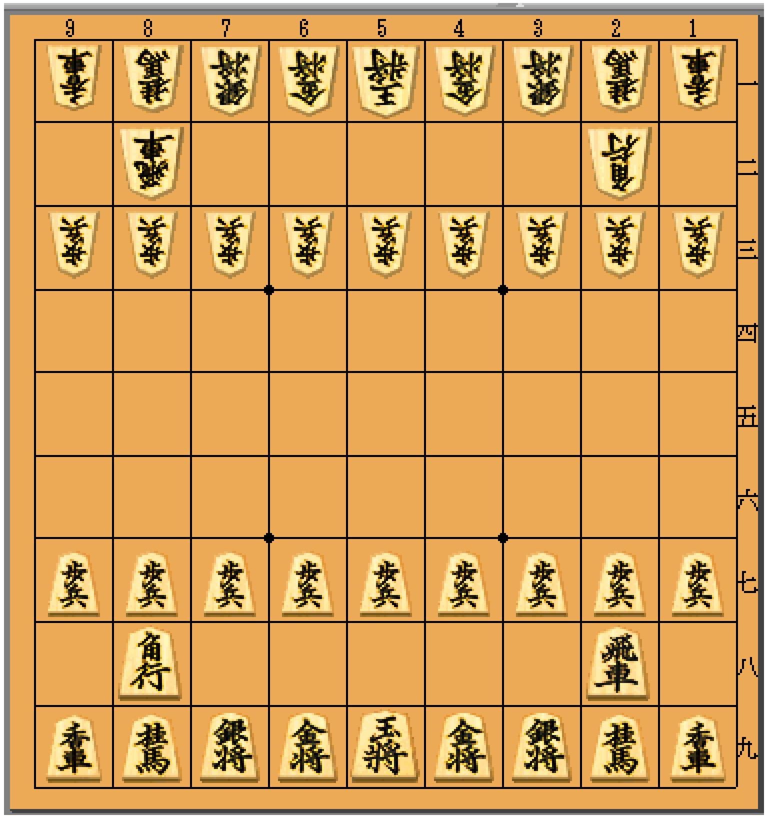
第1回

演習課題（1/2）

- これってデジタル？
  - 時間の流れ
  - 郵便料金
  - 将棋の駒の動き



- ヒント：デジタルとアナログは何が違うのか？

演習課題(1/2) 解答例

- これってデジタル？
  - 時間の流れ
    - アナログ:　理由は時間の流れは連続だから。もしデジタルだと時の流れが飛び飛びになる。
  - 郵便料金
    - デジタル:　重さや大きさの具体的な数値(離散量)によって料金が決まっているから。
  - 将棋の駒の動き
    - デジタル:　ますめで区切られた空間(離散空間)しか動けない。連続的に動くと将棋にならない。

演習課題（2/2）

- 日常生活のなかで、デジタル化してほしいものを3つあげよ。（理由も記載のこと、最低1つ以上書くこと）
    - 例：植物の水遣り：　店員に観葉植物にいつ水を遣れば良いですか？と聞くと「土の表面が乾いてきたら水をたっぷりと」という答えが返ってきます。素人にはまったくわかりません。これを「土の表面の含水量が〇ml/mm 以下になれば水を〇リットルかけてくださいといってもらえれば非常にわかりやすい。
- ヒント：デジタル化のポイントは？
    - アイディアによってはビジネスチャンスにつながるかも？

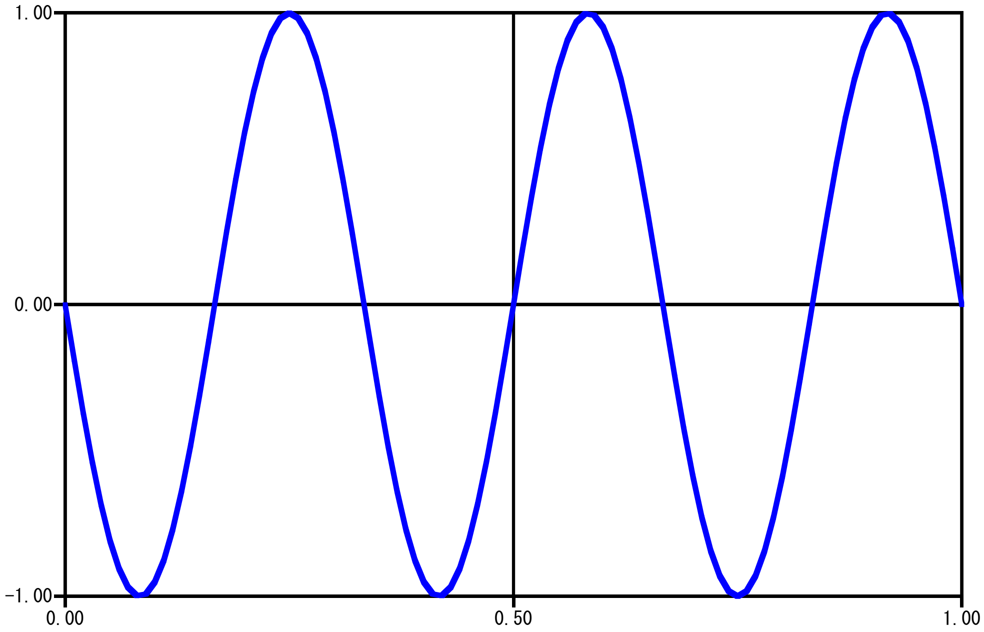
演習課題（2/2）　解答例

- 日常生活のなかで、デジタル化してほしいものを3つあげよ。（理由も記載のこと、最低1つ以上書くこと）
  - 考え方「デジタル化のポイントは」
    - 数値で表すことに適したもの
    - 数値で表したほうが適切に伝達できるもの
    - 例を参考に自分自身で色々考えてみること

第2回

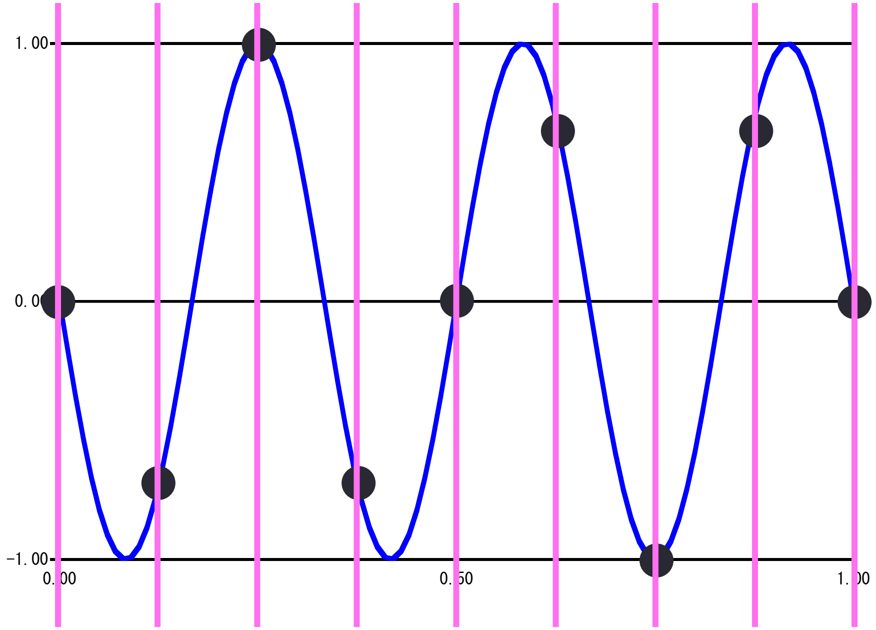
演習課題(1/4)

- 下図の波を標本化して離散時間信号に変換したい。
  - 8Hzで標本化したときの標本点を図中に●で示せ。
  - 同様に2Hzで標本化したときの標本点を図中に○で示せ。
- ヒント:
  - $\sin(2*\pi*3*t+\pi)$
  - 8Hzで標本化すると標本化間隔は?

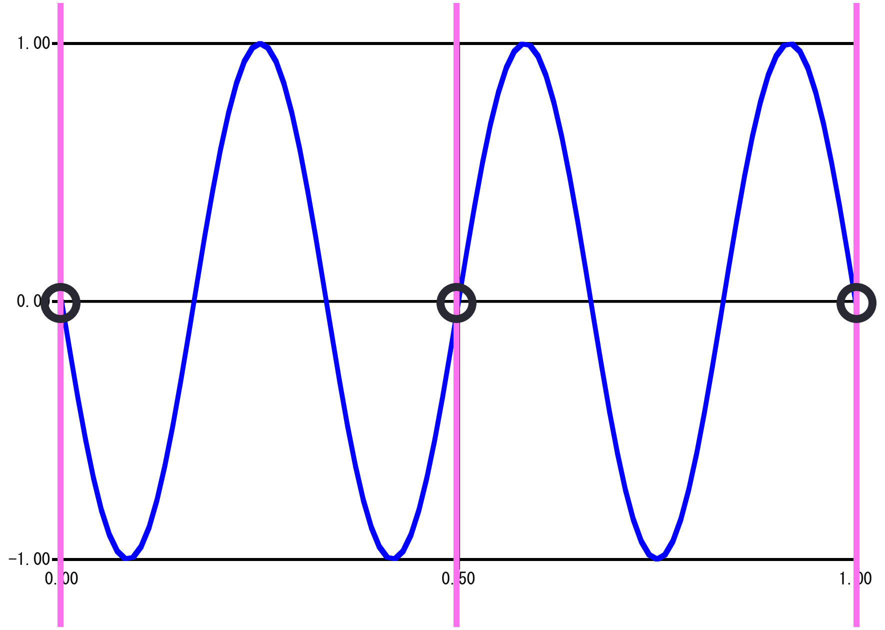


演習課題(1/4) 解答例

- 下図の波を標本化して離散時間信号に変換したい。
  - 8Hzで標本化したときの標本点を図中に●で示せ。
  - 同様に2Hzで標本化したときの標本点を図中に○で示せ。



8Hzで標本化

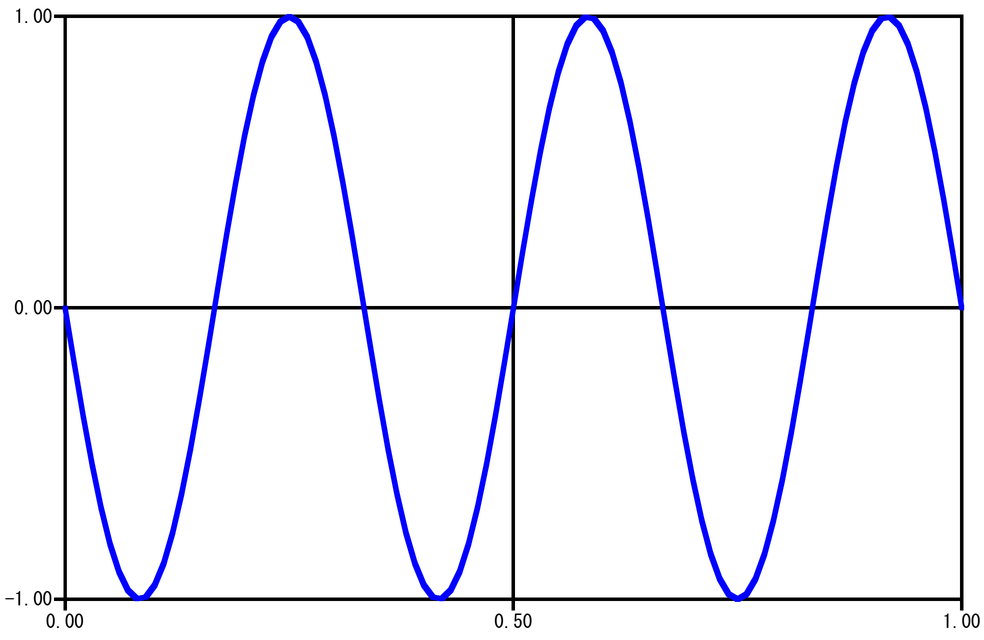


2Hzで標本化

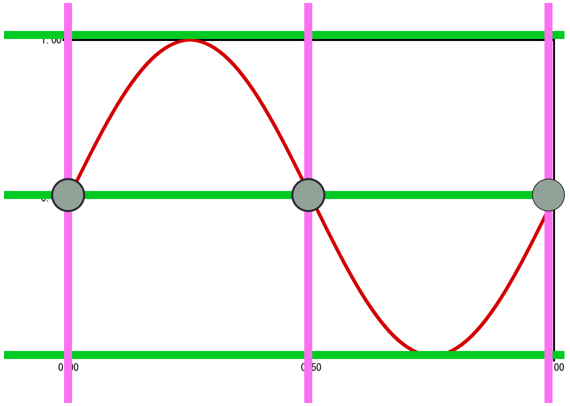
等間隔で標本化するのがポイント

演習課題(2/4)

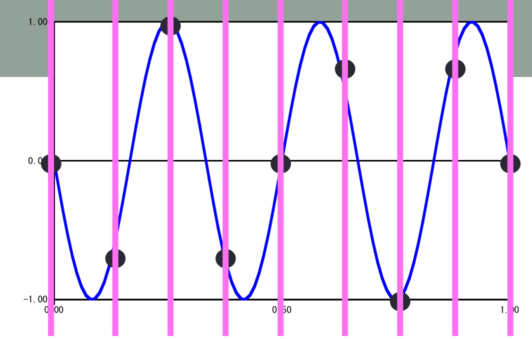
- 演習課題(1/4)で変換した標本化周波数8Hzの離散時間信号をデジタル信号に変換したい。下記の大きさで量子化するとどうなるか図示せよ。
  - 振幅を4個の値(2ビット)で量子化する場合
  - 振幅を9個(3ビット～4ビット)の値で量子化する場合



例： 標本化周波数2Hzの離散時間信号を3つの値で量子化すると

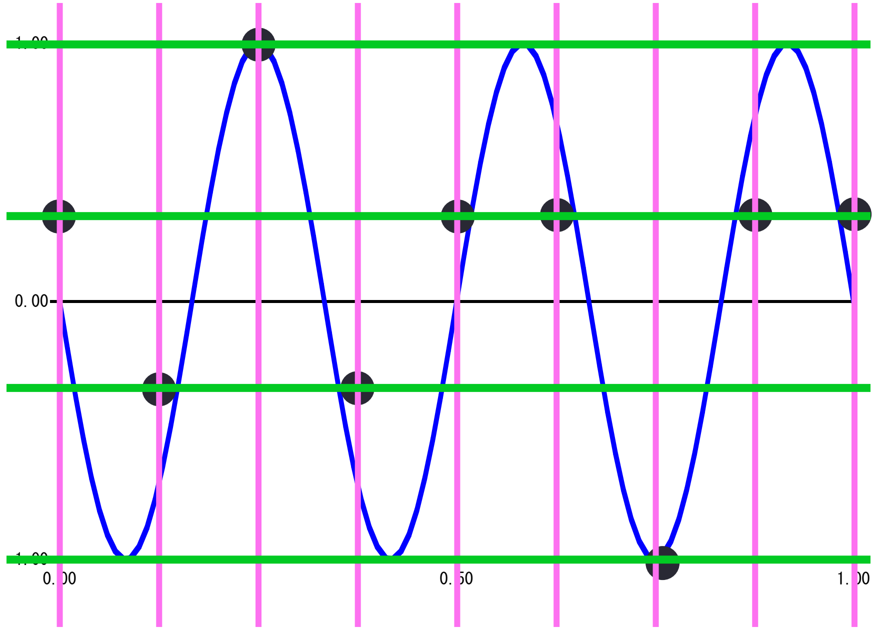


演習課題（2/4）　解答例

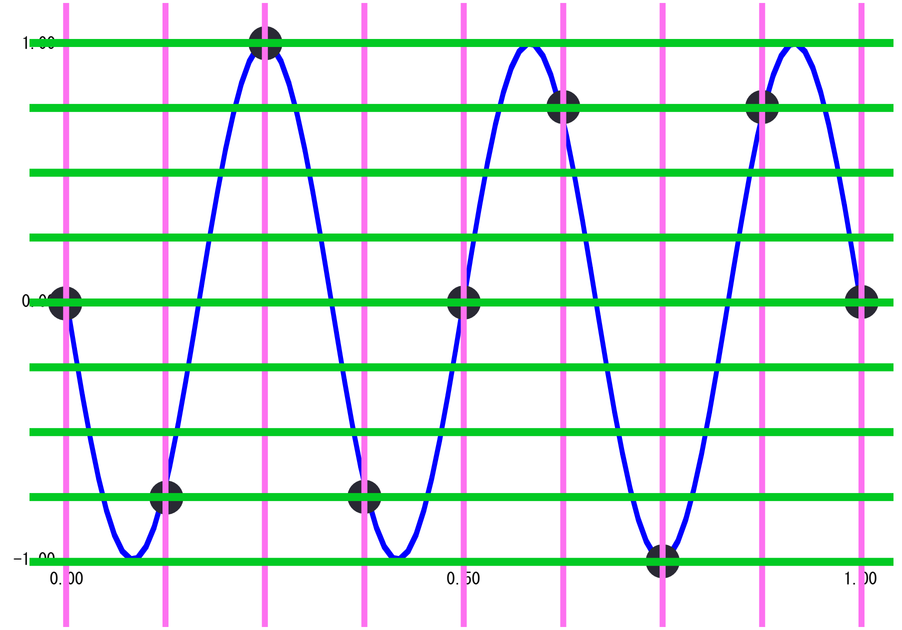


- 演習課題（1/4）で変換した標本化周波数8Hzの離散時間信号をデジタル信号に変換したい。下記の大きさで量子化するとどうなるか図示せよ。
  - 振幅を4個の値（2bits）で量子化する場合
  - 振幅を9個の値（3から4bits）で量子化する場合

- **ポイント：　各離散時間信号の振幅（アナログ）を量子化するときは、真値から最も近い点に量子化する。**



4個の値で量子化（3等分）



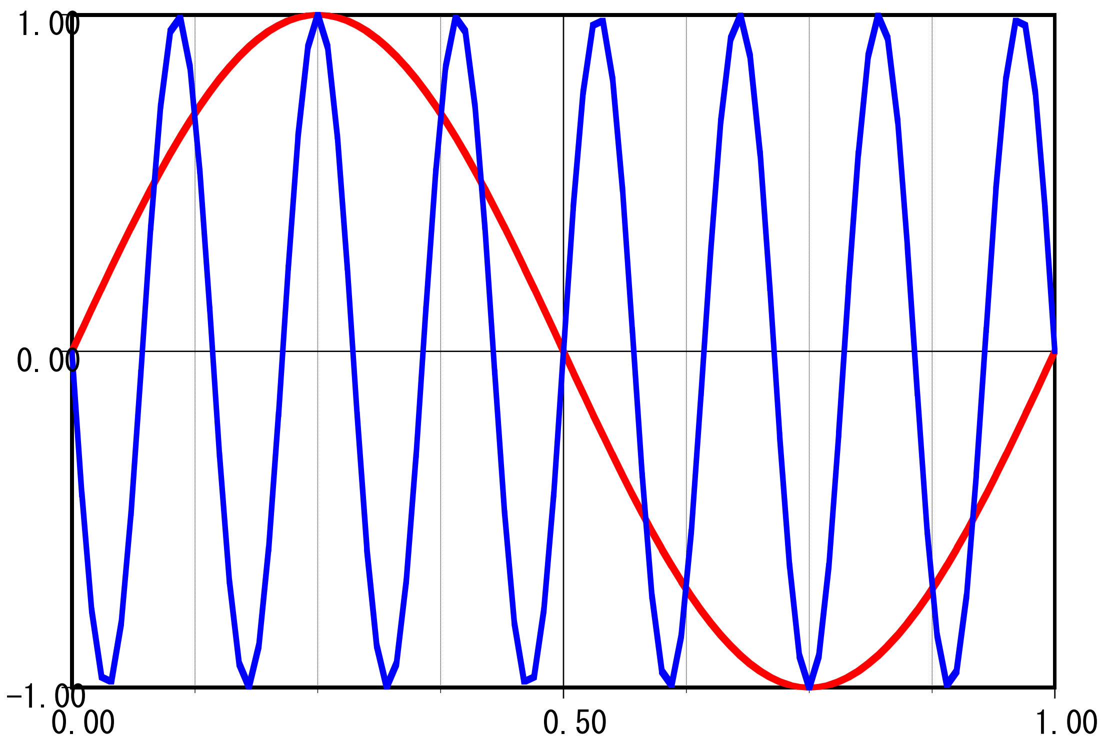
9個の値で量子化（8等分）

演習課題(3/4)

- 下図の2つの波をAD変換するためには何Hz以上の周波数で標本化すればコンピュータ上で別々の信号として扱うことができるか？　またその周波数以上で標本化したときの標本点をグラフに●で示せ。

- ヒント：
  - 2つの波は
  - $\sin(2*\pi*t)$:
    - 1Hzの正弦波
  - $\sin(2*\pi*7*t+\pi)$
    - 7Hzの正弦波

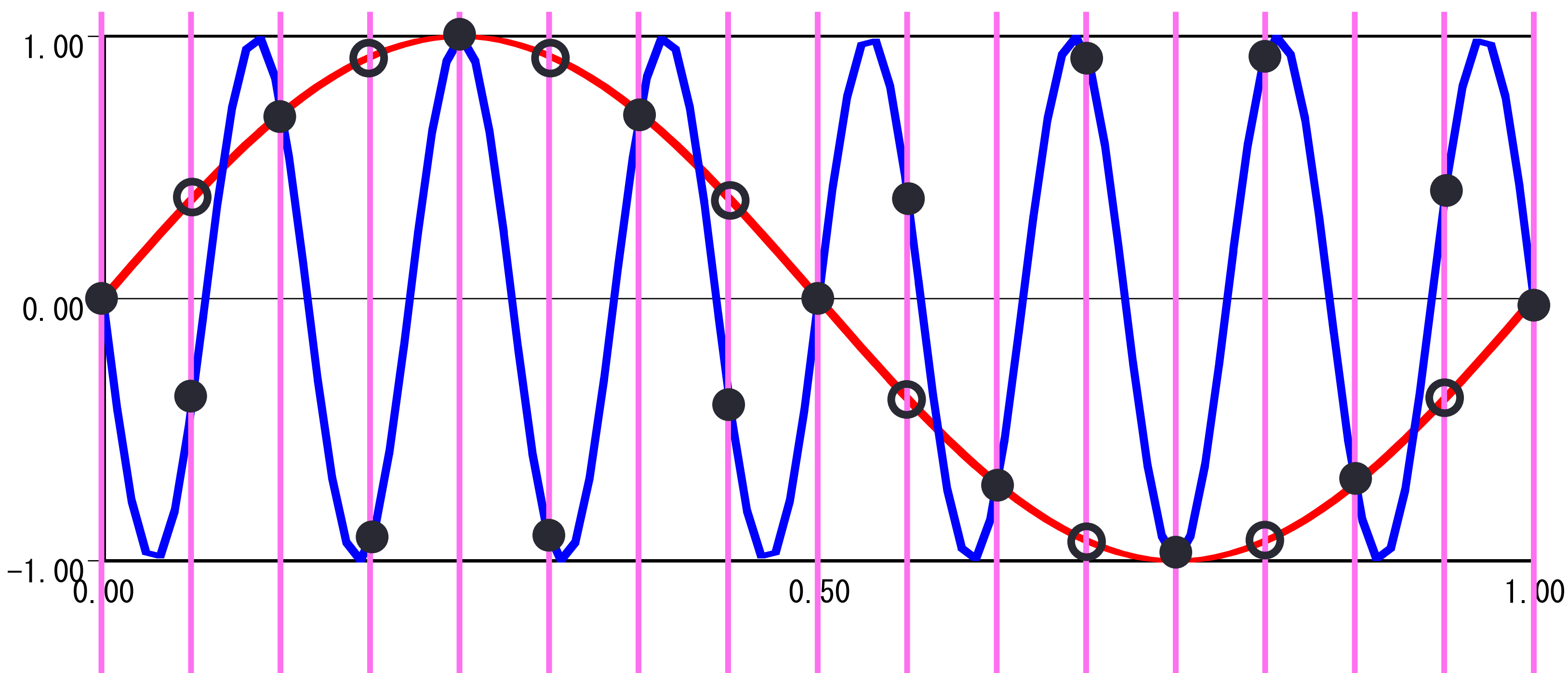
ナイキスト標本化周波数は？



演習課題(3/4)
解答例

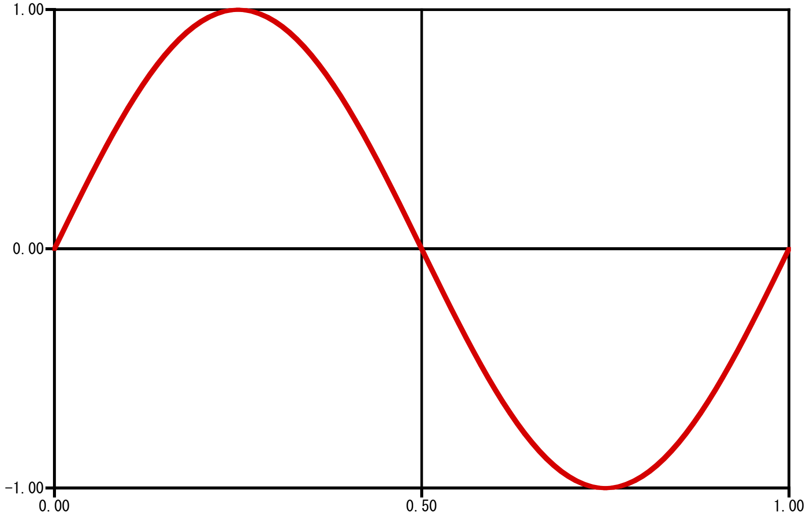
補足：
一般的にはナイキスト標本化周波数ぎりぎりで標本化することはありません。波の性質から標本化周波数が高ければ高いほど誤差は小さくなりますので、必ずナイキスト標本化周波数＋α の周波数で標本化します。

- 下図の2つの波をAD変換するためには何Hz以上の周波数で標本化すればコンピュータ上で別々の信号として扱うことができるか？　またその周波数で標本化したときの標本点をグラフに●で示せ。
  - 2つの波は　$\sin(2*\pi*t)$,　$\sin(2*\pi*7*t+\pi)$　よりナイキスト標本化周波数は14Hz。よって14Hz以上で標本化すればコンピュータ上で別々の信号として扱える。例えば16Hzで標本化すると



演習課題(4/4)

- 下図の波において標本化周波数8Hz、量子化ビット数3bitsでAD変換したときの量子化誤差の平均値を算出せよ。

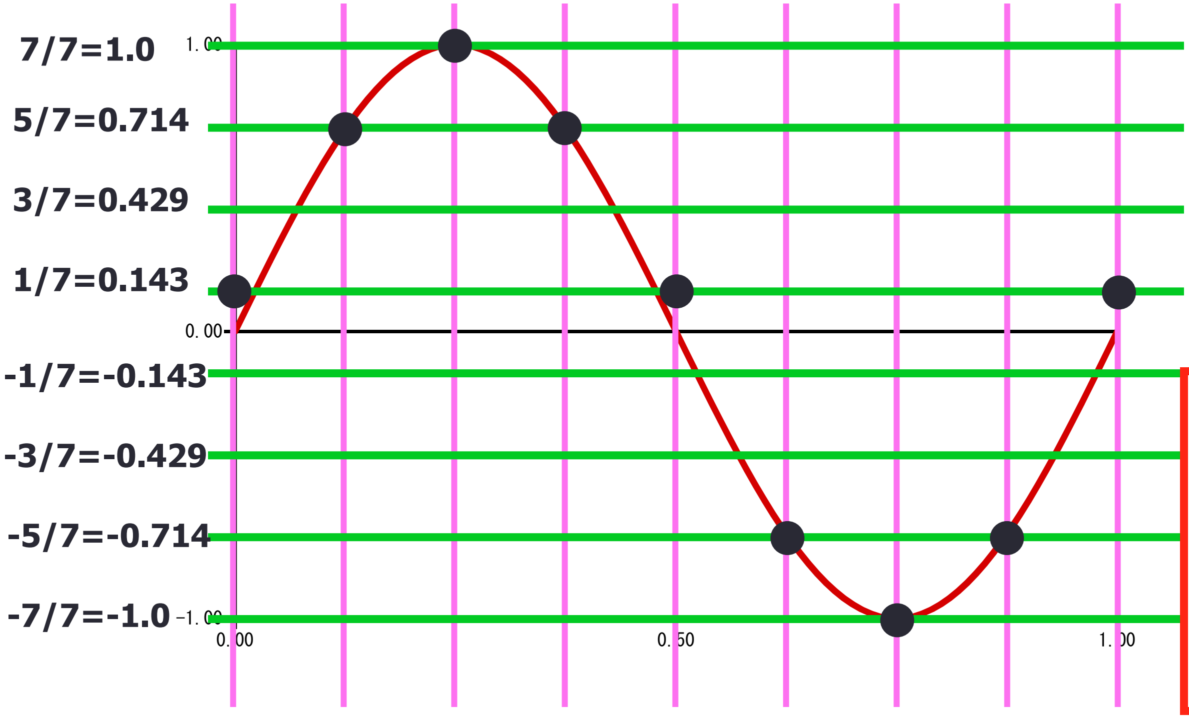


- ヒント:
  - $\sin(2*\pi*t)$
  - 8Hzで標本化するとt値は?
  - 3bitsで量子化すると分解能は?
  - $\sin(\pi/4) \fallingdotseq 0.707$
  - 誤差は絶対値で評価

演習課題(4/4)　解答例

下図の波において標本化周波数8Hz、量子化ビット数3bitsでAD変換したときの量子化誤差の平均値を算出せよ。

ポイント：
　時間軸方向：
　　8Hzでの標本化なので1秒間を1/8間隔で等分
　振幅軸方向：
　　3bitsの量子化なので全振幅を2^3 = 8値（7等分）で表現



｜量子化値　ー　真値｜

1: ｜0.143 - 0.0｜　= 0.143
2: ｜0.714 - 0.707｜ = 0.007
3: ｜1.0 - 1.0｜ = 0.0
4: ｜0.714 - 0.707｜ = 0.007
5: ｜0.143 - 0.0｜　= 0.143
6: ｜-0.714 - (-0.707)｜ = 0.007
7: ｜-1.0 - (-1.0)｜ = 0.0
8: ｜-0.714 - (-0.707)｜ = 0.007
9: ｜0.143 - 0.0｜ = 0.143

量子化誤差の合計　：　**0.457**
平均値：　≒0.05

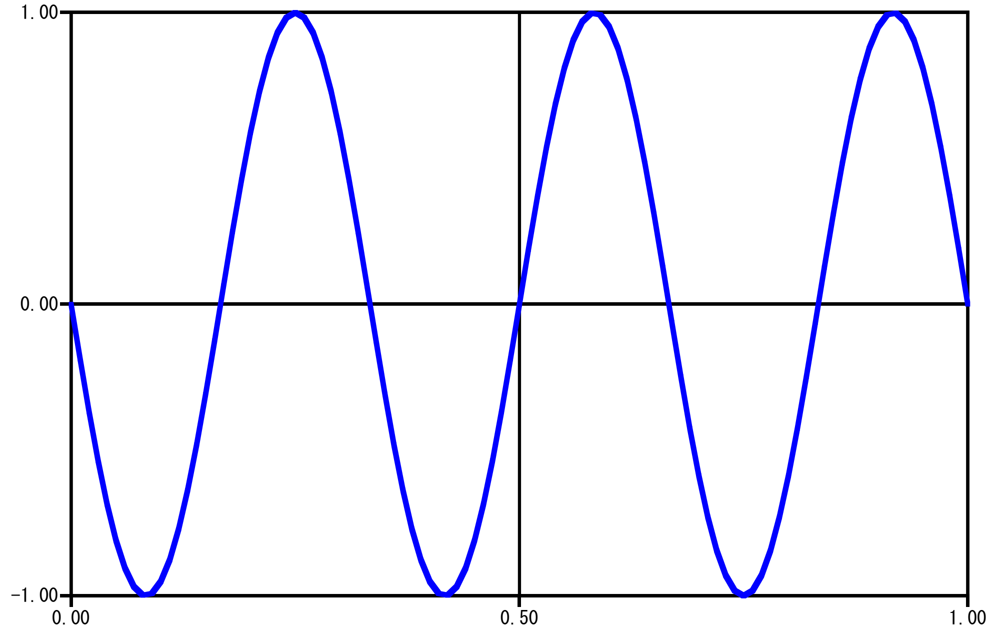
補足：
通常8Hzで標本化すると標本点は8点ですが、まだ周期関数として扱う概念を教えていないので、現時点では9点分の誤差の合計の平均値を計算してください。ただし信号が周期関数であると理解している学生は、最後の9点目を含めなくても問題ないです。

第3回

演習課題(1/5)

- 3Hzの波を標本化周波数4Hz、量子化2bitsでデジタル信号に変換せよ。

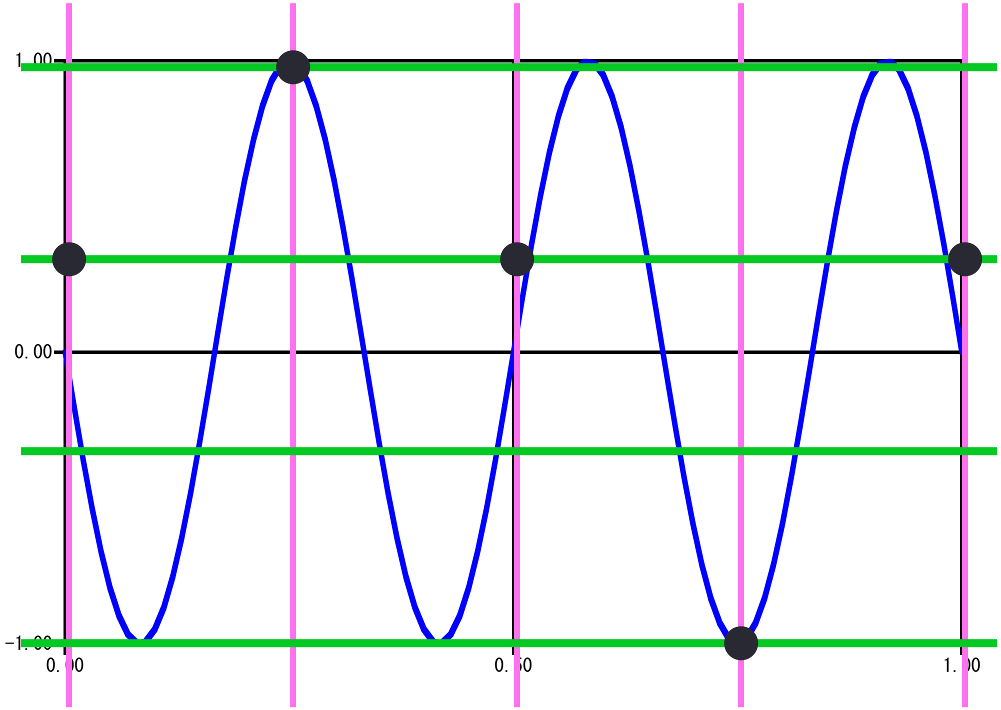
- ヒント:
  - まず4Hzで標本化
  - その後2bitsで量子化
  - デジタル信号は数字列
  - よって答えは…



演習課題(1/5) 解答例

- 3Hzの波を標本化周波数4Hz、量子化2bitsでデジタル信号に変換せよ。

- ヒント:
  - まず4Hzで標本化
  - その後2bitsで量子化
  - デジタル信号は数字列
    - サンプル1　1/3=0.33
    - サンプル2　3/3=1.00
    - サンプル3　1/3=0.33
    - サンプル4　-3/3=-1.00
    - サンプル5　1/3=0.33



- 答え:　0.33(-0.33), 1.00, 0.33(-0.33), -1.00, 0.33(-0.33)

演習課題(2/5)

- 標本化に関する問題
  - オーディオ周波数(可聴周波数)は20Hz～20,000Hzである。このオーディオ信号をデジタル信号処理する場合、その標本化(サンプリング)周波数はいくらが適当か？
  - CD (Compact Disk) では、サンプリング周波数を44,100Hzとしている。エイリアシングなく標本化(サンプリング)するためには、AD変換前のアナログ信号において、周波数成分をどのように制限しておく必要があるか。

ヒント(エイリアシング)：
　信号の持つ最高周波数の2倍以上で標本化しないと波の折り返しが生じ、品質が劣化する。

演習課題（2/5） 解答例1

- 標本化に関する問題
  - オーディオ周波数（可聴周波数）は20Hz～20,000Hzである。このオーディオ信号をデジタル信号処理する場合、その標本化（サンプリング）周波数はいくらが適当か？
    - 最高周波数の2倍以上で標本化すれば信号が劣化することはない。
    - よって、20,000 × 2 = 40,000Hz以上

ヒント（エイリアシング）：
　信号の持つ最高周波数の2倍以上で標本化しないと波の折り返しが生じ、品質が劣化する。

演習課題（2/5） 解答例2

- 標本化に関する問題
  - CD (Compact Disk) では、サンプリング周波数を44,100Hzとしている。エイリアシングなく標本化（サンプリング）するためには、AD変換前のアナログ信号において、周波数成分をどのように制限しておく必要があるか。
    - サンプリング周波数が44,100Hzということは、品質が保障できるのは22,050Hzまで。
    - よって、最初に周波数成分を22,050Hz以下にしておかないとエイリアシングが生じ、信号が劣化する。

演習課題（3/5）

- 次のような信号 $x(t)$ を離散信号化して得られる $x^*(t)$ の式を示せ。

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

ヒント：
講義資料をよく確認してください。

演習課題(3/5) 解答例

- 次のような信号 $x(t)$ を離散信号化して得られる $x^*(t)$ の式を示せ。

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

- 講義資料より、

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

離散表記したアナログ信号とサンプラーの掛け算

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT}\delta(t - nT)$$

信号は正の値のみ　　値を代入すると

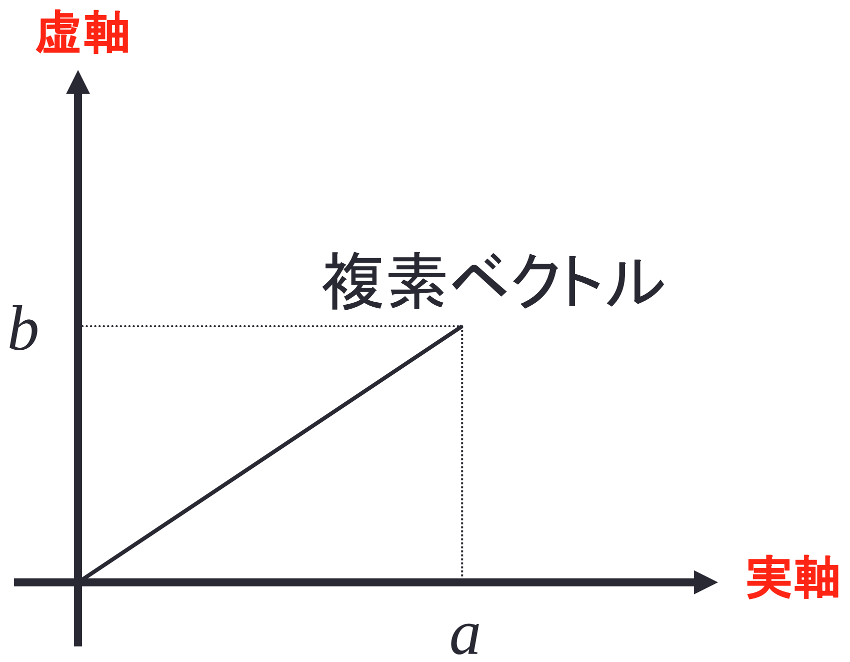
演習課題(4/5)

- 複素ベクトルにおいて振幅＝3、位相＝ $\pi/4$ のとき、実部 a と虚部 b の値はいくつになるか？

- ヒント

振幅: $\sqrt{a^2+b^2}$

位相: $\arctan(\frac{b}{a})$



演習課題(4/5)　解答例

- 複素ベクトルにおいて振幅＝3、位相＝$\pi/4$ のとき、実部 a と虚部 b の値はいくつになるか？

- ヒント

振幅：$\sqrt{a^2+b^2}=3$

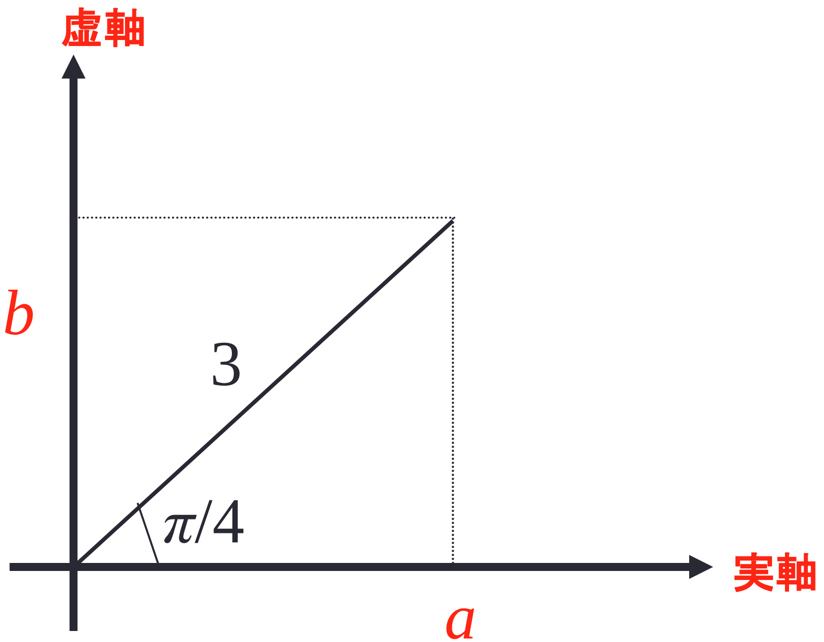
位相：$\arctan(\frac{b}{a})=\frac{\pi}{4}$

$$\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a=3\times\cos(\frac{\pi}{4})$$

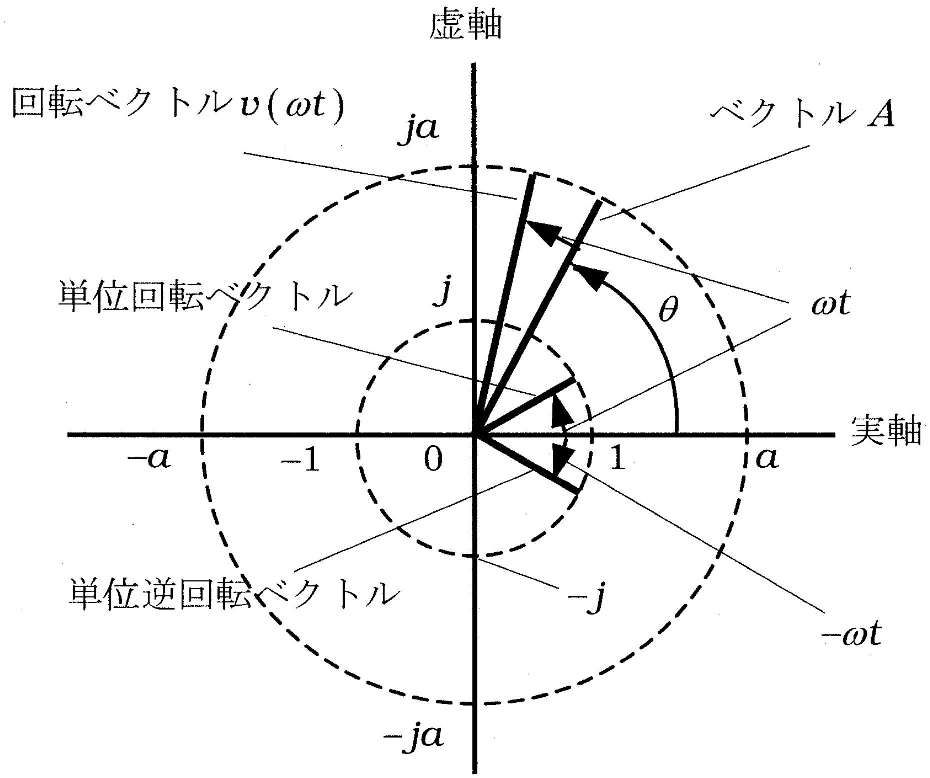
$$b=3\times\sin(\frac{\pi}{4})$$



$$\boxed{a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\quad b=\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

演習課題(5/5)

- 複素ベクトルAにおいて振幅 $a=3$、位相 $\theta=\pi/4$の複素ベクトルを $\pi/12$だけ回転させると、実部と虚部の値はいくつになるか？

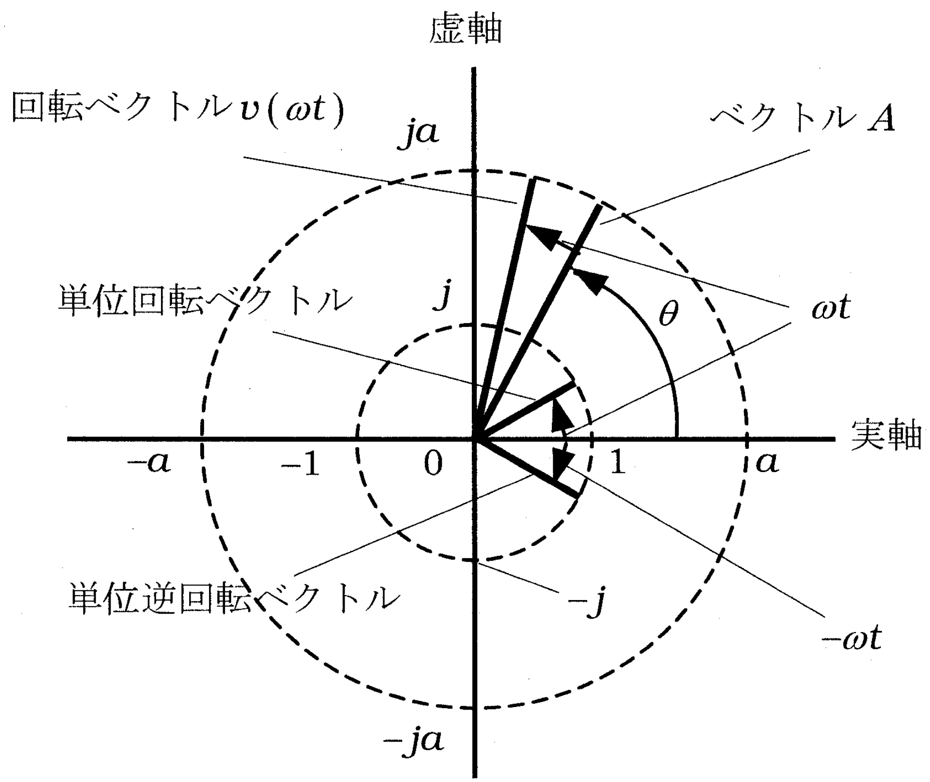


ヒント：
回転ベクトル

$$v(\omega t)=a\cdot e^{j(\omega t+\theta)}=a\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}$$
$$=A\cdot e^{j\omega t}$$

演習課題(5/5)　解答例

- 複素ベクトルAにおいて振幅 $a=3$、位相 $\theta=\pi/4$の複素ベクトルを $\pi/12$だけ回転させると、実部と虚部の値はいくつになるか？



ヒント：
回転ベクトル

$$v(\omega t) = a\cdot e^{j(\omega t+\theta)} = a\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}$$
$$= A\cdot e^{j\omega t}$$

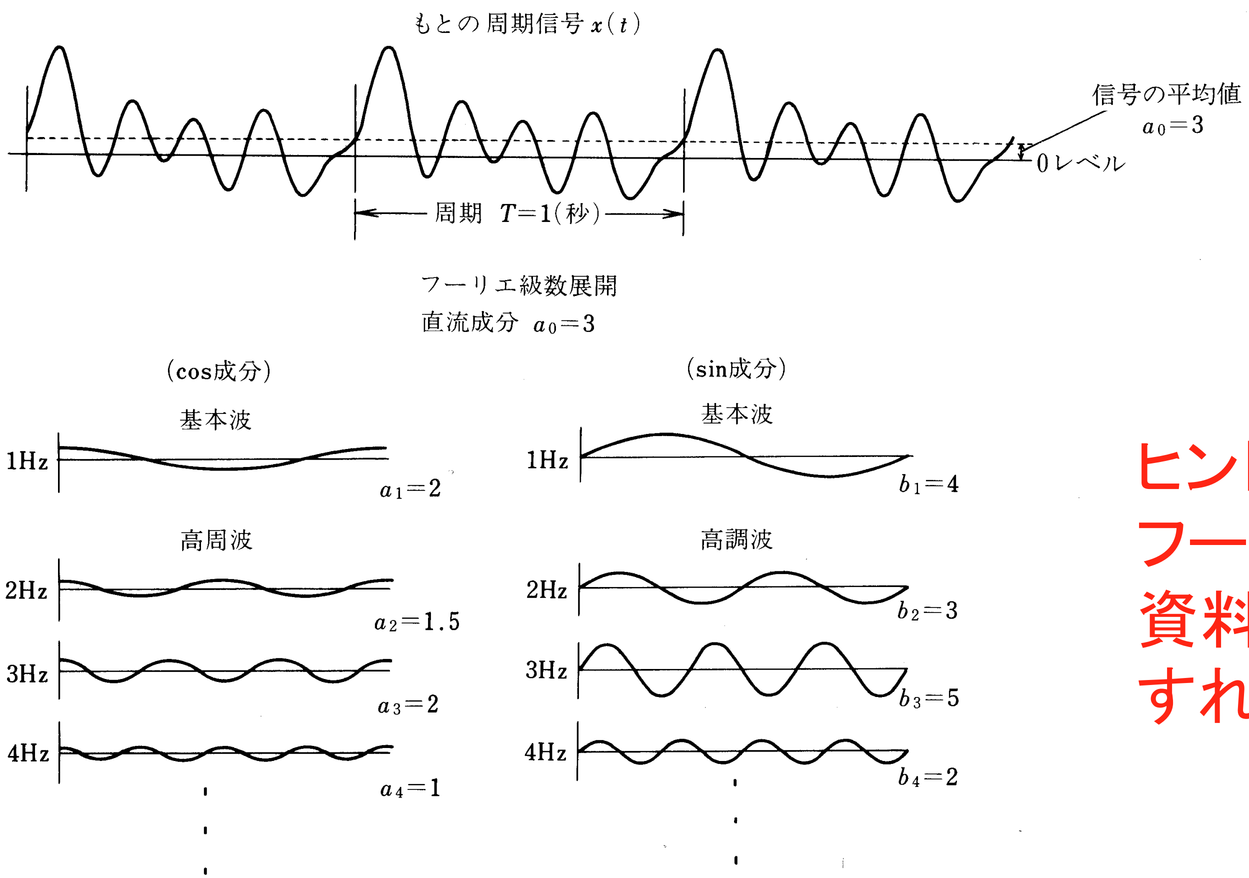
$$\text{実部} = 3\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{虚部} = 3\times\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

第4回

演習課題(1/4)

- 周期信号$x(t)$が下記のように分解できるとき、$x(t)$のフーリエ級数展開はどのように表現できるか？



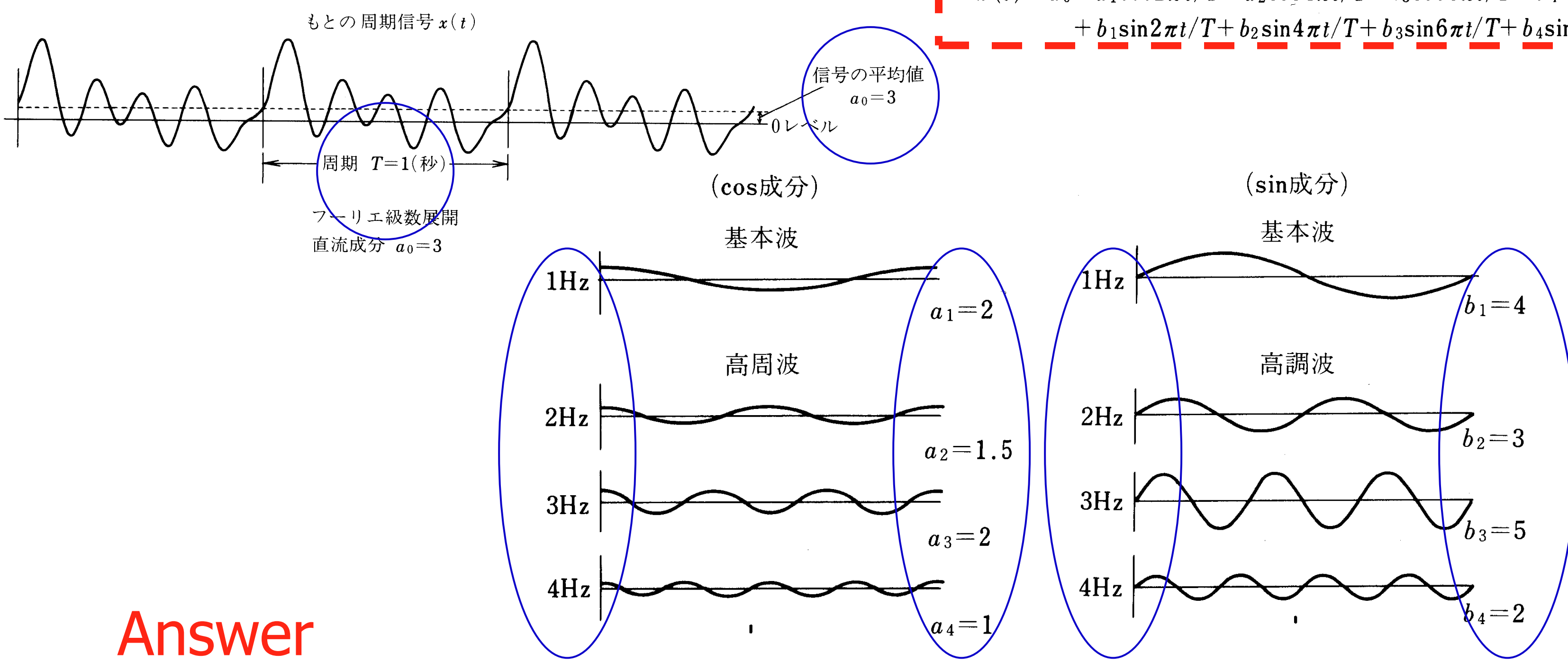
ヒント：
フーリエ級数展開(1)の資料を参考に、値を代入すればよい

演習課題（1/4）解答例

- 周期信号$x(t)$が下記のように分解できるとき、$x(t)$のフーリエ級数展開はどのように表現できるか？

ヒント：
フーリエ級数展開（1）の資料を参考に、値を代入すればよい

$$x(t)=a_0+a_1\cos 2\pi t/T+a_2\cos 4\pi t/T+a_3\cos 6\pi t/T+a_4\cos 8\pi t/T\cdots\cdots$$
$$+b_1\sin 2\pi t/T+b_2\sin 4\pi t/T+b_3\sin 6\pi t/T+b_4\sin 8\pi t/T\cdots\cdots$$



Answer

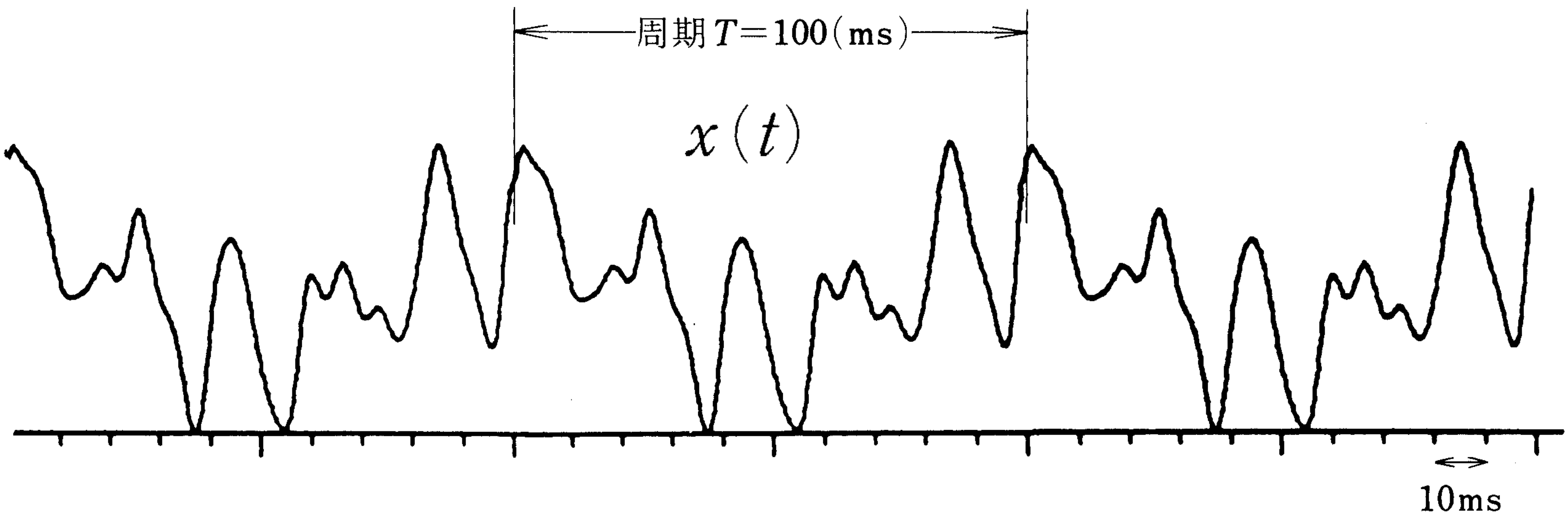
$$x(t) = 3 + 2\cos 2\pi t + 1.5\cos 4\pi t + 2\cos 6\pi t + 1\cos 8\pi t + \ldots$$
$$+ 4\sin 2\pi t + 3\sin 4\pi t + 5\sin 6\pi t + 2\sin 8\pi t \ + \ldots$$

演習課題（2/4）

- 下記のフーリエ級数展開において m の値を0から20まで出力した場合、何Hz〜何Hzの信号を何Hzおきに表現できるか？

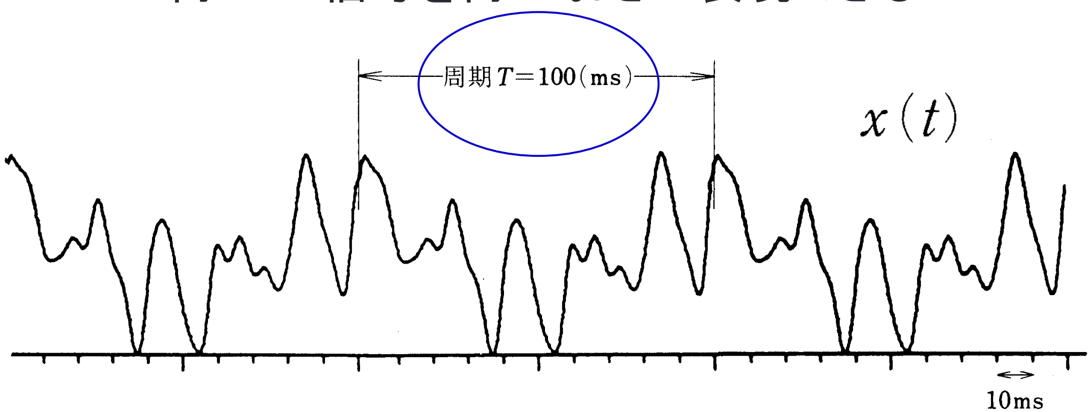
ヒント：
周波数は m/T で表現

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi mt}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi mt}{T}$$



演習課題（2/4） 解答例

- 下記のフーリエ級数展開において m の値を0から20まで出力した場合、何Hz～何Hzの信号を何Hzおきに表現できるか？



ヒント：
周波数は m/T で表現

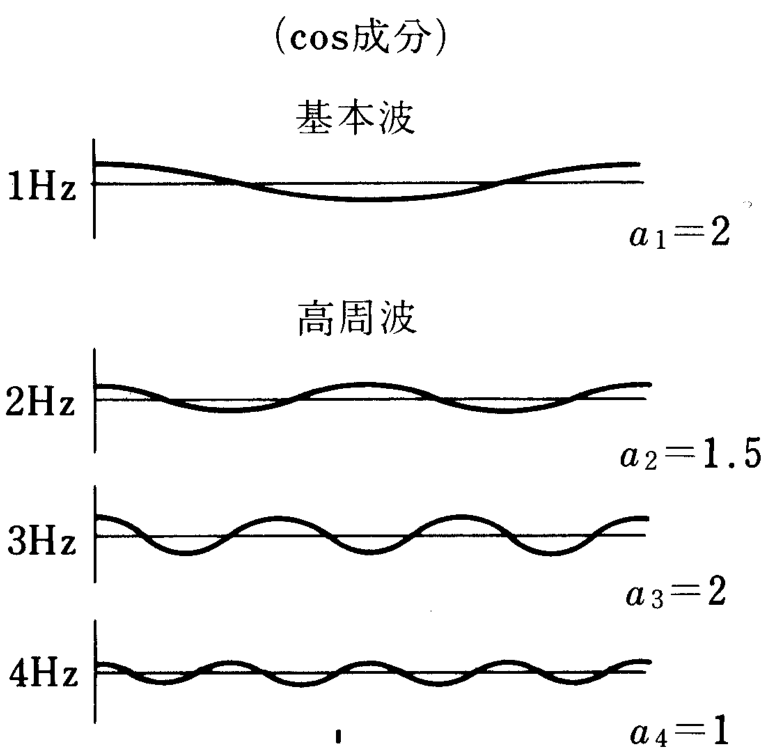
$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{2\pi mt}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{2\pi mt}{T}$$

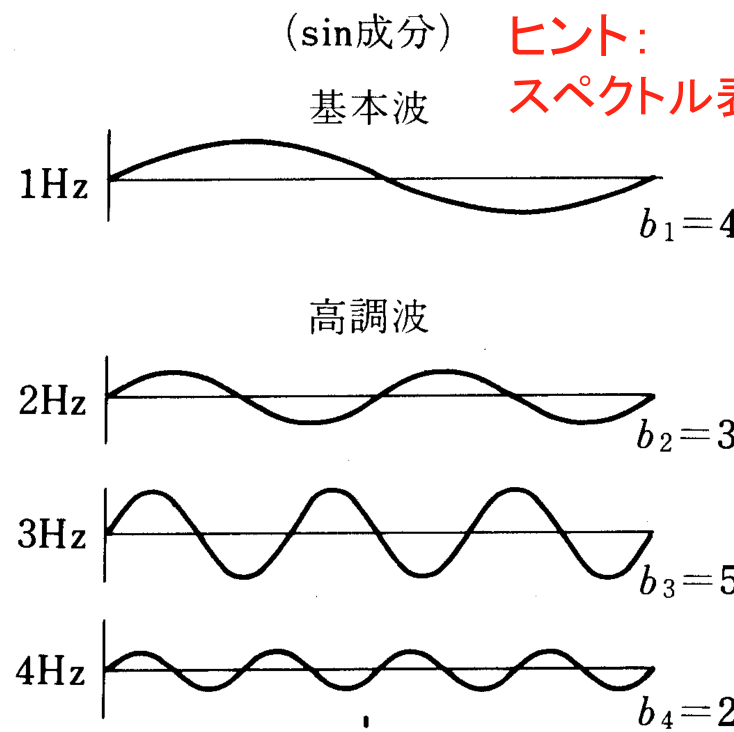
Answer

番号 m →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m/T →	0	$1/T$	$2/T$	·	·	$5/T$	·	$7/T$	·	·	$10/T$	·	·	·	·	$15/T$	·	·	·	·	$20/T$
周波数→	0	10	20	·	·	50	·	70	·	·	100	·	·	·	·	150	·	·	·	·	200（Hz）

演習課題(3/4)

- 下記のようなフーリエ係数が得られたとき、各周波数における振幅スペクトルとパワースペクトルを求めよ。(ここでは1Hz～4Hzまでの信号とする。周期 $T=1$秒とする。)

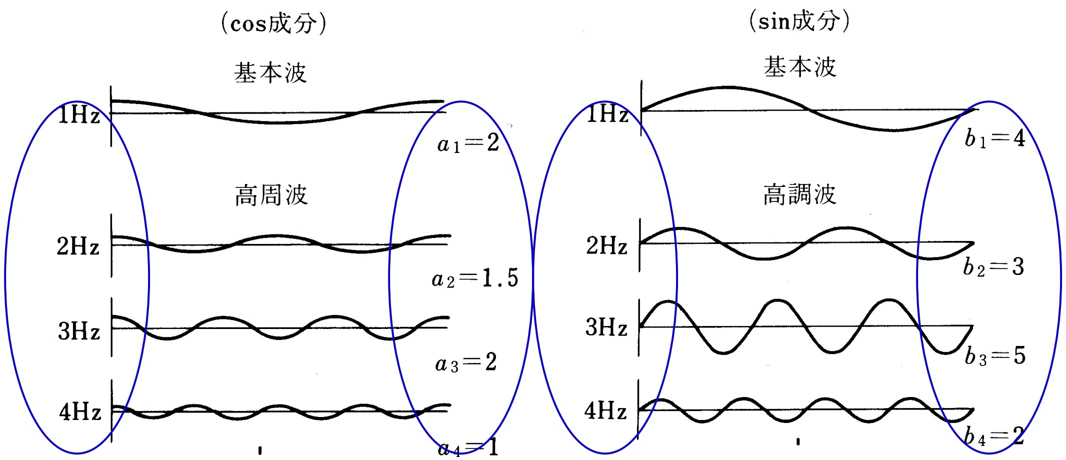




ヒント:
スペクトル表記を参考に

演習課題(3/4) 解答例

- 下記のようなフーリエ係数が得られたとき、各周波数における振幅スペクトルとパワースペクトルを求めよ。(ここでは1Hz～4Hzまでの信号とする。周期T＝1秒とする。)



ヒント:
スペクトル表記を参考に

振幅スペクトル

$$|X_m| = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m}$$

パワースペクトル

$$|X_m|^2 = a^2{}_m + b^2{}_m$$

Answer

振幅スペクトル

$|X_1|$ = sqrt(pow(2) + pow(4)) = $\sqrt{20}$

$|X_2|$ = sqrt(pow(1.5) + pow(3)) = $\sqrt{11.25}$

$|X_3|$ = sqrt(pow(2) + pow(5)) = $\sqrt{29}$

$|X_4|$ = sqrt(pow(1) + pow(2)) = $\sqrt{5}$

パワースペクトル

$|X_1|^2$ = pow(2) + pow(4) = 20

$|X_2|^2$ = pow(1.5) + pow(3) = 11.25

$|X_3|^2$ = pow(2) + pow(5) = 29

$|X_4|^2$ = pow(1) + pow(2) = 5

演習課題(4/4)

- 時間領域の信号 $x(t)$ が下記のように表せるとき、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。ただし周期 T ＝0.1秒(100ms)とする。

$$x(t) = 8\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$+1.5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$

大ヒント: スペクトルは下記のように表せる

$$X_m = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m}\cos\left(\frac{2\pi m t}{T} - \theta_m\right) \qquad \text{ただし } \theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

演習課題(4/4) 解答例1

- 時間領域の信号 $x(t)$ が下記のように表せるとき、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。

大ヒント: スペクトルは下記のように表せる

$$X_m = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T} - \theta_m\right) \qquad \text{ただし } \theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

$$x(t) = 8\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) + 5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right) + 1.5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$

m/T (Hz)の振幅スペクトル:

$$|X_m| = \sqrt{a^2{}_m + b^2{}_m}$$

m/T (Hz)のパワースペクトル:

$$|X_m|^2 = a^2{}_m + b^2{}_m$$

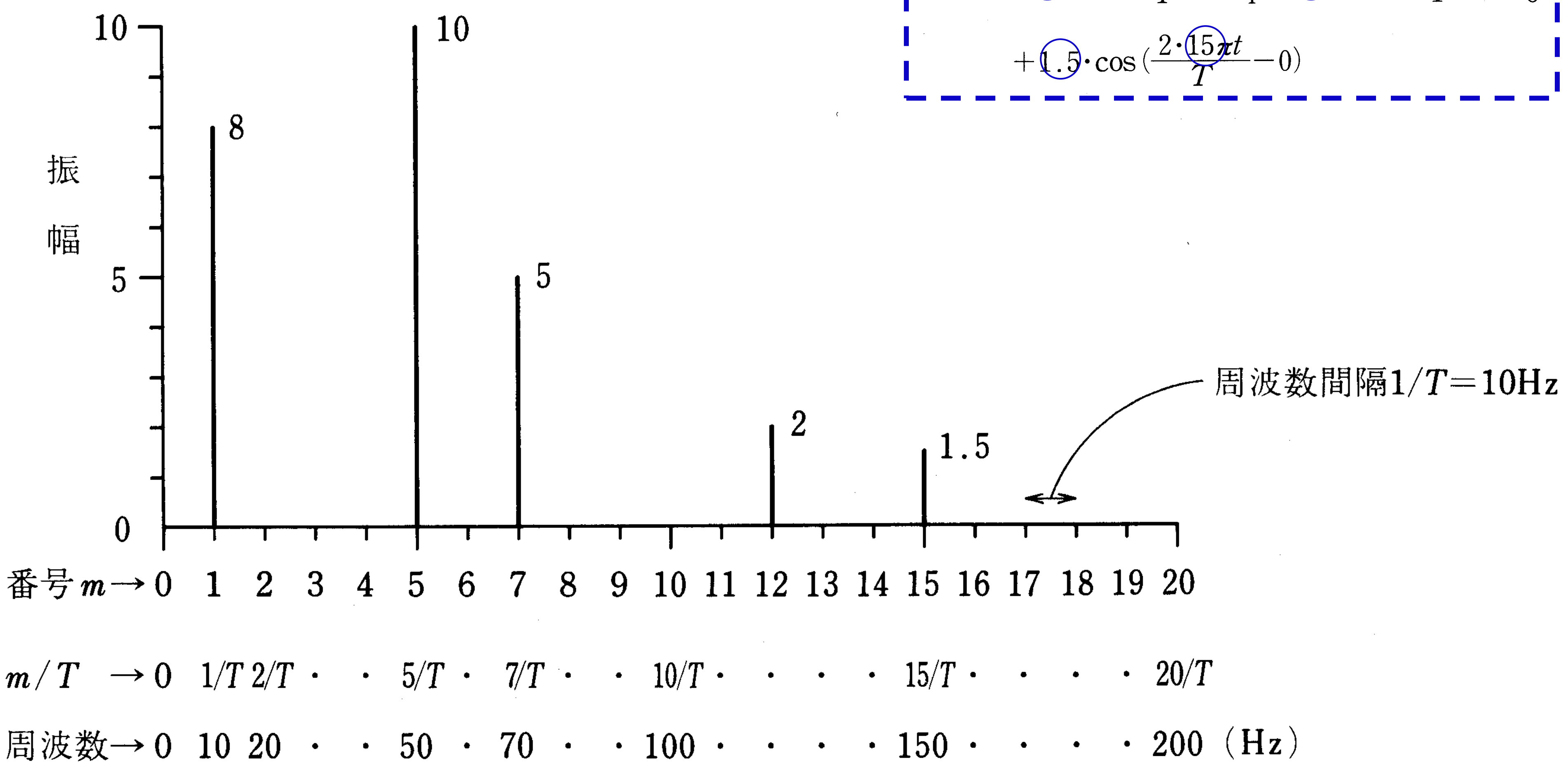
m/T (Hz)の位相スペクトル:

$$\theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{b_m}{a_m}\right)$$

演習課題(4/4) 解答例2

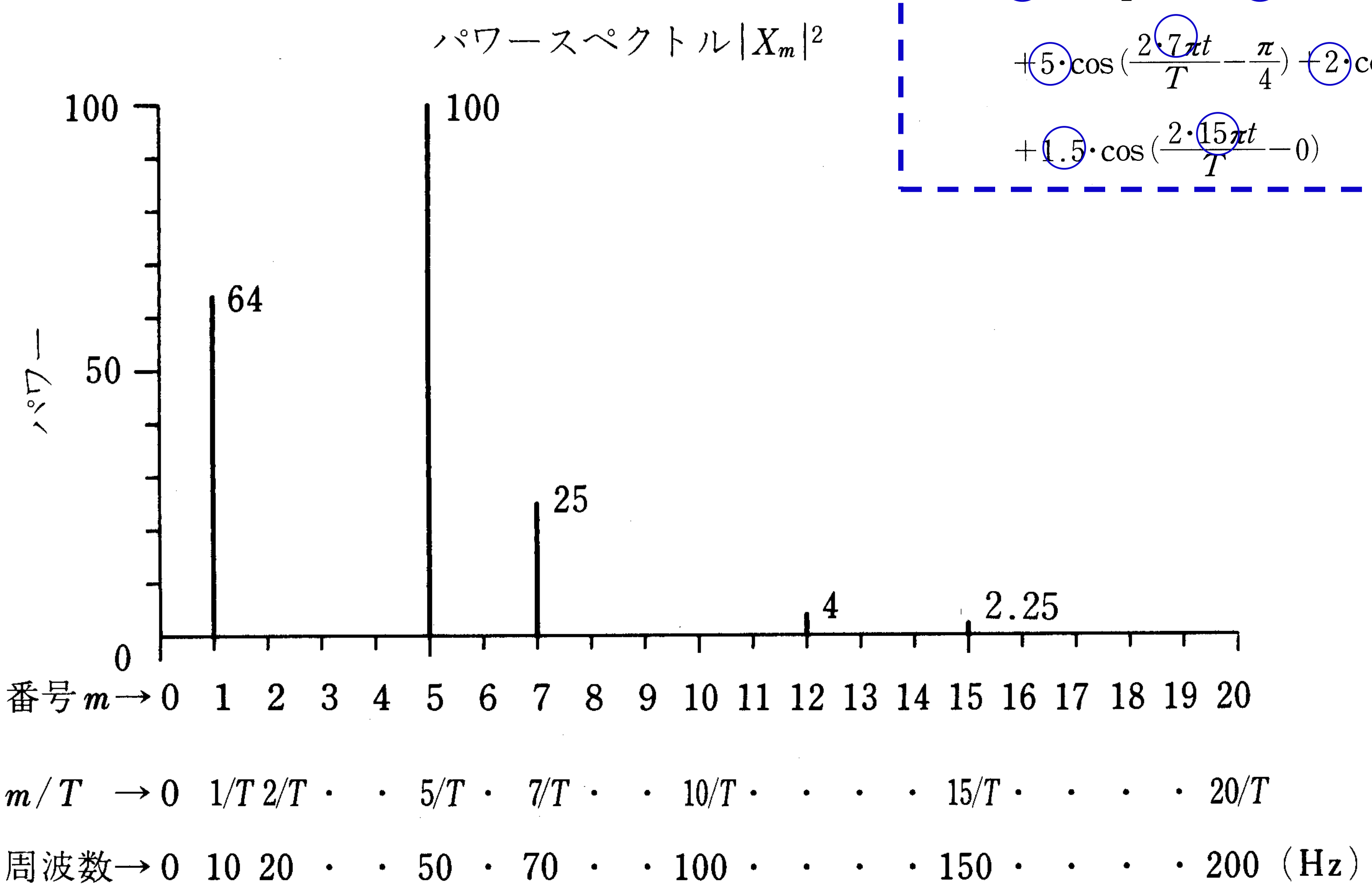
$$x(t) = 8\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) + 5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right) + 1.5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$

振幅スペクトル $|X_m|$

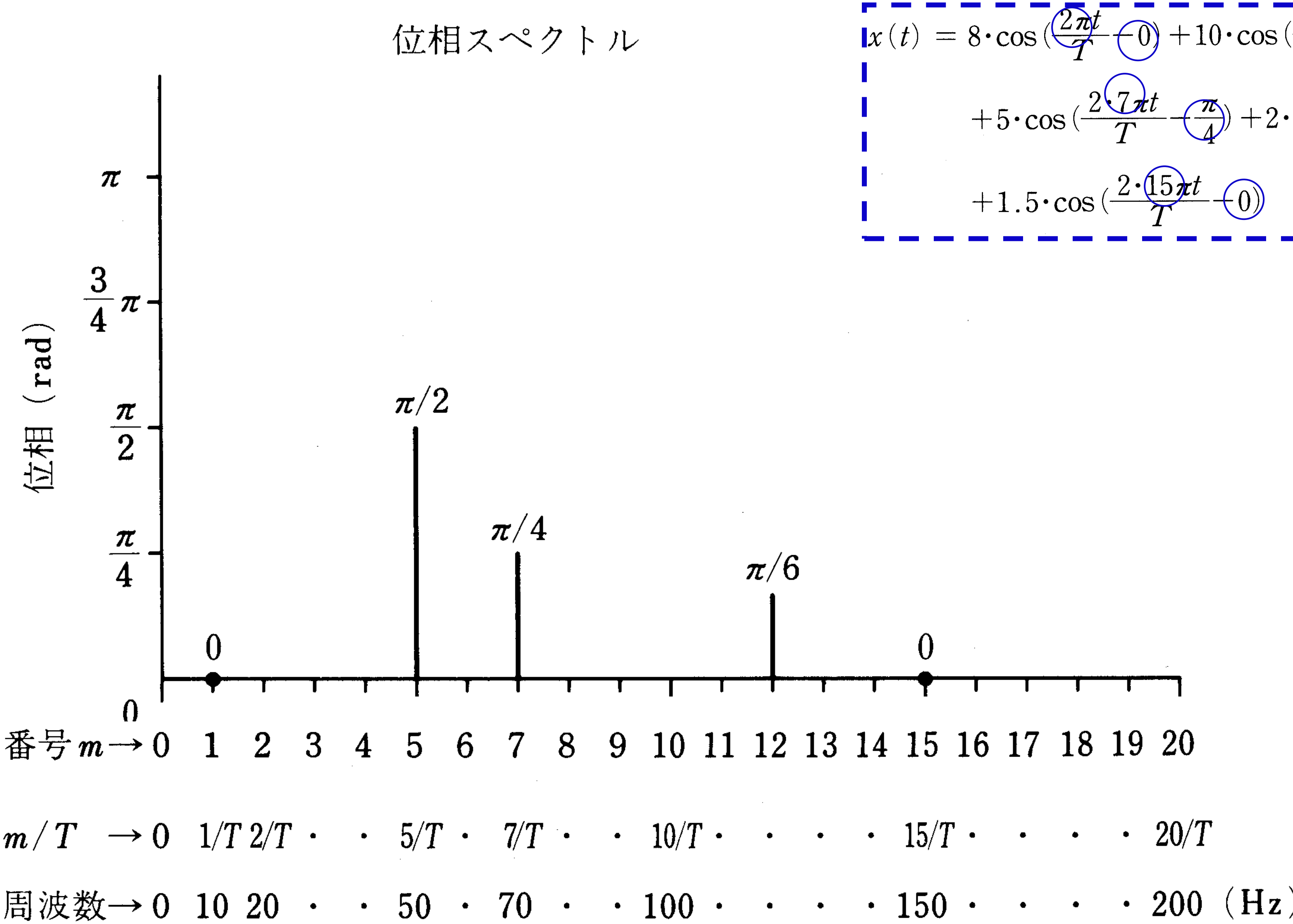


演習課題(4/4) 解答例3

$$x(t) = 8\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) + 5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right) + 1.5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$



演習課題(4/4) 解答例4

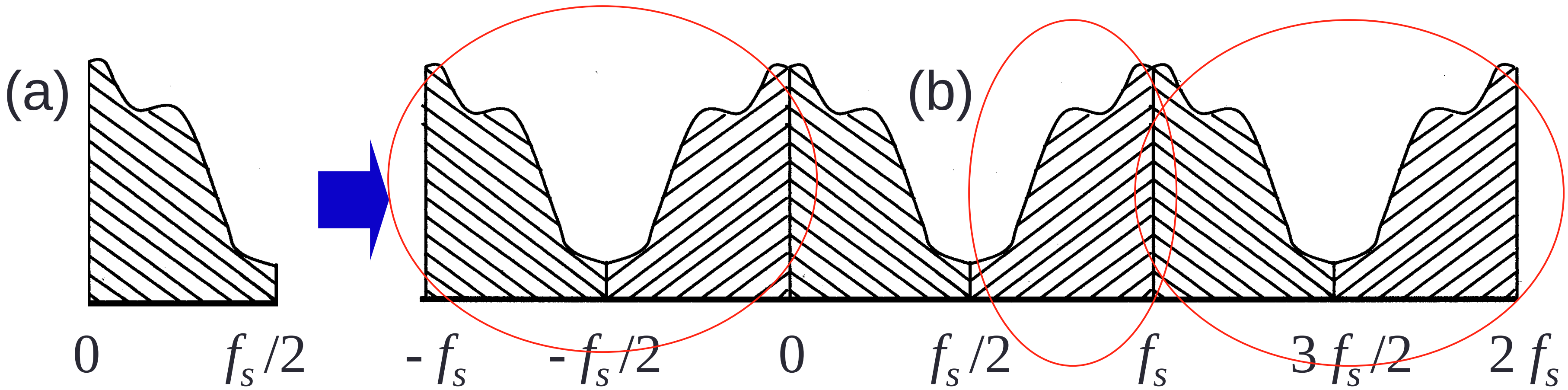


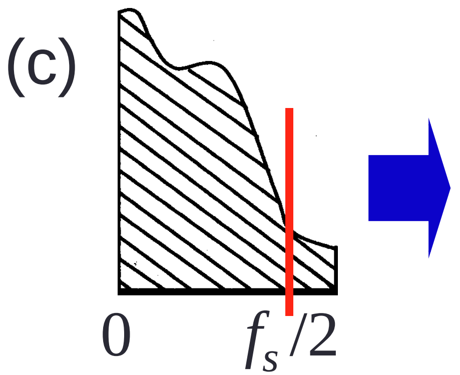
$$x(t) = 8\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 0\right) + 10\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 5\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) + 5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 7\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 12\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}\right) + 1.5\cdot\cos\left(\frac{2\cdot 15\pi t}{T} - 0\right)$$

第5回

演習課題(1/4)

- 例のように、もとの信号のスペクトル(a)が標本化周波数(f_s)の1/2以下であれば、周期性と対称性はスペクトル(b)のように表せる。では、もとの信号のスペクトルが図(c)のように標本化周波数(f_s)の1/2以上だとすると周期性と対称性を考慮したスペクトルはどのように表せるか? 図(b)を参考に図示せよ。



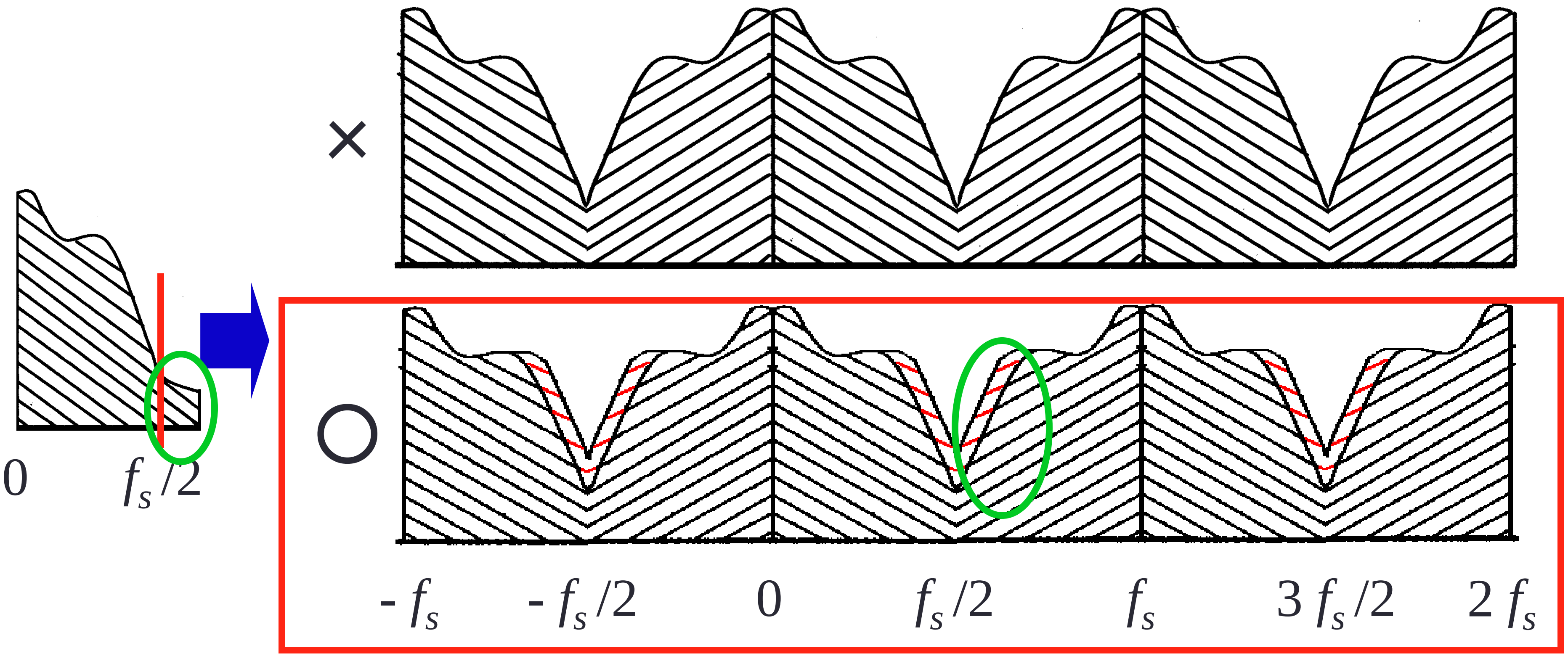


?

ヒント:エイリアシングを
周波数軸上で考えれば. . .

演習課題(1/4) 解答例

- 例のように、もとの信号のスペクトル(a)が標本化周波数(f_s)の1/2以下であれば、周期性と対称性はスペクトル(b)のように表せる。では、もとの信号のスペクトルが図(c)のように標本化周波数(f_s)の1/2以上だとすると周期性と対称性を考慮したスペクトルはどのように表せるか? 図(b)を参考に図示せよ。



演習課題（2/4）

- A君は音楽CD（標本化周波数44,100Hz）を製作しようとしています。しかしながら、エイリアシング問題を考慮せずに（フィルタ処理なしに）レコーディングを行ったため、音響信号（アナログ信号）の最大周波数が25,000Hzになってしまいました。
  - このまま音響信号（アナログ信号）を44,100Hzで標本化して、音楽CDとして再生するとどうなるか？
  - 音響信号（アナログ信号）を44,100Hzで標本化した後に、フィルタ処理により、22,050Hz以上の信号を除去して、音楽CDを再生するとどうなるか？
  - 音響信号（アナログ信号）に対して22,050Hz以上の信号を除去するフィルタ処理を行った後に、44,100Hzで標本化して音楽CDを再生するとどうなるか？

ヒント：エイリアシングはどの時点で発生するかよく考えてください

演習課題(2/4) 解答例1

- このまま音響信号(アナログ信号)を44100Hzで標本化すると、
  - エイリアシングが発生するため高域信号がひずむ。特に19,100Hz以上でエイリアシングの影響を受ける。
    - 帯域保障(標本化周波数の1/2)は
      44,100Hz/2 = 22,050Hz
      よって(帯域保障周波数 ― 折り返し周波数)が歪の影響を受けない信号の上限値となる。
      よって
      22,050Hz ― (25,000Hz ― 22,050Hz) = 19,100Hz
      となる。

演習課題（2/4）　解答例2

- 音響信号（アナログ信号）を44,100Hzで標本化した後に、フィルタ処理により、22,050Hz以上の信号を除去すると、
  - さきほどと同じく、19,100Hz以上の帯域でエイリアシングの影響を受ける。標本化した後に22,050Hz以上の信号を除去しても何も変わらない。
    - なぜなら標本化した段階でアナログ信号時に存在した22,050Hz以上の信号は、折り返して22,050Hz以下の信号に混在しているから。

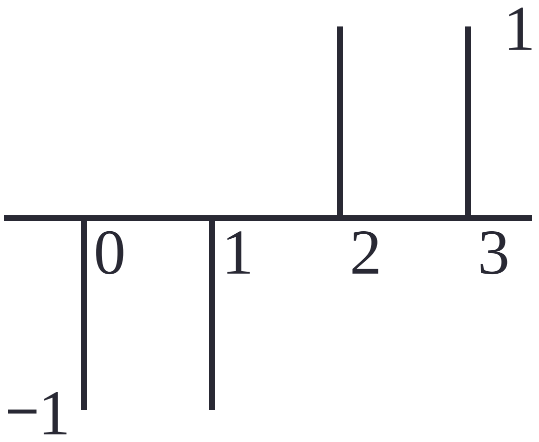
演習課題（2/4） 解答例3

- 音響信号（アナログ信号）に対して22,050Hz以上の信号を除去するフィルタ処理を行った後に、44,100Hzで標本化すると
  - サンプリング定理を満たすので、音質はアナログ信号時と同程度を保障可能。ただし、22,050Hz以上の信号は除去されていることに注意。（しかし、歪は発生しない。）

演習課題（3/4）

- 周期性離散時間信号 x_n の1周期（N=4）が下記の式で表せるとき、周波数解析を離散フーリエ変換を用いて行え

$$x_n = \begin{cases} -1 & (n = 0,1) \\ 1 & (n = 2,3) \end{cases}$$

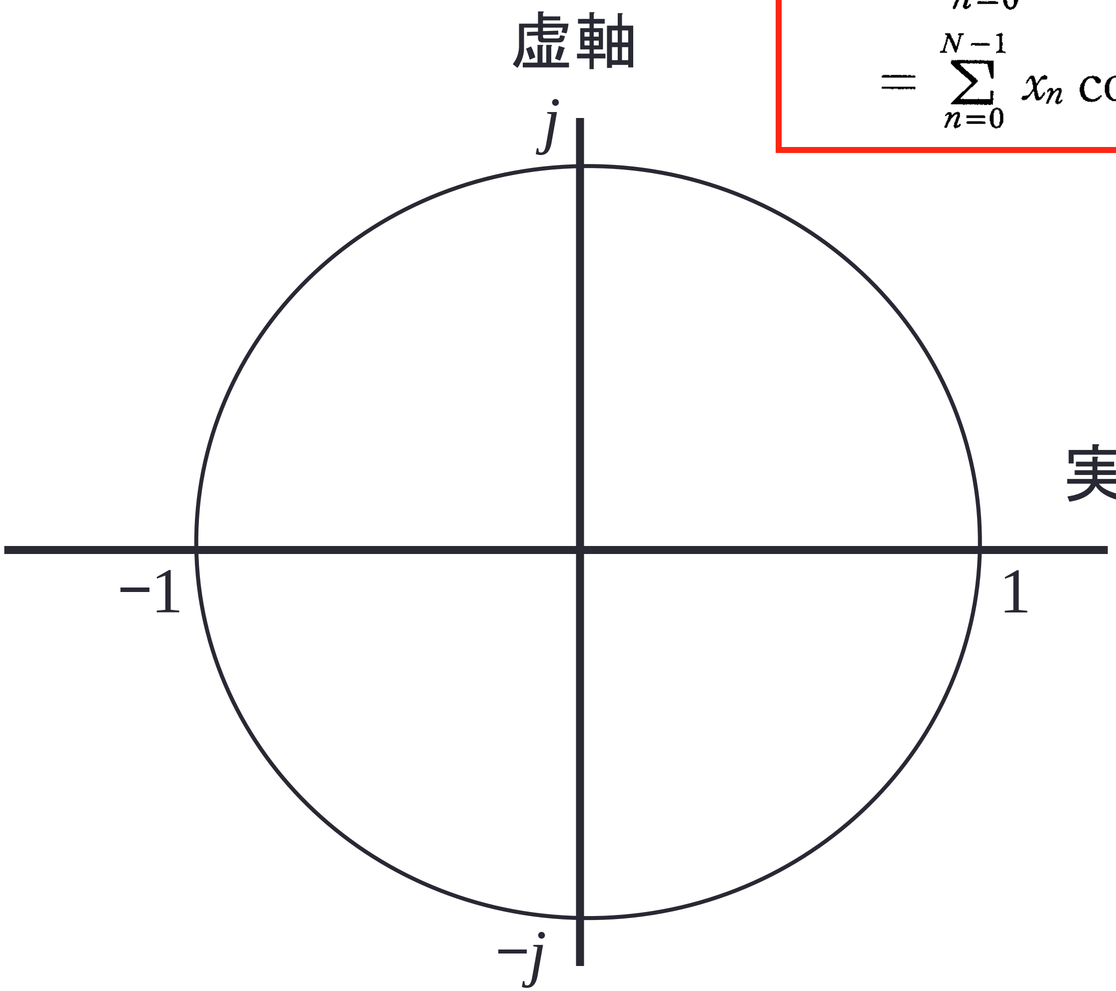


ヒント：　離散フーリエ変換の式に上記値を代入して計算するだけ（答えは複素数になることに注意！）

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

演習課題（3/4）大ヒント

- 複素数



$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$\exp(0) = 1$

$\exp(-j\,\pi/2) = -j$

$\exp(-j\,\pi) = -1$

$\exp(-j\,3\pi/2) = j$

演習課題(3/4) 解答例1

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}
X(0) = \;& x(0)\exp(-j\,2\pi 0\;0/4) + x(1)\exp(-j\,2\pi 1\;0/4) \\
& + x(2)\exp(-j\,2\pi 2\;0/4) + x(3)\exp(-j\,2\pi 3\;0/4) \\
= \;& (-1)\exp(0) + (-1)\exp(0) + 1\exp(0) + 1\exp(0) \\
= \;& (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\
= \;& (-1) + (-1) + 1 + 1 \\
= \;& 0 + j0
\end{aligned}$$

以下同じように$X(1)$, $X(2)$, $X(3)$ を計算すればよい。

演習課題(3/4)　解答例2

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}
X(1) = \; & x(0)\exp(-j\,2\pi 0\;1/4) + x(1)\exp(-j\,2\pi 1\;1/4) \\
& + x(2)\exp(-j\,2\pi 2\;1/4) + x(3)\exp(-j\,2\pi 3\;1/4) \\
= \; & (-1)\exp(0) + (-1)\exp(-j\,\pi/2) \\
& + 1\exp(-j\,\pi) + 1\exp(-j\,3\pi/2) \\
= \; & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-j) + 1\cdot(-1) + 1\cdot j \\
= \; & -2 + j2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(2) = \; & x(0)\exp(-j\,2\pi 0\;2/4) + x(1)\exp(-j\,2\pi 1\;2/4) \\
& + x(2)\exp(-j\,2\pi 2\;2/4) + x(3)\exp(-j\,2\pi 3\;2/4) \\
= \; & (-1)\exp(0) + (-1)\exp(-j\,\pi) + 1\exp(-j\,2\pi) + 1\exp(-j\,3\pi) \\
= \; & (-1)\exp(0) + (-1)\exp(-\mathrm{j}\,\pi) + 1\exp(0) + 1\exp(-\mathrm{j}\,\pi) \\
= \; & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\
= \; & 0 + j0
\end{aligned}$$

演習課題(3/4)　解答例3

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}
X(3) = {} & x(0)\exp(-j\,2\pi 0\ 3/4) + x(1)\exp(-j\,2\pi 1\ 3/4) \\
& + x(2)\exp(-j\,2\pi 2\ 3/4) + x(3)\exp(-j\,2\pi 3\ 3/4) \\
= {} & (-1)\exp(0) + (-1)\exp(-j\,3\pi/2) \\
& + 1\exp(-j\,3\pi) + 1\exp(-j\,9\pi/2) \\
= {} & (-1)\exp(0) + (-1)\exp(-j\,3\pi/2) \\
& + 1\exp(-j\,\pi) + 1\exp(-j\,\pi/2) \\
= {} & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot j + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-j) \\
= {} & -2 - j2
\end{aligned}$$

よって、最終的な解答は

$X(0) = 0 - j0$ (単に0でもOK)　　$X(2) = 0 - j0$ (単に0でもOK)

$X(1) = -2 - j(-2)$　　$X(3) = -2 - j2$

演習課題(4/4)

- 演習課題(3/4)のスペクトル解析結果を基に、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。(横軸は周波数もしくは k の値とする。)

$X(0) = 0 - j0$　　$X(1) = -2 - j(-2)$

$X(2) = 0 - j0$　　$X(3) = -2 - j2$

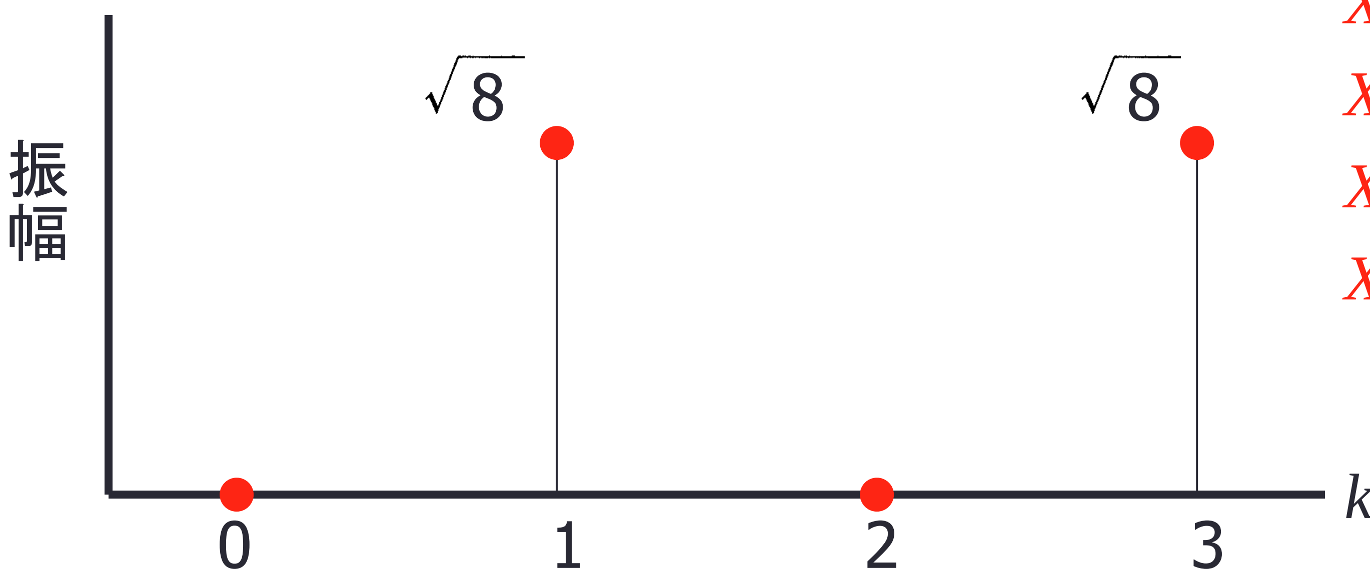
ヒント: 離散フーリエ変換式は下記のように分解できる。
よって振幅スペクトルは?パワースペクトルは? 位相スペクトルは?

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$

演習課題（4/4） 解答例1

振幅スペクトル　$|X_k| = \sqrt{A_k{}^2 + B_k{}^2}$



$X(0) = 0 - j\,0$

$X(1) = -2 - j\,(-2)$

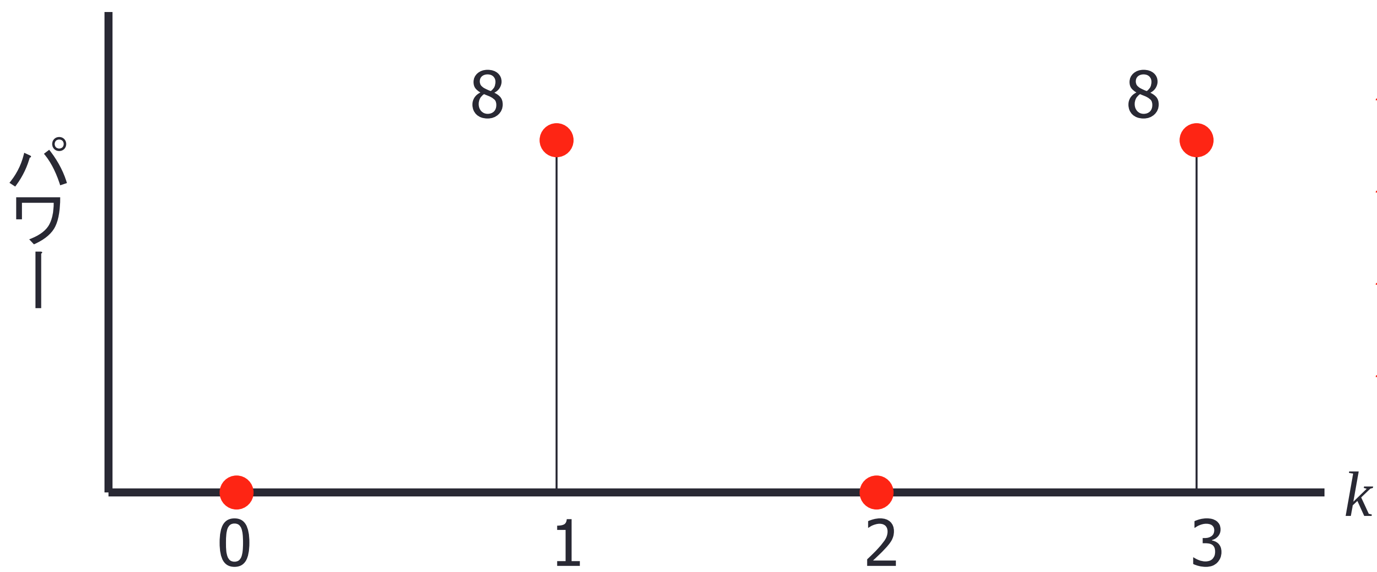
$X(2) = 0 - j\,0$

$X(3) = -2 - j\,2$

k点で離散フーリエ変換を行うと $k/2$ を中心にスペクトルの対称性が現れる。
振幅スペクトルの場合、$k/2$ を中心として折り返す形。

演習課題(4/4)　解答例2

パワースペクトル $|X_k|^2 = A_k{}^2 + B_k{}^2$



$X(0) = 0 - j\,0$

$X(1) = -2 - j\,(-2)$

$X(2) = 0 - j\,0$

$X(3) = -2 - j\,2$

k点で離散フーリエ変換を行うと $k/2$ を中心にスペクトルの対称性が現れる。
パワースペクトルの場合、$k/2$ を中心として折り返す形。

演習課題(4/4) 解答例3

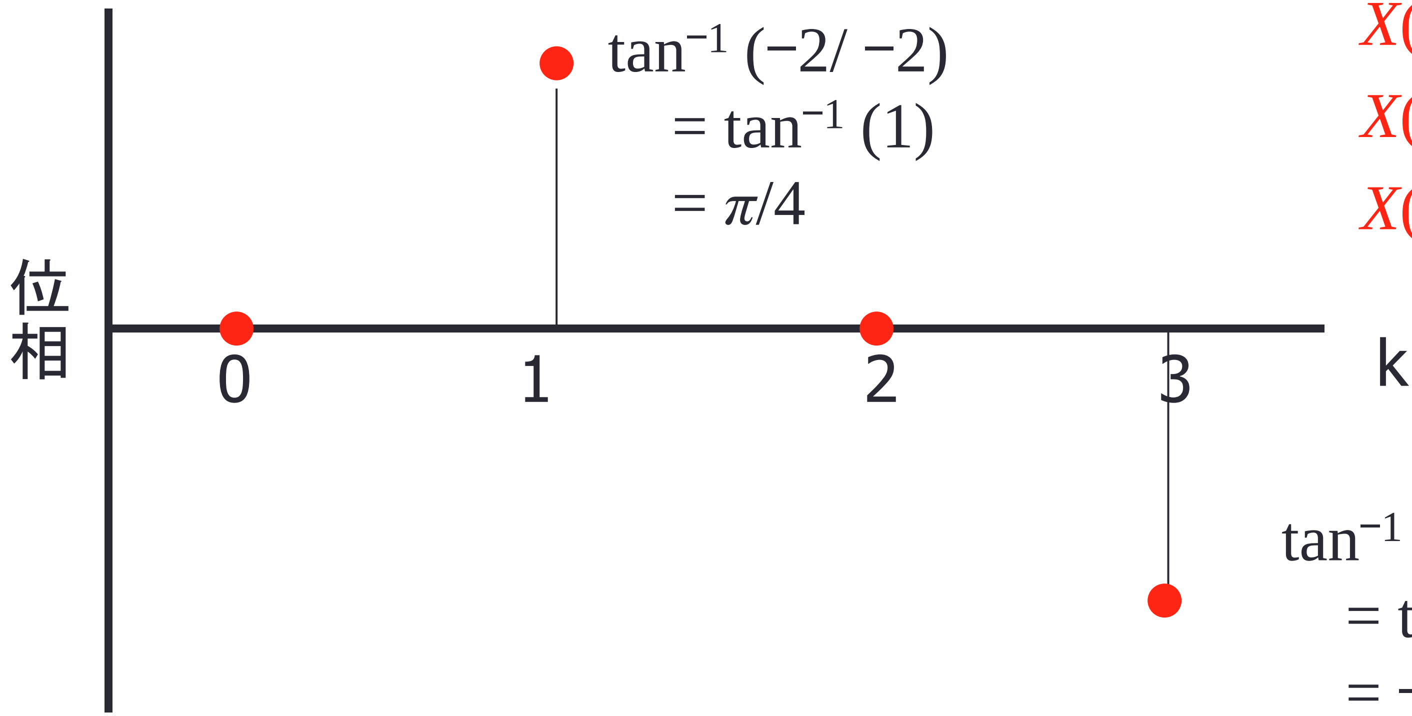
位相スペクトル $\arg(X_k) = \tan^{-1}\left(\dfrac{B_k}{A_k}\right)$

$X(0) = 0 - j\,0$

$X(1) = -2 - j\,(-2)$

$X(2) = 0 - j\,0$

$X(3) = -2 - j\,2$

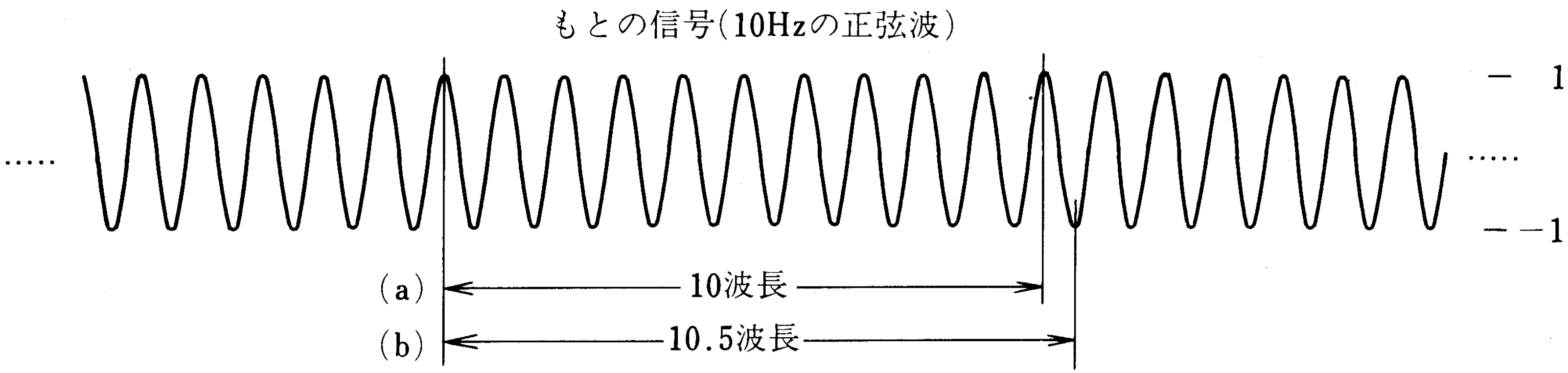


位相スペクトルの場合、$k/2$ を中心に折り返し、正負を反転した対称性を持つ

第6回

演習課題(1/4)

- 10Hzの正弦波に対して離散フーリエ変換を用いて周波数解析を行う場合合、切り出す区間を(a)10波長、(b)10.5波長とすると、
  - (1) 2つのスペクトルは一致するか？
  - (2) (1)の理由は？



ヒント： 離散フーリエ変換は周期関数を仮定する

演習課題（1/4） 解答例

- 10Hzの正弦波に対して離散フーリエ変換を用いて周波数解析を行う場合、切り出す区間を（a）10波長、（b）10.5波長とすると、
  - （1） 2つのスペクトルは一致するか？
    - 一致しない
  - （2） （1）の理由は？
    - **離散フーリエ変換は周期関数を仮定するので、**
      （a）ならば10波長が繰り返し発生するような信号を仮定し、
      （b）ならば10.5波長で切り出した信号が繰り返し発生するような信号を仮定
      よって、切り出した信号が仮定する周期信号が異なれば、スペクトルも当然異なるので、2つのスペクトルは一致しない

演習課題(2/4)

- 音楽のような複数の周波数を含む信号の周波数解析を行う場合は、
  - （1） どの窓を用いて信号を切り出したほうが良いか？
  - （2） その理由は？
  - （3） 周波数解析において窓関数を使うことの欠点(問題点)は？

ヒント: （1）、(2)は整数倍での切り出しが可能か？
(3)は窓関数の形を良く考えて。

演習課題（2/4）　解答例1

- 音楽のような複数の周波数を含む信号の周波数解析を行う場合は、
  - （1）　どの窓を用いて信号を切り出したほうが良いか？
    - 方形窓以外のハニング窓やハミング窓など
  - （2）　その理由は？
    - 音楽のような複数の周波数を含みかつ信号の波長が不明な場合は、方形窓で切り出すと不連続点が発生し、スペクトル誤差が大きくなる。よってハニング窓やハミング窓などを使用してスペクトル誤差を軽減するのが望ましい。

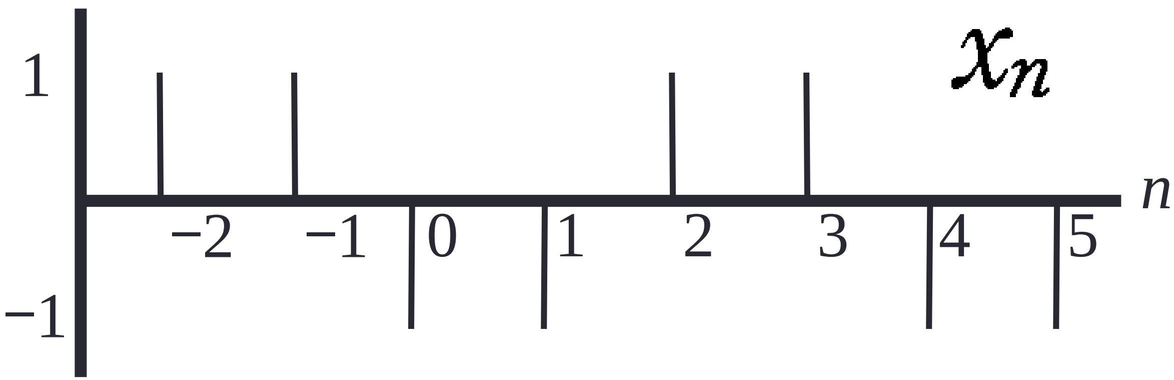
演習課題（2/4） 解答例2

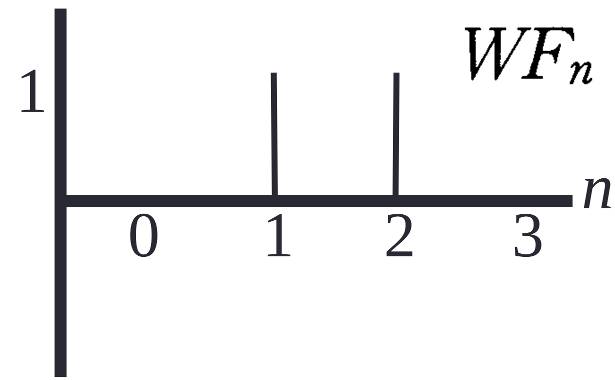
- 音楽のような複数の周波数を含む信号の周波数解析を行う場合は、
  - （３） 周波数解析において窓関数を使うことの欠点（問題点）は？
    - 窓関数をかけることにより信号自体が変形（ひずみ）をうけること。よってスペクトルは窓関数による影響を受け、若干の誤差が生じる。しかし不連続点によるスペクトルの誤差よりははるかに小さい。

演習課題(3/4)

ヒント: 窓関数と切り出し区間の値をかけて
離散フーリエ変換の式に代入して計算するだけ

- 離散時間信号 x_n が下記の式で表せるとき、離散フーリエ変換を用いて周波数解析を行いたい。**切り出し区間を n =0〜3**とし、下記窓関数 WF_n を使って周波数解析を行え。





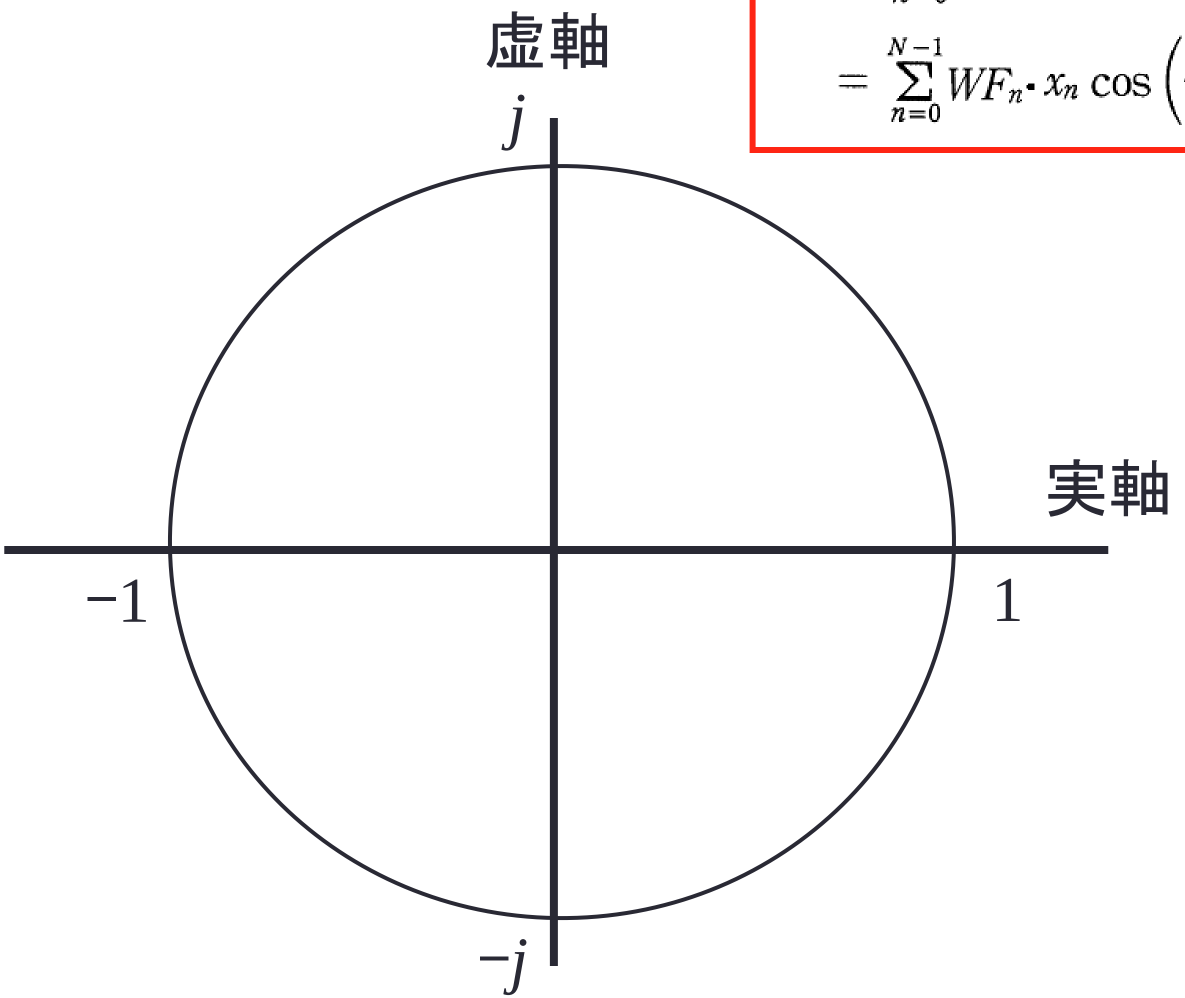
$$x_n = \begin{cases} 1 & (n = -2, -1, 2, 3\ ) \\ -1 & (n = 0, 1, 4, 5\ ) \end{cases}$$

$$WF_n = \begin{cases} 1 & (n = 1,2) \\ 0 & (n = 0,3) \end{cases}$$

演習課題(3/4) 大ヒント

- 複素数

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$



exp(0) = 1
exp(−*j* π/2) = −*j*
exp(−*j* π) = −1
exp(−*j* 3π/2) = *j*

演習課題(3/4)　解答例1

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}
X(0) = {} & WF(0)\, x(0) \exp(-j\, 2\pi 0\; 0/4) \\
& + WF(1)\, x(1) \exp(-j\, 2\pi 1\; 0/4) \\
& + WF(2)\, x(2) \exp(-j\, 2\pi 2\; 0/4) \\
& + WF(3)\, x(3) \exp(-j\, 2\pi 3\; 0/4) \\
= {} & 0 \cdot (-1) \exp(0) + 1 \cdot (-1)\exp(0) \\
& + 1 \cdot 1 \exp(0) + 0 \cdot 1 \exp(0) \\
= {} & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\
= {} & 0 + (-1) + 1 + 0 \\
= {} & 0 + j0
\end{aligned}$$

以下同じように $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$ を計算すればよい。

演習課題(3/4) 解答例2

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$X(1) = WF(0)\, x(0) \exp(-j\, 2\pi 0\, 1/4) + WF(1)\, x(1) \exp(-j\, 2\pi 1\, 1/4)$
$\quad + WF(2)\, x(2) \exp(-j\, 2\pi 2\, 1/4) + WF(3)\, x(3) \exp(-j\, 2\pi 3\, 1/4)$
$= 0 \cdot (-1) \exp(0) + 1 \cdot (-1)\exp(-j\, \pi/2)$
$\quad + 1 \cdot 1 \exp(-j\, \pi) + 0 \cdot 1 \exp(-j\, 3\pi/2)$
$= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-j) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot j$
$= -1 + j1$

$X(2) = WF(0)\, x(0) \exp(-j\, 2\pi 0\, 2/4) + WF(1)\, x(1) \exp(-j\, 2\pi 1\, 2/4)$
$\quad + WF(2)\, x(2) \exp(-j\, 2\pi 2\, 2/4) + WF(3)\, x(3) \exp(-j\, 2\pi 3\, 2/4)$
$= 0 \cdot (-1) \exp(0) + 1 \cdot (-1)\exp(-j\, \pi)$
$\quad + 1 \cdot 1 \exp(-j\, 2\pi) + 0 \cdot 1 \exp(-j\, 3\pi)$
$= 0 \exp(0) + (-1)\exp(-j\, \pi) + 1 \exp(0) + 0 \exp(-j\, \pi)$
$= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)$
$= 2 + j0$

演習課題(3/4)　解答例3

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} WF_n \cdot x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$X(3) = WF(0)\, x(0) \exp(-j\, 2\pi 0\, 3/4) + WF(1)\, x(1) \exp(-j\, 2\pi 1\, 3/4)$
$\quad + WF(2)\, x(2) \exp(-j\, 2\pi 2\, 3/4) + WF(3)\, x(3) \exp(-j\, 2\pi 3\, 3/4)$
$= 0 \cdot (-1) \exp(0) + 1 \cdot (-1)\exp(-j\, 3\pi/2)$
$\quad + 1 \cdot 1 \exp(-j\, 3\pi) + 0 \cdot 1 \exp(-j\, 9\pi/2)$
$= 0 \exp(0) + (-1)\exp(-j\, 3\pi/2)$
$\quad + 1 \exp(-j\, \pi) + 0 \exp(-j\, \pi/2)$
$= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot j + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-j)$
$= -1 - j1$

よって、最終的な解答は

$X(0) = 0 - j0$（単に0でもOK）　　$X(2) = 2 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$　　$X(3) = -1 - j1$

演習課題(4/4)

- 演習課題(3/4)のスペクトル解析結果を基に、振幅スペクトル、パワースペクトル、位相スペクトルを図示せよ。(横軸は $k = 0$ から 8 とする。)

$X(0) = 0 - j0$　　$X(2) = 2 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$　　$X(3) = -1 - j1$

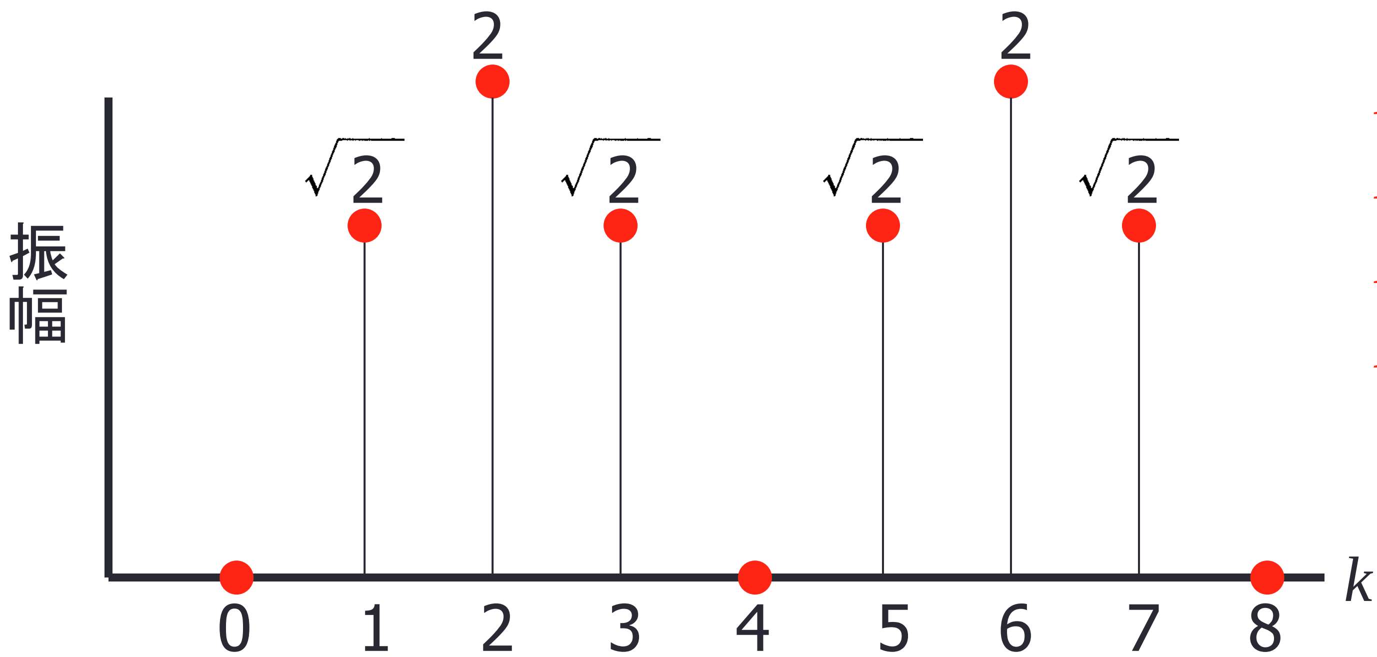
ヒント：　離散フーリエ変換式は下記のように分解できる。あとはスペクトルの対称性と周期性を考慮すれば…

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{実部}A_k} - j \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)}_{\text{虚部}B_k}$$

演習課題(4/4) 解答例1

振幅スペクトル $|X_k| = \sqrt{{A_k}^2 + {B_k}^2}$



$X(0) = \ 0 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$

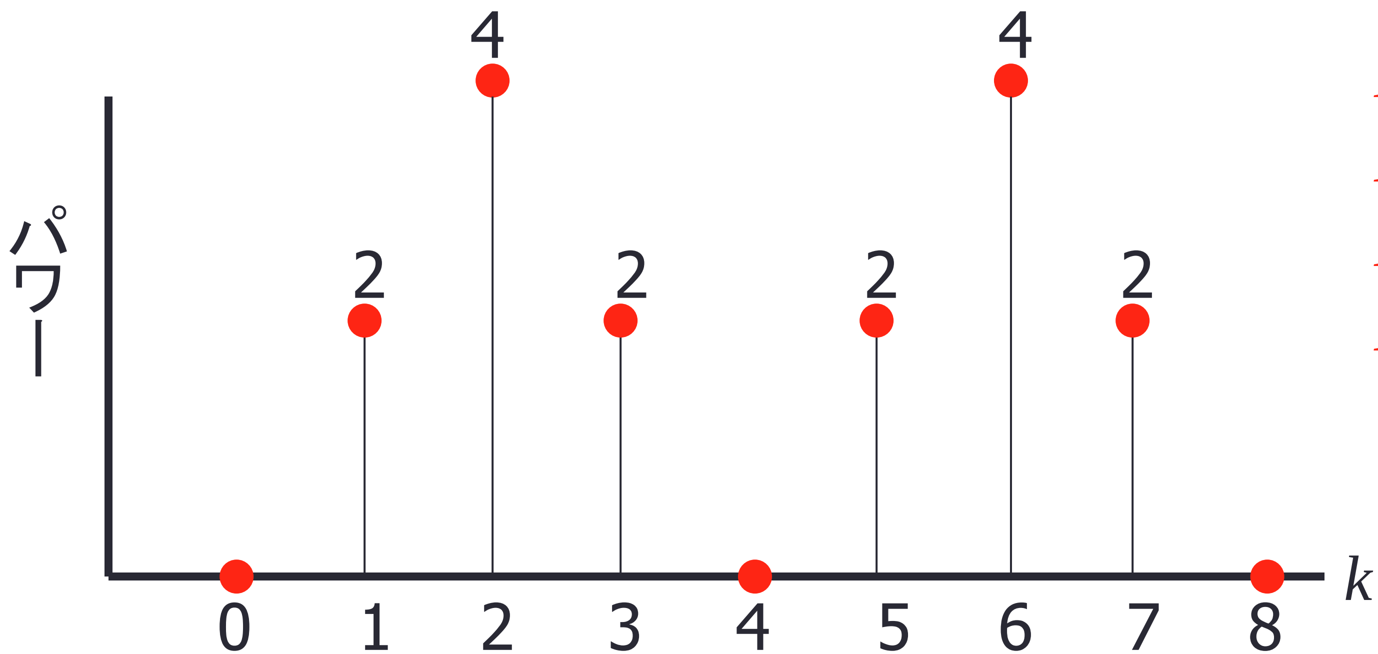
$X(2) = \ 2 - j0$

$X(3) = -1 - j1$

4点でDFTを行うと、k=2 を中心にスペクトルの対称性が現れる。
また、4点ごとにスペクトルの周期性が現れる。
前回の演習課題の結果と比べると窓関数の影響がわかる。
(異なった部分がスペクトル誤差となる)

演習課題(4/4)　解答例2

パワースペクトル $|X_k|^2 = {A_k}^2 + {B_k}^2$



$X(0) = \ 0 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$

$X(2) = \ 2 - j0$

$X(3) = -1 - j1$

4点でDFTを行うと、k=2 を中心にスペクトルの対称性が現れる。
また、4点ごとにスペクトルの周期性が現れる。
前回の演習課題の結果と比べると窓関数の影響がわかる。
（異なった部分がスペクトル誤差となる）

演習課題(4/4)　解答例3

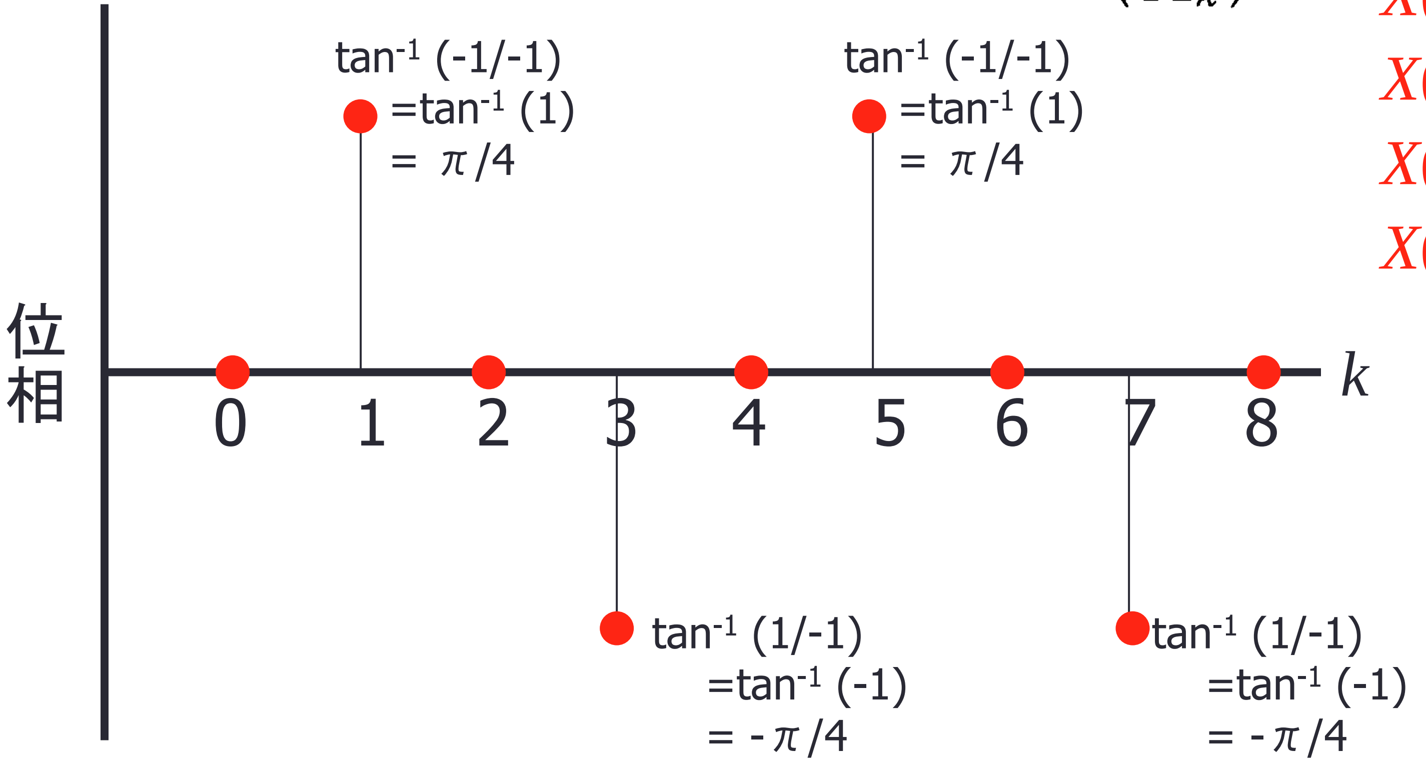
位相スペクトル　$\arg(X_k) = \tan^{-1}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$

$X(0) = \ \ 0 - j0$

$X(1) = -1 - j(-1)$

$X(2) = \ \ 2 - j0$

$X(3) = -1 - j1$



4点でDFTを行うと、k=2 を中心にスペクトルの対称性が現れる。また、4点ごとにスペクトルの周期性が現れる。位相スペクトルは前回の演習課題の結果比較してわかるように、窓関数の影響を受けない。

第7回

演習課題(1/1)

- 離散フーリエ変換(DFT)の計算回数をN^2、高速フーリエ変換(FFT)の計算回数を$N \log_2 N$としたとき、下記の計算回数表を埋めよ。

データ数N	DFT	FFT	DFT/FFT
32	?	?	?
64	?	?	?
128	?	?	?
256	?	?	?

ヒント: $N=32=2^5$　よって$\log_2 N$は?

演習課題(1/1) 解答例(1)

- 離散フーリエ変換(DFT)の計算回数をN^2、高速フーリエ変換(FFT)の計算回数を$N \log_2 N$としたとき、下記の計算回数表を埋めよ。

N=32のとき($N = 32 = 2^5$)

DFT(N^2): $2^5 \times 2^5 = 2^{10} = 1024$

FFT($N\log_2 N$): $32 \log_2 2^5 = 32 * 5 = 160$

DFT/FFT: $1024/160 = 6.4$

N=256のとき($N = 256 = 2^8$)

DFT(N^2): $2^8 \times 2^8 = 2^{16} = 65536$

FFT($N\log_2 N$): $256 \log_2 2^8 = 256 \times 8 = 2048$

DFT/FFT: $65536/2048 = 32$

演習課題(1/1)　解答例（2）

- 離散フーリエ変換(DFT)の計算回数をN^2 、高速フーリエ変換(FFT)の計算回数を$N \log_2 N$としたとき、下記の計算回数表を埋めよ。

データ数N	DFT	FFT	DFT/FFT
32	1024	160	6.4
64	4096	384	10.7
128	16384	896	18.3
256	65536	2048	32

データ数Nが増えるにつれて、FFTはDFTよりもより高速な演算が可能。
（例：N=256ならFFTはDFTより32倍速い）