デジタル信号処理

第10回　z変換

立命館大学
情報理工学部
岩居　健太

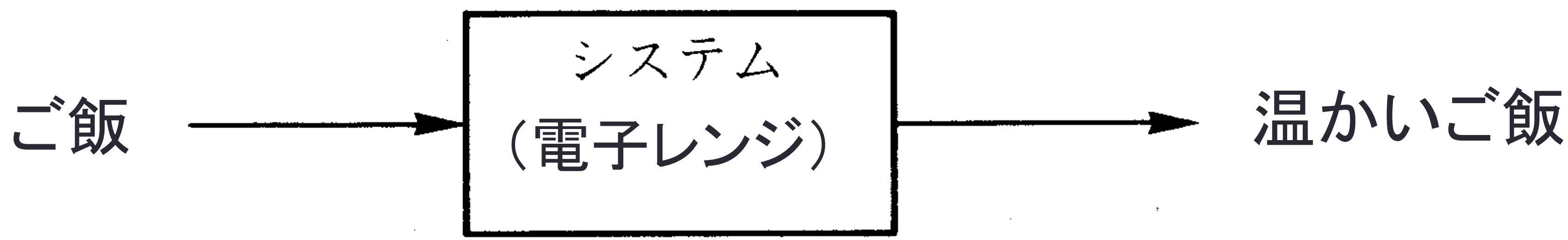
本日の講義内容

- z変換
  - たたみこみ演算の考え方
  - z変換とは
  - システムの伝達関数
  - DFTとz変換

【復習】離散時間信号系

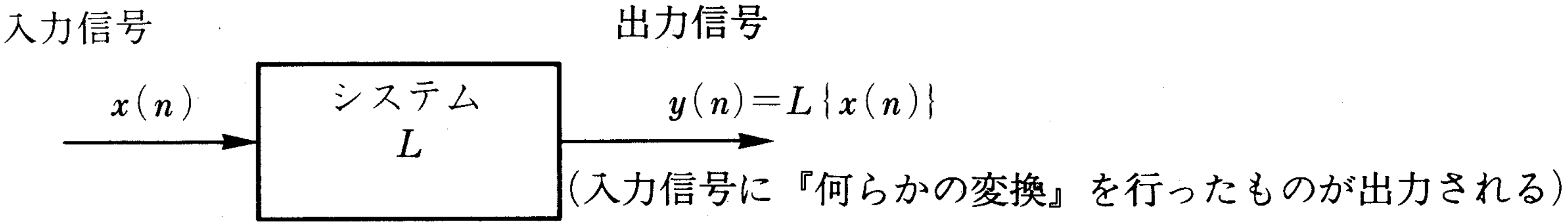
- 系とは
  - 英語表記はsystem (システム)
  - 「様々な要素を持つ体系」

- 身近な系
  - 例えば電子レンジ
    - 冷えたご飯を入力すると、温めるという変化を加え、温かいご飯を出力するシステム。



【復習】線形系 (線形システム)

- 信号$x(n)$をシステム L に入力したときの出力を$y(n)$とする



- このシステムが「重ね合わせの原理」を満たすとき**線形系(線形システム)** と呼ぶ

$$L\{x_1(n)+x_2(n)\}=L\{x_1(n)\}+L\{x_2(n)\}$$

$$L\{ax(n)\}=aL\{x(n)\}$$

上記2つをまとめると

$$\boxed{L\{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\}=a_1L\{x_1(n)\}+a_2L\{x_2(n)\}}$$

【復習】線形時不変システム

- 線形時不変システムとは
  - 線形システムの特性が時間によって変わらないシステム

$$y(n) = L\{x(n)\}$$

  - 信号$x(n)$の時間をmサンプル分シフトした信号$x(n-m)$を入力したとき、システム出力が

$$y(n-m) = L\{x(n-m)\}$$

となれば線形時不変システムである

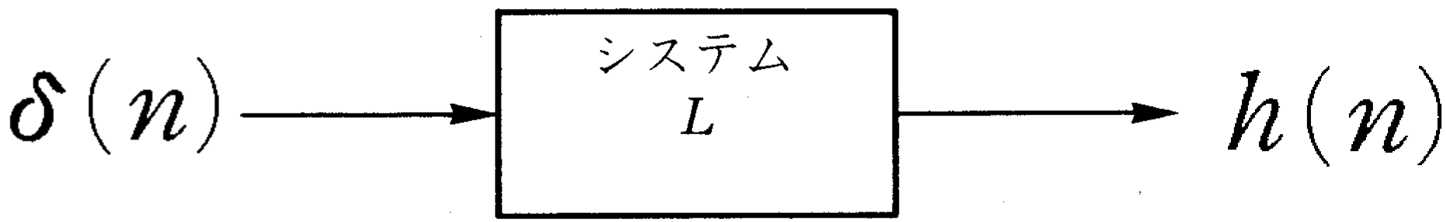
  - 身近な例: スピーカのパワーアンプなど

もしパワーアンプが線形時不変でないと、ボリュームの大きさが時間とともに変化してしまい、自分でボリュームの大きさを制御できなくなる。

【復習】インパルス応答

- インパルス応答とは
  - 線形時不変システムにインパルス信号$\delta(n)$を入力したとき、その出力$h(n)$をインパルス応答と呼ぶ

$$\boxed{h(n) = L\{\delta(n)\}}$$



- よってmサンプル分シフトしたインパルス信号に対する出力は、線形時不変系の性質より

$$\boxed{h(n-m) = L\{\delta(n-m)\}}$$

【復習】線形時不変システムの表記法

線形時不変システムの入出力関係

$$
\begin{aligned}
y(n) &= L\{\boxed{x(n)}\} \\
&= L\left\{\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)}\right\} \\
&= \boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}} \boxed{x(m)} L\{\delta(n-m)\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \boxed{h(n-m)}
\end{aligned}
$$

$x(n)$をインパルス信号を用いて表現

重ね合わせの原理 (1), (2) を適用

インパルス応答の定義を適用

これを**たたみこみ和**と呼ぶ

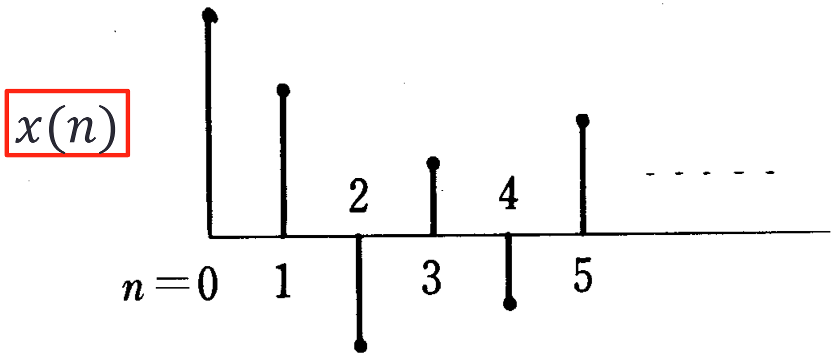
$$
\boxed{y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n)}
$$

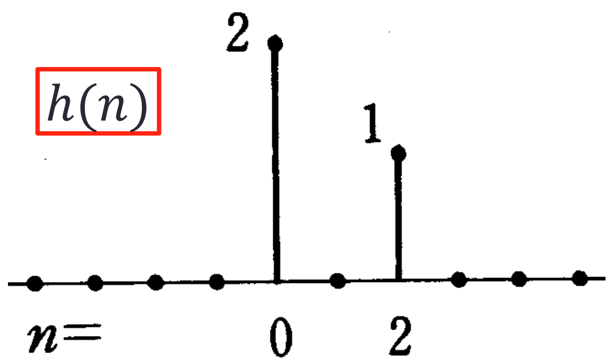
「インパルス応答$h(n)$を持つシステムに信号を入力する」と説明できる

たたみこみ和の考え方

- たたみこみ和演算とは
  - 信号を遅延させてある係数を与えて次々に加算していく計算

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$



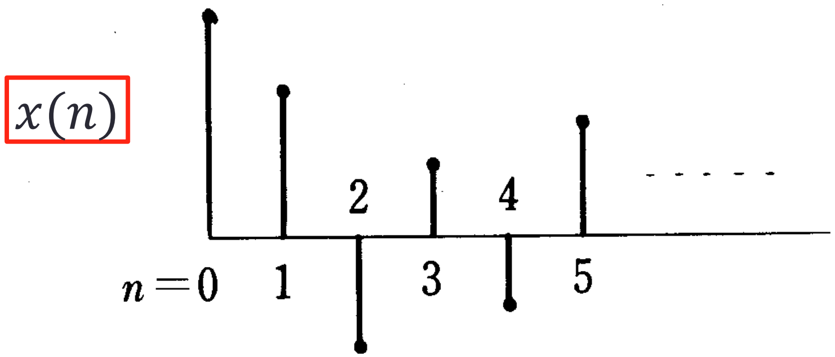


直接、式を計算しなくても、$h(0)=2,\ h(2)=1$ということは、0時刻信号を遅延させて振幅を2倍したものと、2時刻信号を遅延させて振幅を1倍したものを足し合わせればOK

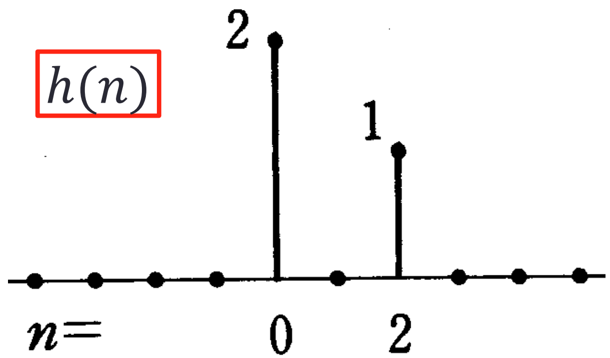
たたみこみ和演算の実例 (1)

- たとえば、部屋の反射など

スピーカから音を出力すると、人間の耳には直接音が到着してから, 少し遅れて反射音が届く。
→これを式で書くとたたみこみ和になる。



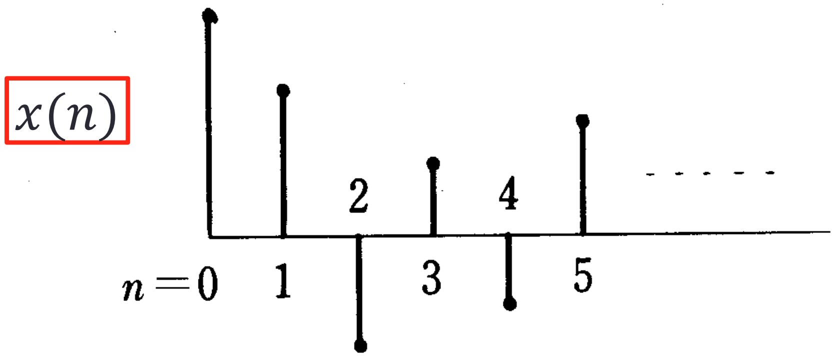
スピーカから出力する音



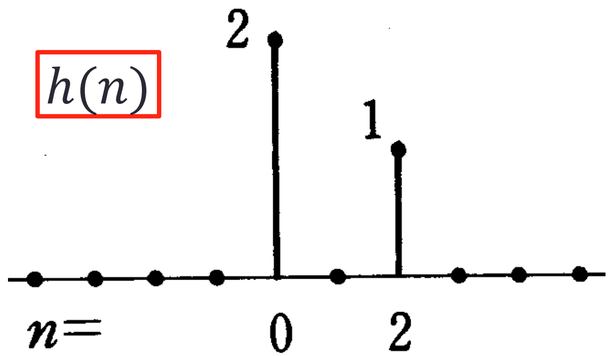
部屋のインパルス応答

この系だと、スピーカから出力された音は、0サンプル (0時刻) 後に直接音が振幅が2倍されて到着するのに対し反射音は2サンプル (2時刻) 後に振幅が1倍されて到着するという意味になる。

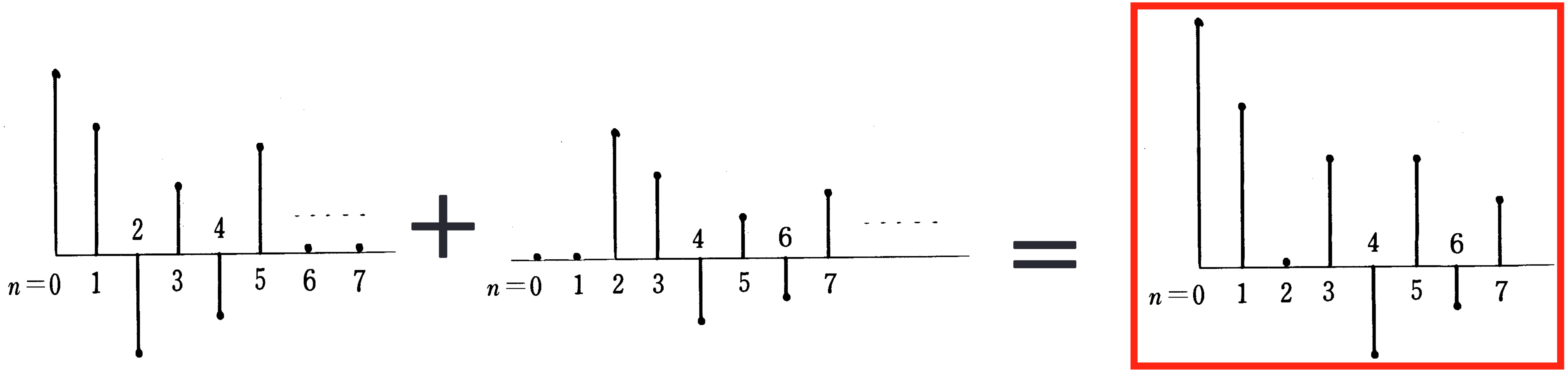
たたみこみ和演算の実例 (2)



スピーカから出力する音



部屋のインパルス応答



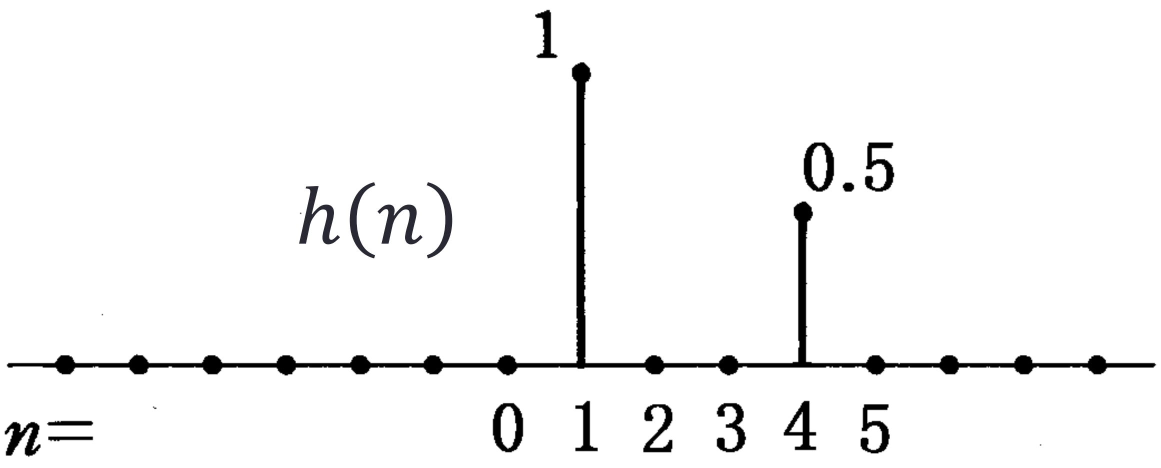
0サンプル (0時刻) 後に直接音が振幅が2倍されて到着

反射音は2サンプル (2時刻) 後に振幅が1倍されて到着

観測信号 : $x(n)$という音をスピーカから出力しても、我々の耳に到着するときには反射音などの影響により信号が変形

演習課題 (1/4) (5分間)

- ある部屋でインパルス応答を計測した結果、下記$h(n)$ が得られた。このインパルス応答をもとに、部屋の解析を行いたい。ただしサンプリング周波数を8000 Hz、音速を340 m/sとする。
    - 1. 信号源 (インパルス発生源) と観測点の距離は?
    - 2. 反射音は直接音と比べて、どのくらい遅れて、どのくらいのパワー (エネルギー) で到着するか?



ヒント: 距離＝速さ×時間
1. は原点から直接音到着までの時刻で決まる。
2. は直接音と反射音の時刻差とパワー差で決まる

線形時不変系のまとめ

- 線形時不変系
  - インパルス応答により系を表現可能
  - インパルス応答がわかっていれば、
    音源情報とのたたみこみ和演算により観測信号を推測できる
  - インパルス応答があれば、その系の解析も行うことができる
- 非線形系
  - インパルス応答はそのまま使えない
  - なぜなら、音源情報とインパルス応答を畳み込んでも、
    実際に観測した信号と同一になることが保障されないから
    (原因の一例:整数倍音に代表される非線形歪み)

演習課題 (2/4) (5分間)

- 下記の3つの系に関して、身の回りでどのようなものがあるか、その理由も含めて答えよ。
  - 1. 線形時不変系

    例えば、天秤など。他には?
  - 2. 線形時変系

    例えば、部屋の反射特性など。他には?
  - 3. 非線形系

    世の中の多くは非線形系。他に何があるか、考えてみてください。

    例えば、車の燃料消費量など。

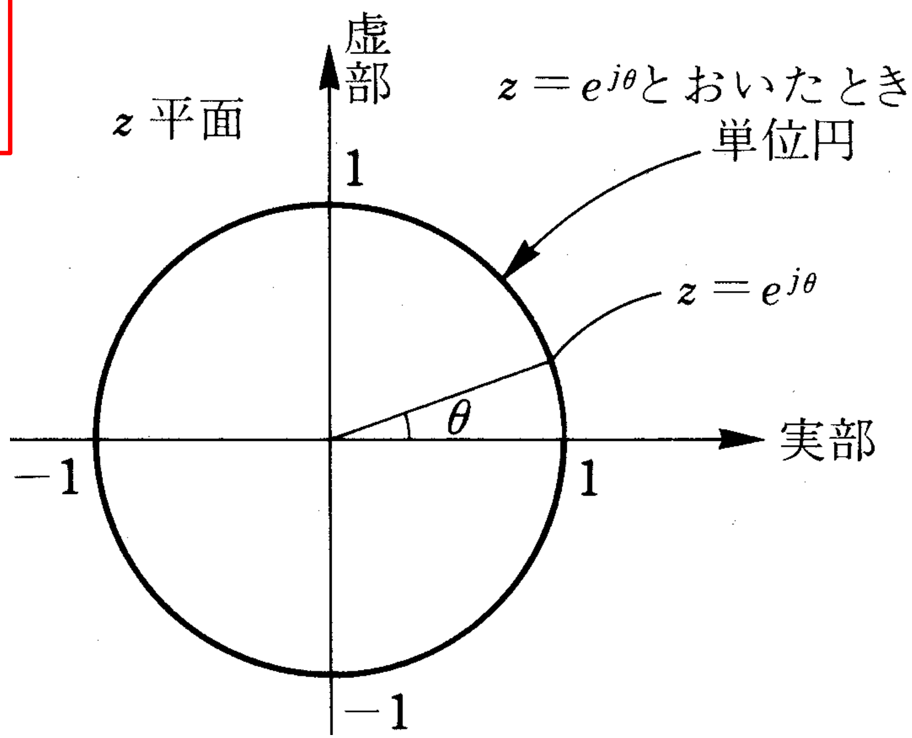
z変換

- z変換とは
  - 時間軸の信号$x(n)$から複素平面 (z平面) 上への写像

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

zは複素数であり, $z = e^{\sigma + j\theta}$

線形時不変システムの周波数特性を表すのに適している



z変換の性質 (1)

$* X(z) = Z[x(n)]$と表記する

- ①重ね合わせの原理が成り立つ

$$Z\{x_1(n) + x_2(n)\} = Z\{x_1(n)\} + Z\{x_2(n)\}$$
$$Z\{ax(n)\} = aZ\{x(n)\}$$

よって必ず線形時不変性が成り立つ

- ②たたみこみ和のz変換はz変換の積になる

時間領域の演算

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$
$$= h(n) * x(n)$$

Z領域での演算

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

この2式は同じ
演算を意味する

z変換の性質 (2)

- ③時間が mサンプル分シフトした信号のz変換は $z^{-m}X(z)$となる

  信号$X(z)$をmサンプル分シフトさせた信号$x(n-m)$のz変換は$z^{-m}X(z)$となる

- ④周波数特性はzを$\exp(j2\pi f\Delta t)$で置き替えればよい

  $x(n)$のz変換を$X(z)$とするとき$z=\exp(j2\pi f\Delta t)$とおくと、$X\left(z=e^{j2\pi f\Delta t}\right)$は周波数$f$の関数となるから、信号の周波数特性を求めることができる

  なお、Δtは標本化間隔を表す

z変換を用いた周波数特性の表記 (1)

- 線形時不変システムの出力

$$y(n) = h(n) * x(n)$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

両辺をz変換すると、z変換の性質②より

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

式を変形すると

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

となり、インパルス応答$h(n)$のz変換$H(z)$を線形システムの伝達関数 (システムの伝達特性) と呼ぶ

伝達関数$H(z)$から、システムの周波数特性を求めることができる

z変換を用いた周波数特性の表記 (2)

- 伝達関数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

z変換の性質④よりシステムの周波数特性はzを

$\exp(j2\pi f \Delta t)$と置き替えるだけ

$$H(z) = H\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right)$$ ←周波数fの関数

周波数特性は複素数なので実部と虚部を

$$H\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right) = A(f) + jB(f)$$

とすると

振幅特性: $\boxed{\left|H\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right)\right| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)}}$

位相特性: $\boxed{\arg\left\{H\left(e^{j2\pi f \Delta t}\right)\right\} = \tan^{-1}\{B(f)/A(f)\}}$

演習課題 (3/4) (10分間)

- 信号の微分を行ったり、画像処理で輪郭を強調するのに、入力信号の隣接した標本値の差を出力信号とする手法が良く用いられる。ここで入力信号を$x(n)$、出力信号を$y(n)$とすると

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

  - 1. この式の両辺のz変換を求めよ
  - 2. システムの伝達関数を求めよ
  - 3. システムの周波数特性を求めよ

    ただし標本化間隔をΔtとする
  - 4. システムの振幅特性と位相特性を求めよ

ヒント：z変換の式に値を代入するだけ

演習課題 (4/4) (10分間)

- DFTにより変換したスペクトルのz平面上での軌跡を考える。

離散信号$x(n), \{n = 0, 1, 2, \cdots, N-1\}$の離散フーリエ変換は

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi nk/N}$$

ここで、$z = \exp(j2\pi nk/N)$とおいたとき、kの変化に対する$X(k)$のz平面上での軌跡を図示せよ。

ヒント：DFTのスペクトルは離散値。
よって、z平面の??で間隔?の点が軌跡になる。