

演習課題 (1/4) 解答例 (1/2)

- 次のシステムは線形システムか？ 線形システムである場合はその理由も考えよ。
 - 線形システムかどうかは、
重ね合わせの原理を満たすかどうかで決まる。

$$L\{x_1(n) + x_2(n)\} = L\{x_1(n)\} + L\{x_2(n)\}$$

$$L\{ax(n)\} = aL\{x(n)\}$$

- 1. システム L が5を足す系の場合： **線形システムではない**
 - $L\{2\} + L\{3\} = (2+5) + (3+5) = 15$
 - $L\{2 + 3\} = (5+5) = 10$ ←システムに2と3を入力
 - $L\{2\} + L\{3\} \neq L\{2 + 3\}$
→重ね合わせの原理 (1) を満たさない

演習課題 (1/4) 解答例 (2/2)

- 2. システム L が3をかける系: **線形システムである**
 - $L\{2\} + L\{3\} = (2 \times 3) + (3 \times 3) = 15$
 - $L\{2 + 3\} = (5 \times 3) = 15$ ←システムに2と3を入力
 - **$L\{2\} + L\{3\} = L\{2 + 3\}$ (重ね合わせの原理 (1) を満たす)**
 - $L\{2 \times 3\} = 6 \times 3 = 18$
 - $2L\{3\} = 2 \times (3 \times 3) = 18$ ←システムに3を入力
 - **$L\{a \times 3\} = aL\{3\}$ (重ね合わせの原理 (2) も満たす)**
-
- 3. システム L が入力値の2乗を行う系: **線形システムではない**
 - $L\{2\} + L\{3\} = (2^2) + (3^2) = 13$
 - $L\{2 + 3\} = (5^2) = 25$ ←システムに2と3を入力
 - **$L\{2\} + L\{3\} \neq L\{2 + 3\}$**
- 重ね合わせの原理 (1) を満たさない

演習課題 (2/4) 解答例

離散フーリエ変換の式 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$

これを $X(k) = F\{x(n)\}$

と表すことにする．ここで係数倍した二つの信号の和の DFT を考える．

$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ の DFT は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} (a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_1x_1(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sum_{n=0}^{N-1} a_2x_2(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \\ &= a_1 \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) + a_2 \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right) \end{aligned}$$

すなわち, $F\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1F\{x_1(n)\} + a_2F\{x_2(n)\}$

よって、重ね合わせの原理を満たす

演習課題 (3/4) 解答例 (1/3)

- 線形時不変システムにおいて入力 $x(n)$ 、インパルス応答 $h(n)$ が下記のように与えられたときの出力 $y(n)$ を求めよ。

たたみ込み和の式 $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$ にインパルス応答を代入すると,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{3-1} h(m)x(n-m) \\ &= h(0)x(n-0) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) \\ &= x(n-2) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0-2) \\ &= x(-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

演習課題 (3/4) 解答例 (2/3)

$$\begin{aligned}y(1) &= x(1 - 2) \\&= x(-1) \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(2) &= x(2 - 2) \\&= x(0) \\&= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(3) &= x(3 - 2) \\&= x(1) \\&= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(4) &= x(4 - 2) \\&= x(2) \\&= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(5) &= x(5 - 2) \\&= x(3) \\&= 1\end{aligned}$$

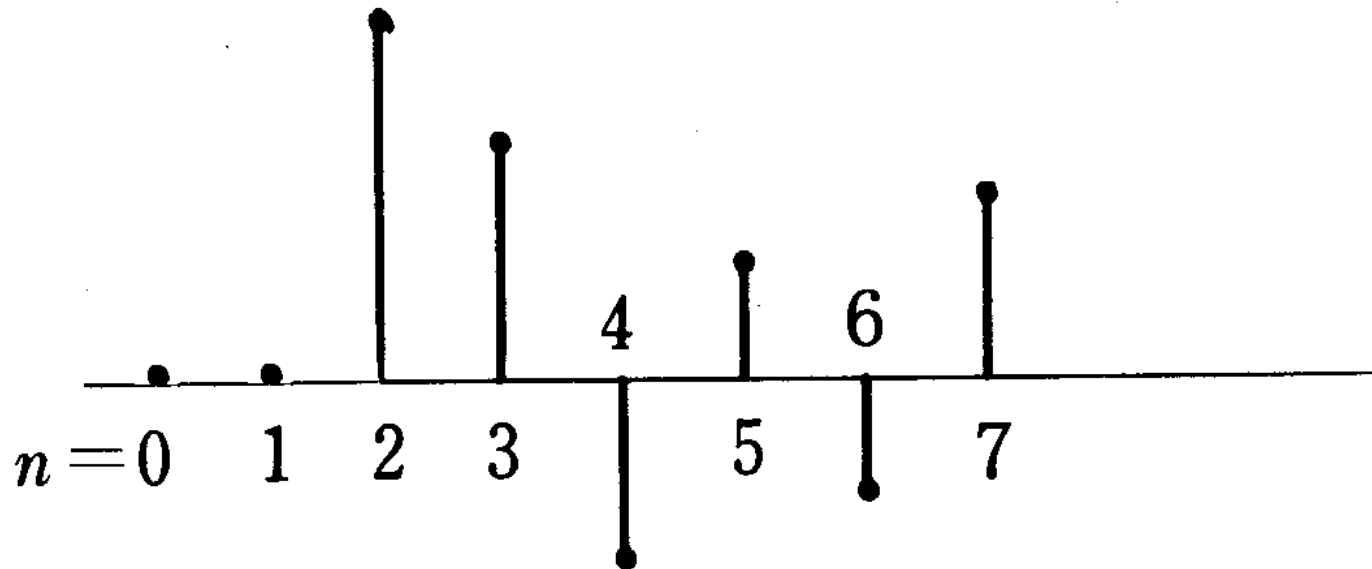
$$\begin{aligned}y(6) &= x(6 - 2) \\&= x(4) \\&= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(7) &= x(7 - 2) \\&= x(5) \\&= 2\end{aligned}$$

演習課題 (3/4) 解答例 (3/3)

Ans.

$$y(0) = 0, y(1) = 0, y(2) = 4, y(3) = 3, y(4) = -2, \\ y(5) = 1, y(6) = -1, y(7) = 2$$



ポイント:

このケースでは $h(n]$ が $n = 2$ のときのみ1、それ以外は0なので、
入力信号 $x(n]$ を2点ずらした出力となる。

演習課題 (4/4) 解答例 (1/3)

- 線形時不変システムにおいて入力 $x(n)$ 、インパルス応答 $h(n)$ が下記のように与えられたときの $y(n)$ を求めよ。

たたみ込み和の式 $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$ にインパルス応答を代入すると,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{3-1} h(m)x(n-m) \\ &= h(0)x(n-0) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) \\ &= 2x(n) + x(n-2) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} y(0) &= 2x(0) + x(0-2) \\ &= 2 \times x(0) + x(-2) \\ &= 2 \times 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

演習課題 (4/4) 解答例 (2/3)

$$\begin{aligned}y(1) &= 2x(1) + x(1 - 2) \\&= 2x(1) + x(-1) \\&= 2 \times 3 \\&= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(2) &= 2x(2) + x(2 - 2) \\&= 2x(2) + x(0) \\&= 2 \times (-2) + 4 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(3) &= 2x(3) + x(3 - 2) \\&= 2x(3) + x(1) \\&= 2 \times 1 + 3 \\&= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(4) &= 2x(4) + x(4 - 2) \\&= 2x(4) + x(2) \\&= 2 \times (-1) + (-2) \\&= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(5) &= 2x(5) + x(5 - 2) \\&= 2x(5) + x(3) \\&= 2 \times 2 + 1 \\&= 5\end{aligned}$$

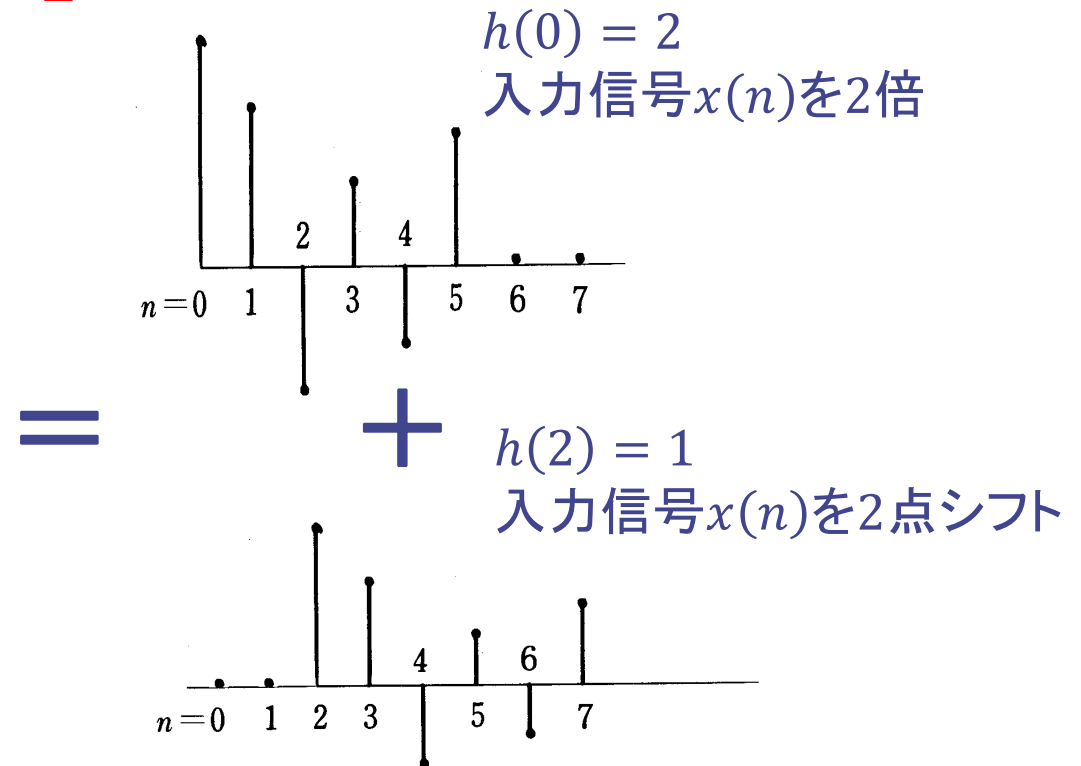
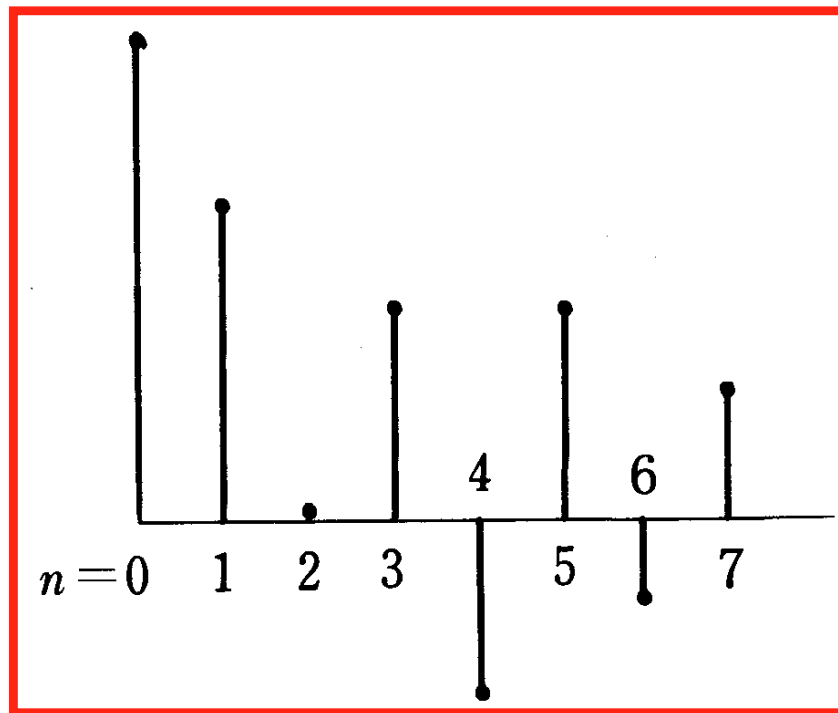
$$\begin{aligned}y(6) &= 2x(6) + x(6 - 2) \\&= 2x(6) + x(4) \\&= 2 \times 0 + (-1) \\&= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(7) &= 2x(7) + x(7 - 2) \\&= 2x(7) + x(5) \\&= 2 \times 0 + 2 \\&= 2\end{aligned}$$

演習課題 (4/4) 解答例 (3/3)

Ans.

$$y(0) = 8, y(1) = 6, y(2) = 0, y(3) = 5, y(4) = -4, \\ y(5) = 5, y(6) = -1, y(7) = 2$$



ポイント: このケースでは $h(n)$ が $n = 0$ のとき2、 $n = 2$ のとき1、それ以外は0なので、入力信号 $x(n)$ を2倍した信号と入力信号 $x(n)$ を2点ずらした信号を足し合わせた信号が出力となる。