Pravděpodobnost & statistika 1

Věty

Základní vlastnosti

V pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí pro $A, B \in \mathcal{F}$:

1) $P(A)+P(A^c)=1$
2) $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$
3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4) $P(A_1\cup A_2\cup\dots)\le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (subaditivita, Booleova nerovnost) (*) A_i nemusí být disjunktní

dk

1) $\Omega = A\cup A^c$

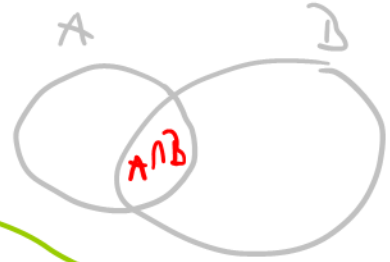
$1=P(\Omega)=P(A)+P(A^c)$

2) $B=A\cup(B\setminus A)$ protože $A\subseteq B$

$P(B)=P(A)+\underbrace{P(B\setminus A)}_{\ge 0}\ge P(A)$

3)

$$P(A) = P(A\setminus B) \cup P(A\cap B)$$



$$P(B) = P(B\setminus A) \cup P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow$$

$$P(A\cup B) = P(A\setminus B)\cup P(A\cap B) + P(B\setminus A)\cup P(A\cap B) - P(A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

4) použijeme trik "zdisjunktnění"

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus A_2$

...

$$\rightarrow \boxed{B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j}$$

$\rightarrow$ 1) $B_i \subseteq A_i$

2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

3) $\bigcup B_i = \bigcup A_i$

$$\rightarrow P\left(\bigcup A_i\right) = P\left(\bigcup B_i\right) = \sum P(B_i) \leq \underline{\underline{\sum P(A_i)}}$$

$\blacksquare$

Zřetězené podmiňování

Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Dk z definice p.p. RL

důsledek def. podm. psti:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

$$= \underline{\underline{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}}$$

$\blacksquare$

Rozklad Ω pro P

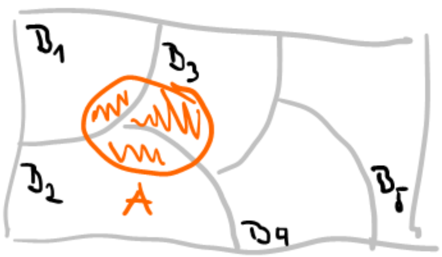
Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$P(A) = \sum (A | B_i) P(B_i)$$

Dk z definice p.p. LR

důsledek def. podm. psti :

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B)$$



$\rightarrow \quad A = \bigcup (A \cap B_i)$

$$P(A) = \bigcup P(A \cap B_i) = \underline{\underline{\sum P(A | B_i) P(B_i)}}$$

Bayesova věta

Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω, $A \in \mathcal{F}$ a $P(A), P(B_j) > 0$, tak:

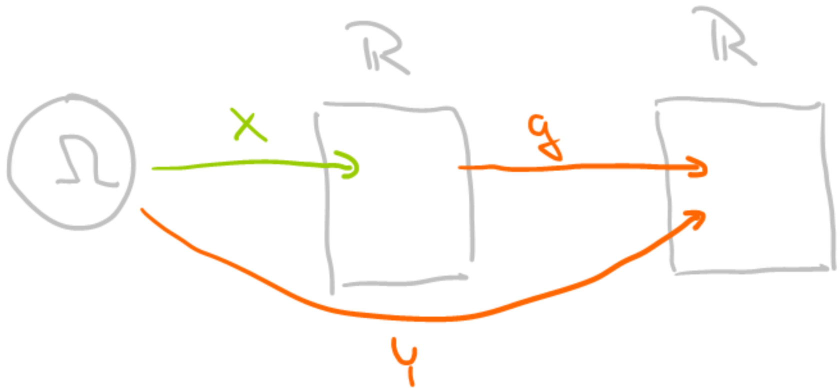
$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{=1}}$$

Dk pomocí věty o rozkladu Ω (LR)

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} \underbrace{=}_{\text{tohle platí}} \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\underbrace{\sum P(A|B_i)P(B_i)}_{\text{věta o rozkladu } \Omega}}$$

LOTUS

Pro reálnou fci g a diskrétní m.v. X je $g(X)$ také diskrétní m.v.



$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, Y = g(\mathrm{Im}\, X)$

potřebujeme ověřit 2 podm. d.m.v.

1) $|\mathrm{Im}\, Y| \leq |\mathrm{Im}\, X|$

protože $\mathrm{Im}\, X$ je spočetná, je i $\mathrm{Im}\, Y$ spočetná

2) $$Y^{-1}(y) = X^{-1}(g^{-1}(y)) = \bigcup_{g(x)=y,\ x \in \mathrm{Im}(X)} X^{-1}(x)$$

což je spočetné sjednocení a $X^{-1}(x) \in \mathcal{F}$, což je množina uzavřená na spoč. sjednocení

Pokud X je d.m.v a g je reálná fce, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} g(x) P(X = x)$$

Dk

Přeznačme: $Y = g(X)$, $I = \mathrm{Im}(X)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(Y) = g(I)$

z def: $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y = y) = \sum_{y \in g(I)} y \cdot P(Y = y)$$

suma má jen 1 prvek, jinak by $g(x)$ nebyla fce.

$$= \sum_{y \in g(I)} y \cdot \sum_{g(x) = y,\ x \in I} P(X = x) = \sum_{x \in I} \boxed{\sum_{y = g(x)} y} \cdot P(X = x) = \sum_{x \in I} \boxed{g(x)} \cdot P(X = x)$$

$\blacksquare$

Vlastnosti $\mathbb{E}$

Nechť X, Y jsou diskrétní m.v. a $a, b \in \mathbb{R}$

1) Pokud $P(X \geq 0) = 1$ & $\mathbb{E}(X) = 0$ tak $P(X = 0) = 1$ tedy, pokud je X vždy nezáporná a stř. je 0 musí být $P(X=0)=1$

2) Pokud $\mathbb{E}(X) \geq 0$ tak $P(X \geq 0) > 0$

3) $\mathbb{E}(a \cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$

4) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Dk

1) $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{P(X = x)}_{\geq 0} = 0$

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x) \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0$ v sumě musí být nezáp. sčítanci

3) $g(x) = (a \cdot x + b)$ pomocí lotusu

$\mathbb{E}(X) = \sum g(x) P(X=x)$

$$\sum (ax + b) P(X = x) = a \sum x \cdot P(X = x) + \sum b \cdot (X = x) = \underbrace{a \sum x \cdot P(X=x)}_{\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\sum P(X=x)}_{1}$$

$$= \underline{\underline{a \cdot \mathbb{E}(X) + b}}$$

4) $g(X,Y) = (x+y)$, $\overset{\text{linearita } \mathbb{E}\text{, pro } a,b=1}{\mathbb{E}(X+Y)} = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} (x+y)\, P(X=x, Y=y) = \sum\sum x\, P(X=x, Y=y) + \sum\sum y\, P(X=x,Y=y)$

věta o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x\in\mathrm{Im}(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)} = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) + \sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot P(Y=y) = \underline{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

■

Rozklad Ω pro $\mathbb{E}$

Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1,2,\ldots} \mathbb{E}(X|B_i)\, P(B_i)$$

kdykoli má součet smysl

(*) sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0

Dk RL

$$\sum_{i=1,2,\ldots} \mathbb{E}(X|B_i) P(B_i) = \sum_i \overbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x|B_i)}^{\text{def. podm. stř. hod.}} \cdot P(B_i) = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \overbrace{\sum_i P(X=x|B_i) \cdot P(B_i)}^{\text{věta o rozkl. } \Omega \text{ pro } P \,=\, P(X=x)}$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X=x) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X)}}$$

■

II. definice rozptylu

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Dk pomocí linearity $\mathbb{E}$ LR

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\cdot\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right)$$

* použijeme zobecněnou VOL $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}(aX+bY+cZ) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c\mathbb{E}(Z)$

podle ní:

$$\mathbb{E}\Big(X^2 - \underbrace{2\mathbb{E}X}_{\text{konst}}\cdot X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\text{konst}}\Big) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \underline{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$\blacksquare$

Obecný vzorec $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

Mějme disk. n. v. X, Y potom:

1) $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \;\&\; Y=y) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P_{X,Y}(x,y)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $P_Y(y) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P_{X,Y}(x,y)$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}$

Dk

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P\Big(\bigcup_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \;\&\; Y(\omega) = y\}\Big)$$

$$= \underline{\underline{\sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x \;\&\; Y=y)}}$$

$\blacksquare$

Funkce náh. vektoru

Nechť X, Y jsou n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a nechť $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom je

$Z = g(X,Y)$ n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a platí: $Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} g(x,y) \underbrace{P(X = x, Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)}$$

Dk (jako Lotus)

Linearita $\mathbb{E}$

(*) důsledek věty o fci náh. vektoru

Pro n.v. X, Y a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Dk

pomocí věty o fci náh. vektoru (LR)

$\underbrace{g(x,y) = ax + by}$, potom:

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} g(x,y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} ax \, P(X=x, Y=y) + \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} by \, P(X=x, Y=y)$$

$$= a \cdot \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \underbrace{\sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} P(X=x, Y=y)}_{P(X=x)} + b \cdot \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} y \cdot \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} P(X=x, Y=y)}_{P(Y=y)}$$

(*) z věty o $P_{X,Y} \to P_X, P_Y$

$$= a\cdot\sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} x\cdot P(X=x) + b\cdot\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)} y\cdot P(Y=y)$$

$$= \underline{\underline{a\cdot\mathbb{E}(X) + b\cdot\mathbb{E}(Y)}}$$

Součin $\mathbb{E}$ nezávislých m.v.

Pro nezávislé diskrétní m.v. X, Y platí:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

(*) $\mathbb{E}(X\cdot X) \neq \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X$

skoro vždy je X závislá sama na sobě

(*) je to implikace, takže:

nezávislost $\rightarrow$ $\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$

Zato:

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) \not\Rightarrow$ nezávislost

Dk

$g(x,y) = x\cdot y$

$$\mathbb{E}(XY) \overset{\text{LOTUS}}{=} \sum_{x\in\mathrm{Im}(X)}\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)} (x\cdot y)\, P(X=x, Y=y) \overset{\text{z nezávislosti}}{=} \sum_{x\in\mathrm{Im}(X)}\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)} x\cdot y\cdot P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_{x\in\mathrm{Im}(X)} x\cdot P(X=x)\cdot\sum_{y\in\mathrm{Im}(Y)} y\cdot P(Y=y) = \underline{\underline{\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)}}$$

Součet nezávislých n.v. "konvoluce"

Pokud X, Y jsou n.n.v., má jejich součet $Z = X + Y$ pstní. funkci:

$$P(Z=z) = \sum_{x \in Im(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

Dk z def. nezávislosti n.v. LR

víme, že pro $Z = X+Y$ platí:

$$\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = z\} = \bigsqcup_{x \in Im(X)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \;\&\; Y(\omega) = z - x\}$$

$$P(Z=z) = \sum_{x \in Im(X)} P(X=x, Y=z-x)$$ což platí obecně (tedy i pro závislé n.v.)

(*) pro X, Y nezávislé to ale jde přepsat jako:

$$\sum_{x \in Im(X)} P(X=x) \cdot P(Y=z-x)$$

∎

Práce s hustotou

Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X. Pak:

1) $P(X=x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$ pro $\forall a \le b \in \mathbb{R}$

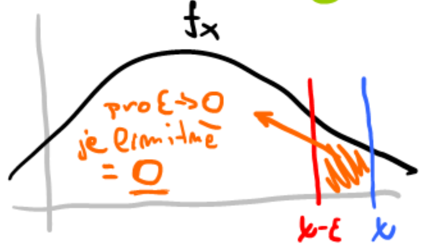
Dk

(*) z (2) $\overset{\text{triviálně}}{\Rightarrow}$ (1) pro $(a=b=x)$, protože integrál přes nulový interval $=0$

1) LR

$$P(X=x) \overset{\text{podle věty o spojitosti pravděpodobnosti}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} P(x-\varepsilon < X \le x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} P(X \le x) - P(X \le x-\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f_X(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(x)\,dx \overset{\text{Podle nějaké věty z analýzy}}{=} \underline{\underline{0}}$$



2) LR

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) + \underbrace{P(X=a)}_{=0,\ \text{plyne z (1)}}$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{\int_a^b f_X(t)\,dt}}$$

∎

Spojitý LOTUS

Pokud je X s.n.v s hustotou f_X a g je reálná funkce, tak:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot dx$$

Dk

vynecháváme kvůli složitosti, myšlenka:

$$\int_{t}^{t+\varepsilon} f_X = P(t \leq X \leq t+\varepsilon)$$ ... odpovídá psti, že jsme blízko t, poté by se násobilo $g(x)$ ...

Universalita uniformního rozdělení

Nechť F je rostoucí spojitá funkce s $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ a $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$. Potom:

1) Nechť $U\sim U(0,1)$ a $X=F^{-1}(U)$. Pak F je distribuční funkcí X.

2) Nechť X je n.v. s distribuční fcí $F=F_X$. Pak $F(X)\sim U(0,1)$

Př

$$F=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$$

$$X \to F(X)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} X+\frac{1}{2}$$

obecně:

$$\Omega \xrightarrow{X(\omega)} \mathbb{R} \xrightarrow{F(x)} \mathbb{R}$$

"jak se napálit":

$F(x)=P(X\le x)$ z def $\to$ mohli bychom si myslet, že $F(X)=P(X\le X)=1$ to ale NEJDE!

rozepsáno korektně:

$F(X(\omega))=P(X\le X(\omega))$ ta X nejsou stejná věc

Dk

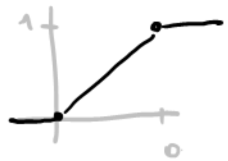
1)

$U \sim U(0,1)$, $X = F^{-1}(U)$ $\longrightarrow$ F^{-1} je dobře def na $(0,1)$ z předpokladů pro F

z def.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

$$\Rightarrow \underline{F_X = F}$$



2)

X má d.fci F, $Y = F(X)$ chceme $Y \sim U(0,1)$

z def. protože F je rostoucí

$$P_Y(y) = P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le \underbrace{F_Y^{-1}(y)}_{y \in (0,1)}) = F_Y(F^{-1}(y)) = y$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$ protože $Y = F(X)$ ... kvůli chování $F(X)$

(*)

① ⇒ pokud umíme generovat n.v. $X \in (0,1)$, dokážeme vyrobit n.v. s lib. distribucí

② ⇒ když máme nějakou n.v. a "myslíme si" že má distribuci X_Y, tak ji do dané distribuční fce dosadíme a otestujeme, že co vyjde má uniformní rozdělení

STOU

Sdružený spojitý LOTUS

$$\mathbb{E}(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\cdot dy$$

odvodíme: $\mathbb{E}(aX+bY+c) = a\cdot\mathbb{E}(X) + b\cdot\mathbb{E}(Y) + c$

$$\mathbb{E}(g(x,y)) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (ax+by+c)\cdot f_{X,Y}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} ax\cdot f_{X,Y}(x,y) + \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} by\cdot f_{X,Y}(x,y)}_{b\cdot\mathbb{E}(Y)} + \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} c\cdot f_{X,Y}(x,y)}_{=c}$$

analogicky

$$a\cdot\iint_{\substack{x=-\infty\\ y=-\infty}}^{+\infty} x\cdot f_{X,Y}(x,y) = a\cdot\int_{x=-\infty}^{+\infty} x\cdot \underbrace{\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)}_{\sim\text{"}P(X=x)\text{"} \,=\, f_X(x)} = a\cdot\underbrace{\int_{x-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)}_{=\mathbb{E}(X)} = a\cdot\mathbb{E}(X)$$

Nezávislé spojité n.v.

Nechť X,Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) X,Y jsou nezávislé

2) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Dk

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ z def. nezávislosti spojitých n.v. (LR)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(s)\cdot f_Y(t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

$$= \underline{F_X(x) \cdot F_Y(y)}$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

protože jsou nezávislé

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} F = \left[\frac{\partial}{\partial_x} F_X(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial_y} F_Y(y)\right] = \underline{f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

derivace podle obou proměnných

(*) derivujeme jen tam, kde je funkce spojitá (jinde to nemá smysl)

Součet spojitých n.v.

Nechť jsou X, Y spojité n.n.v. Pak $Z = X + Y$ je také spojitá n.v.

a její hustotu dostaneme jako konvoluci funkcí f_X, f_Y neboli:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Důk

vynecháme, obdobný diskrétnímu případu

Podmiňování

Rozklad Ω pro spojité X, říká:

$$f_X(x) = \sum_i f_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i)$$

$$F_X(x) = \sum_i F_{X|B_i}(x) \cdot P(B_i)$$

hustotní i distribuční fce jdou zapsat pomocí rozboru případů dk

speciální příklad byl na cvičení: "dva algoritmy"

Podmíněná, sdružená a marginální hustota

z definice:

$$\underbrace{f_{X|Y}(x,y)}_{\text{podmíněná}} = \underbrace{f_Y(y)}_{\text{marginální}} \cdot \underbrace{f_{X|Y}(x|y)}_{\text{sdružená}}$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

z úpl. věty:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)\, dy$$

dk

LR

vyjdeme z definice podm. hustoty, pomocí ekvivalence přejdeme k distribuční fci a ukážeme, že když zintegrujeme očekávanou hustotní $f_X(x)$ fci skutečně dostaneme distribuční fci $F_X(x)$ a proto to platí!

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\cdot dy$$

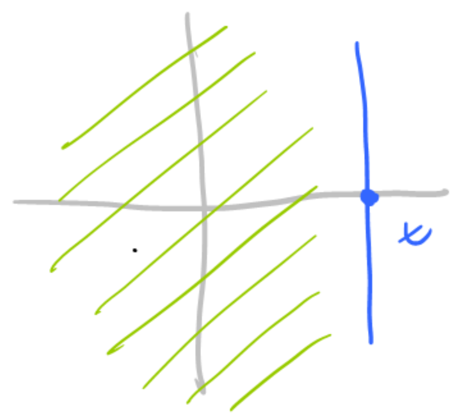
ekvivalentně:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt$$

(*) tohle je vlastně integrál přes nějakou množinu B

$$= \int_B f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt = P((X,Y)\in B) = P(X\le x) = F_X(x)$$

B



tady integrujeme

Spojitá Bayesova věta

X, Y spojité n.v. s hustotami f_X, f_Y
a sdruženou hustotou $f_{X,Y}$

v diskrétním jsme chtěli:

$$P(A|B) \rightsquigarrow P(B|A)$$

nyní chceme

$$f_{X|Y} \rightsquigarrow f_{Y|X}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)}{\int_{y' \in \mathbb{R}} f_{X|Y'}(x|y')\, f_{Y'}(y')\, dy'}$$

dk z definice podm. hustotní fce

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)}{\int_{y' \in \mathbb{R}} f_{X|Y'}(x|y')\, f_{Y'}(y')\, dy'}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)$$

$$f_X(x) = \int_{y'} f_{X,Y'}(x, y')\, dy' = \int_{y'} f_{X|Y'}(x|y') \cdot f_{Y'}(y')\, dy$$

druhá definice kovariance

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

dk (LR) z definice kovariance a linearity $\mathbb{E}$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big((X-\mathbb{E}(X))\cdot(Y-\mathbb{E}(Y))\Big)$$

$$= \mathbb{E}\big(XY - X\cdot\mathbb{E}(Y) - Y\cdot\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\big)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\cdot\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\text{konst}}) - \mathbb{E}(Y\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{konst}}) + \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{konst}}\cdot\underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\text{konst}})$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)\cdot(1)$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

■

(*) proč konstanta???

$\mathbb{E}(aX) = a\cdot\mathbb{E}(X)$

konstantu tedy vytkmu před aplikací "venkovní" střední hodnoty

důsledky

- $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X,X)$
- $\mathrm{cov}(X, a\cdot Y + bZ + c) = a\cdot\mathrm{cov}(X,Y) + b\cdot\mathrm{cov}(X,Z)$
- X,Y nezávislé $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$ (*) ukázali jsme pro diskrétní ale platí obecně

potom $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY) = 0$

Rozptyl součtu

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, potom platí:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)}_{=0 \text{ pro } X_i, X_j \text{ nezávislé}}$$

Pro nezávislé n.v. speciálně platí:

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

dk pro n.v. platí protože

dk LR substituce, def. rozptylu, zpětná substituce, definice kovariance

označme $Y_i = (X_i - \mathbb{E}(X_i))$, $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_i)$

$$var(X) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

zároveň:

$$= \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i \cdot Y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(X_i - \mathbb{E}(X_i)) \cdot (X_j - \mathbb{E}(X_j))}_{\text{z definice kovariance}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j)$$

to funguje protože tím, že sumy násobím, mám Y^2

∎

Cauchyho nerovnost

Nechť X, Y mají konečnou střední hodnotu a rozptyl. Potom:

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}$$ → důsledek pro korelaci: $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

dk

přednáška 7 ~ 24 min. WTF?!

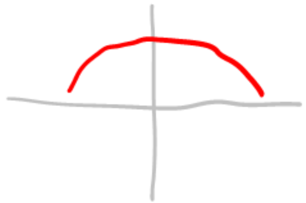
$\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}(XY)$ ... skalární součin na vekt. prostoru ∀ náh. vel. ∈ Ω

platí:

$$\langle X, X\rangle \geq 0$$
$$\langle X, X\rangle = \mathbb{E}(X^2)$$

konvexní

konkávní



Jensenova nerovnost

Nechť X má konečnou střední hodnotu a nechť je g konvexní reálná fce.

Potom:

$$\mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$$

⊛ pro konkávní fce platí nerovnost obráceně

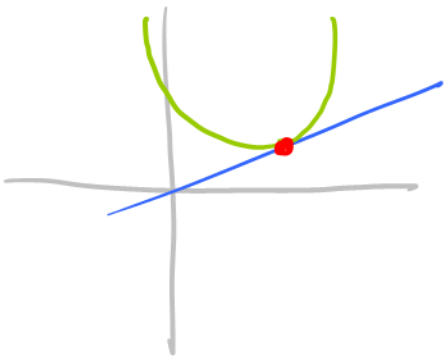
náhled:

$g(x) = x^2 \Rightarrow \mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$

protože:

$$\mathrm{var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}_{\text{podle 1. def. var}} \geq 0$$

dk



def. konvexní fce

$$\forall s\ \exists a,b:\ ax+b \leq g(x)\ \&\ as+b = g(s)$$

mějme: $s = \mathbb{E}(X)$

potom: $g(x) \geq ax+b \Rightarrow g(X) \geq aX+b \ \dots\ g(X(\omega)) \geq a(X(\omega))+b$

$$\mathbb{E}(g(X)) \geq \mathbb{E}(aX+b) \underbrace{=}_{\text{lin. } \mathbb{E}} a \cdot \mathbb{E}(X) + b \underbrace{=}_{s=\mathbb{E}(X)} as+b \underbrace{=}_{\text{konv. fce.}} g(s) \underbrace{=}_{s=\mathbb{E}(X)} g(\mathbb{E}(X))$$

Markovova nerovnost

Nechť $X > 0$. Potom:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

<u>dk</u> ind. vel., substituce, aplikace $\mathbb{E}$, zpětná substituce + linearita $\mathbb{E}$ (LR)

$I = [X \geq a]$ ... ind. m.v. jevu

$\mathbb{E}(I) = P(X \geq a)$

$I \leq \frac{X}{a}$ $\rightarrow \omega \in \Omega$ $\begin{cases} X(\omega) \geq a: & 1 \leq \frac{X(\omega)}{a} \\ X(\omega) < a: & 0 \leq \frac{X(\omega)}{a} \end{cases}$ (*) protože $X > 0$

$\mathbb{E}(I) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right)$

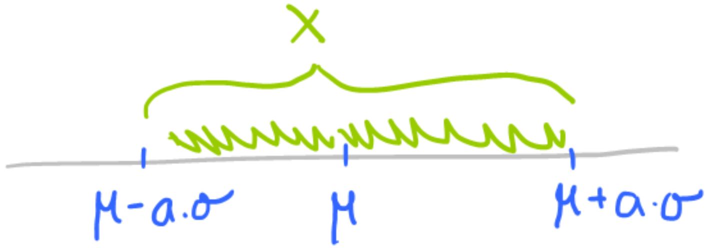
$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Čebyševova nerovnost

(*) koncentrační nerovnost → zabývá se koncentrací hodnot n.v. kolem její střední hodnoty

Nechť X má konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak:

$$P(|X-\mu| \ge a\cdot\sigma) \le \frac{1}{a^2}$$



dk dosadíme za Y, použijeme Markovovu ner. (LR)

$$Y = (X-\mu)^2 \ge 0 \qquad \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

$$P(|X-\mu| \ge a\cdot\sigma) = P\left(Y \ge (a\cdot\sigma)^2\right) \le \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2\cdot\sigma^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$P(X \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Markov

∎

Chernoffova nerovnost

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ kde X_i jsou n.n.v. nabývající hodnot ± 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Pak pro $t > 0$ platí:

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \leftarrow \quad \frac{\sigma^2}{t^2} \text{ Čebyšev}$$

bez důkazu

Silný zákon velkých čísel

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

Označme $S_n = \dfrac{(X_1 + \cdots + X_n)}{n}$ tzv. výběrový průměr. Pak platí:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \mu \quad \text{skoro jistě} \quad \to \quad P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} S_n = \mu\right\}\right) = 1$$

$\circledast$ Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ skoro jistě.

nebudeme dokazovat přímo kvůli náročnosti

Slabý zákon velkých čísel

"říká, k čemu se blíží průměr" (k $\mathbb{E}$)

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2.

Označme $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Potom pro $\forall \varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

(*) říkáme, že S_n konverguje k μ v pravděpodobnosti

dk

$$P\left(|S_n - \mu| > \frac{\varepsilon}{\sigma_n} \cdot \sigma_n\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_n}\right)^2} = \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}}}$$

(*) $n \to \infty$ bude vždy 0

proto jde o korektní použití Čebyševa

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{n} = \mathbb{E}(X_1) = \mu$$

$$\sigma_n^2 = \operatorname{var}(S_n) = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

∎

Centrální limitní věta

"říká, k čemu se blíží průměr & jak je průměr střední hodnoty odchýlený"

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

Označme $Y_n = \dfrac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2}}$

Pak pokud je F_n distribuční funkce Y_n, tak:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(*) říkáme, že posloupnost Y_n konverguje k $N(0,1)$ v distribuci

bez důkazu

co nám to umožní? přímým důsledkem věty je:

$P(a \leq Y_n \leq b) \to \Phi(b) - \Phi(a)$ což nám velmi zjednoduší výpočty

$$a \leq \frac{(X_1 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}} \leq b$$

$$\boxed{\begin{aligned} (X_1 + \dots + X_n) &\leq \sqrt{n}\, b + n\mu \\ \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n} &\leq \frac{b}{\sqrt{n}} + \mu \end{aligned}}$$

$$\mu - \frac{a}{\sqrt{n}} \leq \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n} \leq \mu + \frac{b}{\sqrt{n}}$$

Poznámky k lim. větám

CLV

$$Y_n = \frac{(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\cdots}{\sqrt{n}}$$

Proč odečítáme μ?

$\mathbb{E}(X_1) = \mu$

$\mathbb{E}(X_i-\mu) = 0$ ... centrování

každou X_i "vycentrujeme kolem nuly"
získáme tak distribuci, která je stejně vzdálená na obě strany

- - - - - - - - - - - - -

Proč dělíme $\sqrt{n}$?

v limitním případě se Y_n v distribuci natolik přiblíží $N(0,1)$, že $\sigma^2 \sim 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{(X_1+\dots+X_n)-n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} = \frac{(X_1+\dots+X_n)-n\mu}{\sqrt{n}}$$

slabý ZVČ

mluví o tom, že je čím dál tím méně pravděpodobné, že jsme "daleko" od $E(X)$

Vlastnosti empirické distrib. fce

Pro pevné x platí:

1) $\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = F(x)$

2) $\operatorname{var}(\widehat{F}_n(x)) = \dfrac{F(x)(1-F(x))}{n}$

3) $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$ ... emp. dist. fce konverguje k $F(x)$ v pravděpodobnosti

dk

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)}{n}$$

Označíme $Y_i = I(X_i \le x)$

$$S_n = \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} = \widehat{F}_n(x)$$

1) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(Y_i) = F(x) = \mu$

2) protože $Y_i \sim \mathrm{Bern}(\mu)$:

$$\operatorname{var}(Y_i) = \mu(1-\mu)$$

$$\operatorname{var}(S_n) = \frac{\mu(1-\mu)}{n}$$

3) $\mu = \mathbb{E}(S_n) = F(x)$

potom $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$, podle zákona velkých čísel

$\blacksquare$

DKW (Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz)

Nechť $X_1, \dots, X_n \sim F$ jsou n.n.v. a $\widehat{F}_n$ je jejich EDF a nechť je $\mathbb{E}(X_i)$ konečná.

Zvolme $\delta \in (0,1)$ a označme $\underbrace{\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n} \log\left(\frac{2}{\delta}\right)}}$. Pak platí $\forall x$:

$$P\left(\widehat{F}_n(x) - \varepsilon \le F(x) \le \widehat{F}_n(x) + \varepsilon\right) \ge 1 - \delta$$

$\varepsilon \to \frac{f(\delta)}{\sqrt{n}}$

(*) čím větší n, tím menší ε = tím přesnější výsledek (přičemž n je # pokusů $x_1, \dots, x_n$)

bez důkazu

2. definice MSE

$$MSE = \text{bias}_\vartheta(\hat{\Theta}_m)^2 + \text{var}_\vartheta(\hat{\Theta}_m)$$

dk

$$\mu = \mathbb{E}(\hat{\Theta}_m)$$

$$MSE = \mathbb{E}\left((\hat{\Theta}_m \underbrace{- \mu + \mu}_{=0} - \vartheta)^2\right) = \mathbb{E}\left((\hat{\Theta}_m - \mu)^2 + 2(\hat{\Theta}_m - \mu)(\mu - \vartheta) + (\mu - \vartheta)^2 \right)$$

$$\underset{\text{Lin }\mathbb{E}}{=} \mathbb{E}\left((\hat{\Theta}_m - \mu)^2\right) + 2 \cdot \mathbb{E}\underbrace{(\hat{\Theta}_m - \mu)}_{\substack{=0 \\ \text{zvc}}}\underbrace{(\mu - \vartheta)}_{\text{konst.}} + (\mu - \vartheta)^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left((\hat{\Theta}_m - \mu)^2\right)}_{\mathbb{E}((x - \mathbb{E}x)^2)} + \underbrace{(\mu - \vartheta)^2}_{(\mathbb{E}(\hat{\Theta}) - \vartheta)^2} = \text{var}_\vartheta(\hat{\Theta}_m) + \text{bias}_\vartheta(\hat{\Theta}_m)^2$$

∎

(*) důsledek, pro nulový bias, hledám odhad s co nejmenším rozptyle

Parametry výběrového momentu a rozptylu

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$$ výběrový průměr = odhad $\mathbb{E}$

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$
$$\hat{S}_n = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$
odhady rozptylu

1) $\overline{X}_n$ je konzistentní nestranný odhad $\mu = \mathbb{E}(X_i)$

2) $\overline{S}_n$ je konzistentní asymptoticky nestranný odhad $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_i)$

3) $\hat{S}_n$ je konzistentní nestranný odhad $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_i)$

dk

1) $$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{\mathbb{E}(X_1)+\dots+\mathbb{E}(X_n)}{n} = \mu$$ $\Rightarrow$ je nestranný, podle ZVČ je konzistentní

2) $$\mathbb{E}(\overline{S}_n) = \mathbb{E}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$$
$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)-(\overline{X}_n-\mu)\right)^2\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\overline{X}_n-\mu)+(\overline{X}_n-\mu)^2\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X}_n-\mu)\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}_{\substack{= n\cdot\overline{X}_n - n\mu \\ = n(\overline{X}_n-\mu)}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_n-\mu)^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X}_n-\mu)\cdot n(\overline{X}_n-\mu) + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_n-\mu)^2}_{\frac{1}{n}\cdot n(\overline{X}_n-\mu)^2} \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}_{\frac{1}{n}\cdot n(X_i-\mu)^2} - 2(\overline{X}_n-\mu)^2 + (\overline{X}_n-\mu)^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left((X_i-\mu)^2 - (\overline{X}_n-\mu)^2 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left((X_i-\mu)^2\right) - \mathbb{E}\left((\overline{X}_n-\mu)^2\right)$$

$$= \operatorname{var}(X_i) - \operatorname{var}(\overline{X}_n)$$

$$\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \operatorname{var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \operatorname{var}(X_i) = \frac{\operatorname{var}(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \underline{\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2}$$

3)

$$\mathbb{E}(\hat{S}_n) = \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\text{Besselova korekce}} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2}_{\mathbb{E}(\bar{S}_n)} = \sigma^2$$

$\blacksquare$

vztah r-tých momentů

$\widehat{m_r}(\vartheta)$ je nestranný konzistentní odhad $m_r(\vartheta)$

dk

$$\mathbb{E}(\widehat{m_r}(\vartheta)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^r)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i^r)}_{m_r(\vartheta)} = m_r(\vartheta)$$ $\Rightarrow$ nestranný

podle ZVČ pro (X_i^r): $\widehat{m_r}(\vartheta) \xrightarrow{\text{skoro jistě}} m_r(\vartheta)$ $\Rightarrow$ konzistentní

$\blacksquare$

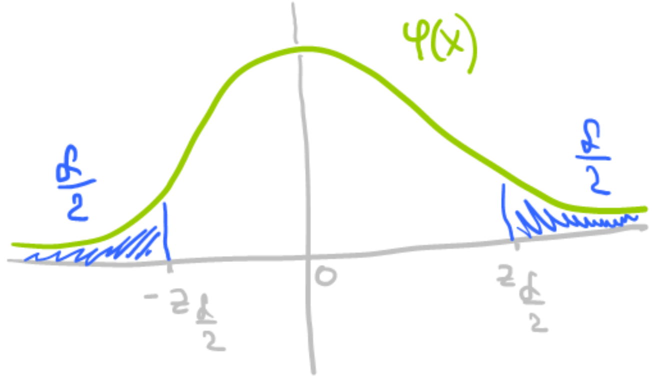
(*) dá se spočítat i jako soustava rovnic

$$\underbrace{m_r(\vartheta)}_{\text{spočteme z } F_\vartheta} = \underbrace{\widehat{m_r}(\vartheta)}_{\text{spočteme z naměřených dat}}$$

Intervalové odhady normální veličiny

Mějme $X_1,\dots,X_n$ náhodný výběr z $N(\mu,\sigma^2)$. Známe σ, chceme určit μ.

$\alpha \in (0,1)$. Nechť $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2}$ a $\hat{\Theta}_n = \overline{X}_n$



$$C_n := \left[\hat{\Theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \hat{\Theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

$Z \sim N(0,1)$

Pak $P(C_n \ni \mu) = 1-\alpha$

dk

máme $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \overline{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

protože máme-li $X_1, X_2 \sim N(\mu,\sigma^2)$

- tak i X_1+X_2 je normální
- $E(\overline{X}_n) = \mu$, $var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim (0,1)$$

$X = \mu + \sigma\cdot Z$

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ & $P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

$P(|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalové odhady pomocí CLV

Mějme $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.
známe σ, chceme určit ϑ. $\delta \in (0,1)$. Nechť $\Phi(z_{\frac{\delta}{2}}) = 1 - \frac{\delta}{2}$. $\hat{\Theta}_n = \overline{X_n}$

$$C_n := \left[\hat{\Theta}_n - z_{\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \hat{\Theta}_n + z_{\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Pak $P(C_n \ni \vartheta) \to 1 - \delta$ (limitně se blíží)

dk

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \vartheta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \qquad \text{potom} \qquad Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$$ podle centrální limitní věty

díky tomu víme: $\lim\limits_{n \to \infty} P(Z_n \geq z_{\frac{\delta}{2}}) = \delta$

$\to$ jako o větu výše $\to$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\overline{X_n} - \vartheta| \leq z_{\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \delta$$

(*) pro dost velká n, ignorujeme že veličiny nemají $\sim N(\vartheta, \sigma^2)$, tím že používáme průměr se to tak „bude chovat“

☒

Intervalové odhady pomocí studentova rozdělení

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\vartheta, \sigma^2)$. Chceme určit ϑ, σ neznáme.

$\alpha \in (0,1)$. Nechť $\Psi_{n-1}(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. $\widehat{\Theta}_n = \overline{X}_n$, $\widehat{S_n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$

$$C_n := \left[\widehat{\Theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}}, \widehat{\Theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}} \right]$$

Pak $P(C_n \ni \vartheta) = 1 - \alpha$

dk

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \vartheta}{\frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}}}$$ má studentovo t-rozdělení $\to$ víme, že Ψ_{n-1} se lim. chová jako Φ

proto: $P(|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$

$\to$ jako u posl. 2 vět ...

$$P\left(|\overline{X}_n - \vartheta| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\widehat{S_n}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

$\blacksquare$

O pearsonově statistice

$$T \xrightarrow{d} \chi^2_{k-1}$$

když n jde do nekonečna, blíží se χ kvadrát

bez dk

Platnost pro $k=2$:

$k=2$ $\quad \underbrace{X_1 + X_2 = n}$ → protože je n pokusů

$X_2 = n - X_1$, $\quad p_1 + p_2 = 1$, $\quad p_2 = 1 - p_1$

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2}{\mathbb{E}(X_1)} + \frac{(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2}{\mathbb{E}(X_2)}$$

$(n - X_1 - n + np_1)^2$
$= (-X_1 + np_1)^2$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{\left(n - X_1 - n(1-p_1)\right)^2}{np_1}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(np_1 - X_1)^2}{np_1} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_2} = \frac{(X_1 - np_1)^2 \cdot p_2 + (X_1 - np_1)^2 \cdot p_1}{np_1 p_2}$$

$$= \frac{(X_1 - np_1)^2 \overbrace{(p_2 + p_1)}^{=1}}{np_1 p_2} = \left(\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2 = \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1)$$

víme $\mu = \mathbb{E}(X_i)$
$\sigma^2 = np(1-p)$

Zbylé varianty Bayesovy věty

1) X spojitá, Y diskrétní

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot P_Y(y)}{\sum\limits_{y' \in \mathrm{Im}(Y)} f_{X|Y'}(x|y') \cdot P_{Y'}(y')}$$

2) X diskrétní, Y spojitá

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{X|Y}(x,y) \cdot f_Y(y)}{\int\limits_{y' \in \mathbb{R}} P_{X|Y}(x,y) \cdot f_{Y'}(y')\, dy'}$$