演習課題 (1/5) ヒント

- 差分方程式:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) \\ -1.5y(n-1) + y(n-2)$$

伝達関数:

$$y(n) + 1.5y(n-1) - y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$
$$Y(z) + 1.5z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+1.5z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z+1}{(z-0.5)(z+2)}$$

演習課題 (1/5) 解答例

- 差分方程式:

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$
$$-1.5y(n-1) + y(n-2)$$

伝達関数:

$$y(n) + 1.5y(n-1) - y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$
$$Y(z) + 1.5z^{-1}Y(z) - z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 1.5z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z + 1}{(z - 0.5)(z + 2)}$$

極は$z = 0.5, -2$

1つの極が$|z| < 1$を満たさないので、不安定

演習課題 (2/5) ヒント

- 差分方程式:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0.5y(n-2)$$

伝達関数:

$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n)$$
$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{\{z - (0.5 + 0.5j)\}\{z - (0.5 - 0.5j)\}}$$

演習課題 (2/5) 解答例

- 差分方程式:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0.5y(n-2)$$

伝達関数:

$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n)$$
$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{\{z - (0.5 + 0.5j)\}\{z - (0.5 - 0.5j)\}}$$

極は$z = 0.5 + 0.5j, 0.5 - 0.5j$
すべての極が$|z| < 1$を満たすので、安定

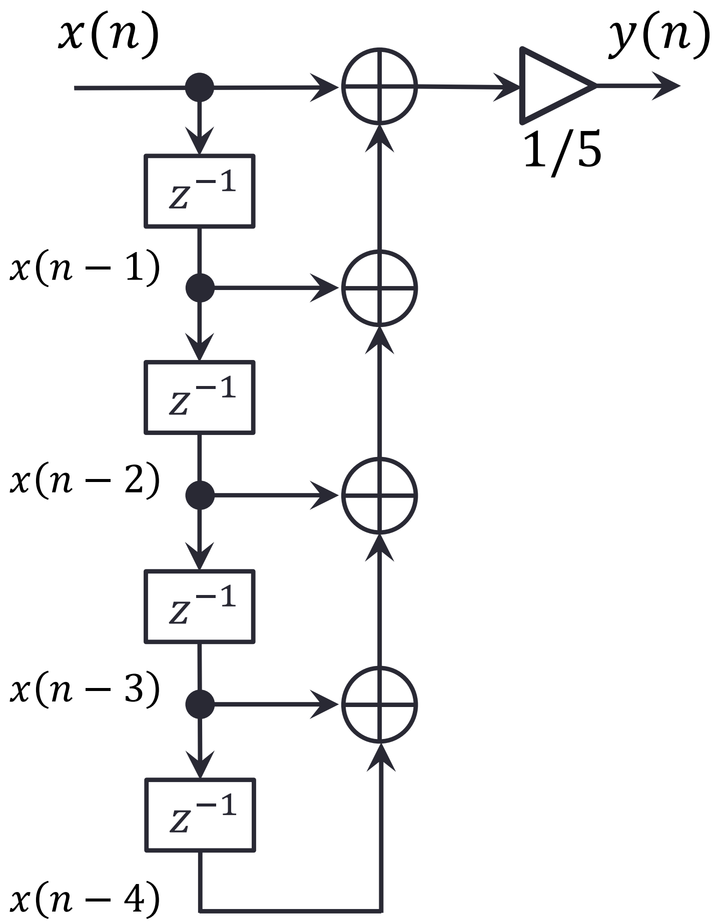
演習課題 (3/5) 大ヒント

- 5点の移動平均を求めるFIRフィルタを標準形構造を用いて設計せよ。
  - ヒント: 例えば3点の移動平均を考える。
    - 信号$x(n)$の時刻nにおける3点の移動平均は
      $y(n) = \{x(n) + x(n-1) + x(n-2)\}/3$ と表せる
      - 5点の移動平均だと？
        $y(n) = \{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)\}/5$
      - さらにz変換で表すと？
        $Y(z) = \{X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + z^{-3}X(z) + z^{-4}X(z)\}/5$
      - 伝達関数は？
        $Y(z)/X(z) = \{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\}/5$
      - 標準形構造は？

演習課題 (3/5) 解答例

- ５点の移動平均を求めるFIRフィルタを標準形構造を用いて設計せよ。
  - 伝達関数

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\}/5 = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{5} z^{-i} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{4} z^{-i}$$



演習課題 (4/5) 解答例 (1/4)

- $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, $y(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, $N = 8$ としたときの相互相関関数を計算し、横軸をk、縦軸を相互相関関数$R_{xy}(k)$として図示せよ。

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(0) = \frac{1}{8}\Bigg\{ &\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+0)\right) \\
&+ \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+0)\right) \\
&+ \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+0)\right) \\
&+ \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+0)\right)\Bigg\} \\
= \frac{1}{8}\Bigg\{ &0\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&0\cdot(-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\} \\
= 0&
\end{aligned}
$$

演習課題 (4/5) 解答例 (2/4)

$$R_{xy}(1)=\frac{1}{8}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+1)\right)\right.$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+1)\right)$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+1)\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1)+0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 0+(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 1\right\}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx -0.35$$

$$R_{xy}(2)=\frac{1}{8}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+2)\right)\right.$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+2)\right)$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+2)\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{0\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1\cdot(-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0\cdot 0+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+(-1)\cdot 1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}=-0.5$$

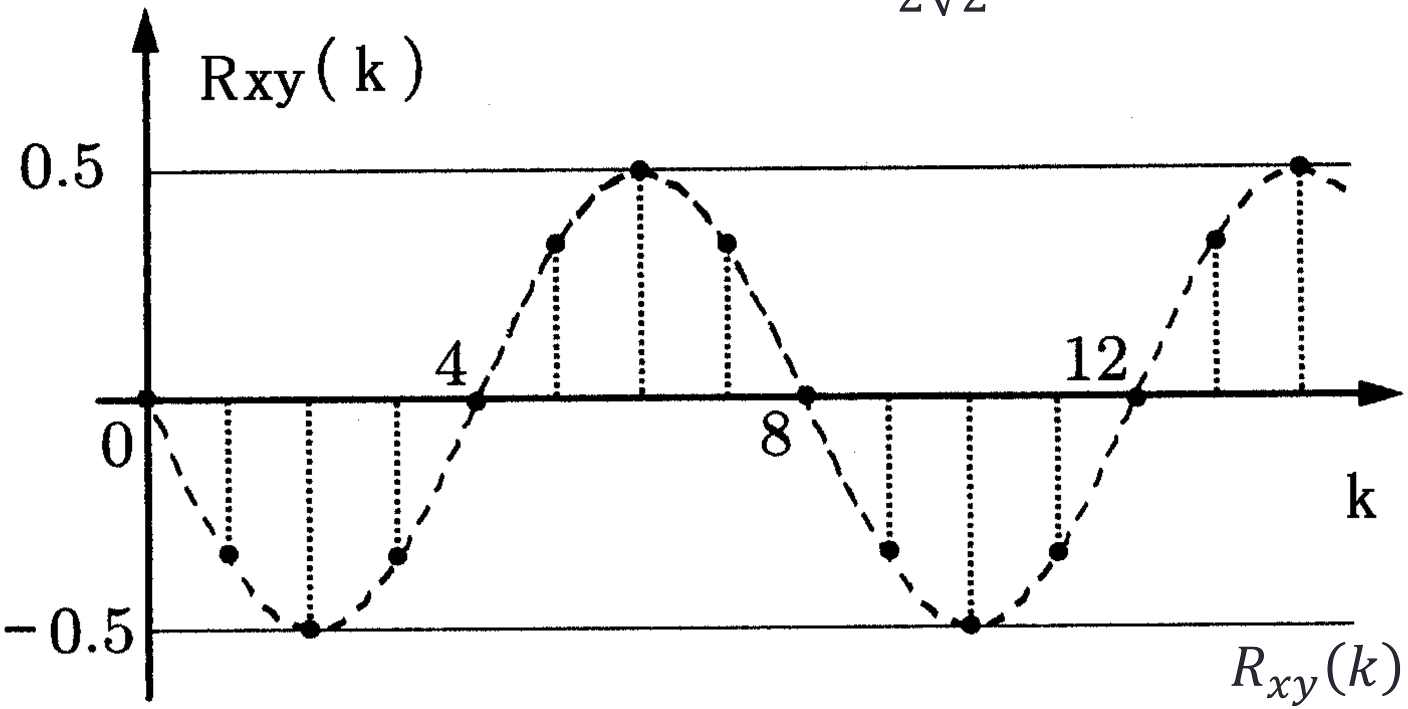
演習課題 (4/5) 解答例 (3/4)

$R_{xy}(0) = 0,$ $\qquad$ $R_{xy}(1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx -0.35$

$R_{xy}(2) = -0.5,$ $\qquad$ $R_{xy}(3) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx -0.35$

$R_{xy}(4) = 0,$ $\qquad$ $R_{xy}(5) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35$

$R_{xy}(6) = 0.5,$ $\qquad$ $R_{xy}(7) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35$



$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+k)$$

演習課題 (4/5) 解答例 (4/4)

- また相互相関関数はどのような事象を調べるときに役立つか考えよ。

  - 信号$x(n)$と信号$y(n)$がどのくらい似ているかを定量的に表したものなので、例えば、
    - 録音した会話の中から、特定の人の声が含まれているかどうかの調査
    - Webの情報検索などで、各ページがどのくらいキーワードの情報を含むかを調べたりするのに有効

演習課題 (5/5) 解答例 (1/4)

- $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right), N = 8$としたときの自己相関関数を計算し、横軸を$k$、縦軸を自己相関$R_{xx}(k)$として図示せよ。

$$
\begin{aligned}
R_{xx}(0) = \frac{1}{8}\Bigg\{ & \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+0)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+0)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+0)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+0)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+0)\right)\Bigg\} \\
= \frac{1}{8}\Bigg\{ & 0\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\
& 0\cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)\cdot(-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg\} \\
= 0.5 &
\end{aligned}
$$

演習課題 (5/5) 解答例 (2/4)

$$
\begin{aligned}
R_{xx}(1) = \frac{1}{8}\Bigg\{ & \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+1)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+1)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+1)\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

R_{xx}

$$
= \frac{1}{8}\left\{0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + 0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(-1) + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 0\right\}
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35
$$

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(2) = \frac{1}{8}\Bigg\{ & \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(0+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(1+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(2+2)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(3+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(4+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 5\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(5+2)\right) \\
& + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 6\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(6+2)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot(7+2)\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

R_{xx}

$$
= \frac{1}{8}\left\{0\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\cdot(-1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}
$$

$$
= 0
$$

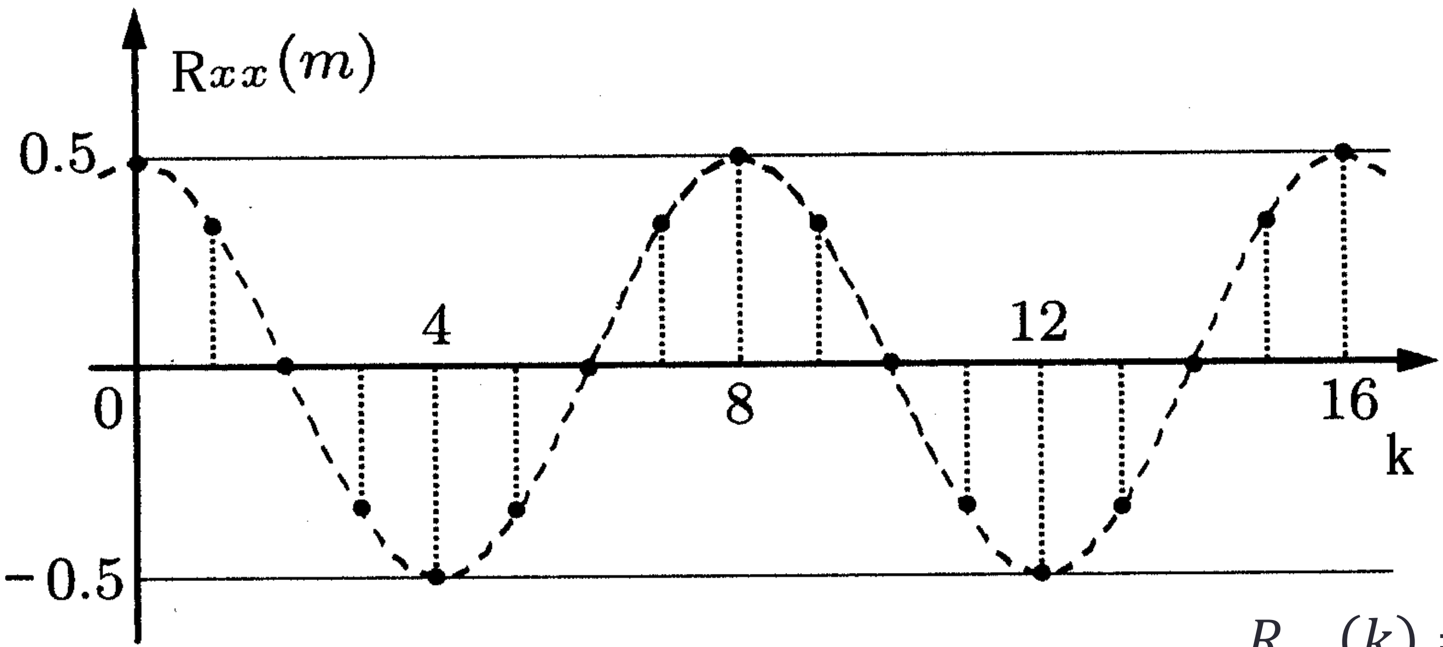
演習課題 (5/5) 解答例 (3/4)

$R_{xx}(0) = 0.5,$ $\qquad R_{xx}(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35$

$R_{xx}(2) = 0,$ $\qquad R_{xx}(3) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx -0.35$

$R_{xx}(4) = -0.5,$ $\qquad R_{xx}(5) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx -0.35$

$R_{xx}(6) = 0,$ $\qquad R_{xx}(7) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35$



$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k)$$

演習課題 (5/5) 解答例 (4/4)

- また自己相関関数はどのような事象を調べるときに役立つか考えよ。

  - 自分自身がどのくらい似ているかを定量的に表したものなので、繰り返しの周期を検出するようなもの全般に有効。例えば、
    - テレビの映像の中でCMのタイミングを検出したりするのに有効
    - 株価の変動も自己相関関数とその周期から予測することもある