デジタル信号処理
第14回　フィルタの安定性と構造

立命館大学
情報理工学部
岩居　健太

本日の講義内容

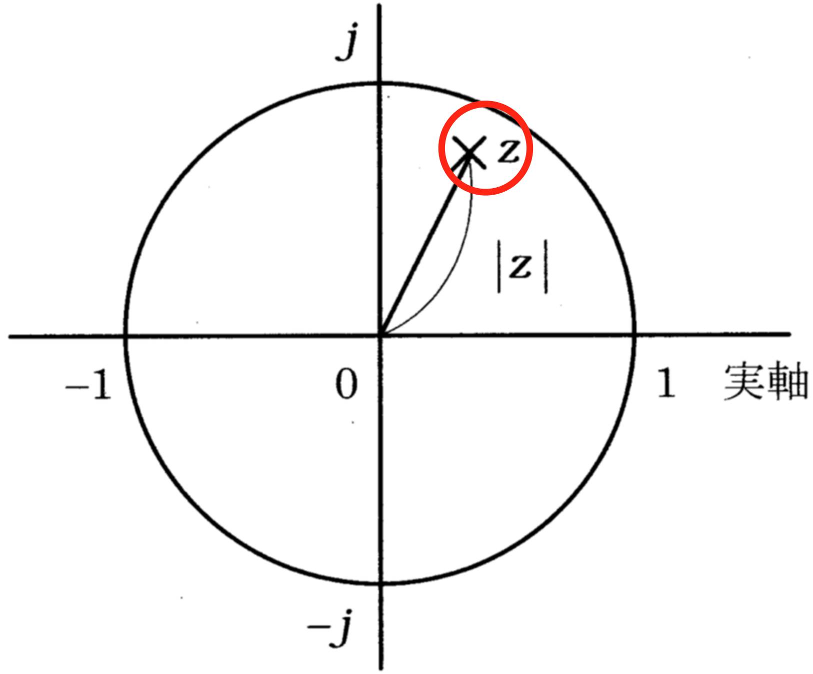
- フィルタの安定性と構造
    - フィルタの安定性について
    - FIRフィルタ、IIRフィルタとは
- 相関関数
    - 自己相関と相互相関

フィルタの安定性 (1)

- 安定なフィルタとは
  - 伝達関数 (インパルス応答) が収束すること。
  - 収束しない場合は不安定なフィルタと定義される。

- 系が安定であるための必要十分条件は、
  - 伝達関数の極z_iが全て$|z_i| < 1$である。
  - すなわち、極z_iが z 平面において全て単位円内にある。

フィルタの安定性 (2)



- 極とは
  - 伝達関数$H(z)$を

$$H(z) = \frac{z}{z+a}$$

  - とする。ここで $z = -a$ のとき
    - 伝達関数の分母が 0 、フィルタの利得が∞
    - このような z を極 (pole) と呼ぶ

  - この極が$|z| < 1$を満たせば安定となり、満たさなければ不安定となる。

演習課題 (1/5) (5分間)

- 差分方程式が

$$
\begin{aligned}
y(n) = x(n) &+ x(n-1) \\
&-1.5y(n-1) + y(n-2)
\end{aligned}
$$

であるフィルタの安定性を調べよ。

ヒント:　伝達関数を求めて、極を調べればOK

演習課題 (2/5) (5分間)

- 差分方程式が

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0.5y(n-2)$$

であるフィルタの安定性を調べよ。

ヒント： 伝達関数を求めて、極を調べればOK

【復習】デジタルフィルタの標準形構造

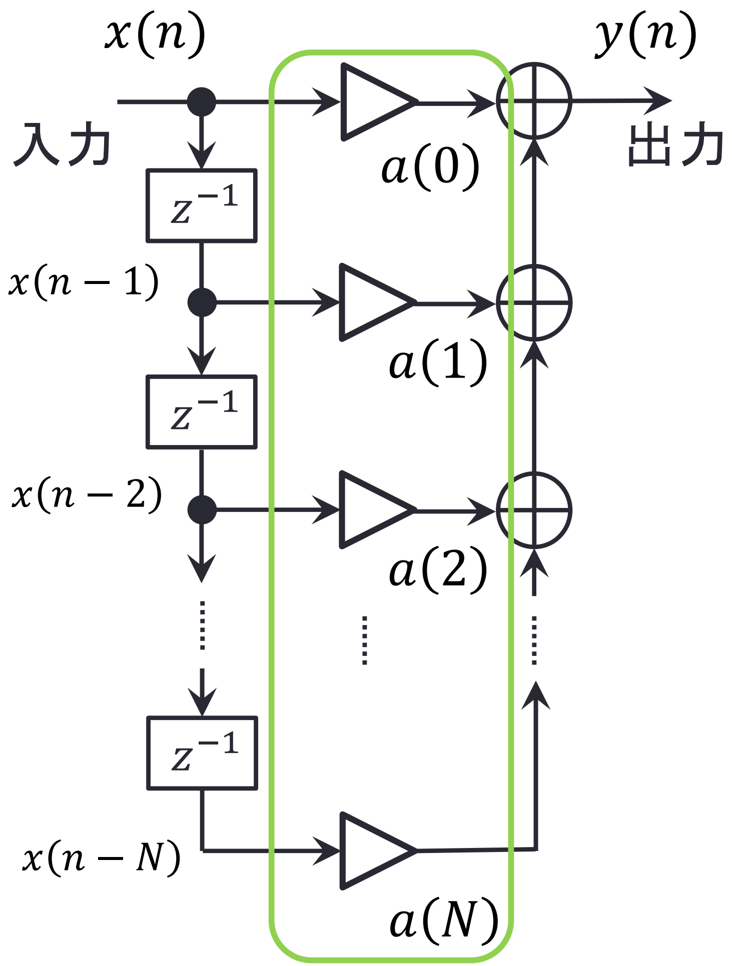
- デジタルフィルタの標準形構造
  - $b_i = 0$ (for all i)かつ$N < \infty$のとき、
    非再帰型ディジタルフィルタ
    - インパルス応答が有限時間で終了
    - FIR (Finite Impulse Response) フィルタ

  - $b_i \neq 0$または$b_i = 0$ (for all i)かつ$N = \infty$のとき、
    再帰型デジタルフィルタ
    - インパルス応答が無限に継続
    - IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ

  - FIRフィルタ, IIRフィルタについては、この後詳しく説明

FIRフィルタ

- FIR (Finite Impulse Response) フィルタとは
  - インパルス応答が有限の時間で終了するフィルタ
  - 非再帰部のみで構成される



  - 伝達関数は

$$H(z) = \boxed{\sum_{i=0}^{N} a(i)} z^{-i}$$

FIRフィルタの特徴

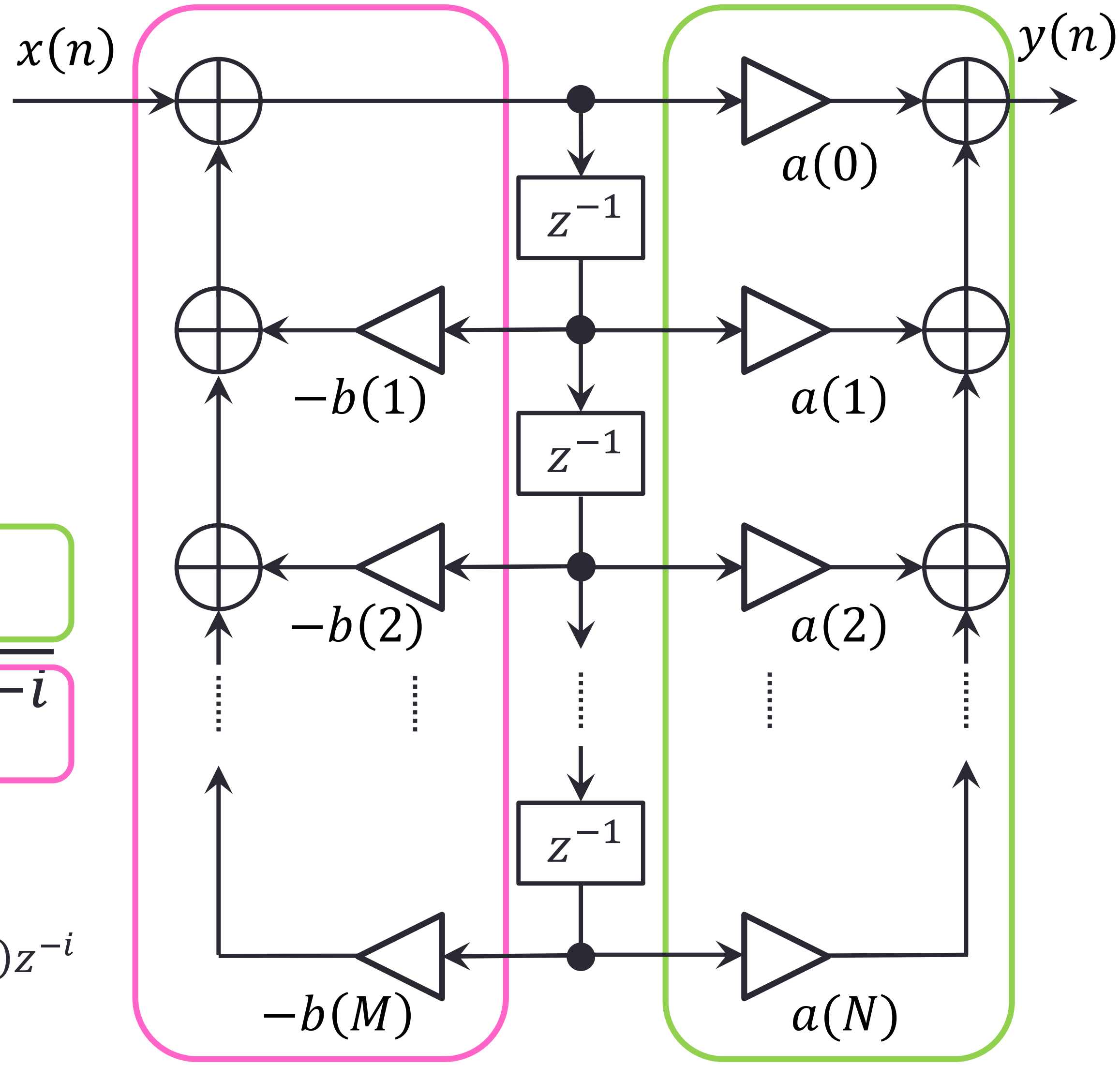
- 常に安定なフィルタ
- 完全線形位相 (直線位相) の実現が容易
  - 周波数に関係なく信号の遅延 (位相推移) が一定
  - 例えば、空気中は1秒間に10 Hzの音は340 m進むが、1 kHzの音も340 m進むので、空気 (というシステム) は直線位相。
- 高次の次数が必要
  - 特性の良いフィルタを設計するためには、次数Nを大きく取る必要がある。

- 実際に設計するのは比較的簡単だが、特性の良いフィルタを作ることは難しい。

IIRフィルタ

- IIR (Infinite Impulse Response) フィルタとは
  - インパルス応答が無限長のフィルタ
  - 再帰部と非再帰部で構成される
  - 伝達関数は

$$H(z) = \frac{\boxed{\sum_{i=0}^{N} a(i) z^{-i}}}{\boxed{1 + \sum_{i=1}^{M} b(i) z^{-i}}}$$



非再帰構造で表現するなら，$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a(i) z^{-i}$
ただし，コンピュータに実装できない

IIRフィルタの特徴

- IIRフィルタの特徴
  - 安定性は保証されない
  - 位相特性はひずむ
    - 特定周波数のみ信号のみ遅延 (位相推移) する可能性あり
    - 例えば、IIRフィルタに通すと10 Hzの音が1秒遅れるが、1 kHzの音をIIRフィルタに通しても、1秒遅れるとは限らない。
  - 低次の次数で十分
    - FIRフィルタと比較して特性の良いフィルタ (急峻な特性を持つフィルタ)を低次の次数で設計可能
      - 例えば、FIRフィルタで100次必要なフィルタが、IIRフィルタなら10次程度で実現可能

- しかし、実際に安定かつ高性能なIIRフィルタを設計することは非常に困難。

演習課題 (3/5) (10分間)

- 5点の移動平均を求めるFIRフィルタを標準形構造を用いて設計せよ。
  - ヒント: 例えば3点の移動平均を考える
    - 信号$x(n)$の時刻nにおける3点の移動平均は $y(n) = \{x(n) + x(n-1) + x(n-2)\}/3$ と表せる
      - 5点の移動平均だと？
      - さらにz変換で表すと？
      - 伝達関数は？
      - 標準形構造は？

フィルタのまとめ

- デジタルフィルタ
  - 色々な周波数成分を持つ信号の中から、不要な周波数成分を除去し、必要な周波数成分のみを取り出す回路
  - あらゆる線形系はデジタルフィルタにより表現可能

  - デジタルフィルタの設計
    - FIRフィルタの設計は比較的容易だが、急峻な特性を実現することは困難
    - IIRフィルタは非常に急峻な特性を実現できるが、実際の設計は非常に困難

  - 信号処理の基本は畳み込みとフィルタ設計
    - 畳み込み (フィルタ処理) は信号処理の基本
    - 信号処理の精度/性能はフィルタの性能/設計に大きく依存

相関関数

- 相関関数とは
  - 2つの信号がどの程度似ているのかを定量的に表す尺度のひとつ
  - 信号の検出や雑音除去などによく使われる

- 相互相関関数

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+k)$$

- 自己相関関数

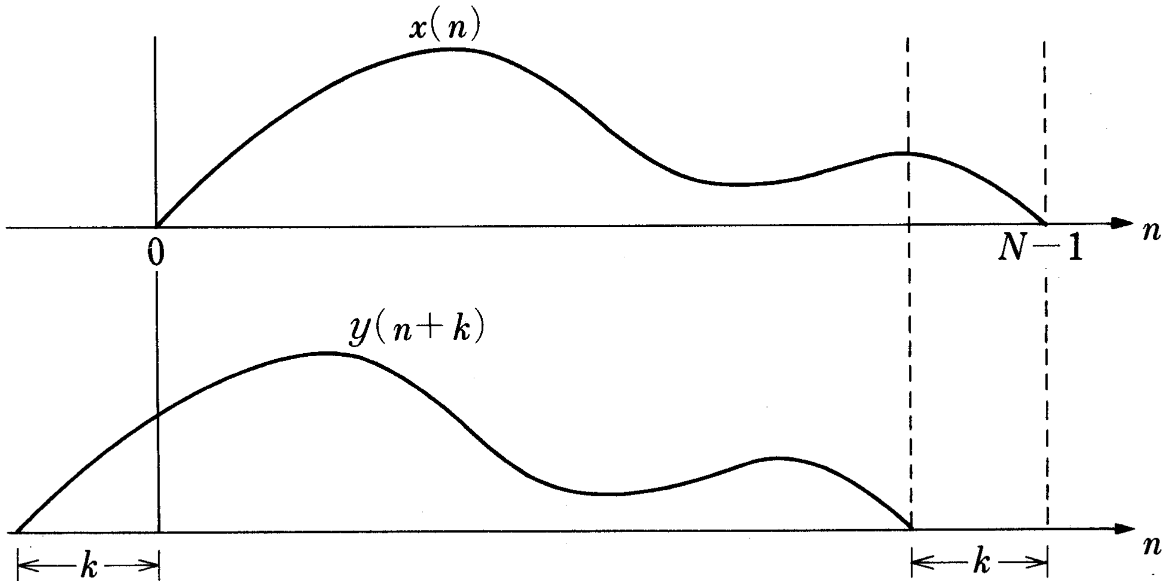
$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k)$$

相互相関関数

- 信号$x(n)$と信号$y(n)$がどのくらい似ているかを定量的に表したもの

$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+k)$$

- 2つの信号が完全に一致する場合、相関係数は最大となる。まったく一致しない場合はゼロ。



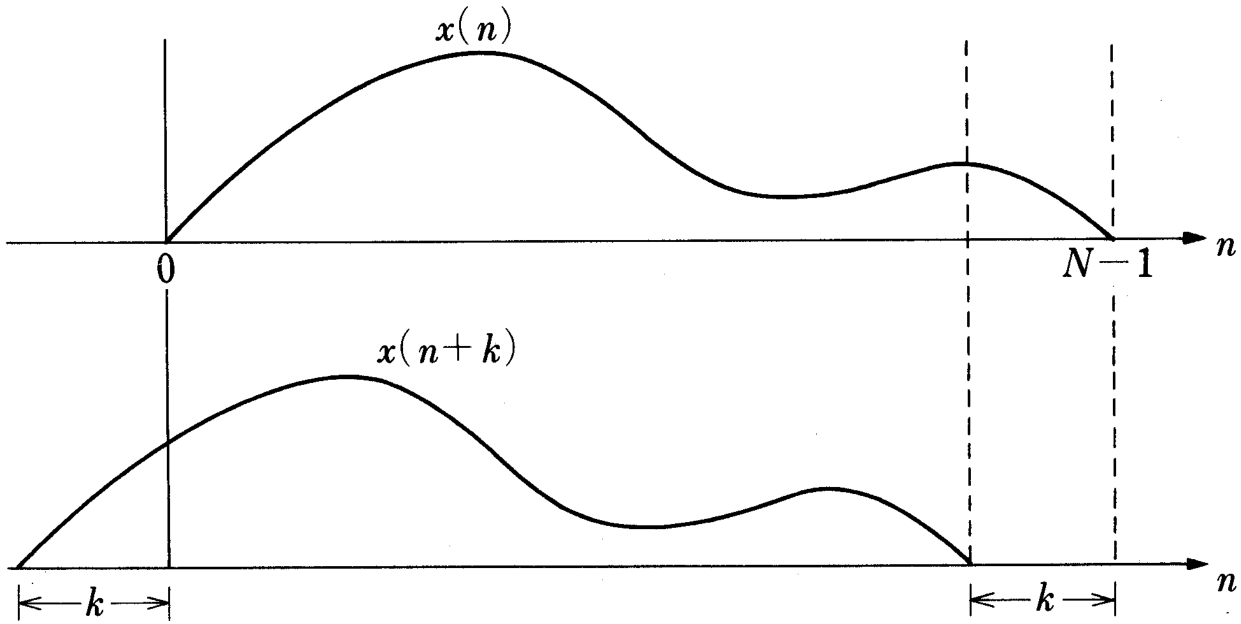
＊最小の場合、負の相関があるという
(位相が反転しているということ)

自己相関関数

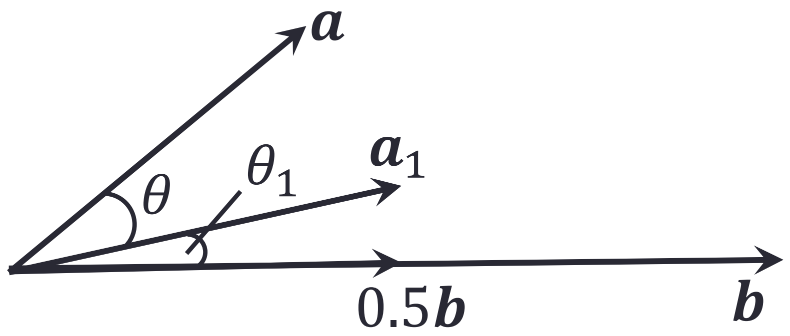
- 同じ信号間の相互相関

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k)$$

- 2つの信号が完全に一致する場合、相関係数は最大となる。まったく一致しない場合はゼロ。



相関関数の考え方



- 数学の内積と同じ
  - たとえば、ベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{b}$の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

  - θは2つのベクトルのなす角を表し、
    - 2つのベクトルの向きが一致するとき$\cos \theta = 1$となり、内積は最大
    - 2つのベクトルが互いに直交するとき、内積はゼロ

- この考え方を信号に応用したものが相関関数
  - 2つの信号が似ている (向きが一致) と相関関数は最大
  - お互いがまったく似ていない (直交関係にある) と相関関数はゼロ

演習課題 (4/5) (10分間)

- $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right),\ y(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right),\ N = 8$としたときの相互相関関数を計算し、横軸を$k$、縦軸を相互相関関数$R_{xy}(k)$として図示せよ。
- また相互相関関数はどのような事象を調べるときに役立つか考えよ。

- ヒント:$R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+k)$に$x(n),\ y(n)$を代入して　計算するだけ。sin, cosの特性をよくわかっていれば、　最後まで計算しなくても図示可能。

演習課題 (5/5) (10分間)

- $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), N = 8$ としたときの自己相関関数を計算し、横軸をk、縦軸を自己相関$R_{xx}(k)$として図示せよ。
- また、自己相関関数はどのような事象を調べるときに役立つか考えよ。

- ヒント: $R_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k)$に$x(n)$を代入して計算するだけ。sin関数の特性がよくわかっていれば、最後まで計算しなくても図示可能。