Pravděpodobnost & statistika 1

Věty

Základní vlastnosti

V pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí pro $A, B \in \mathcal{F}$:

1) $P(A) + P(A^c) = 1$
2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (subaditivita, Booleova nerovnost) (*) A_i nemusí být disjunktní

dk

1) $\Omega = A \cup A^c$

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$

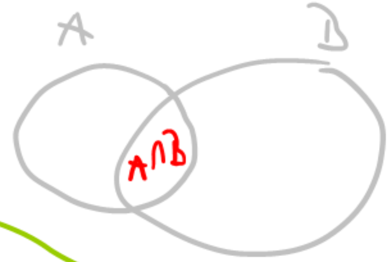
2) $B = A \cup (B \setminus A)$ protože $A \subseteq B$

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$$

3)

$$P(A) = P(A \setminus B) \cup P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B \setminus A) \cup P(A \cap B)$$



$$\Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) \cup P(A \cap B) + P(B \setminus A) \cup P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4)

použijeme trik "zdisjunktnění"

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$

$$\dots$$

$$\rightarrow \boxed{B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j} \rightarrow$$

1) $B_i \subseteq A_i$

2) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

3) $\bigcup B_i = \bigcup A_i$

$$\rightarrow P\left(\bigcup A_i\right) = P\left(\bigcup B_i\right) = \sum P(B_i) \leq \underline{\underline{\sum P(A_i)}}$$

∎

Zřetězené podmiňování

Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Dk z definice p.p. RL

důsledek def. podm. psti:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(\cancel{A_1 \cap A_2} \cap A_3)}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

$$= \underline{\underline{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}}$$

$\blacksquare$

Rozklad Ω pro P

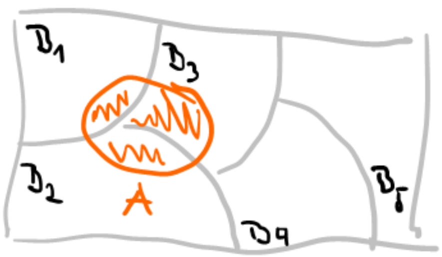
Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$P(A) = \sum (A|B_i)P(B_i)$$

Dk z definice p.p. LR

důsledek def. podm. psti:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$



$$\rightarrow \quad A = \bigcup (A \cap B_i)$$

$$P(A) = \bigcup P(A \cap B_i) = \underline{\underline{\sum P(A|B_i)P(B_i)}}$$

Bayesova věta

Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω, $A \in \mathcal{F}$ a $P(A), P(B_j) > 0$, tak:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A \mid B_i)\, P(B_i)}_{=1}}$$

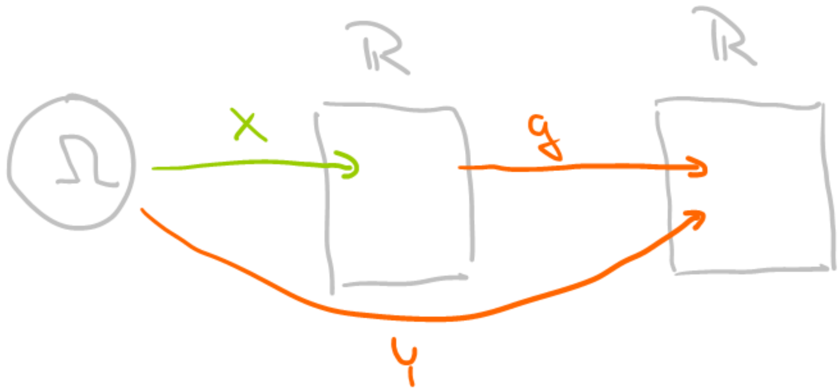
Dk pomocí věty o rozkladu Ω (LR)

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} \underbrace{=}_{\text{tohle platí}} \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)\, P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A \mid B_i)\, P(B_i)}_{\text{věta o rozkladu } \Omega}}$$

$\blacksquare$

LOTUS

Pro reálnou fci g a diskrétní m.v. X je $g(X)$ také diskrétní m.v.



$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, Y = g(\mathrm{Im}\, X)$

potřebujeme ověřit 2 podm. d.m.v.

1) $|\mathrm{Im}\, Y| \leq |\mathrm{Im}\, X|$

protože $\mathrm{Im}\, X$ je spočetná, je i $\mathrm{Im}\, Y$ spočetná

2) $$Y^{-1}(y) = X^{-1}(g^{-1}(y)) = \underbrace{\bigcup_{g(x)=y,\ x \in \mathrm{Im}(X)} X^{-1}(x)}$$

což je spočetné sjednocení a $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$, což je množina uzavřená na spoč. sjednocení

Pokud X je d.m.v a g je reálná fce, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} g(x) P(X = x)$$

Dk

Přeznačme: $Y = g(X)$, $I = \mathrm{Im}(X)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(Y) = g(I)$

z def: $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y = y) = \sum_{y \in g(I)} y \cdot P(Y = y)$$

suma má jen 1 prvek, jinak by $g(x)$ nebyla fce.

$$= \sum_{y \in g(I)} y \cdot \sum_{g(x)=y,\ x \in I} P(X = x) = \sum_{x \in I} \boxed{\sum_{y = g(x)} y} \cdot P(X = x) = \sum_{x \in I} \boxed{g(x)} \cdot P(X = x)$$

$\blacksquare$

Vlastnosti $\mathbb{E}$

Nechť X, Y jsou diskrétní m.v. a $a, b \in \mathbb{R}$

1) Pokud $P(X \geq 0) = 1$ & $\mathbb{E}(X) = 0$ tak $P(X = 0) = 1$ tedy, pokud je X vždy nezáporná a stř. je 0 musí být $P(X=0)=1$

2) Pokud $\mathbb{E}(X) \geq 0$ tak $P(X \geq 0) > 0$

3) $\mathbb{E}(a \cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

4) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Dk

1) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(X = x)}_{\geq 0} = 0$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x) \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0$$ v sumě musí být nezáp. sčítanci

3) $g(x) = (a \cdot x + b)$ pomocí lotusu

$$\sum (ax + b) P(X = x) = a \sum x \cdot P(X = x) + \sum b \cdot (X = x) = a \underbrace{\sum x \cdot P(X = x)}_{\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum P(X = x)}_{1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum g(x) P(X = x)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b}}$$

linearita $\mathbb{E}$, pro $a,b=1$

4) $g(X,Y) = (x+y)$, $\quad \mathbb{E}(X+Y) = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (x+y)\, P(X=x, Y=y) = \sum\sum x\, P(X=x, Y=y) + \sum\sum y\, P(X=x,Y=y)$

věta o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + \sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)} = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) + \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

$\blacksquare$

Rozklad Ω pro $\mathbb{E}$

Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(X \mid B_i)\, P(B_i)$$

kdykoli má součet smysl

(*) sčítance s $P(B_i)=0$ považujeme za 0

Dk RL

$$\sum_{i=1,2,\dots} \mathbb{E}(X\mid B_i) P(B_i) = \sum_i \overbrace{\sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x \mid B_i)}^{\text{def. podm. stř. hod.}} \cdot P(B_i) = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \overbrace{\sum_i P(X=x\mid B_i)\cdot P(B_i)}^{\text{věta o rozkl. } \Omega \text{ pro } P \,=\, P(X=x)}$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X)}}$$

$\blacksquare$

II. definice rozptylu

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Dk pomocí linearity $\mathbb{E}$ (LR)

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\cdot\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right)$$

(*) použijeme zobecněnou VOL $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}(aX+bY+cZ) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c\mathbb{E}(Z)$

podle ní:

$$\mathbb{E}\big(X^2 - \underbrace{2\mathbb{E}X}_{\text{konst}}\cdot X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\text{konst}}\big) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \underline{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$\blacksquare$

Obecný vzorec $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

Mějme disk. n.v. X, Y potom:

1) $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \ \& \ Y=y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P_{X,Y}(x,y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $P_Y(y) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P_{X,Y}(x,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Dk

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P\Big(\bigcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \ \& \ Y(\omega) = y\}\Big)$$

$$= \underline{\underline{\sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \ \& \ Y=y)}}$$

$\blacksquare$

Funkce náh. vektoru

Nechť X, Y jsou n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a nechť $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom je

$Z = g(X, Y)$ n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a platí: $Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} g(x,y) \underbrace{P(X = x,\ Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)}$$

Dk (jako Lotus)

Linearita $\mathbb{E}$

(*) důsledek věty o fci náh. vektoru

Pro n.v. X, Y a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Dk pomocí věty o fci náh. vektoru LR

$$\underbrace{g(x,y) = ax + by}, \text{ potom:}$$

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} g(x,y) \, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} ax \, \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y \in Im(Y)} \sum_{x \in Im(X)} by \, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= a \cdot \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in Im(Y)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{\mathbb{P}(X=x)} + b \cdot \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{\mathbb{P}(Y=y)}$$

(*) z věty o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= a \cdot \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y)$$

$$= \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)}}$$

Součin $\mathbb{E}$ nezávislých m.v.

Pro nezávislé diskrétní m.v. X, Y platí:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

(*) $\mathbb{E}(X \cdot X) \neq \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X$

skoro vždy je X závislá sama na sobě

(*) je to implikace, takže:

nezávislost $\rightarrow \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$

zato:

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \not\Rightarrow$ nezávislost

Dk

$g(x,y) = x \cdot y$

$$\mathbb{E}(XY) = \overbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (x \cdot y) \, P(X=x, Y=y)}^{\text{LOTUS}} \overbrace{=}^{\text{z nezávislosti}} \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} x \cdot y \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)}}$$

$\blacksquare$

Součet nezávislých n.v. "konvoluce"

Pokud X,Y jsou n.n.v., má jejich součet $Z=X+Y$ pstní. funkci:

$$P(Z=z)=\sum_{x\in Im(X)} P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$$

Dk z def. nezávislosti n.v. LR

víme, že pro $Z=X+Y$ platí:

$$\{\omega\in\Omega: Z(\omega)=z\}=\bigsqcup_{x\in Im(X)}\{\omega\in\Omega: X(\omega)=x \;\&\; Y(\omega)=z-x\}$$

$$P(Z=z)=\sum_{x\in Im(X)} P(X=x, Y=z-x)$$ což platí obecně (tedy i pro závislé n.v.)

(*) pro X,Y nezávislá to ale jde přepsat jako:

$$\sum_{x\in Im(X)} P(X=x)\cdot P(Y=z-x)$$

∎

Práce s hustotou

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak:

1) $P(X=x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$ pro $\forall a \le b \in \mathbb{R}$

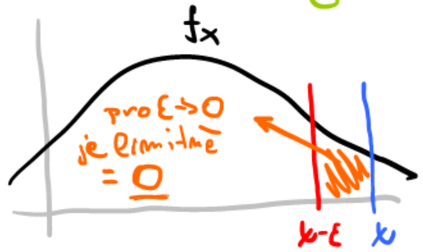
Dk

(*) z (2) $\overset{\text{triviálně}}{\Longrightarrow}$ (1) pro $(a = b = x)$, protože integrál přes nulový interval $= 0$

1) (LR)

$$P(X=x) \overset{\text{podle věty o spojitosti pravděpodobnosti}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(x-\varepsilon < X \le x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x) - P(X \le x-\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f_X(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(x)\,dx \overset{\text{Podle nějaké věty z analýzy:}}{=} \underline{\underline{0}}$$



2) (LR)

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) + \underbrace{P(X=a)}_{=0,\ \text{plyne z (1)}}$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{\int_a^b f_X(t)\,dt}}$$

∎

Spojitý LOTUS

Pokud je X s.n.v s hustotou f_X a g je reálná funkce, tak:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

Dk

vynecháváme kvůli složitosti, myšlenka:

$$\int_{t}^{t+\varepsilon} f_X = P(t \leq X \leq t+\varepsilon)$$ ... odpovídá psti, že jsme blízko t, poté by se násobilo $g(x)$ ...

Universalita uniformního rozdělení

Nechť F je rostoucí spojitá funkce s $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)=1$. Potom:

1) Nechť $U\sim U(0,1)$ a $X=F^{-1}(U)$. Pak F je distribuční funkcí X.
2) Nechť X je n.v. s distribuční fcí $F=F_X$. Pak $F(X)\sim U(0,1)$

Př.

$$F=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$$

$$X \to F(X)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} X+\frac{1}{2}$$

obecně:

$$\Omega \xrightarrow{X(\omega)} \mathbb{R} \xrightarrow{F(x)} \mathbb{R}$$

"jak se napálit":

$F(x)=P(X\le x)$ z def $\to$ mohli bychom si myslet, že $F(X)=P(X\le X)=1$ to ale NEJDE!

rozepsáno korektně:

$F(X(\omega))=P(\underline{X}\le \underline{X(\omega)})$ ta X nejsou stejná věc

Dk

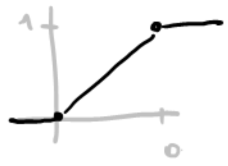
1)

$U \sim U(0,1)$, $X = F^{-1}(U)$ $\to$ F^{-1} je dobře def na $(0,1)$ z předpokladů pro F

z def.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

$$\Rightarrow \underline{F_X = F}$$



2)

X má d.fci F, $Y = F(X)$ chceme $Y \sim U(0,1)$

z def.

protože F je rostoucí

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le \underbrace{F_Y^{-1}(y)}_{y \in (0,1)}) = F_Y(F^{-1}(y)) = y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y<0 \\ 1 & \text{pro } y>1 \end{cases}$$ protože $Y = F(X)$ ... kvůli dovámí $F(X)$

⊛

① ⇒ pokud umíme generovat n.v. $X \in (0,1)$, dokážeme vyrobit n.v. s lib. distribucí

② ⇒ když máme nějakou n.v. a "myslíme si" že má distribuci X_Y, tak ji do dané distribuční fce dosadíme a otestujeme, že co vyjde má uniformní rozdělení

STOU

∎

Sdružený spojitý LOTUS

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\cdot dy$$

odvodíme: $\mathbb{E}(aX+bY+c) = a\cdot\mathbb{E}(X) + b\cdot\mathbb{E}(Y) + c$

$$\mathbb{E}(g(x,y)) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (ax+by+c)\cdot f_{X,Y}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} ax\cdot f_{X,Y}(x,y) + \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} by\cdot f_{X,Y}(x,y)}_{b\cdot\mathbb{E}(Y)} + \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} c\cdot f_{X,Y}(x,y)}_{=c}$$

analogicky

$$a\cdot\iint_{\substack{x=-\infty\\y=-\infty}}^{+\infty} x\cdot f_{X,Y}(x,y) = a\cdot\int_{x=-\infty}^{+\infty} x\cdot\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = a\cdot\int_{x=-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x) = a\cdot\mathbb{E}(X)$$

$\sim$ „$P(X=x)$“ $= f_X(x)$

$= \mathbb{E}(X)$

Nezávislé spojité n.v.

Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) X, Y jsou nezávislé

2) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Dk

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ z def. nezávislosti spojitých n.v. (LR)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(s)\cdot f_Y(t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

$$= \underline{F_X(x)\cdot F_Y(y)}$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

protože jsou nezávislé

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y}}_{\text{derivace podle obou proměnných}} F = \left[\frac{\partial}{\partial_x} F_X(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial_y} F_Y(y)\right] = \underline{f_X(x)\cdot f_Y(y)}$$

(*) derivujeme jen tam, kde je funkce spojitá (jinde to nemá smysl)

∎

Součet spojitých n.v.

Nechť jsou X, Y spojité n.n.v. Pak $Z = X + Y$ je také spojitá n.v.
a její hustotu dostaneme jako konvoluci funkcí f_X, f_Y nebo:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Dk
vynecháme, obdobný diskrétnímu případu

Podmiňování

Rozklad Ω pro spojité X, říká:

$$f_X(x) = \sum_i f_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i)$$

$$F_X(x) = \sum_i F_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i)$$

hustotní i distribuční fce jdou zapsat pomocí rozboru případů dk

speciální příklad byl na cvičení: "dva algoritmy"

Podmíněná, sdružená a marginální hustota

z definice:

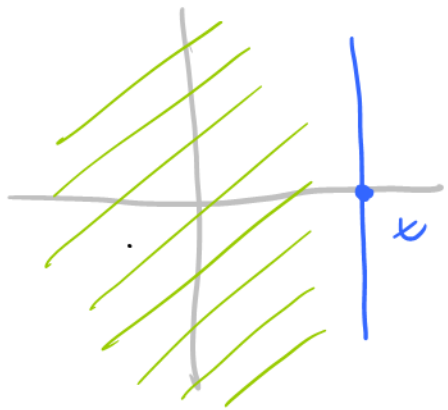
$$\underbrace{f_{X|Y}(x,y)}_{\text{podmíněná}} = \underbrace{f_Y(y)}_{\text{marginální}} \cdot \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\text{sdružená}}$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

změní věty:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\, dy$$

B



tady integrujeme

dk

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dy$$

LR

vyjdeme z definice podm. hustoty, pomocí ekvivalence přejdeme k distribuční fci a ukážeme, že když zintegrujeme očekávanou hustotní $f_X(x)$ fci skutečně dostaneme distribuční fci $F_X(x)$ a proto to platí!

ekvivalentně:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\, ds.dt$$

(*) tohle je vlastně integrál přes nějakou množinu B

$$= \int_B f_{X,Y}(s,t)\, ds.dt = P((X,Y) \in B) = P(X \le x) = F_X(x)$$

Spojitá Bayesova věta

Prozatím jen slíbená,

najdeme ve statistice

v diskrétním jsme chtěli:

$$P(A \mid B) \rightsquigarrow P(B \mid A)$$

nyní chceme

$$f_{X|Y} \rightsquigarrow f_{Y|X}$$

druhá definice kovariance

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

dk (LR) z definice kovariance a linearity $\mathbb{E}$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))\cdot(Y-\mathbb{E}(Y))\big)$$

$$= \mathbb{E}\big(XY - X\cdot\mathbb{E}(Y) - Y\cdot\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\big)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\cdot\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\text{konst}}) - \mathbb{E}(Y\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{konst}}) + \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{konst}}\cdot\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\text{konst}})$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\cdot(1)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

proč (*) konstanta???

$\mathbb{E}(aX) = a\cdot\mathbb{E}(X)$

konstantu tedy vytknu před aplikací "venkovní" střední hodnoty

■

důsledky

- $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X,X)$
- $\mathrm{cov}(X, a\cdot Y + bZ + c) =$
  $= a\cdot\mathrm{cov}(X,Y) + b\cdot\mathrm{cov}(X,Z)$
- X,Y nezávislé $\Rightarrow$
  $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$ (*) ukázali jsme pro diskrétní ale platí obecně

potom

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY) = 0$

Rozptyl součtu

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, potom platí:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)}_{=0 \text{ pro } X_i, X_j \text{ nezávislé}}$$

Pro nezávislé n.v. speciálně platí:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

dk

LR

označme $Y_i = (X_i - \mathbb{E}(X_i))$, $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_i)$

$$var(X) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

zároveň:

$$= \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i \cdot Y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(X_i - \mathbb{E}(X_i)) \cdot (X_j - \mathbb{E}(X_j))}_{\text{z definice kovariance}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j)$$

to funguje protože tím, že sumy násobím, mám Y^2

■