Aula 7-10 O Método Simplex

Prof. Herysson R. Figueiredo

Simplex

Imaginem que o **Simplex** é como uma receita de bolo muito precisa. Para que a receita funcione perfeitamente, você não pode jogar os ingredientes de qualquer jeito. Você precisa prepará-los antes: a farinha tem que estar peneirada, os ovos batidos, a manteiga em temperatura ambiente.

Simplex

A **Forma Padrão** em Pesquisa Operacional é exatamente isso: é a nossa '*mise en place*', a preparação dos ingredientes. É a maneira de organizar nosso problema para que o método (a nossa receita) possa resolvê-lo sem erros.

Simplex

O que é um **Problema de Programação Linear (PPL)**?

- É um problema onde queremos maximizar (ex: lucro) ou minimizar (ex: custo) uma função.
- Essa função é chamada de **Função Objetivo**.
- Estamos sujeitos a algumas limitações ou regras, chamadas de **Restrições**.

Exemplo de PPL

- Maximizar Lucro: $Z = 40x_1 + 30x_2$
- Sujeito a:
  - $x_1 + x_2 \leq 12$ (Limite de matéria-prima A)
  - $2x_1 + x_2 \leq 16$ (Limite de mão de obra)
  - $x_1, x_2 \geq 0$ (Não podemos produzir uma quantidade negativa)

Nosso objetivo hoje é pegar esse problema 'cru' e deixá-lo no formato padrão, pronto para a receita Simplex

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

1. **Todas as restrições devem ser EQUAÇÕES (=)**

Nossos problemas quase sempre vêm com desigualdades ($\leq$ ou $\geq$). Precisamos transformá-las em igualdades.

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

1. **Todas as restrições devem ser EQUAÇÕES (=)**

- Caso ≤ (menor ou igual): Adicionamos uma variável de folga (f).
  - Pense na variável de folga como "o que sobrou". Se a restrição é $x_1 \leq 10$, e usamos $x_1 = 8$, então a nossa "folga" é 2.
  - A equação fica: $x_1 + f = 10$.

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

1. **Todas as restrições devem ser EQUAÇÕES (=)**

- Caso ≥ (maior ou igual): Subtraímos uma variável de excesso (e). (Observação: mencione que isso pode complicar um pouco mais o início do método, mas é importante conhecer o conceito).
  - Pense nela como "o quanto passamos do mínimo". Se a restrição é $x_1 \geq 50$ e produzimos $x_1 = 60$, nosso "excesso" é 10.
  - A equação fica: $x_1 - e = 50$.

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

1. **Todas as restrições devem ser EQUAÇÕES (=)**

- Caso ≥ (maior ou igual): Subtraímos uma variável de excesso (e). (Observação: mencione que isso pode complicar um pouco mais o início do método, mas é importante conhecer o conceito).
  - Pense nela como "o quanto passamos do mínimo". Se a restrição é $x_1 \geq 50$ e produzimos $x_1 = 60$, nosso "excesso" é 10.
  - A equação fica: $x_1 - e = 50$.

Importante: As variáveis de folga e excesso são sempre ≥ 0 e devem ser adicionadas à função objetivo com custo zero (afinal, sobra de recurso não gera lucro nem custo por si só).

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

2. O lado direito das restrições (termo b) não pode ser negativo.

- Se você encontrar uma restrição como $x_1 - x_2 \leq -5$, simplesmente multiplique toda a inequação por -1.
  - Lembre-se: ao multiplicar por -1, o sinal da desigualdade inverte!
  - $x_1 - x_2 \leq -5$ se torna $-x_1 + x_2 \geq 5$.
  - Agora sim você pode aplicar a Regra 1 (neste caso, subtraindo uma variável de excesso).

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

3. A Função Objetivo deve ser de MAXIMIZAÇÃO.

- Esta é a convenção mais comum para iniciar o Simplex.
- E se o problema for de minimizar? Sem problemas!
  - Minimizar Z é exatamente a mesma coisa que Maximizar (-Z).
  - Então, se o problema é Minimizar $Z = 10x_1 + 15x_2$, nós vamos trabalhar com Maximizar $W = -10x_1 - 15x_2$. No final, o valor ótimo de Z será -W.

Forma Padrão - 3 Regras de Ouro da Forma Padrão

- Maximizar Lucro: $Z = 40x_1 + 30x_2$
- Sujeito a:
  - $x_1 + x_2 \leq 12$
  - $2x_1 + x_2 \leq 16$
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Forma Padrão

Maximizar: Z $= 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Exercícios

Exercício 1: Uma fábrica de móveis produz mesas e cadeiras. O lucro é de R$ 5 por mesa e R$ 4 por cadeira.

- **Maximizar Lucro:** $Z = 5x_1 + 4x_2$
- **Sujeito a:**
  - $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (Horas de montagem)
  - $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (Horas de acabamento)
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Exercícios

Exercício 2: Uma empresa de tecnologia produz três tipos de gadgets: A, B e C.

- **Maximizar Receita:** $P = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
- **Sujeito a:**
  - $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ (Recurso 1)
  - $3x_1 + 2x_3 \leq 15$ (Recurso 2)
  - $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exercícios

Exercício 3: Uma empresa precisa comprar dois tipos de ingredientes, A e B, para uma ração animal, minimizando o custo.

- **Minimizar Custo:** $C = 2x_1 + 3x_2$
- **Sujeito a:**
  - $x_1 + 3x_2 \geq 6$ (Requisito de proteína)
  - $2x_1 + x_2 \geq 4$ (Requisito de fibra)
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Exercícios

Exercício 4: Uma indústria química quer minimizar o custo de produção de uma mistura com três componentes.

- **Minimizar Custo:** $Z = 80x_1 + 60x_2 + 70x_3$
- **Sujeito a:**
  - $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 10$
  - $5x_1 + x_2 \leq 20$
  - $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exercícios

Exercício 5: Um problema de alocação de recursos com diferentes tipos de restrições.

- **Maximizar Valor:** $V = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3$
- **Sujeito a:**
    - $x_1 + x_2 \leq 150$
    - $x_2 + x_3 \geq 50$
    - $2x_1 + x_3 = 100$ *(Dica: uma restrição de igualdade já é uma equação!)*
    - $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exercícios

Exercício 6: Minimização

- **Maximizar Valor:** $Z = 2x_1 - 3x_2$
- **Sujeito a:**
  - $- x_1 + x_2 \leq 1$
  - $x_1 + x_2 \leq 2$
  - $-2x_2 + x_2 \geq -2$
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Montando e Resolvendo o Quadro Simplex

Forma Padrão

Maximizar: Z = $40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Ponto de Partida: Nosso problema já está na Forma Padrão (FP), que definimos na aula anterior.

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z $= 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1					
f2					
Z					

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z $= 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1					
f2					
Z					

Linhas: Cada linha representa uma restrição, exceto a última, que é a nossa Função Objetivo (chamamos de linha Z).

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z $= 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1					
f2					
Z					

Colunas: Temos uma coluna para cada variável do problema (de decisão e de folga) e uma coluna final "b" para os resultados das equações.

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z = $40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1					
f2					
Z					

.

Coluna "Base": Esta coluna é muito importante. Ela nos diz quais variáveis formam nossa "solução" atual. No início, são sempre as variáveis de folga, pois elas nos dão uma primeira solução viável (produzir nada, x_1=0, x_2=0, e ter todas as sobras).

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z = $40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $\boxed{x_1 + x_2 + f_1 = 12}$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1					
f2					
Z					

.

Preencher as linhas das restrições: Apenas copie os coeficientes de cada variável de cada equação.

$x_1 + x_2 + f_1 = 12$ -> 1 1 1 0 | 12
$2x_1 + x_2 + f_2 = 16$ -> 2 1 0 1 | 16

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z = $40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z					

.

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: $Z = 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z					

.

Preencher a linha Z: Para a linha Z, pegamos a função objetivo $Z = 40x_1 + 30x_2$ e a reescrevemos como $Z - 40x_1 - 30x_2 = 0$. Os valores que entram no quadro são os coeficientes desta nova equação.

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: $\boxed{Z = 40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2}$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	-40	-30	0	0	0

.

Preencher a linha Z: Para a linha Z, pegamos a função objetivo $Z = 40x_1 + 30x_2$ e a reescrevemos como $Z - 40x_1 - 30x_2 = 0$. Os valores que entram no quadro são os coeficientes desta nova equação.

Quadro (ou Tabela) Simplex

Maximizar: Z = $40x_1 + 30x_2 + 0f_1 + 0f_2$

- **Sujeito a:**
  - $x_1 + x_2 + f_1 = 12$
  - $2x_1 + x_2 + f_2 = 16$
  - $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	-40	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

O que este quadro nos diz? Que a solução atual é: $f_1 = 12$, $f_2 = 16$ (leia na coluna b). As variáveis que não estão na base (x_1 e x_2) são iguais a zero. Isso nos dá um Lucro Z = 0. É uma solução viável, mas com certeza não é a melhor! Agora, vamos melhorá-la.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	-40	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

O Simplex funciona em 'iterações'. Em cada iteração, ele faz uma troca inteligente: coloca uma variável que ajuda a aumentar o lucro na base e tira uma que está limitando o processo.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	-40	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Passo 1: Encontrar a Coluna Pivô (Quem Entra na Base?)

- **Regra:** Olhe para a linha Z e escolha a coluna com o **valor mais negativo.**
- **Por quê?** O valor negativo na linha Z indica o potencial de aumento do lucro. -40 nos diz que para cada unidade de x_1 que produzirmos, nosso lucro Z aumentará em 40. É a variável mais promissora.

No nosso quadro, o valor mais negativo é **-40.** Portanto, a **coluna x_1 é a Coluna Pivô.**

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Passo 2: Encontrar a Linha Pivô (Quem Sai da Base?)

- **Regra:** Faça o Teste da Razão. Divida os valores da coluna **b** pelos valores correspondentes **positivos** da Coluna Pivô. A linha que tiver o **menor resultado positivo** é a Linha Pivô.
- **Por quê?** Este teste verifica qual restrição será atingida primeiro. Ele nos impede de produzir tanto de x_1 a ponto de violar alguma limitação (ou seja, tornar uma variável de folga negativa).

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Passo 2: Encontrar a Linha Pivô (Quem Sai da Base?)

Fazendo o teste:

- Linha f_1: 12 / 1 = 12
- Linha f_2: 16 / 2 = 8

O menor resultado é **8**. Portanto, a **linha f_2 é a Linha Pivô**. Isso significa que f_2 vai sair da base para dar lugar a x_1.

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	2	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Passo 3: Identificar o Elemento Pivô

O Elemento Pivô é o número que está no cruzamento da Linha Pivô e da Coluna Pivô. No nosso caso, é o **2**.

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	**2**	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Passo 4: Pivotar - Construir o Novo Quadro

O objetivo aqui é transformar a coluna pivô em uma coluna "identidade", ou seja, o elemento pivô deve virar **1** e todos os outros elementos da coluna devem virar **0**. Usamos operações de álgebra linear para isso.

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	**2**	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Quadro (ou Tabela) Simplex

Nf2= f2/2

f1= f1-Nf2

Z = Z+40*Nf2

Base	**x1**	x2	f1	f2	b
f1	1	1	1	0	12
f2	**2**	1	0	1	16
Z	**-40**	-30	0	0	0

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	1/2	1	-1/2	4
x1	1	1/2	0	1/2	8
Z	0	-10	0	20	320

Quadro (ou Tabela) Simplex

Analisando este novo quadro: nossa solução agora é $x_1 = 8$, $f_1 = 4$ e $x_2 = 0$ (não está na base). O lucro Z já aumentou para 320! Mas será que podemos melhorar mais?

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	1/2	1	-1/2	4
x1	1	1/2	0	1/2	8
Z	0	-10	0	20	320

Quadro (ou Tabela) Simplex

Repetir o Processo até a Solução Ótima

Condição de Parada: O processo termina **quando não há mais números negativos** na Linha Z.

- No nosso segundo quadro, ainda temos um -10 na linha Z. Isso significa que ainda podemos aumentar o lucro se colocarmos x_2 na base. Então, repetimos o processo!

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	1/2	1	-1/2	4
x1	1	1/2	0	1/2	8
Z	0	**-10**	0	20	320

Quadro (ou Tabela) Simplex

Linha Pivô (Teste da Razão):

- Linha f_1: 4 / (1/2) = 8
- Linha x_1: 8 / (1/2) = 16

O menor resultado é 8. A linha f_1 é a Linha Pivô. f_1 vai sair da base.

Elemento Pivô: é o 1/2.

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	**1/2**	1	-1/2	4
x1	1	1/2	0	1/2	8
Z	0	**-10**	0	20	320

Quadro (ou Tabela) Simplex

Nf1 = f1*2

x1 = x1 - (Nf1/2)

Z = Z + 10Nf1

Base	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	**1/2**	1	-1/2	4
x1	1	1/2	0	1/2	8
Z	0	**-10**	0	20	320

Base	x1	x2	f1	f2	b
x2	0	1	2	-1	8
x1	1	0	-1	1	4
Z	0	0	20	10	400

Quadro (ou Tabela) Simplex

Olhem para a Linha Z! Não temos mais valores negativos. Isso significa que chegamos ao topo da montanha, não há mais como aumentar o lucro. Encontramos a solução ótima

Base	x1	x2	f1	f2	b
x2	0	1	2	-1	8
x1	1	0	-1	1	4
Z	**0**	**0**	**20**	**10**	**400**

Quadro (ou Tabela) Simplex

Lendo a Resposta Final:
Agora, como traduzimos este quadro final em uma resposta para o problema?
Valores das Variáveis: Olhe para a coluna "Base" e a coluna "b".

- x_2 está na base, seu valor é **8**.
- x_1 está na base, seu valor é **4**.

Base	x1	x2	f1	f2	b
x2	0	1	2	-1	**8**
x1	1	0	-1	1	**4**
Z	0	0	20	10	400

Quadro (ou Tabela) Simplex

Valor do Lucro Máximo: Olhe para o canto inferior direito do quadro.

O valor de Z é 400.

Variáveis de Folga: f_1 e f_2 não estão na base, então seus valores são 0. Isso significa que usamos todos os recursos disponíveis de matéria-prima e mão de obra, não houve sobras.

Base	x1	x2	f1	f2	b
x2	0	1	2	-1	**8**
x1	1	0	-1	1	**4**
Z	0	0	20	10	400

Quadro (ou Tabela) Simplex

Base	x1	x2	f1	f2	b
x2	0	1	2	-1	**8**
x1	1	0	-1	1	**4**
Z	0	0	20	10	400

Conclusão do Problema:
Para maximizar o lucro, a empresa deve produzir **4 unidades do produto 1 e 8 unidades do produto 2**, resultando em um lucro máximo de **R$ 400**.

Exercícios

Exercício 1:

Maximizar Lucro: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

- $x_1 \leq 4$
- $2x_2 \leq 12$
- $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Exercícios

Exercício 2:

Maximizar $Z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3$

Sujeito a:

- $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 55$
- $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 26$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exercícios

Exercício 3:

Você foi chamado para terminar o trabalho de um colega. Ao lado está o quadro Simplex no meio de uma resolução.

a) Este quadro representa uma solução ótima? Por quê?

b) Se não for ótima, realize a próxima iteração completa, mostrando o novo quadro.

c) A solução encontrada após a sua iteração é a ótima?

Base	x1	x2	x3	f1	f2	b
x2	1	2	0	1/2	0	10
f2	0	-1	2	-1/4	1	15
Z	0	-5	-10	4	0	250

Exercícios

Exercício 4:

Após várias iterações, um analista chegou ao seguinte quadro Simplex final. Sua tarefa é extrair e apresentar a solução completa..

a) Qual é o valor ótimo (máximo) de Z?

b) Quais são os valores de x_1, x_2 e x_3 que levam a essa solução ótima?

c) Algum dos recursos representados pelas variáveis de folga (f_1 e f_2) teve sobra? Justifique.

Base	x1	x2	x3	f1	f2	b
x2	0	1	3/2	1	-1/2	30
x1	1	0	-1/2	-1	3/2	15
Z	0	0	5	10	20	1250

Referências

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos. 2. ed. rev. atual. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2005. 518 p.

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para a análise de decisão. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009. xvi, 204 p. Taha, Hamdy A.. Pesquisa Operacional - 8ª edição, 2007.

ACKOFF, Russell Lincoln; SASIENI, Maurice W. Pesquisa operacional. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos, 1971. 523 p.

BANZHAF, Wolfgang. Genetic Programming: an introduction. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, c1998. 470 p.

LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa operacional: na tomada de decisões [RECURSO ELETRÔNICO]. São Paulo, SP: Pearson, 2009. 1 CD.

KORTE, Bernhard; VYGEN, Jens. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Berlim: Springer, 2000. 530 p. (Algorithms and combinatorics; 21).