Aula 2-4 Modelagem e Resolução Gráfica

Prof. Herysson R. Figueiredo

Introdução

- Modelar e resolver problemas de programação linear utilizando o método gráfico.
- Identificar as variáveis de decisão, formular a função objetivo e as restrições.
- Representar graficamente a região viável para encontrar a solução ótima.
- Desenvolver exemplos práticos de maximização de lucros e minimização de custos.

Introdução

- **Modelar** e resolver problemas de programação linear utilizando o método gráfico.
- Identificar as **variáveis de decisão**, formular a **função objetivo** e as **restrições**.
- Representar graficamente a região viável para encontrar a solução ótima.
- Desenvolver exemplos práticos de maximização de lucros e minimização de custos.

Introdução

- Modelar e **resolver** problemas de programação linear utilizando o **método gráfico.**
- Identificar as variáveis de decisão, formular a função objetivo e as restrições.
- **Representar graficamente** a região viável para encontrar a solução ótima.
- Desenvolver exemplos práticos de maximização de lucros e minimização de custos.

Introdução

- Modelar e resolver problemas de programação linear utilizando o método gráfico.
- Identificar as variáveis de decisão, formular a função objetivo e as restrições.
- Representar graficamente a região viável para **encontrar a solução ótima**.
- Desenvolver exemplos práticos de maximização de lucros e minimização de custos.

Exercício 1 – Produção de Cadeiras e Mesas

Uma marcenaria fabrica dois produtos: cadeiras e mesas. Cada cadeira gera um lucro de R$ 30 e cada mesa gera um lucro de R$ 50.

A produção está limitada pelos seguintes recursos:

- Cada cadeira consome 2 horas de trabalho e 4 unidades de madeira.
- Cada mesa consome 4 horas de trabalho e 3 unidades de madeira.
- Há no máximo 100 horas de trabalho disponíveis.
- Há no máximo 120 unidades de madeira disponíveis.

Exercício 1 – Produção de Cadeiras e Mesas

$$\text{Max } Z = 30x + 50y$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 2x + 4y \leq 100 & \text{(limite de horas de trabalho)} \\ 4x + 3y \leq 120 & \text{(limite de madeira)} \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$$

Variáveis de decisão:
x: número de unidades do Produto A
y: número de unidades do Produto B

Exercício 1 – Produção de C... e Mesas

$$\text{Max } Z = \boxed{30x + 50y}$$

Sujeito a:
$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 100 & \text{(limite de horas de trabalho)} \\ 4x + 3y \leq 120 & \text{(limite de madeira)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$$

Função objetivo (maximizar o lucro)

Exercício 1 – Produção de C[illegible] Mesas

$$\boxed{\text{Max } Z = 30x + 50y}$$

Sujeito a: $\begin{cases} 2x + 4y \leq 100 & \text{(limite de horas de trabalho)} \\ 4x + 3y \leq 120 & \text{(limite de madeira)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$

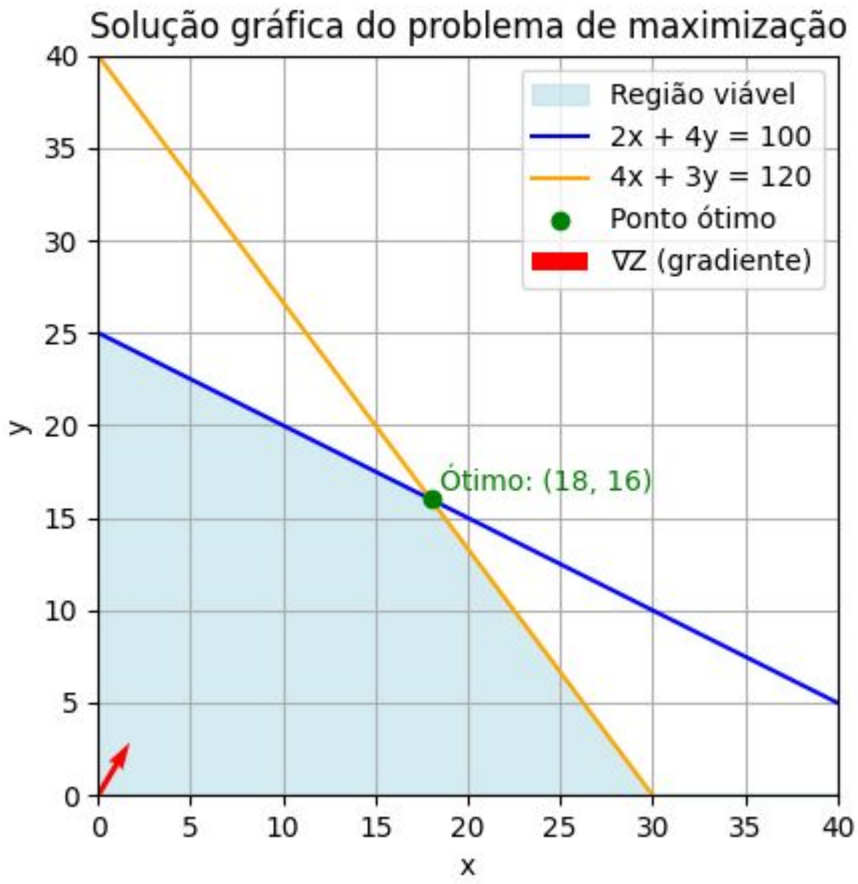
Exercício 1 – Produção de C

Restrições

$$\text{Max } Z = 30x + 50y$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 100 & \text{(limite de horas de trabalho)} \\ 4x + 3y \leq 120 & \text{(limite de madeira)} \\ x \geq 0, \; y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$$


Solução gráfica do problema de maximização
Região viável
2x + 4y = 100
4x + 3y = 120
Ponto ótimo
∇Z (gradiente)
Ótimo: (18, 16)
x
y
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Exercício 2 – Fabricação de Produtos A e B

Uma empresa fabrica dois produtos: Produto A e Produto B. Cada unidade do Produto A dá um lucro de R$ 40 e cada unidade do Produto B dá um lucro de R$ 60.

Cada unidade de A utiliza:

- 1 hora de máquina
- 2 horas de montagem

Cada unidade de B utiliza:

- 2 horas de máquina
- 1 hora de montagem

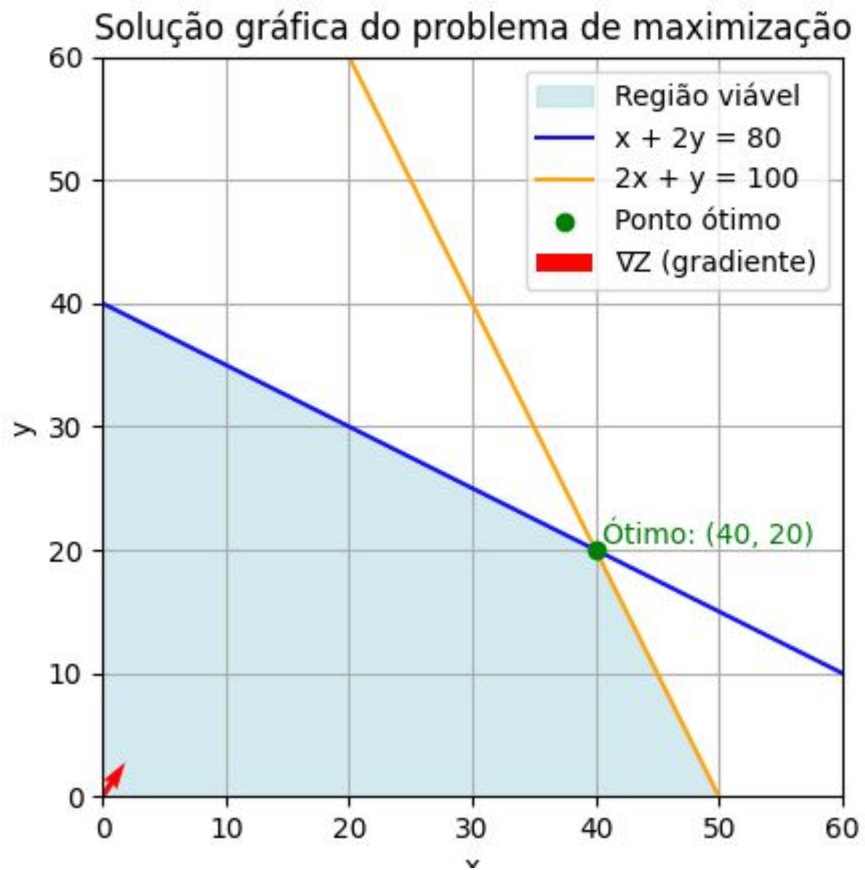
A empresa dispõe de no máximo:

- 80 horas de máquina
- 100 horas de montagem

Exercício 2 – Fabricação de Produtos A e B

$$\text{Max } Z = 40x + 60y$$

Sujeito a: $$\begin{cases} x + 2y \leq 80 & \text{(limite de uso da máquina)} \\ 2x + y \leq 100 & \text{(limite de montagem)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$$



Solução gráfica do problema de maximização
Região viável
x + 2y = 80
2x + y = 100
Ponto ótimo
∇Z (gradiente)
Ótimo: (40, 20)
y
0
10
20
30
40
50
60
0
10
20
30
40
50
60

Exercício 3 – Minimização de Custos de Transporte

Uma empresa precisa transportar materiais entre dois centros de distribuição. Ela pode utilizar dois tipos de veículos: caminhão pequeno e caminhão grande.

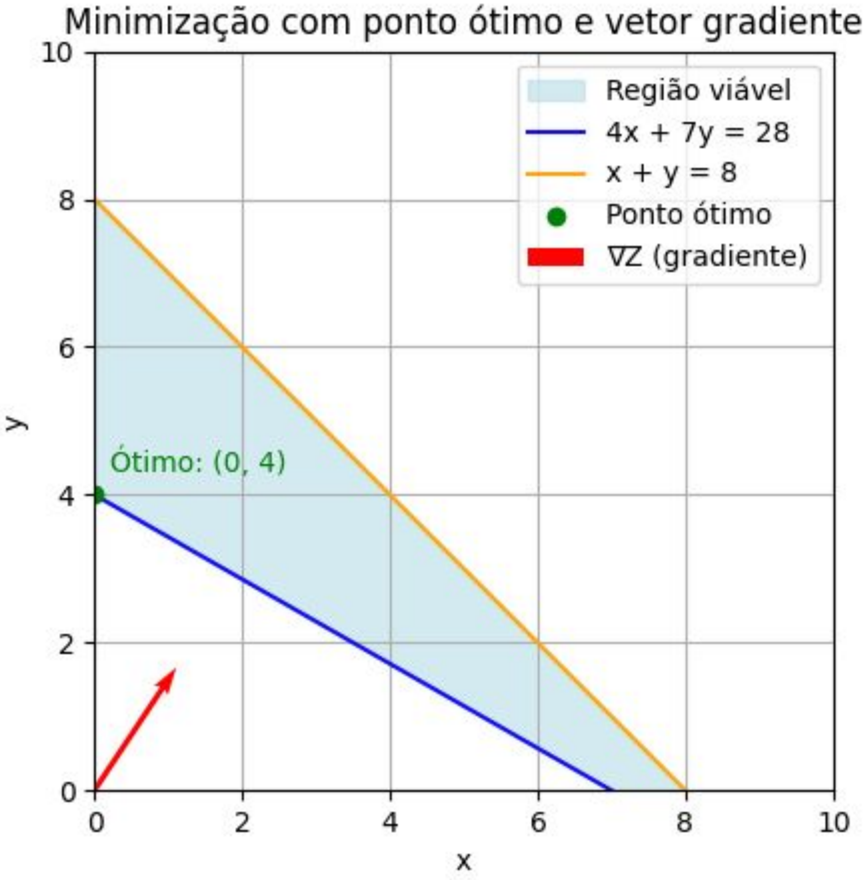
- O caminhão pequeno custa R$ 200 por viagem e transporta 4 toneladas.
- O caminhão grande custa R$ 300 por viagem e transporta 7 toneladas.

A empresa precisa transportar no mínimo 28 toneladas, e não pode fazer mais que 8 viagens no total.

Exercício 3 – Minimização de Custos de Transporte

$$\text{Min } Z = 200x + 300y$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 4x + 7y \geq 28 & \text{(toneladas transportadas)} \\ x + y \leq 8 & \text{(número máximo de viagens)} \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{cases}$$


Minimização com ponto ótimo e vetor gradiente
Região viável
4x + 7y = 28
x + y = 8
Ponto ótimo
∇Z (gradiente)
Ótimo: (0, 4)
x
y
0
2
4
6
8
10

Exercício 4 – Minimização de Custo de Embalagem

Uma empresa está embalando produtos para envio e pode usar dois tipos de caixas: Caixa Tipo A e Caixa Tipo B.

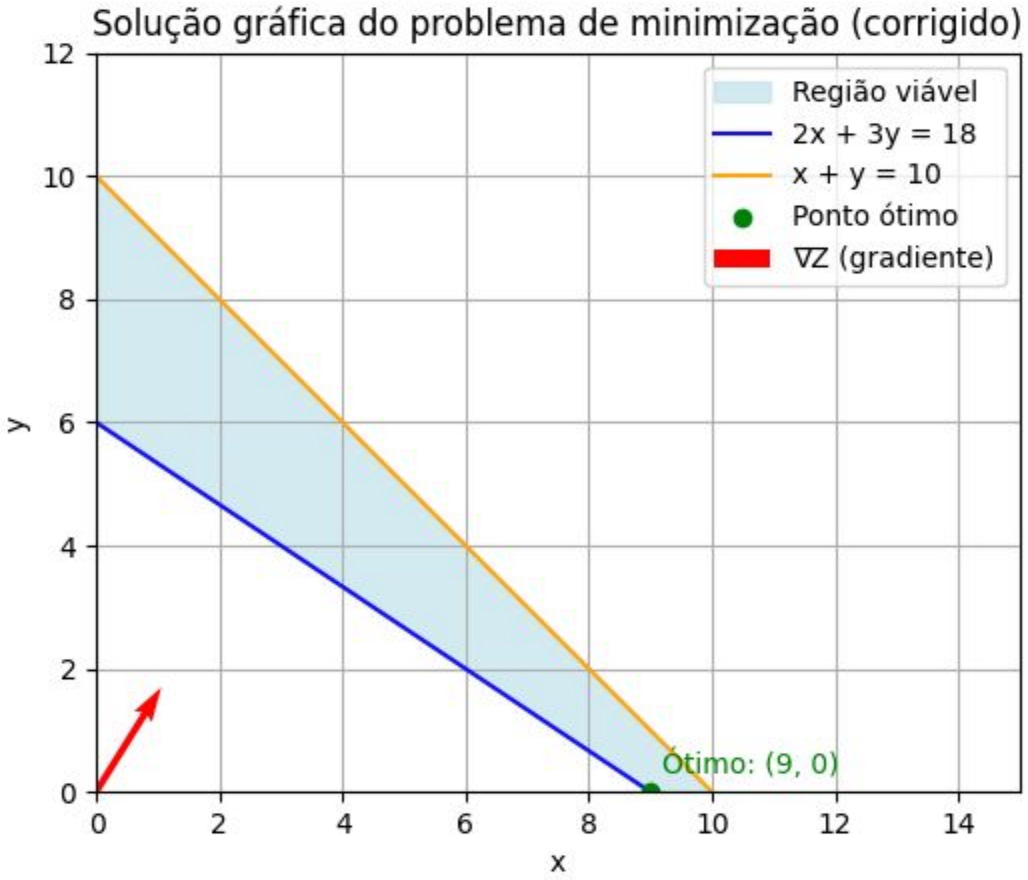
- Cada Caixa A custa R$ 5 e comporta até 2 kg.
- Cada Caixa B custa R$ 8 e comporta até 3 kg.

A empresa precisa embalar pelo menos 18 kg de produtos.
Além disso, o número total de caixas usadas não pode ultrapassar 10 (por limitação de espaço no caminhão).

Exercício 4 – Minimização de Custo de Embalagem

$$\text{Min } Z = 5x + 8y$$

Sujeito a:
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 18 & \text{(peso mínimo)} \\ x + y \leq 10 & \text{(limite de caixas)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{(restrições naturais)} \end{cases}$$



Solução gráfica do problema de minimização (corrigido)
Região viável
2x + 3y = 18
x + y = 10
Ponto ótimo
∇Z (gradiente)
Ótimo: (9, 0)
x
y
0
2
4
6
8
10
12
14

Exercício 5 – Desafio 1

$$\text{Maximizar } Z = 2x_1 + x_2$$

Sujeito a:
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 40 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 70 \\ -x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercício 5 – Desafio 1

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 40 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 70 \\ -x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Referências

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos. 2. ed. rev. atual. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2005. 518 p.

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para a análise de decisão. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009. xvi, 204 p. Taha, Hamdy A.. Pesquisa Operacional - 8ª edição, 2007.

ACKOFF, Russell Lincoln; SASIENI, Maurice W. Pesquisa operacional. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, 1971. 523 p.

BANZHAF, Wolfgang. Genetic Programming: an introduction. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, c1998. 470 p.

LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa operacional: na tomada de decisões [RECURSO ELETRÔNICO]. São Paulo, SP: Pearson, 2009. 1 CD.

KORTE, Bernhard; VYGEN, Jens. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Berlim: Springer, 2000. 530 p. (Algorithms and combinatorics; 21).