



Fundamentos Matemáticos - Vetores

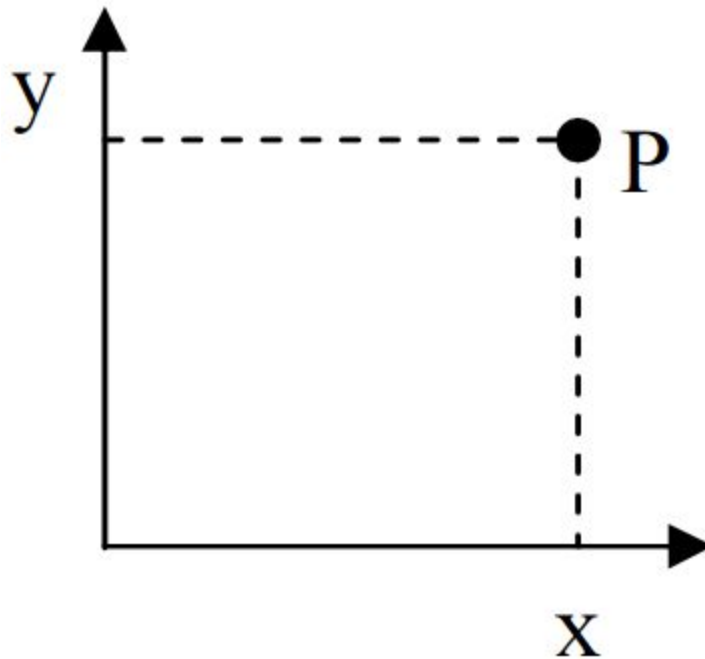
Prof. Guilherme Chagas Kurtz
Prof. Herysson R. Figueiredo

Pontos

- Todo objeto, dentro de um ambiente, possui uma **localização**;
- Essa localização é dada por um **ponto no espaço**, que pode ser em duas dimensões (x,y) ou três dimensões (x,y,z) ;
- Desta forma, um ponto P pode ser representado por $P = (x,y)$ ou $P = (x,y,z)$.

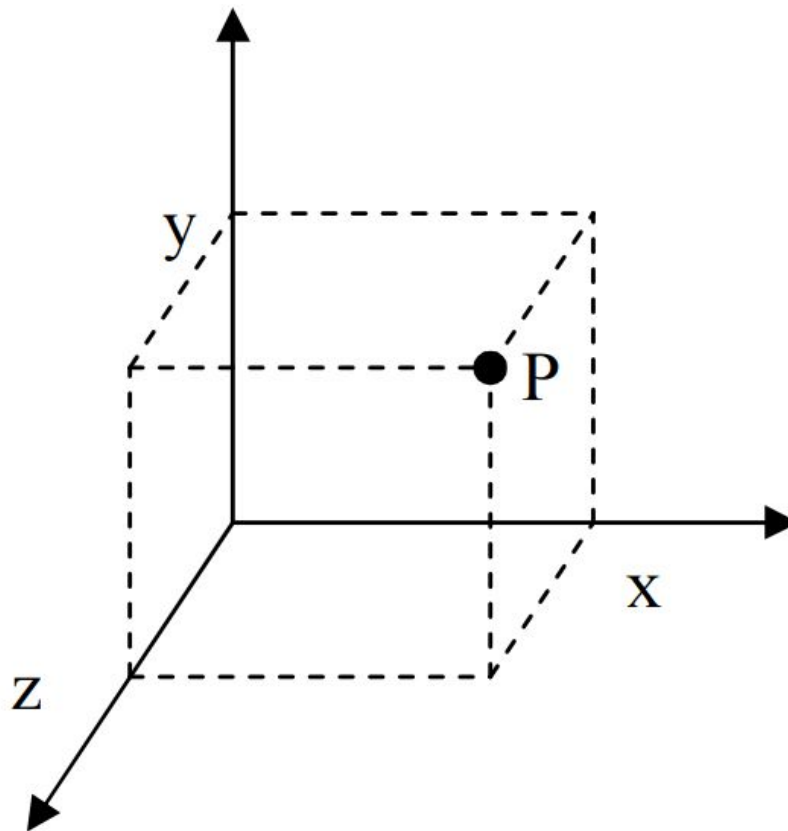
Pontos

- Ponto P no plano 2D:



Pontos

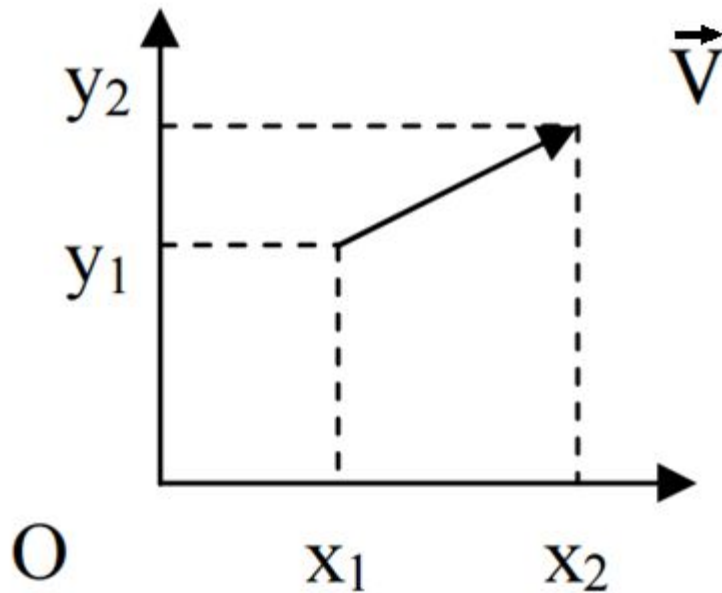
- Ponto P no espaço 3D:



Vetores

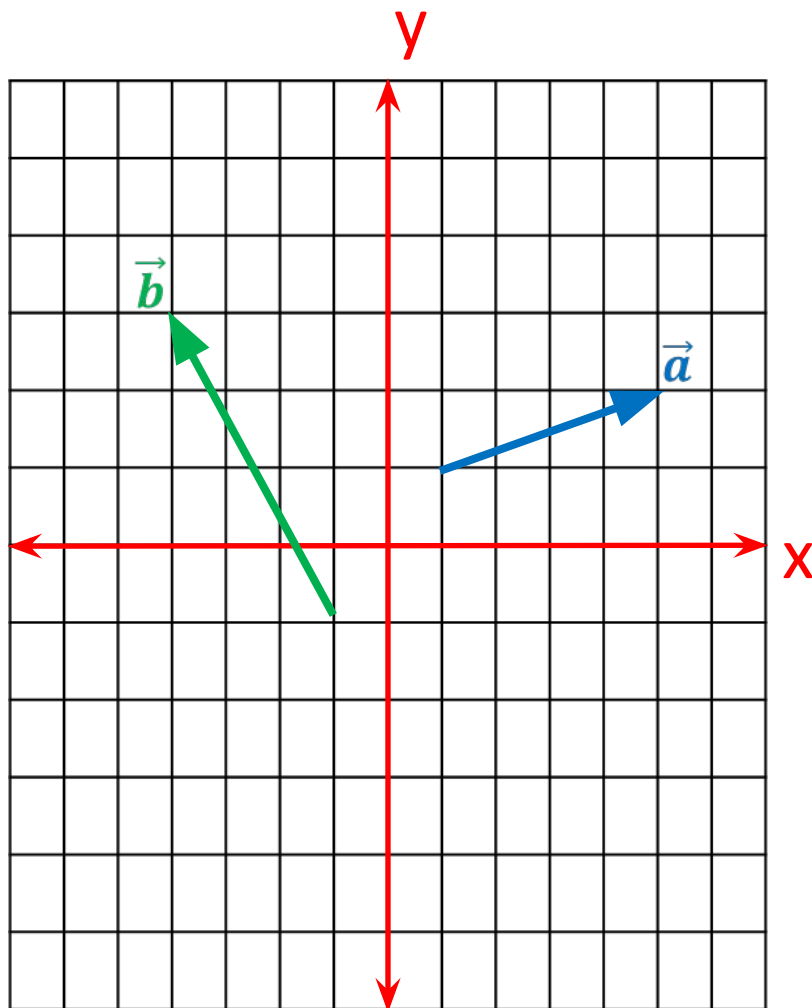
- Um vetor é um segmento de reta que possui um **tamanho** (ou módulo, comprimento, magnitude) e uma **direção**;
- Além disso, possui também um **ponto de origem** e um **ponto de destino**;
- Para simplificar a representação de vetores, geralmente considera-se que o **ponto de origem** de um vetor é a **origem de um sistema de coordenadas**;
- Um vetor também pode ser definido pela **diferença entre dois pontos**.

Representação de Vetores



- Para representar simbolicamente um vetor, geralmente utilizamos uma letra com uma seta em cima \vec{v} ou simplesmente \mathbf{v} , em negrito;
- ▶ Para especificar um vetor \vec{v} , em duas dimensões, basta definirmos o mesmo através do quanto ele se desloca em x e em y.
- ▶ Neste caso, o vetor \vec{v} da figura ao lado pode ser especificado por $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

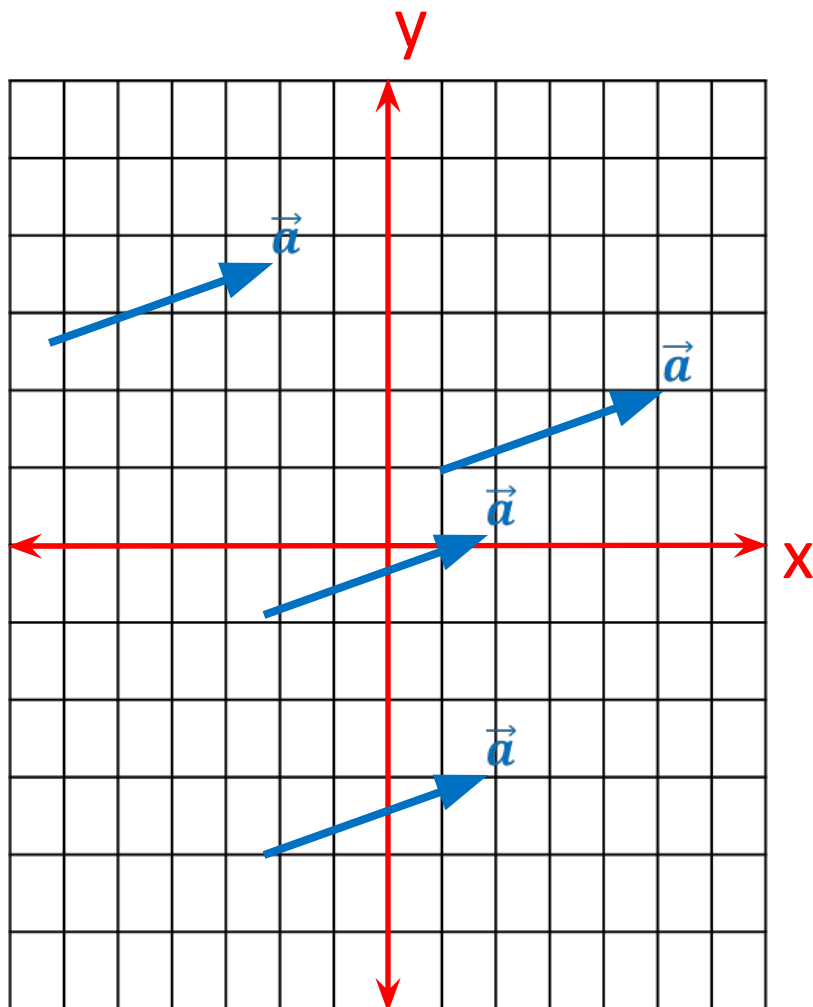
Representação de Vetores



• $\vec{a} = \langle 4, 1 \rangle$

▶ $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$

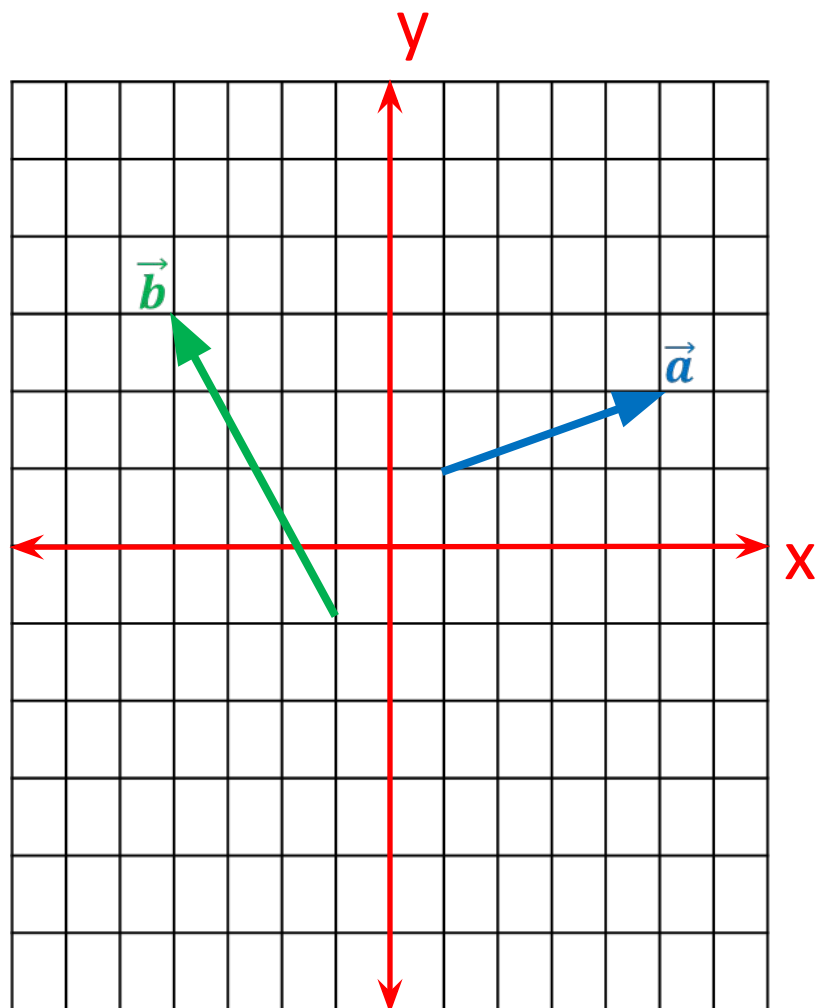
Representação de Vetores



• $\vec{a} = \langle 4, 1 \rangle$

- Note que o a especificação do vetor \vec{a} define somente sua magnitude e direção, ou seja, todos os vetores ao lado representam o vetor \vec{a} , pois todos tem a mesma direção e magnitude;

Representação de Vetores

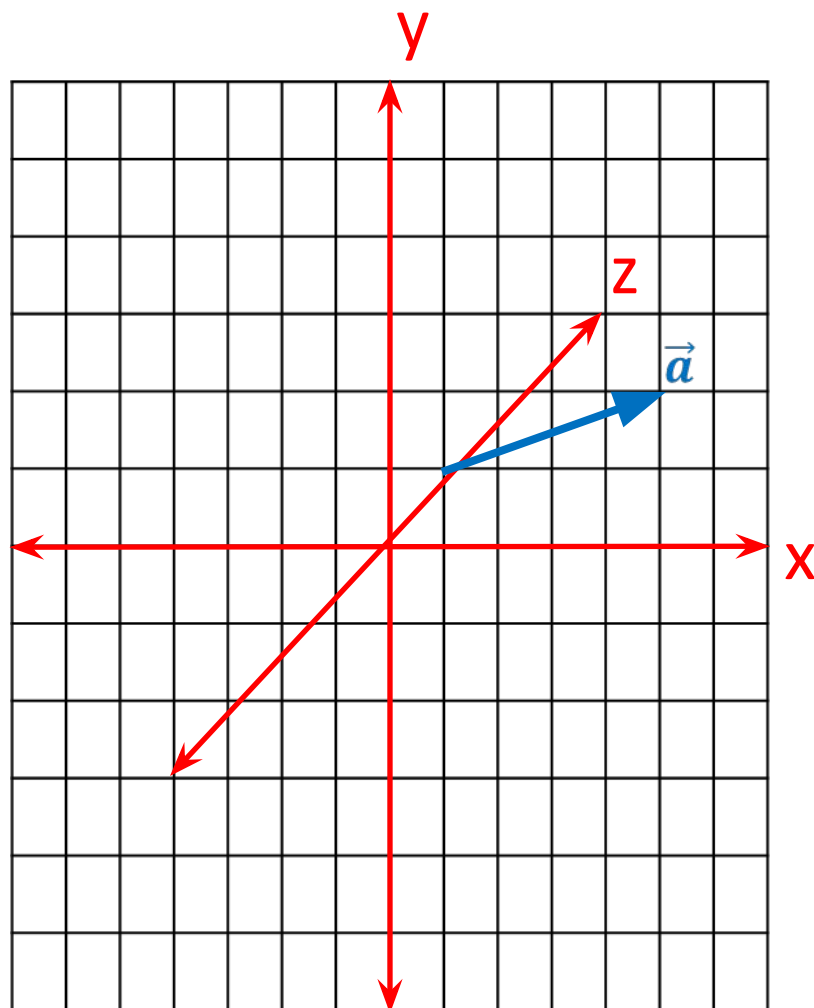


- Uma outra notação de vetores em Álgebra Linear é através de um vetor-coluna, tal como:

- ▶ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

- ▶ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Representação de Vetores



• O mesmo vale para 3 dimensões:

▶ $\vec{a} = \langle 4, 1, 0 \rangle$ ou $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Adição de vetores

- A adição de dois vetores tem como resposta um novo vetor;
- ▶ Dados os seguintes vetores: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
- ▶ Para realizar a soma de dois vetores, basta somarmos as mesmas partes/componentes de cada um:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 + (-3) \\ 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

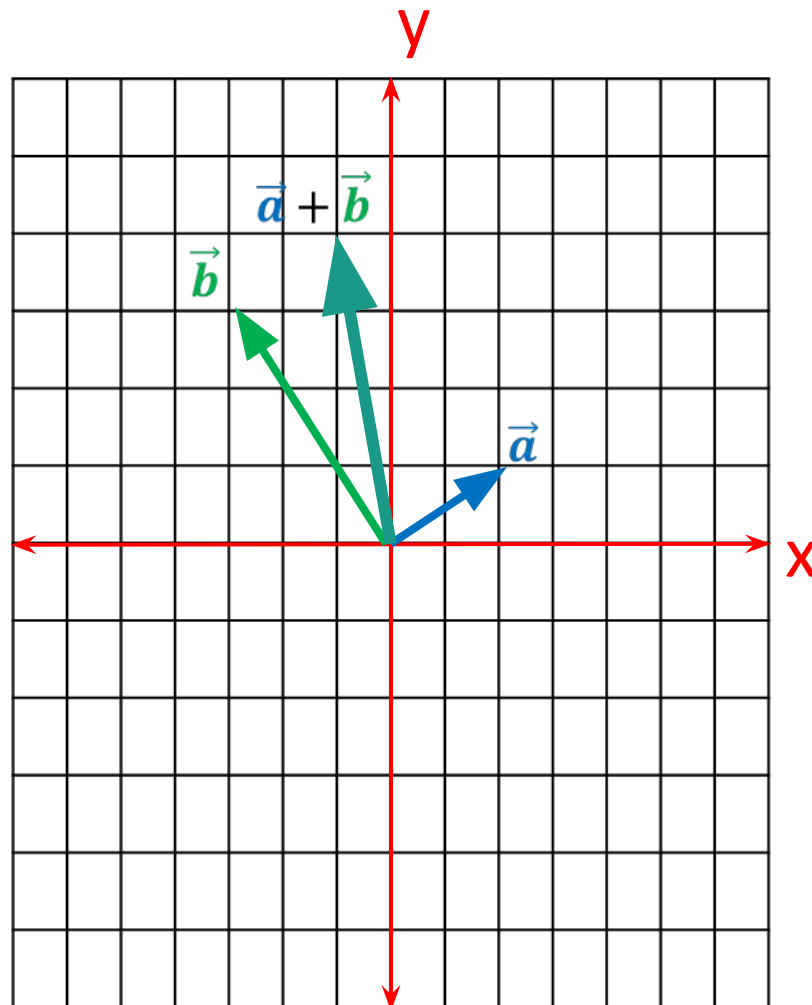
Adição de vetores

- Representação gráfica:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

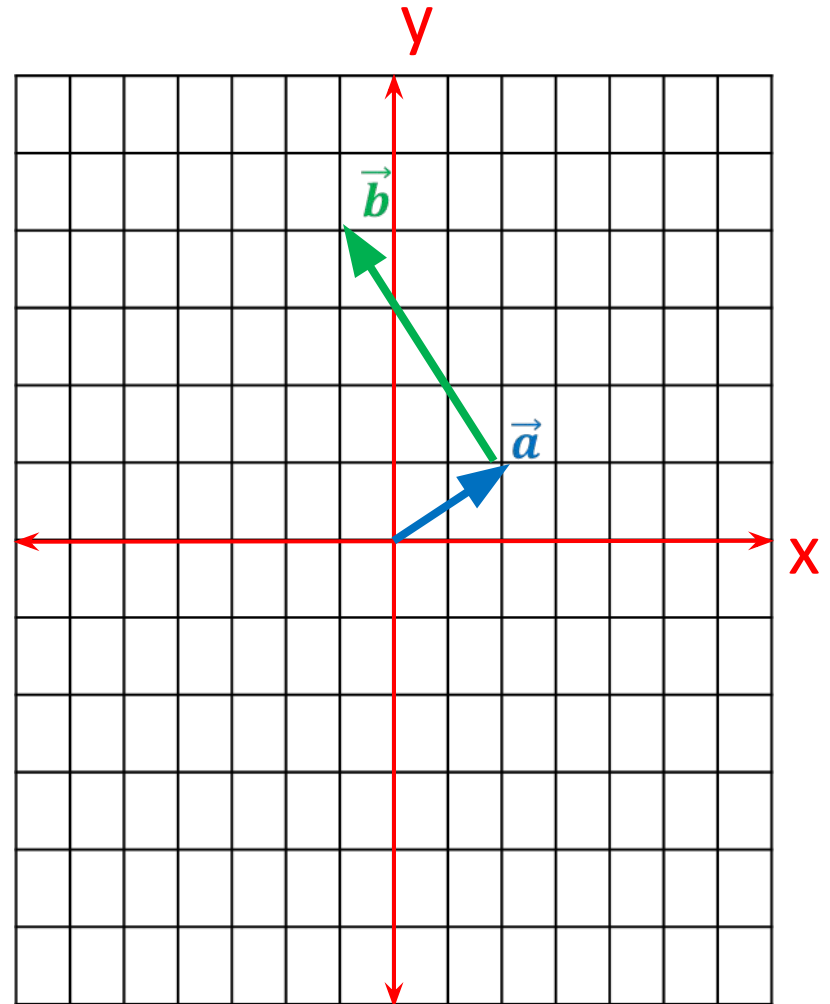
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 + (-3) \\ 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



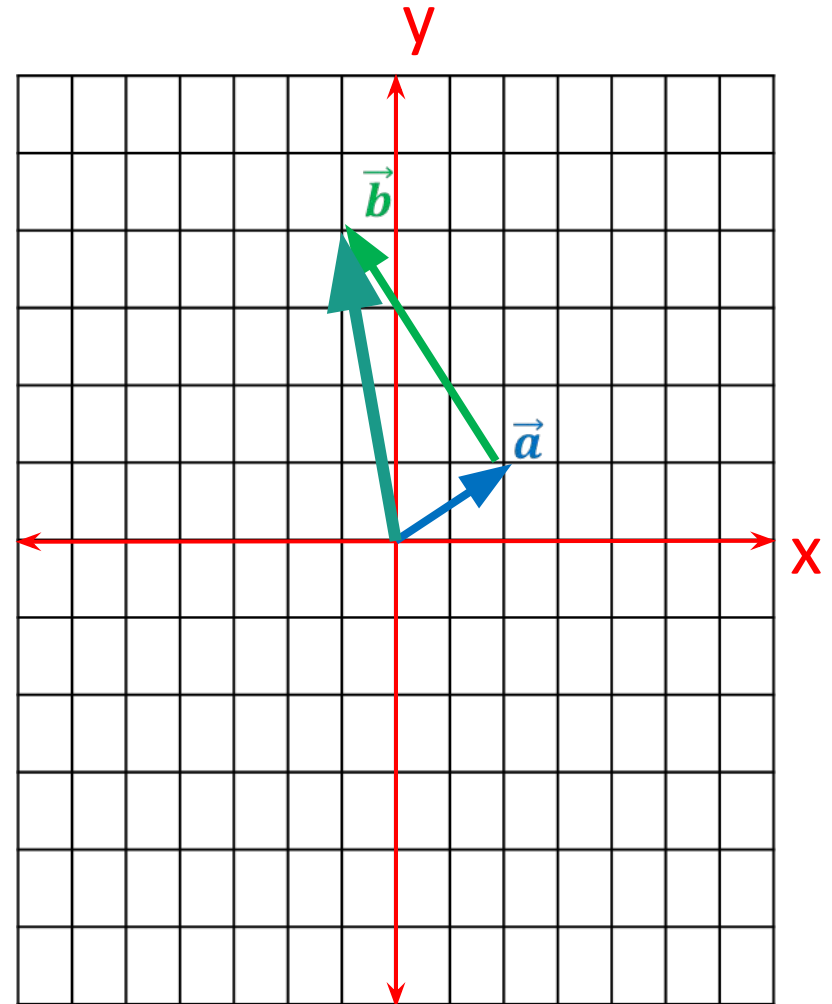
Adição de vetores

- Significado:
 - A soma de vetores significa o deslocamento ocorrido ao “percorrer” ambos os vetores;
 - Se colocarmos a cauda do vetor \vec{b} no final do vetor \vec{a} , qual será o vetor resultante?



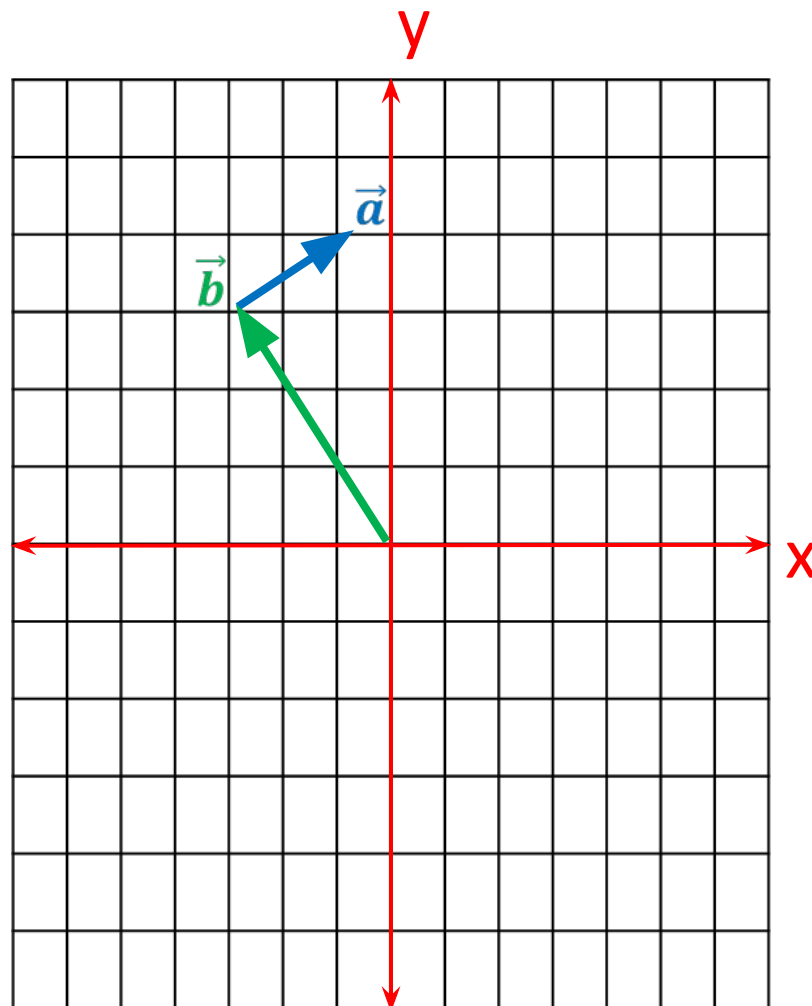
Adição de vetores

- Significado:
 - A soma de vetores significa o deslocamento ocorrido ao “percorrer” ambos os vetores;
 - Se colocarmos a cauda do vetor \vec{b} no final do vetor \vec{a} , qual será o vetor resultante?
 - R: o vetor resultante da soma dos de \vec{a} e \vec{b}



Adição de vetores

- Significado:
 - E se colocarmos o vetor \vec{a} no final do vetor \vec{b} , qual será o vetor resultante?



Adição de vetores

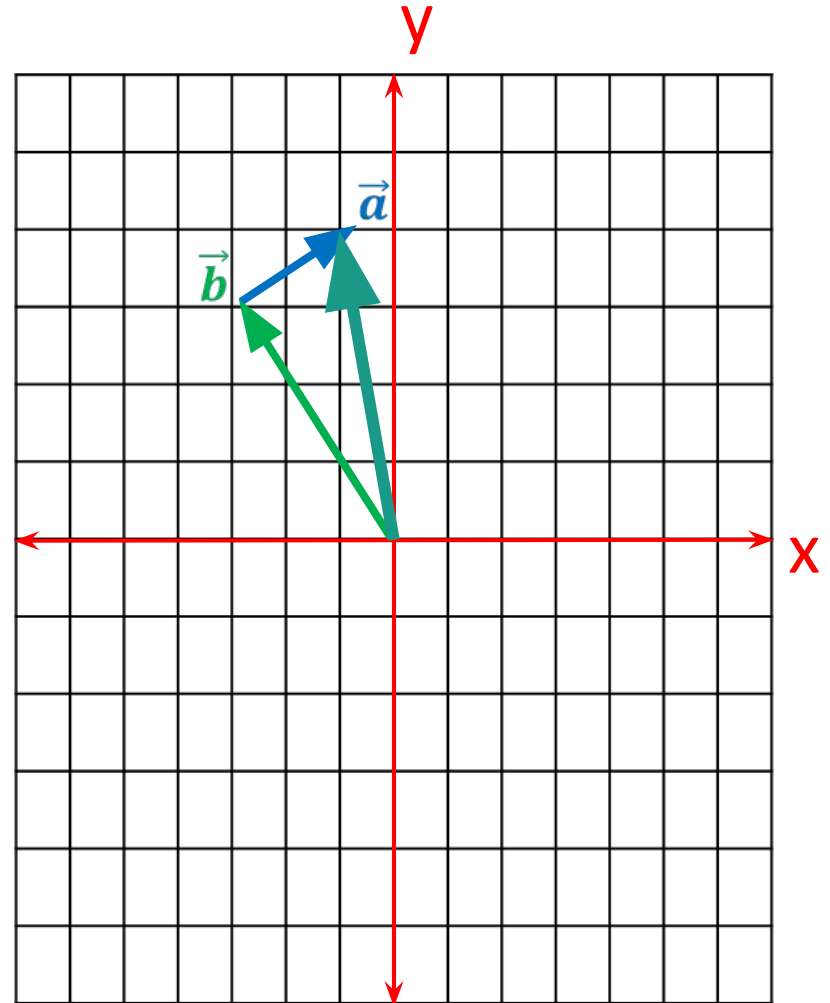
- Significado:

- E se colocarmos o vetor \vec{a} no final do vetor \vec{b} , qual será o vetor resultante?

- R: o mesmo vetor resultante da soma de \vec{a} e \vec{b} !

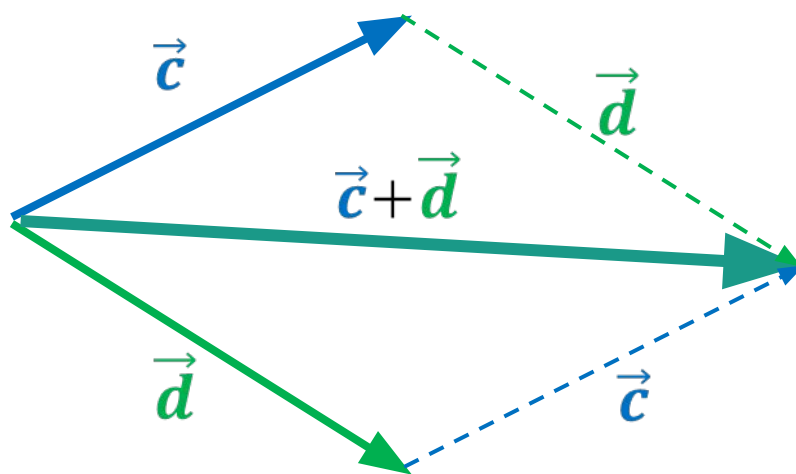
- Isso significa que:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



Adição de vetores

- Também podemos obter a soma de dois vetores pela **regra do paralelogramo**:



Multiplicação de vetor por escalar

- Para realizar a multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicarmos todos os elementos do vetor pelo escalar;
- ▶ Dado o vetor: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x = 3$, qual o resultado de $x \cdot \vec{a}$?

Multiplicação de vetor por escalar

- Para realizar a multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicarmos todos os elementos do vetor pelo escalar;
- ▶ Dado o vetor: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x = 3$, qual o resultado de $x \cdot \vec{a}$?

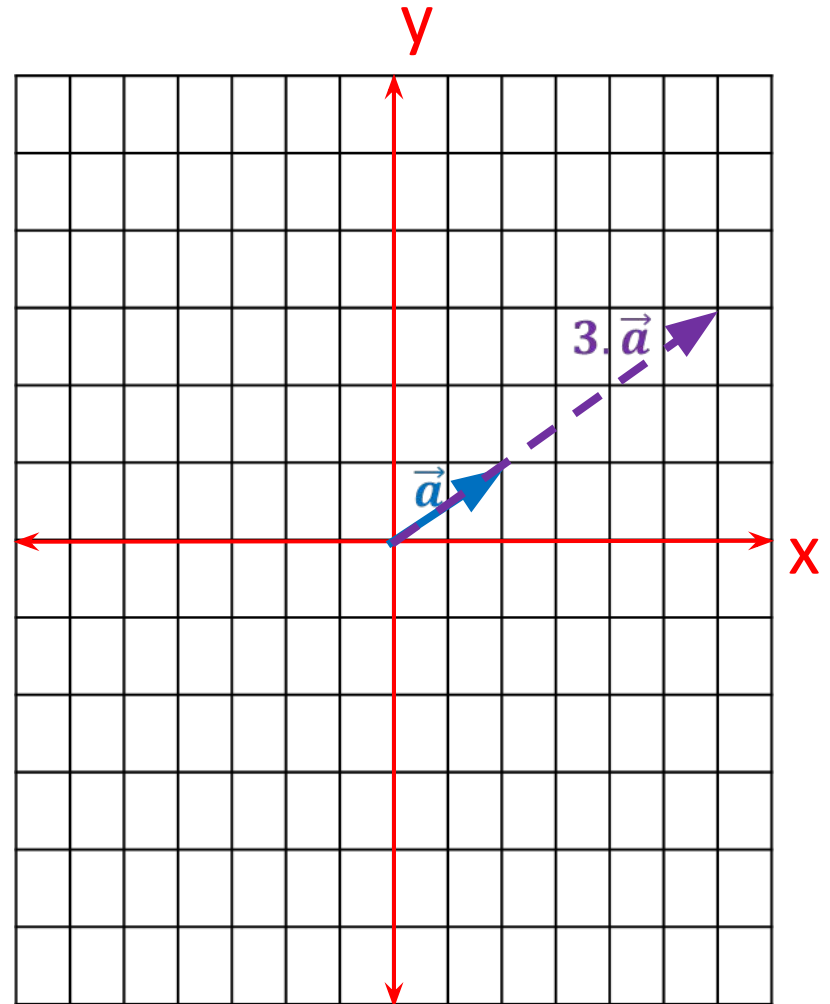
$$x \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de vetor por escalar

• Significado:

- $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $3 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$



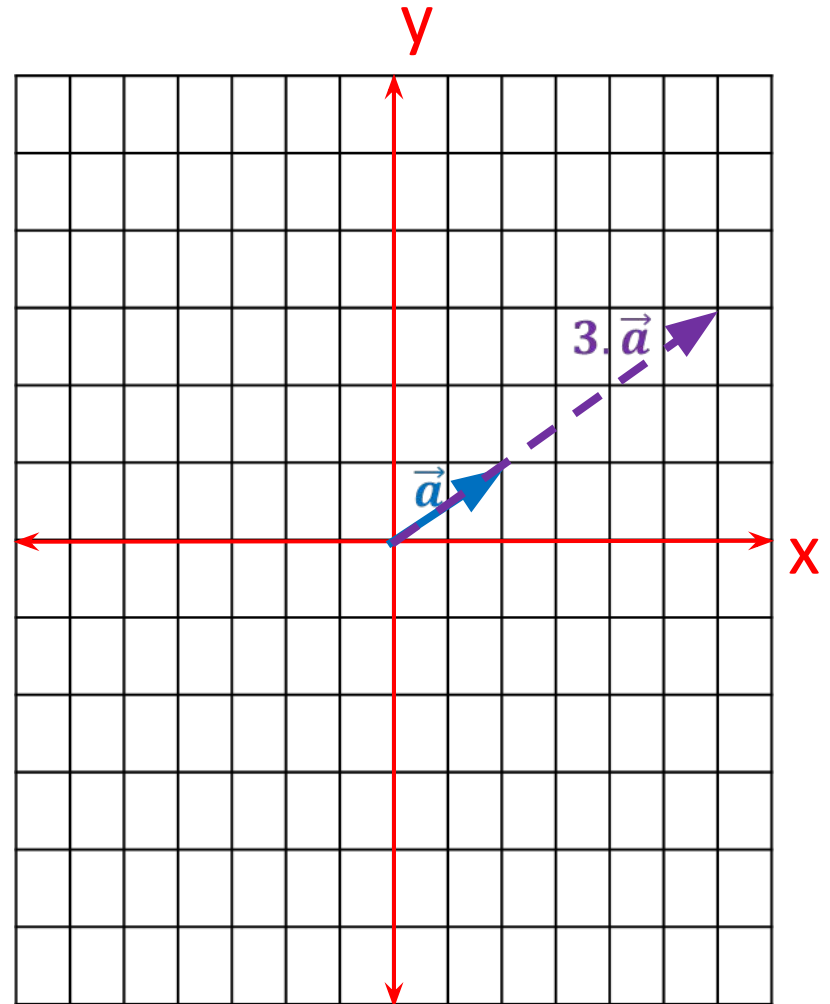
Multiplicação de vetor por escalar

- Significado:

- $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $3 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

- ▶ Ou seja, o vetor teve sua magnitude multiplicada por 3, mas manteve sua direção!



Multiplicação de vetor por escalar

- Mas e se multiplicarmos \vec{a} por -2 ?

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

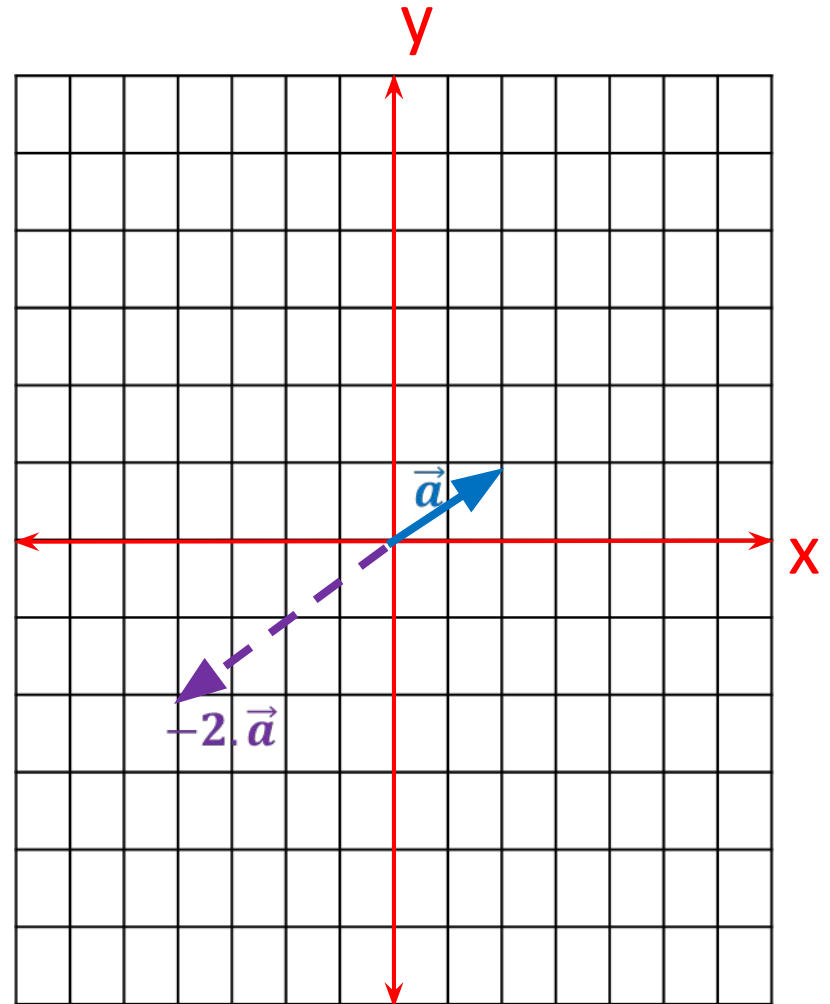
Multiplicação de vetor por escalar

- Significado:

- $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $-2 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

- ▶ Ou seja, o vetor teve sua magnitude multiplicada por 2, e como o escalar era negativo, inverteu sua direção!



Magnitude de um vetor

- A magnitude de um vetor \vec{v} (módulo, norma ou comprimento), definido por $||\vec{v}||$ ou $|\vec{v}|$, é definida pela seguinte equação:

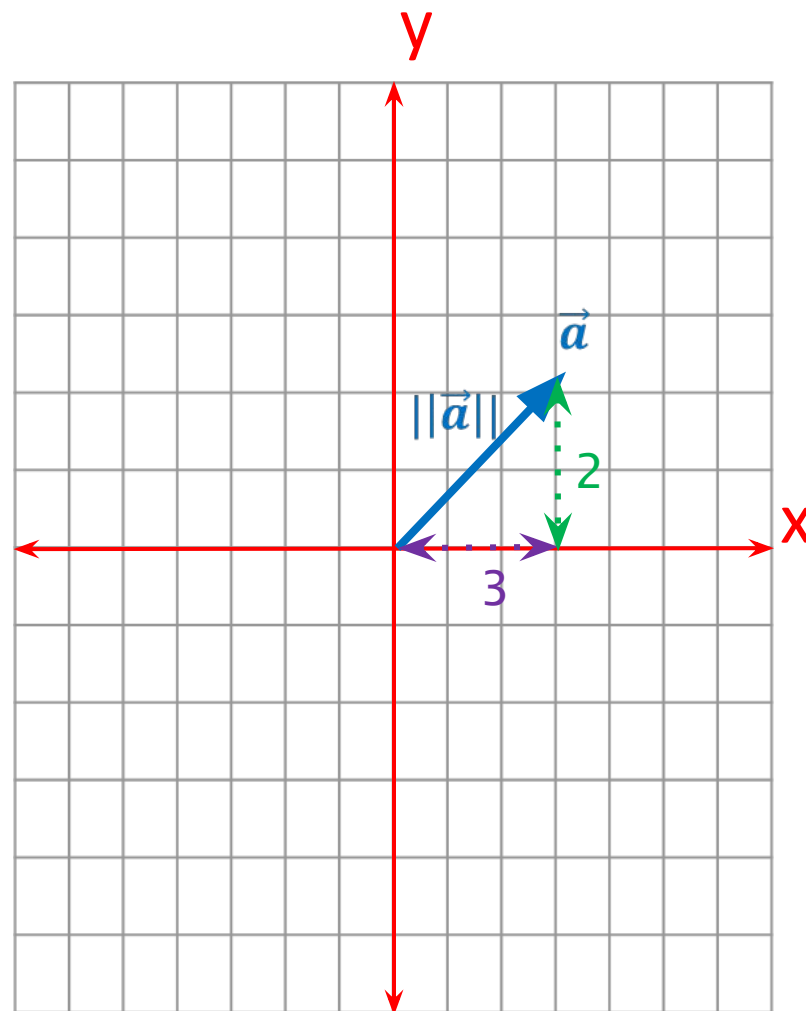
$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

- ▶ A magnitude define a distância desde a origem do vetor até sua extremidade;

Magnitude de um vetor

- A origem da equação vem do teorema de Pitágoras.

- $|\vec{a}|^2 = 3^2 + 2^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4}$
- $|\vec{a}| = \sqrt{13}$



Magnitude de um vetor

- Ex.1: Calcular a magnitude do vetor bidimensional $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2.23$$

- ▶ Ex.2: Calcular a magnitude do vetor tridimensional $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{62} = 7.89$$

Vetor unitário/normalizado

- Um vetor é dito unitário ou normalizado quando sua magnitude é unitária, ou seja, é igual a 1.
- ▶ Para muitas transformações gráficas, precisaremos transformar nossos vetores em vetores unitários/normalizados;
- ▶ Para transformar um vetor em unitário, basta dividir cada componente pela sua magnitude:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left\langle \frac{V_x}{|\vec{v}|}, \frac{V_y}{|\vec{v}|}, \frac{V_z}{|\vec{v}|} \right\rangle$$

Vetor unitário/normalizado

- Ex.1: Transformar o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ em unitário:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{v} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$\hat{v} = \langle 0.6, 0.8 \rangle$$

Propriedades

- Dados quaisquer dois escalares **a** e **b** e quaisquer três vetores **P**, **Q** e **R**, verifica-se as seguintes propriedades:
 - $P + Q = Q + P$
 - $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
 - $(ab)P = a(bP)$
 - $a(P + Q) = aP + aQ$
 - $(a + b)P = aP + bP$
 - $|P| \geq 0$
 - $|P| = 0$ se e somente se $P = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$
 - $|aP| = |a| |P|$
 - $|P + Q| \leq |P| + |Q|$

Produto Escalar/*Dot Product*

- O produto escalar entre dois vetores P e Q é definido pela soma dos produtos de cada componente destes vetores:

$$P \cdot Q = \sum_{i=1}^n P_i Q_i$$

- ▶ Em 3 dimensões, o produto escalar é:

$$P \cdot Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

- ▶ E também pode ser expresso como produto de duas matrizes:

$$P^T \cdot Q = [P_x \quad P_y \quad P_z] \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}$$

Produto Escalar/*Dot Product*

- Uma das propriedades mais importantes do produto escalar é:

$$P \cdot Q = |P| \cdot |Q| \cdot \cos\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

- ▶ Logo, o cosseno ângulo entre dois vetores é dado por:

$$\cos\alpha = \frac{P \cdot Q}{|P| \cdot |Q|}$$

- ▶ Caso P e Q sejam unitários, $|P|$ e $|Q|$ valem 1, logo:

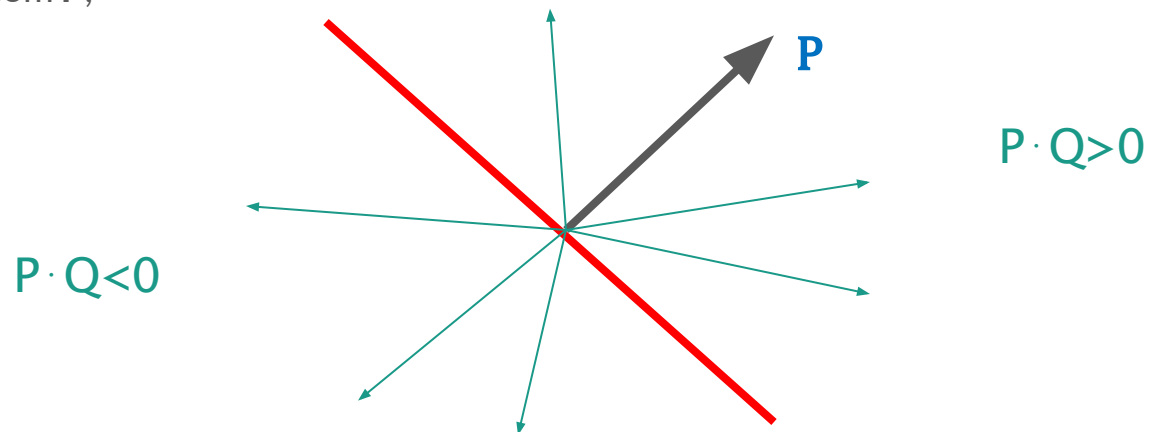
$$\cos\alpha = \frac{P \cdot Q}{1 \cdot 1} = P \cdot Q$$

$$\alpha = \cos^{-1}(P \cdot Q)$$

Isso será muito importante quando trabalharmos com modelos de iluminação!

Propriedades

- Dados quaisquer escalares a e quaisquer três vetores \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} , verifica-se as seguintes propriedades:
 - a) Dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} são perpendiculares se e somente se $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$;
 - b)** $0 \cdot \mathbf{P}$ é sempre 0 ;
 - c) O sinal do produto entre \mathbf{P} e \mathbf{Q} nos diz quanto próximos dois vetores estão apontando na mesma direção:
 - Na figura abaixo, toma-se o plano passando pela origem e perpendicular a \mathbf{P} ;
 - Qualquer vetor que estiver do mesmo lado do plano de \mathbf{P} produz um produto escalar positivo com \mathbf{P} ;
 - Qualquer vetor apontado para o lado oposto ao lado de \mathbf{P} produz um produto escalar negativo com \mathbf{P} ;



Propiedades

d) $P \cdot Q = Q \cdot P$ (simetria)

e) $(aP) \cdot Q = a(P \cdot Q)$

f) $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$

g) $P \cdot Q \leq |P| \cdot |Q|$

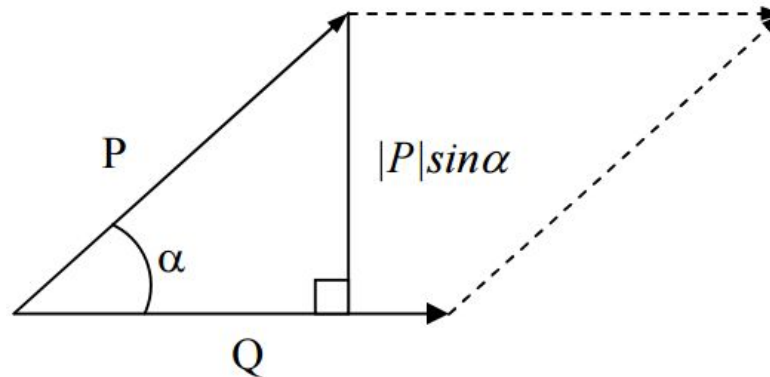
Produto Vetorial/*Cross Product*

- O produto vetorial entre dois vetores P e Q , denotado por $P \times Q$, produz um novo vetor que é perpendicular aos dois vetores P e Q .
- ▶ É utilizado para encontrar vetores normais a superfícies, bem como para definir trajetória de objetos.
- ▶ O produto vetorial de dois vetores tridimensionais P e Q é dado por:

$$P \times Q = \langle P_y Q_z - P_z Q_y, P_z Q_x - P_x Q_z, P_x Q_y - P_y Q_x \rangle$$

Propriedades

- Pela definição de produto escalar e vetorial:
 - $(P \times Q) \cdot P = 0$
 - $(P \times Q) \cdot Q = 0$
- O produto vetorial $P \times Q$ tem como resultado um vetor perpendicular ao plano definido por P e Q , cujo comprimento é dado por:
 - $|P \times Q| = |P||Q|\sin\alpha$
- A magnitude de $P \times Q$ é dada pela área do paralelogramo, cujos lados são formados pelos vetores P e Q :



Propriedades

- O produto vetorial segue a **regra da mão direita**, conforme imagem abaixo
 - O indicador aponta na direção do vetor **a**;
 - A palma da mão (ou dedo médio) aponta na direção do vetor **b**;
 - O produto vetorial aponta na direção do polegar:.

