Rozklad Ω pro $\mathbb{E}$

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$ ... čekání na úspěch (posloupnost $\mathrm{Bern}(p)$, první úspěch = konec)

⊛ nezávislých

B_1 = „poprvé uspějeme"

$B_2 = B_1^c$

⊛ věta o rozkladu Ω pro $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{P(X|B_1)}_{P(X|B_1)=1} \cdot \underbrace{P(B_1)}_{P(B_1)=p} + \underbrace{P(X|B_2)}_{P(X|B_2) = (1+\mathbb{E}(X))} \cdot \underbrace{P(B_2)}_{P(B_2)=1-p}$$

$$= p + (1+\mathbb{E}(X))(1-p) = p + (1-p) + \mathbb{E}(X)(1-p) = 1 + \mathbb{E}(X)(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)(1-p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(1-(1-p)) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

$\mathbb{E}(X) \sim Bin(n,p)$

$X \sim Bin(n,p)$

vzorec s komb. čísly

proč?!

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P_X(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\text{pro } k=0 \text{ je člen } = 0} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\boxed{(n-1)-(k-1)}}$$

$$= np \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}}_{\text{binomická věta říká } = 1} = \underline{\underline{np}}$$

$\mathbb{E}(X) \sim Geom(p)$

alternativní postup, jinak dle věty o rozkladu Ω pro $\mathbb{E}$

X n.v. $Im(X) \subseteq \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} P(X>k)$ (*) ze cvika 2 víme, že $P(X>k) = (1-p)^k$

pro $X \sim Geom(p)$:

$$P(X>k) = (1-p)^k$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

ilustrace

dá se říci, že # úspěchů je $\cong Np$

$\Rightarrow$ průměrné čekání na úspěch bude $\frac{N}{Np} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$

$$\underbrace{\times \times \times \circ \times \times \circ \times \circ \circ \times \circ \circ \times \times \ldots}_{\text{hodně velké } N}$$

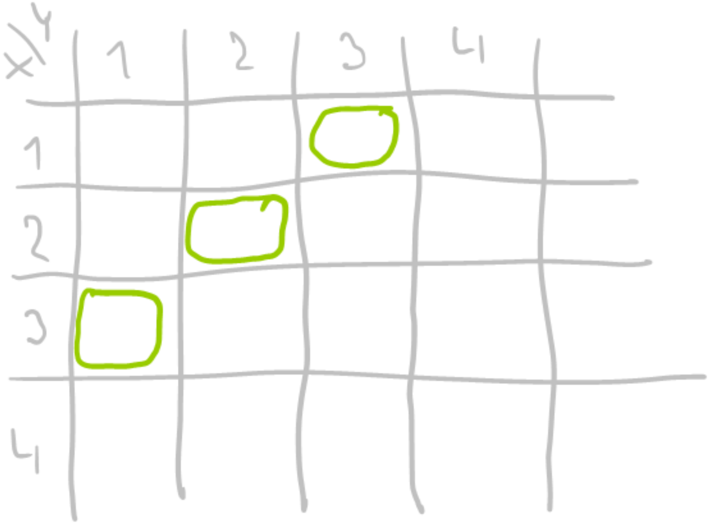
opakujeme $Bern(p)$ výsledky $\begin{cases} \circ & \text{úspěch} \\ \times & \text{neúspěch} \end{cases}$

$\mathbb{E}(X) \sim Poiss(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_X(k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{pro } k=0 \text{ je člen } = 0} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda}}_{\text{MATH WODO } = 1} = \underline{\underline{\lambda}}$$

Součet nezávislých n.v.

Máme-li dáno $P_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení součtu $Z = X + Y$?



$$P(Z=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1)$$

$\|$

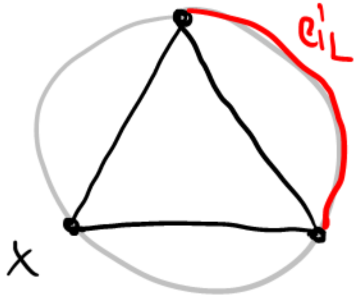
$\{\omega\in\Omega : Z(\omega) = 4\} =$

$\{\omega\in\Omega : X(\omega) = 1 \;\&\; Y(\omega) = 3\}$

$\cup$ - - - - -

$\cup$ $\{\omega\in\Omega : X(\omega) = 3, Y(\omega) = 1\}$

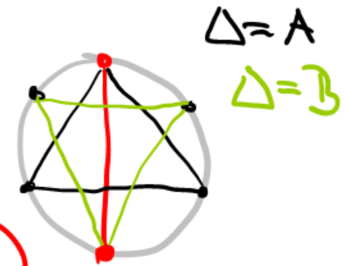
Náhodná tětiva kruhu



jev D: tětiva je delší než $|AB|$ z ΔABC rovnostrann.

1) náh. výběr X, Y náh. vyberu X, potom vyberu Y a platí:

$$P(D) = P(Y \in \text{cíl}) = \frac{1}{3}$$



2) vybereme směr tětivy a potom náh. polohu pro $t \equiv$ průsečík tětivy s Δ platí $P(D) = P(t \in A \cup B) = \frac{1}{2}$ (!)

Podmíněné rozdělení

X, Y d.n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A \in \mathcal{F}$

1) $P_{X|A}(x) : P(X = x \mid A)$

příklad: X je výsl. hodu kostkou, A = padlo sudé číslo

$P_{X|A}$:

1	2	3	4	5	6	...
0	1/3	0	1/3	0	1/3	0

2) $P_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y)$

příklad: X,Z jsou výsledky nezávislých hodů kostkou, $Y = X + Z$

$$\underbrace{P_{X|Y}(6 \mid 10)}_{\text{P první 6 když je součet 10}} = \frac{P(X = 6, Y = 10)}{P(Y = 10)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

P první 6 když je součet 10

$10 \to \begin{matrix} 5+5 \\ 4+6 \\ 6+4 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{3}!$

OBECNĚ:

3) $P_{X|Y}(x|y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x',y)}$$

když je Y daný sčítáme přes hodnoty X proto x'

4) sdružené vs. podmíněné rozdělení

$Y = X + Z$ ... součet hodů

$P_{X,Y}$	...	10	11	12
1		0	0	0
2		.	.	.
3		.	.	.
4		1/36	.	.
5		1/36	1/36	.
6		1/36	1/36	1/36

$P_{X\|Y}$	...	10	11	12	
1		0	0	0	
2		.	.	.	
3		.	.	.	
4		1/3	.	.	$\Sigma \neq 1$
5		1/3	1/2	.	$\Sigma \neq 1$
6		1/3	1/2	1	$\Sigma \neq 1$
		$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	

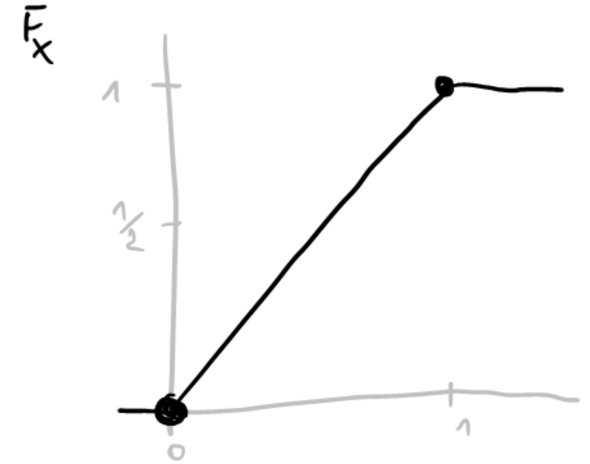
$$\sum_{y'} P_{X|Y}(x|y) \neq 1$$ ... narozdíl od sdruženého se nemusí rovnat 1

fixní hodnota X

$$\sum_{x'} P_{X|Y}(x,y) = \sum_{x'} P(X=x', Y=y) = 1$$ ... musí se nasčítat na 1

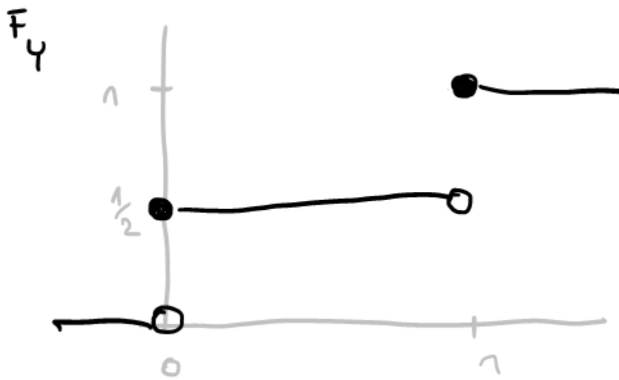
fixní hodnota Y

Distribuční funkce



-> uniformě rozdělená

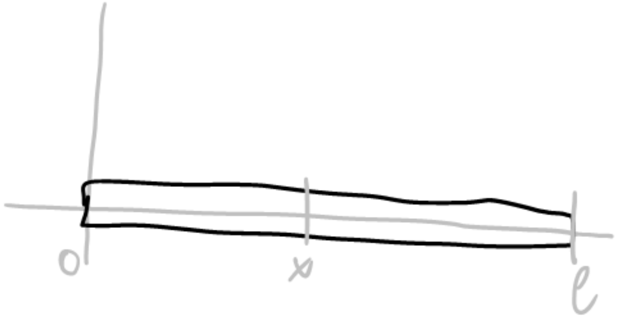
-> $F_X(t) = t, \quad t \in [0,1]$



-> $\mathrm{Im}(Y) = \{0,1\}$

Y = d.n.v.

Hustotní fce - trubka



máme $\rho(x)$ ... hustotu trubky v bodě x

potom:

$$\text{hmotnost trubky} = \int_0^l \rho(t)\,dt = m$$

$$\text{hmotnost úseku} = \int_0^x \rho(t)\,dt = m_x$$

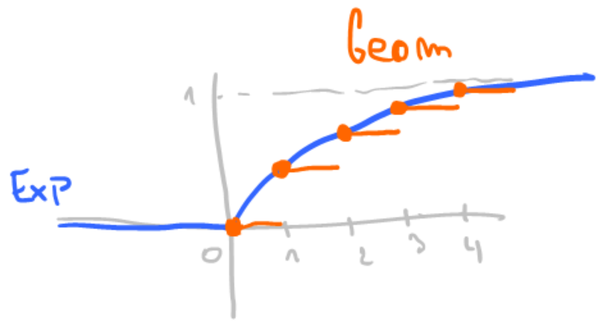
$$\text{těžiště trubky} = \frac{\overbrace{\int_0^l t\cdot\rho(t)\,dt}^{\text{střední hodnota}}}{m}$$

Souvislost Exp a Geom

$Y \sim Geom(p)$ $\quad P(Y>k) = (1-p)^k$, $k \in \mathbb{N}$

$$F_Y(k) = \begin{cases} P(Y \le k) = 1-(1-p)^k & \text{pro } y \ge 0 \\ 0 & \text{pro } y < 0 \end{cases}$$

$1-(1-p)^k = 1-e^{-\lambda k}$, pro $e^{-\lambda} = (1-p)$



TODO: ještě jedno vyjádření pomocí $Y_\delta = \delta \cdot Y$
~ 55 min

Normální rozdělení

$$X = \mu + \sigma \cdot Z$$

kde
1) $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$
2) $\sigma > 0$
3) $Z \sim N(0,1)$

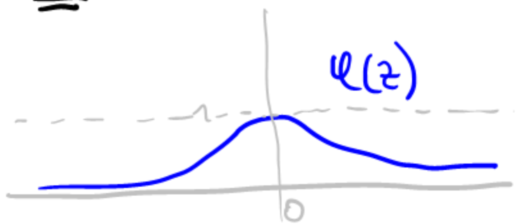
potom píšeme:

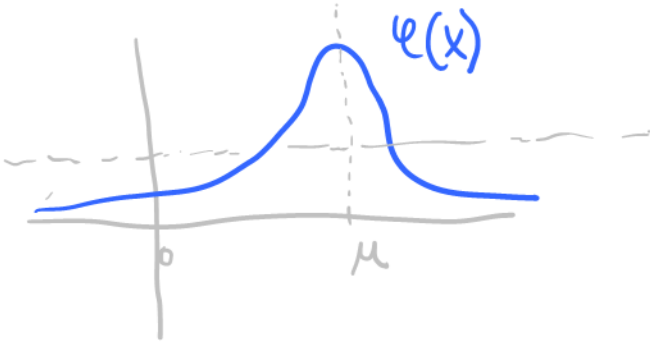
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ... obecné normální rozdělení

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$E(X) = E(\mu + \sigma \cdot Z) = \mu + \sigma \underbrace{E(Z)}_{=0} = \underline{\underline{\mu}}$$

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(\mu + \sigma \cdot Z) = \sigma^2 \cdot \underbrace{\operatorname{var}(Z)}_{=1} = \underline{\underline{\sigma^2}}$$





CLV

$X_1, \dots, X_k$ n.n.v. $X_i \sim$ Norm

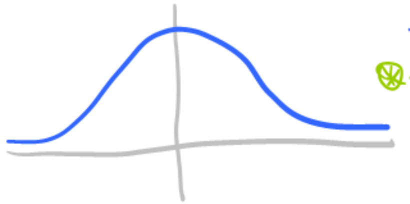
⊛ pokud mám normálně rozdělené n.n.v.

$X_1 + \dots + X_k \doteq Norm$ jejich součet, je také norm. rozdělen (přibližně)

$$X_i = \begin{cases} 0 & s\ P = \frac{1}{2} \\ 1 & s\ P = \frac{1}{2} \end{cases}$$

mám-li množinu a vybírám z ní k prvků s $P = \frac{1}{2}$, tak:

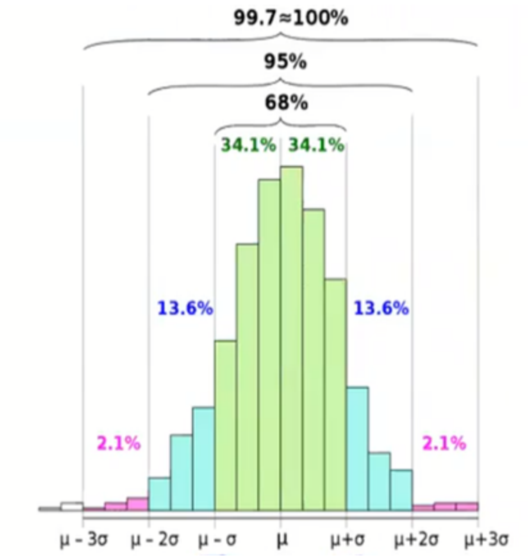
1) vel. výběru bude zhruba norm. rozd., s $E = \frac{k}{2}$
2) odpovídá to kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$



* je rozdělené asi takhle

Pravidlo 3σ

Mám-li $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ tak:



68% výběrů $\in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ... $P(|Z - \mu| \leq 1 \cdot \sigma)$

95% výběrů $\in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ... $P(|Z - \mu| \leq 2 \cdot \sigma)$

99,7% výběrů $\in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ... $P(|Z - \mu| \leq 3 \cdot \sigma)$