text{musí být} = 0})^2 \Rightarrow X - \mathbb{E}(X) = 0$$

$$X = \mathbb{E}(X)$$

4)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \quad ?$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X>n) = P(X>1) + 2\cdot P(X>2) + 3\cdot P(X>4) + \dots + k\cdot P(X>k)$$

$P(X>0) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots$

$P(X>1) = \phantom{P(X=1)+{}} P(X=2) + P(X=3) + \dots$

$P(X>2) = \phantom{P(X=1)+P(X=2)+{}} P(X=3) + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(X=n) = \mathbb{E}(X)$$

---

5)

a) $$\operatorname{var}(aX) = \mathbb{E}(aX)^2 - (\mathbb{E}(aX))^2 = a^2\cdot\mathbb{E}(X^2) - a^2(\mathbb{E}(X))^2 = a^2\cdot\left(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right) = \underline{\underline{a^2\cdot\operatorname{var}(X)}}$$

b) $$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(X+b-\mathbb{E}(X+b)\right)^2\right) = \operatorname{var}(X+b)$$

pro $b = 2$

$E(X) = \frac{10}{5} = 2$

$\mathbb{E}(X+2) = \frac{20}{5} = 4$

$\operatorname{var}(X) = \frac{1+4+9+16}{5} - 2^2 = 6-4=2$

$\operatorname{var}(X+2) = \frac{4+9+16+25+36}{5} - 4^2 = 18-16=2$

$\boxed{3}$

věta o vlastnostech stř. hodnoty

c)

$$\operatorname{var}(X+Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X+Y-\mathbb{E}(X+Y)\big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\big(\underbrace{X-\mathbb{E}(X)}_{A}+\underbrace{Y-\mathbb{E}(Y)}_{B}\big)^2\Big)$$

$$= \mathbb{E}(A^2 + 2AB + B^2) = \mathbb{E}(A^2) + \mathbb{E}(2AB) + \mathbb{E}(B^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) + 2\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big) + \mathbb{E}(Y^2 - 2Y\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2)$$

nevím jak to dokázat $+ \; 6)$

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$$

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$$

6)

6. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$I_A = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P(A \cap B)$$

$$I_B = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

7) X má uniformní rozdělení na $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$ pro $a < b \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{k=a}^{b} x}{b-a+1} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\sum_{x=a}^{b} x^2}{b-a+1} - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2}{3}$$

→ můžu to celé posunout tak, že $a = 1$ a $b = b-a+1$ a rozptyl vyjde stejně

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2+2^2+\dots+b^2}{b} = \frac{\frac{1}{3}b\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{b} = \frac{\left(b+\frac{1}{2}\right)(b+1)}{3} \sim \frac{b^2}{3}$$

---

8) X ... součet $X_{1,\dots,n} \sim \mathrm{Bern}(p)$

a) $P(X=k) =$ k úspěchů z $X_1, \dots, X_n$ → vyberu těch k a vynásobím p * zbytek, protože zbytek musí být neúspěch, jinak by jich nebylo k

$$\binom{n}{k} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}$$

b) npř. pro $P(X_2 | X_1) = 1$, nikdy nemůžu mít $X_1 = 1$ & $k = 1$

$\boxed{3}$

9) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_i) * \#\text{pokusů} = n \cdot p$

$\mathbb{E}(X_i) = p$

$var(X_i) = p(1-p)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k}$$

(*) řešeno v příkladech z teorie

$var(X) = Var(X_i) * \#\text{pokusů} = np(1-p)$

---

10) $\boxed{Z = X+Y} \sim Bin(j, p) \quad j = n+m$

=> věta o konvoluci

ROZBOR MOŽNOSTÍ JAK $X+Y = j$

$$P(Z=k) = \sum_{x \in Im(X)}^{k} P_X(X=x) \cdot P_Y(Y=k-x) = \sum_{x \in Im(X)}^{k} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cdot \binom{m}{k-x} p^{k-x} (1-p)^{m-(k-x)}$$

$X \sim Bin(n, p)$

$Y \sim Bin(m, p)$

$(X+Y) \sim Bin(n+m, p)$

$n=3 \rightarrow X+Y =$
- $0 \rightarrow (0,0)$
- $1 \rightarrow (1,0)(0,1)$
- $2 \rightarrow (2,0)(0,2)(1,1)$
- $3 \rightarrow (3,0)(0,3)(1,2)(2,1)$

$p=\frac{1}{3}$	$n=3, \; j=2$
$x=0$	$1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \cdot \frac{4}{27} = \frac{32}{2187}$
$x=1$	$3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$
$x=2$	$2 \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}^3 = \frac{4}{27} \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{2187}$

$\frac{496}{2187} \sim 22\%$

$k=1: \underbrace{\frac{32}{2187}}_{x=0} + \underbrace{\frac{16}{81}}_{x=1} = \frac{464}{2187} \sim 21\%$

$k=0:$

3

4. cvičení

1) Balíček má 52 karet. Vytáhnu 2.

X … # vytažených es

Y … # vytažených králů

$P_{X,Y}$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	P_X
$X=0$	$\frac{473}{663}$	$\frac{88}{663}$	$\frac{3}{663}$	$\frac{564}{663}$
$X=1$	$\frac{88}{663}$	$\frac{8}{663}$	0	$\frac{96}{663}$
$X=2$	$\frac{3}{663}$	0	0	$\frac{3}{663}$
P_Y	$\frac{564}{663}$	$\frac{96}{663}$	$\frac{3}{663}$	1

jsou 4 esa a 4 králi

$$P_{X,Y}(X=0,Y=0) = \frac{\binom{44}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{473}{663}$$

$$(X=1,Y=0) = \frac{\binom{4}{1}\binom{44}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{88}{663}$$

$$(X=2,Y=0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221}$$

$$(X=1,Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{8}{663}$$

2) 3. hody mincí $\quad X = \#$ orlů v hodech 1, 2

$Y = \#$ panů v hodech 2, 3

a)

$P_{X,Y}$	0	1	2	P_X
0	0	1/8	1/8	1/4
1	1/8	1/4	1/8	2/4
2	1/8	1/8	0	1/4
P_Y	1/4	2/4	1/4	1

$P_{X,Y}(X=0, Y=0) = 0$

$(X=1, Y=0) = POO = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$(X=2, Y=0) = OOO = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$(X=1, Y=1) = POP \mid OPO = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

$(X=2, Y=1) = OOP = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) nejsou $\quad P(X=0 \,\&\, Y=0) = 0 \neq \frac{1}{16} \quad P(X=0) \ldots P,P = \frac{1}{2^2}, \quad P(Y=0) = O,O = \frac{1}{2^2} \quad P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{16}$

c) $P(0,0) \quad P(1,0) \quad P(0,1) \quad P(1,1) \quad P(2,0) \quad P(0,2) \quad P(2,1) \quad P(1,2) \quad P(2,2)$

$$\sum_{x<y} P_{X,Y}(x,y) = P(0,1) + P(0,2) + P(1,2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

d)

$P_{X\mid Y}$	0	1	2
0	0	1/2	1/2
1	1/2	1/4	1/2
2	1/2	1/4	0

$P(X=0 \mid Y=0) = \emptyset$

$(X=1 \mid Y=0) = \frac{POO}{OOO} = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=0) = \frac{OOO}{POO} = \frac{1}{2}$

$(X=1 \mid Y=1) = OOP,\ OPP,\ POP,\ PPP = \frac{1}{4}$

$(X=0 \mid Y=2) = OPP,\ PPP = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=1) = OOP,\ OPP,\ POP,\ PPP = \frac{1}{4}$

$(X=1 \mid Y=2) = \frac{OPP}{PPP} = \frac{1}{2}$

$(X=2 \mid Y=2) = \emptyset$

4

3) $X_1, X_2, X_3 \in \{1,2,3,4\}$

3. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?

(c) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli, o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X_1)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \leq k)$, $P(Z \leq k)$?

a) $P \ldots Y = \max(X_1, X_2)$

P_{X_1,X_2}	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2		1/16	1/16	1/16
3			1/16	1/16
4				1/16

$= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

ŠPATNĚ

b) $P \ldots Z = \max(X_1, X_2, X_3)$
$= \max(Y, X_3)$

P_{Y,X_3}	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}$	.	.	.
2		.	.	.
3			.	.
4				.

$= \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

c) $P(Y \leq k) = P(X_1 \leq k, X_2 \leq k)$

$P(Z \leq k) = P(X_1 \leq k, Y_2 \leq k, Y_3 \leq k)$

správně

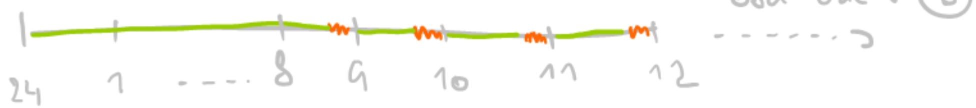
4

4)

Cvičení 5

1)

a) $8 \cdot \frac{4}{4}$



$$\frac{15 \cdot \frac{1}{4}}{24} = 0{,}156 \sim \underline{16\%}$$

(*) beru délku intervalu kdy uspěje a dělím ji délkou intervalu kdy může přijít, spojitost tady moc neřeším

b)

vidí

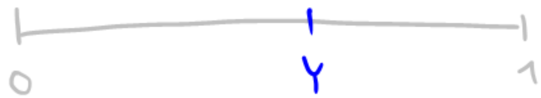
nevidí

$$\frac{11 \cdot \frac{1}{4}}{12} = 0{,}229 \sim \underline{23\%}$$

2)

uniformně náhodně rozlomíme metrový klacek

X = délka větší části



Y = dělicí bod

$X = \max\{Y, 1-Y\}$

a) $X \sim$?

od pohledu:

$X \sim U(\frac{1}{2}, 1)$

b) $\mathbb{E}(X) = ?$ $\quad var(X) = ?$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$var(X) = \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{12} = \underline{\underline{0{,}02}}$$

0,14 ?!

S

3. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

a) $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \ldots \; x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \ldots \; x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_X(4) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{4}{4}}\right) = e^{-1} = 0{,}367 \sim \underline{37\%}$$

c)

$$P(X > 3 \;\&\; X < 5) = F_X(5) - F_X(3) = 1 - e^{-\frac{5}{4}} - 1 + e^{-\frac{3}{4}} = \frac{-1}{\sqrt[4]{e^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = 0{,}185 \sim \underline{19\%}$$

$\boxed{5}$

4. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Na druhém cvičení jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

$s, t \geq 0$

pokud je $X > s+t$, je nutně $X > s$

$$P(X > s+t \mid X \geq s) = \frac{P((X > s+t) \cap (X \geq s))}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \leq s+t)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(s)}$$

$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = \frac{e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = 1 - F_X(t)$$

$$= 1 - P(X \leq t) = \underline{\underline{P(X > t)}}$$

$\boxed{5}$

5. Najděte analogii „pravidla 3σ“, neboli spočtěte $P(|X - \mathbb{E}(X)| < c \cdot \sigma_X)$ $(c = 1, 2, 3)$, pokud

(a) X má uniformní rozdělení,

(b) $X \sim Exp(1)$,

(c) $X \sim Exp(2)$.

a)

$X \sim U(a,b) \quad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma_X = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$Y = |X - \frac{a+b}{2}| \Rightarrow Y$ vždy $\in [0, \frac{a+b}{2}]$

$P\left(Y < c \cdot \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F_Y\left(\frac{c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b-a}{2}\right)$

napadlo mě zkusit substituovat, ale myslím, že to není správný směr

$\boxed{5}$

s $\mathbb{E}(X)$ chceme pracovat jako s μ a σ_x nechat co nejdéle

b) $X \sim Exp(\lambda)$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 \\ 1-e^{-\lambda x} \end{cases}$ $f_X(x) = \begin{cases} 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} \end{cases}$ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ $var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$

$X \sim Exp(1)$

$$\mu = \mathbb{E}(X) = 1 \quad , \quad \sigma_x = 1$$

obecně: $P(|X-\mu| < \sigma_x \cdot c)$ $c \in \{1,2,3\}$

TODO:

cvičení 5 ~ 1:04:00

konkrétně: $P(|X-1| < 1) =$

$P(|X-1| < 2) =$

$P(|X-1| < 3) =$

c)

$X \sim Exp(2)$

$$|X - \mathbb{E}(X)| = |X - \tfrac{1}{2}| \quad \sigma_x = \tfrac{1}{2}$$

zrovna konkrétně:

$P(|X-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}) =$

$P(|X-\frac{1}{2}| < 1) =$

$P(|X-\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}) =$

6. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1 - p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.

(a) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.

(b) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

věta o rozkladu Ω pro spojité n.v.

$$f_X(x) = \sum_i f_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i) \qquad F_X(x) = \sum_i F_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i)$$

a) $F_Z(z) = F_{Z|A}(z) \cdot P(A) + F_{Z|B}(z) \cdot P(B) = F_{Z|A}(z) \cdot p + F_{Z|B}(z) \cdot (1-p)$

$\boxed{5}$

10)

$$X \sim N(40, 10^2)$$

a) $P(X \leq 0)$

$$P(X - 40 \leq -40)$$

$$P\left(\frac{X-40}{10} \leq -4\right) = \Phi(-4) = 0{,}00003$$

5