Rozklad Ω pro $\mathbb{E}$

$X \sim \text{Geom}(p)$ ... čekání na úspěch (posloupnost $\text{Bern}(p)$, první úspěch = konec) ⊛ nezávislých

B_1 = „poprvé uspějeme"

$B_2 = B_1^c$

⊛ věta o rozkladu Ω pro $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{P(X|B_1)}_{P(X|B_1)=1} \cdot \underbrace{P(B_1)}_{P(B_1)=p} + \underbrace{P(X|B_2)}_{P(X|B_2) = (1+\mathbb{E}(X))} \cdot \underbrace{P(B_2)}_{P(B_2)=1-p}$$

$$= p + (1+\mathbb{E}(X))(1-p) = p + (1-p) + \mathbb{E}(X)(1-p) = 1 + \mathbb{E}(X)(1-p)$$

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)(1-p) = 1$$

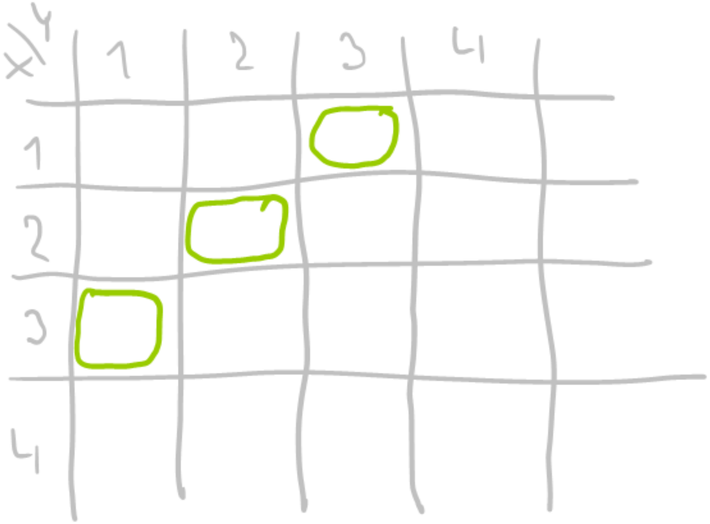
$$\mathbb{E}(X)(1-(1-p)) = 1$$

$$\mathbb{E}(X)(p) = 1$$

$$\mathbb{E}(X) = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

Součet nezávislých n.v.

Máme-li dáno $P_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení součtu $Z = X+Y$?



$$P(Z=4) = P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)$$

$\parallel$

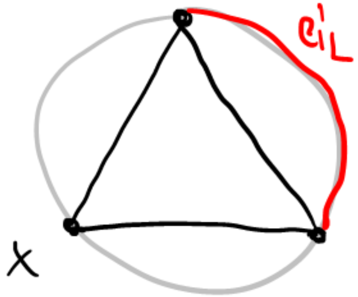
$\{\omega\in\Omega: Z(\omega)=4\} =$

$\{\omega\in\Omega: X(\omega)= 1 \;\&\; Y(\omega)=3\}$

$\cup$ - - - - -

$\cup$ $\{\omega\in\Omega: X(\omega)=3, Y(\omega)=1\}$

Náhodná tětiva kruhu

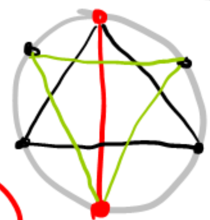


jev D: tětiva je delší než $|AB|$ z ΔABC rovnostrann.

1) náh. výběr X, Y   náh. vyberu X, potom vyberu Y a platí:

$$P(D) = P(Y \in \text{cíl}) = \frac{1}{3}$$

2) vybereme směr tětivy a potom náh. polohu pro $t \equiv$ průsečík tětivy s Δ platí $P(D) = P(t \in A \cup B) = \frac{1}{2}$!



$\Delta = A$

$\Delta = B$

Podmíněné rozdělení

X, Y d.n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A \in \mathcal{F}$

1) $P_{X|A}(x) : P(X = x | A)$

příklad: X je výsl. hodu kostkou, A = padlo sudé číslo

$P_{X|A}$:

1	2	3	4	5	6	...
0	1/3	0	1/3	0	1/3	0

2) $P_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y)$

příklad: X, Z jsou výsledky nezávislých hodů kostkou, $Y = X + Z$

$$\underbrace{P_{X|Y}(6|10)}_{} = \frac{P(X=6, Y=10)}{P(Y=10)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

P první 6 když je součet 10

$10 \to$ 5+5, 4+6, 6+4 $\Rightarrow \frac{1}{3}!$

OBECNĚ:

3) $P_{X|Y}(x|y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X|Y}(x,y)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X|Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X|Y}(x',y)}$$

když je Y daný sčítáme přes hodnoty X proto x'

4) sdružené vs. podmíněné rozdělení

$Y = X + Z$ ... součet hodů

$P_{X,Y}$	...	10	11	12
1		0	0	0
2		.	.	.
3		.	.	.
4		1/36	.	.
5		1/36	1/36	.
6		1/36	1/36	1/36

$P_{X\|Y}$	...	10	11	12	
1		0	0	0	
2		.	.	.	
3		.	.	.	
4		1/3	.	.	$\Sigma \neq 1$
5		1/3	1/2	.	$\Sigma \neq 1$
6		1/3	1/2	1	$\Sigma \neq 1$
		$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	

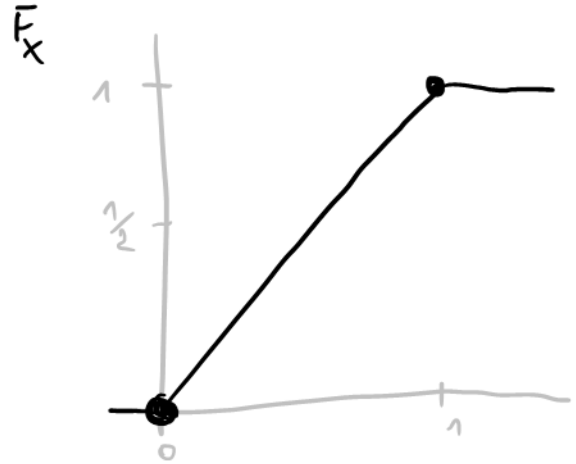
$\sum_{y'} P_{X|Y}(x|y) \neq 1$ ... narozdíl od sdruženého se nemusí rovnat 1

fixní hodnota X

$\sum_{x'} P_{X|Y}(x,y) = \sum_{x'} P(X=x', Y=y) = 1$ ... musí se nasčítat na 1

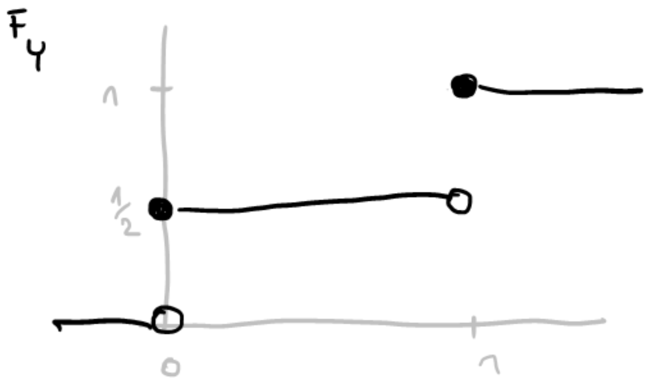
fixní hodnota Y

Distribuční funkce



-> uniformně rozdělená

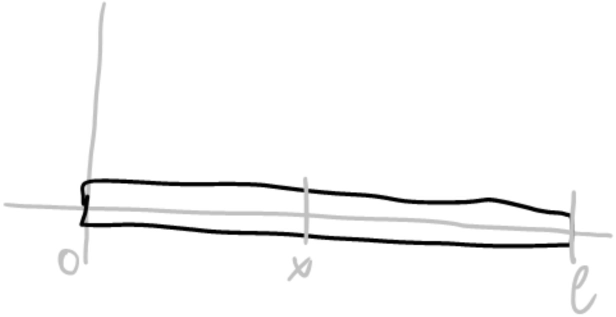
-> $F_X(t) = t$, $t \in [0,1]$



-> $\mathrm{Im}(Y) = \{0,1\}$

Y = d.n.v.

Hustotní fce - trubka



máme $\rho(x)$ ... hustotu trubky v bodě x

potom:

$$\text{Hmotnost trubky} = \int_0^l \rho(t)\,dt = m$$

$$\text{Hmotnost úseku} = \int_0^x \rho(t)\,dt = m_x$$

$$\text{těžiště trubky} = \frac{\int_0^l \overbrace{t \cdot \rho(t)\,dt}^{\text{střední hodnota}}}{m}$$