デジタル信号処理
第13回　デジタルフィルタの設計

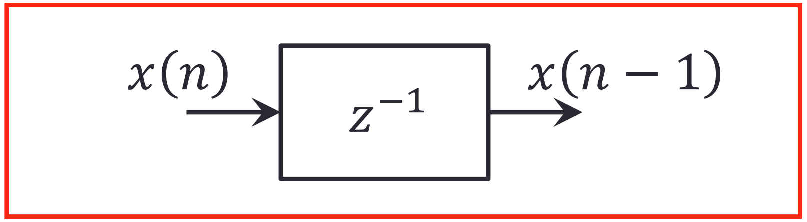
立命館大学
情報理工学部
岩居　健太

本日の授業内容

- デジタルフィルタの設計
  - デジタルフィルタの設計
  - デジタルフィルタの標準形構造
  - デジタルフィルタの設計アルゴリズム

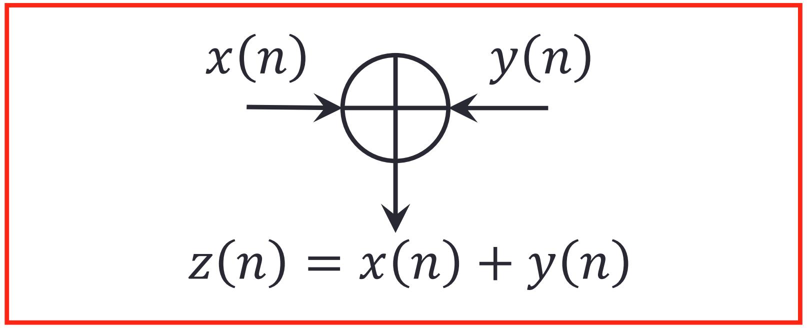
系の標準形構造 (1)

- デジタルフィルタの構造は**ブロック線図**によって表すのが標準的



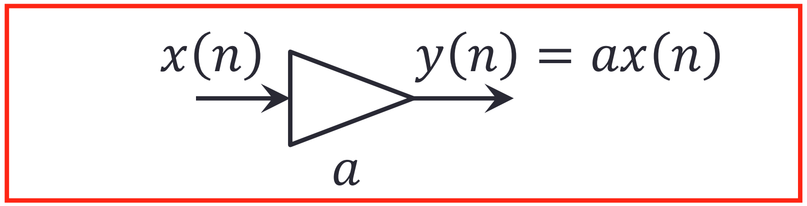
遅延器

信号を1点だけ遅延させる素子。遅延を表す $\boldsymbol{D}$ や、z変換の表記を用いて $\boldsymbol{z^{-1}}$ と表す。



加算器

2つ以上の信号に対して和を出力する素子。減算を行う場合は矢印部分に符号の－記号を付け加える。



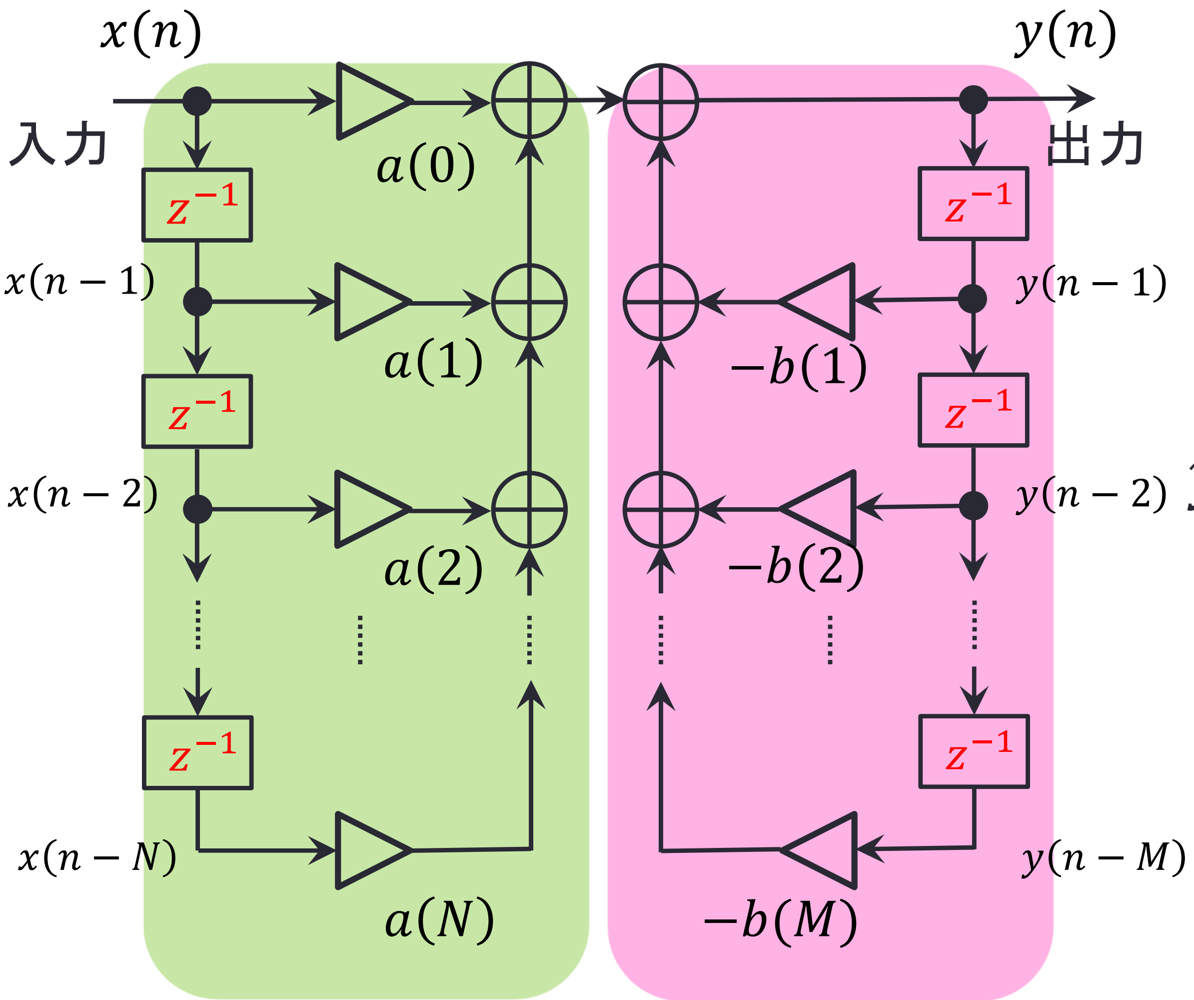
乗算器

入力を定数倍 (a倍) して出力する素子。

系の標準形構造 (2)

差分方程式がわからない学生は、
数学の教科書にて復習しておくこと

一般的なシステムのブロック線図



入出力関係 (差分方程式) は
下記のように表せる

$$y(n) = \boxed{\sum_{i=0}^{N} a(i)x(n-i)} - \boxed{\sum_{i=1}^{M} b(i)y(n-i)}$$

系の標準形構造 (3)

- デジタルフィルタの標準形構造

  差分方程式は

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N}a(i)x(n-i)-\sum_{i=1}^{M}b(i)y(n-i)$$

  - z変換すると

$$Y(z)=\left(\sum_{i=0}^{N}a(i)z^{-i}\right)X(z)-\left(\sum_{i=1}^{M}b(i)z^{-i}\right)Y(z)$$

系の標準形構造 (4)

- デジタルフィルタの標準形構造

$$\left(1+\sum_{i=1}^{M} b(i)z^{-i}\right)Y(z)=\left(\sum_{i=0}^{N} a(i)z^{-i}\right)X(z)$$

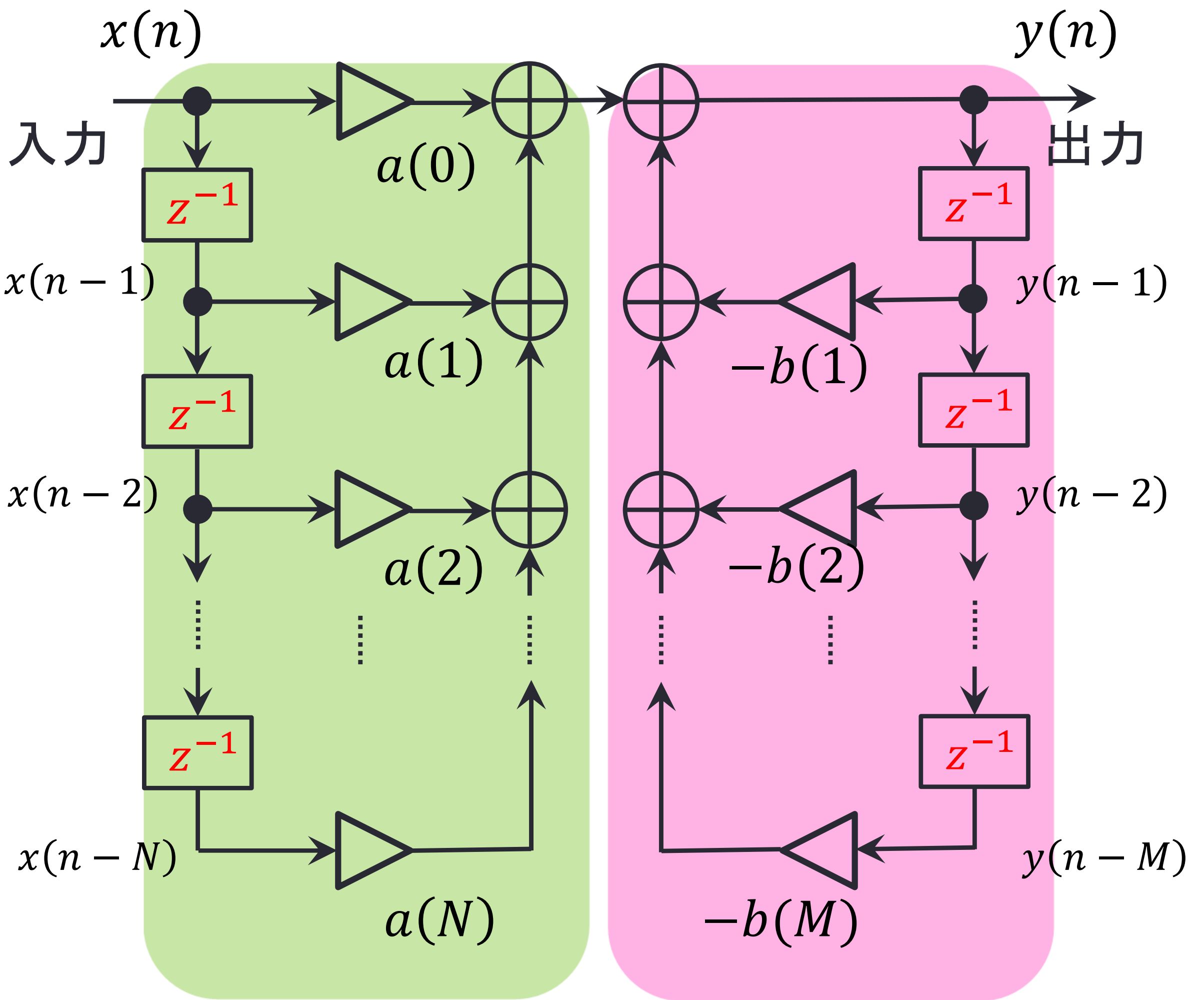
$$H(z)=\boxed{\frac{\sum_{i=0}^{N} a(i)z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M} b(i)z^{-i}}}$$

標準形構造の伝達関数

インパルス応答は伝達関数の逆z変換$h(n)=Z^{-1}[H(z)]$で与えられるが、伝達関数からブロック図を求めることで、インパルス応答を簡単に求めることができる。

ブロック線図の変形 (1/2)

一般的なシステムのブロック線図



伝達関数は以下のように見なせる

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a(i) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{M} b(i) z^{-i}}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{N} a(i) z^{-i} \right) \times \left(\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M} b(i) z^{-i}} \right)$$

$$= H_{\mathrm{F}}(z)\ H_{\mathrm{B}}(z)$$

ブロック線図の変形 (2/2)

伝達関数の積は順序入替が可能

$$H(z) = \boxed{H_\mathrm{F}(z)}\boxed{H_\mathrm{B}(z)}$$

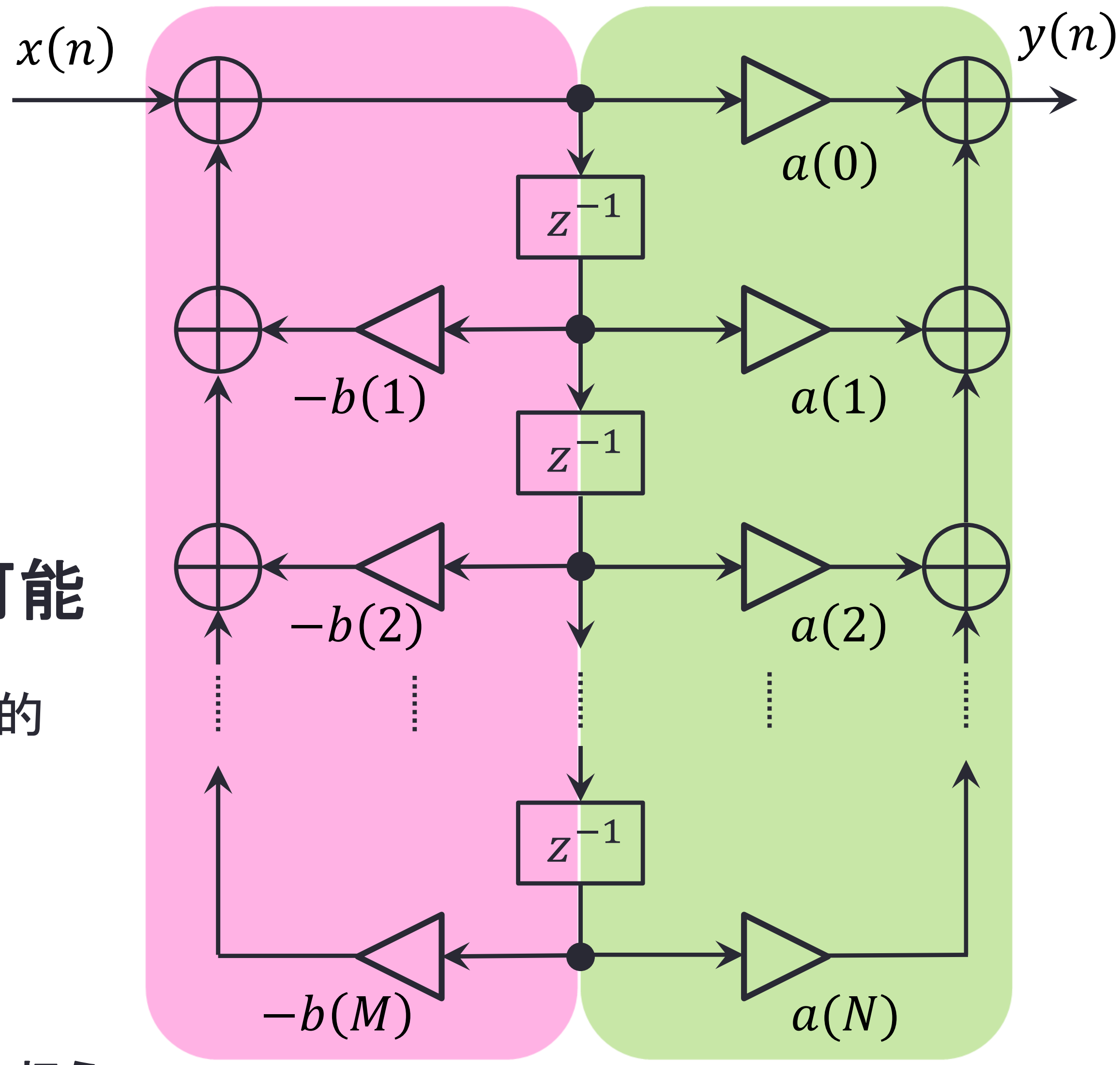
$$= \boxed{H_\mathrm{B}(z)}\boxed{H_\mathrm{F}(z)}$$

ブロック線図も同様に入替可能

＊遅延器を共通化できるため効率的

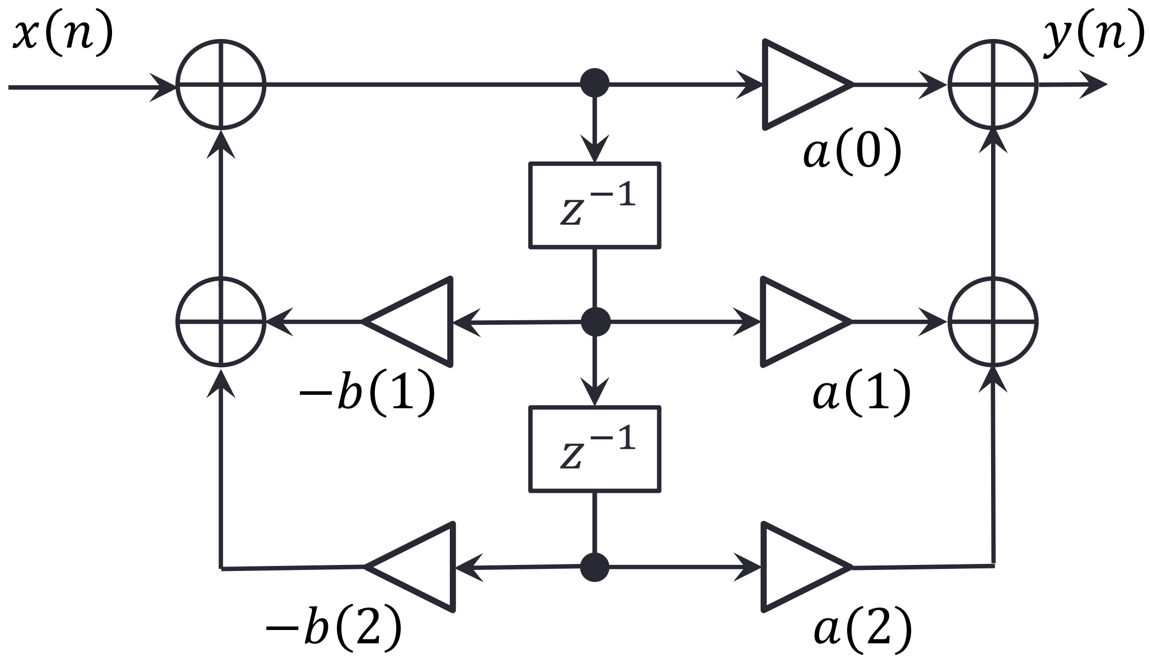
線形性を仮定しているため、
このような変形が実現できる

以降、このブロック線図を標準形として扱う



演習課題 (1/4) (5分間)

- 次のブロック線図で示されるデジタルフィルタの入力と出力の関係を式で表し、伝達関数を求めよ。



ヒント: 差分方程式をよく見て考えるように

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a(i)x(n-i) - \sum_{i=1}^{M} b(i)y(n-i)$$

演習課題 (2/4) (5分間)

- 伝達関数が

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 0.2z - 0.48}$$

で与えられるデジタルフィルタを標準形構造でブロック線図を構成し図示せよ。

ヒント: 分子分母を z^2 で割るとどうなるか？

デジタルフィルタの標準形構造

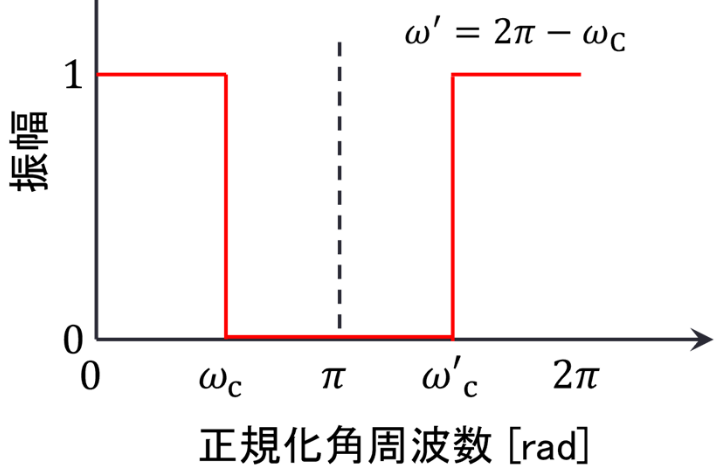
- デジタルフィルタの標準形構造
  - $b_i = 0$ (for all i)かつ$N < \infty$のとき、
    非再帰型ディジタルフィルタ
    - インパルス応答が<u>有限時間</u>で終了
    - FIR (Finite Impulse Response) フィルタ
  - $b_i \neq 0$または$b_i = 0$ (for all i)かつ$N = \infty$のとき、
    再帰型デジタルフィルタ
    - インパルス応答が無限に継続
    - IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ
  - FIRフィルタ, IIRフィルタについては、次回詳しく説明

＊離散時間フーリエ変換を基本とするため，
$-\pi \sim 0$の範囲は$\pi \sim 2\pi$に射影される．

デジタルフィルタの基本特性

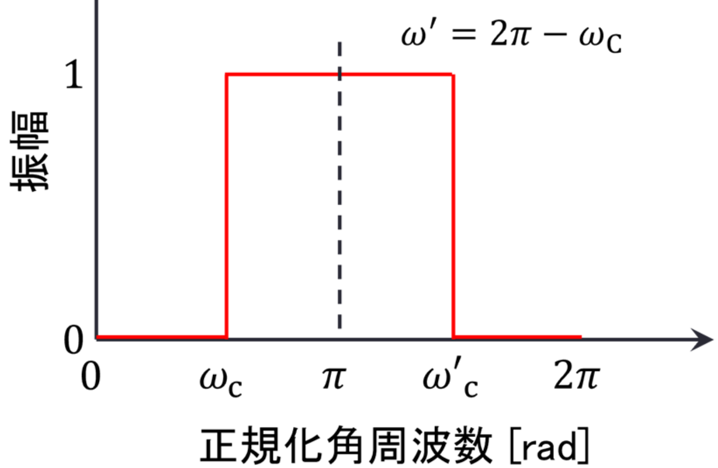
低域通過フィルタ

低い周波数だけを通過させる



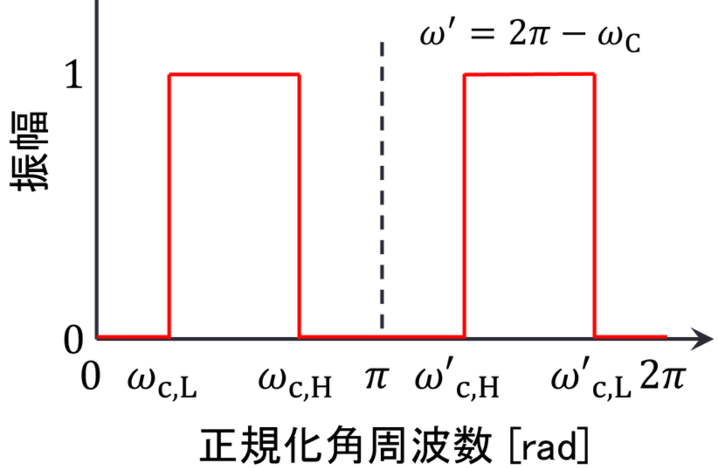
高域通過フィルタ

高い周波数だけを通過させる



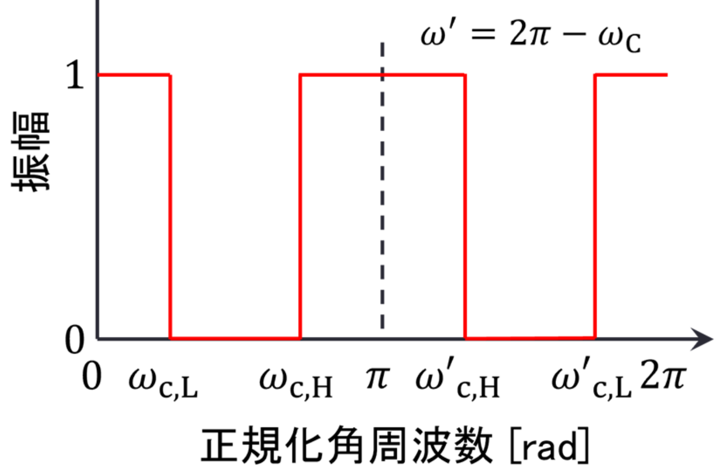
帯域通過フィルタ

特定の周波数帯域だけを通過させる



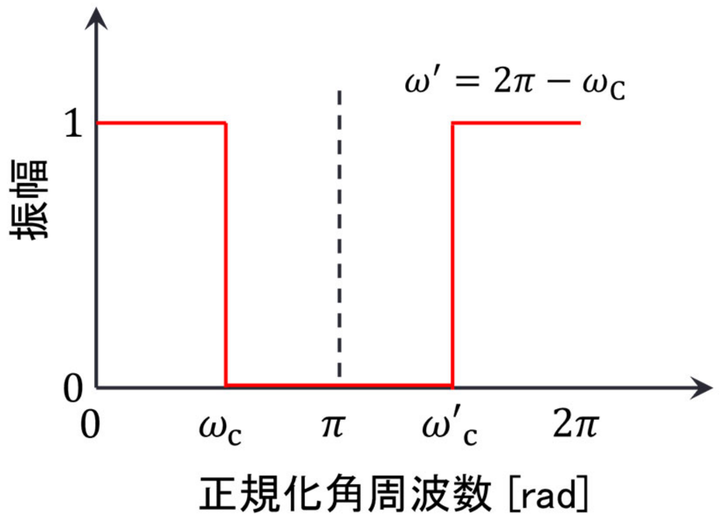
帯域阻止フィルタ

特定の周波数帯域だけを阻止する



低域通過フィルタの設計 (1/3)

- 低域通過フィルタのインパルス応答を求める



$$
\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_C} e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\omega_C}^{2\pi} e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{nj}\right]_0^{\omega_C} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{nj}\right]_{2\pi-\omega_C}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi n}\times\frac{e^{j\omega_C n} - e^{-j\omega_C n}}{2j} \\
&= \frac{\sin(\omega_C n)}{\pi n}
\end{aligned}
$$

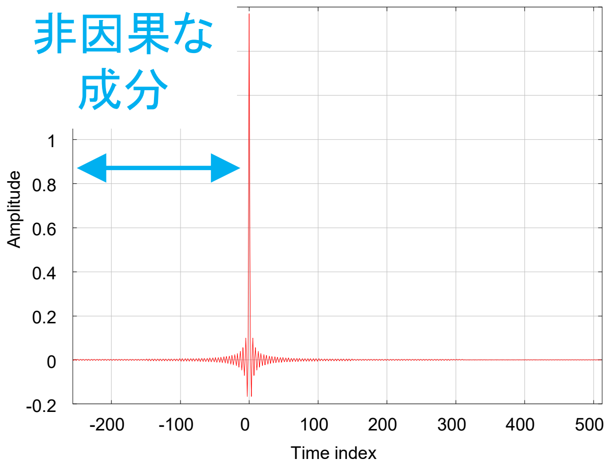
ロピタルの定理 (l'Hôpital's rule)
を適用すると$h(0) = \omega_C$

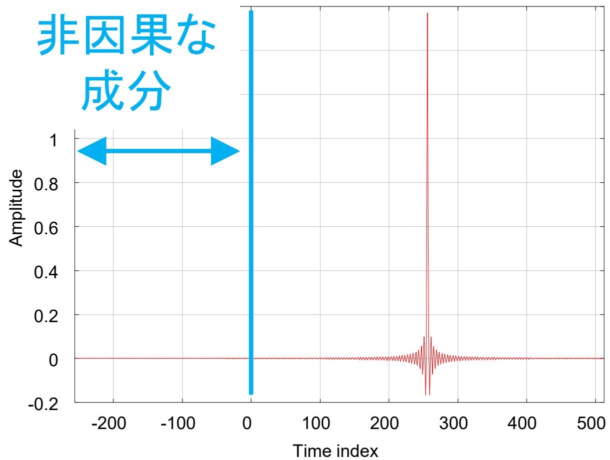
低域通過フィルタの設計 (3/3)

- このインパルス応答は負の時刻にも成分を有するため、実際の機器では利用できない (非因果的なフィルタ)

- フィルタ長Nを決定し,時間方向に$N/2$だけシフトすることで因果的なインパルス応答に修正する

$$h(n) = \frac{\sin(\omega_C n)}{\pi n} \Rightarrow h(n) = \frac{\sin\left(\omega_C\left(n - \frac{N}{2}\right)\right)}{\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)}$$





高域通過フィルタの設計方法

- 低域通過フィルタが設計できれば、高域通過フィルタも設計可能。

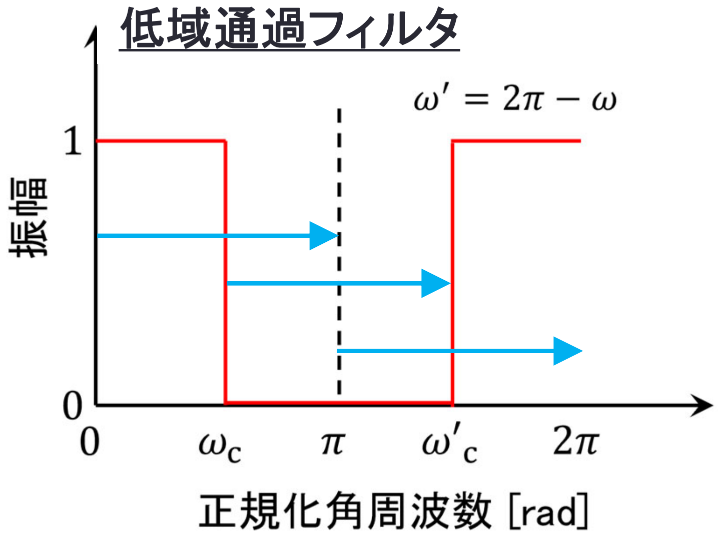
目的の遮断周波数をω_{H}とする。

(1) $\omega_{\mathrm{L}} = 1 - \omega_{\mathrm{H}}$として、低域通過フィルタの伝達関数$G_{\mathrm{L}}(z)$を求める。

(2) $G_{\mathrm{H}}(z) = G_{\mathrm{L}}(-z)$を求めることで高域通過フィルタを設計可能

(補足) 高域通過フィルタの伝達関数の証明 (1/2)

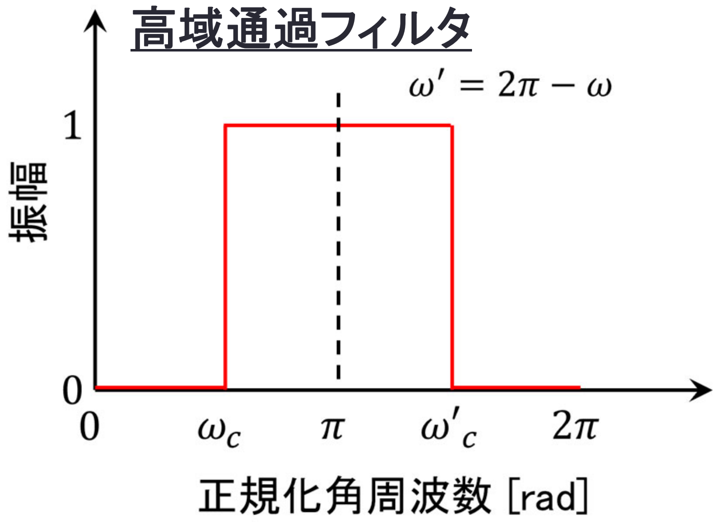
最初に，高域通過フィルタのインパルス応答を導出する.



高域通過フィルタの周波数特性は，低域通過フィルタの周波数特性をπだけ右にシフトしたもの.

ここで，低域通過フィルタの周波数特性は

$$H_{\mathrm{L}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{L}}[k]\, e^{-ik\omega}$$



なので，高域通過フィルタの周波数特性は

$$H_{\mathrm{H}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{L}}[k]\, e^{-ik(\omega-\pi)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h_{\mathrm{L}}[k] e^{ik\pi}}_{\text{高域通過フィルタのインパルス応答}}\, e^{-ik\omega}$$

(補足) 高域通過フィルタの伝達関数の証明 (2/2)

ここで，kは整数なので，$e^{ik\pi} = \begin{cases} 1, & k = 0,2,4,\ldots \\ -1, & k = 1,3,5,\ldots \end{cases}$

よって，高域通過フィルタのインパルス応答は，

$$h_{\mathrm{H}}[k] = \begin{cases} h_{\mathrm{L}}[k], & k = 0,2,4,\ldots \\ -h_{\mathrm{L}}[k], & k = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

＊ $h_{\mathrm{H}}[k] = h_{\mathrm{L}}[k]\cos(k\pi)$ と同じである.

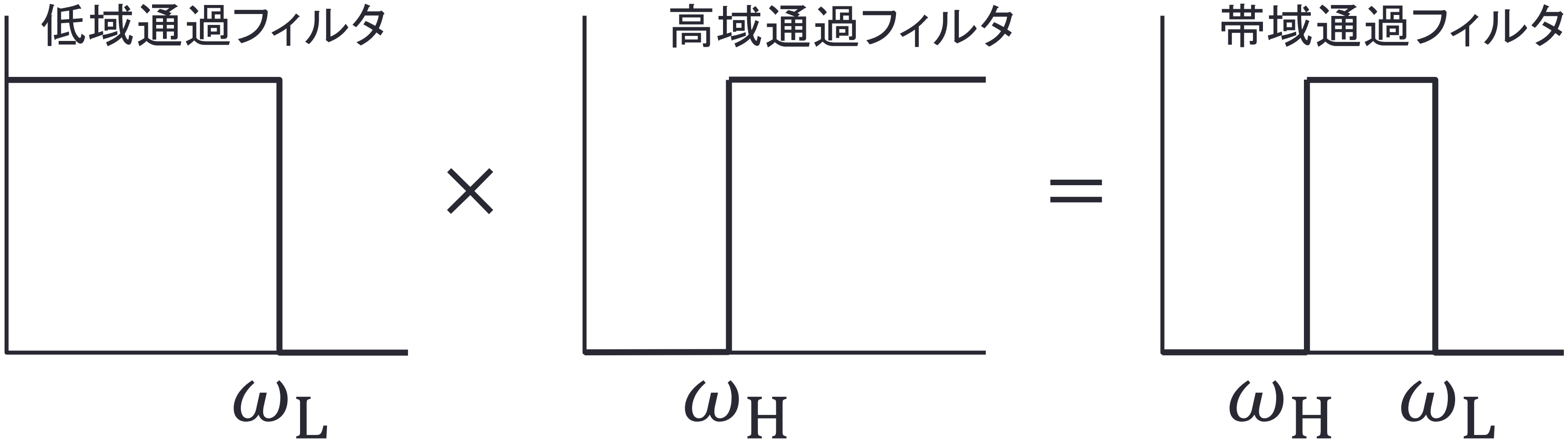
ここから、高域通過フィルタの伝達関数は

$$H_{\mathrm{H}}(z) = H_{\mathrm{L}}(-z)$$

あとは高域通過フィルタのカットオフ周波数ω_{C}とフィルタ長Nを決定し、インパルス応答を$N/2$点だけ時間シフトすればよい。

帯域通過フィルタの設計アルゴリズム

低域通過フィルタと高域通過フィルタから帯域通過フィルタを設計する



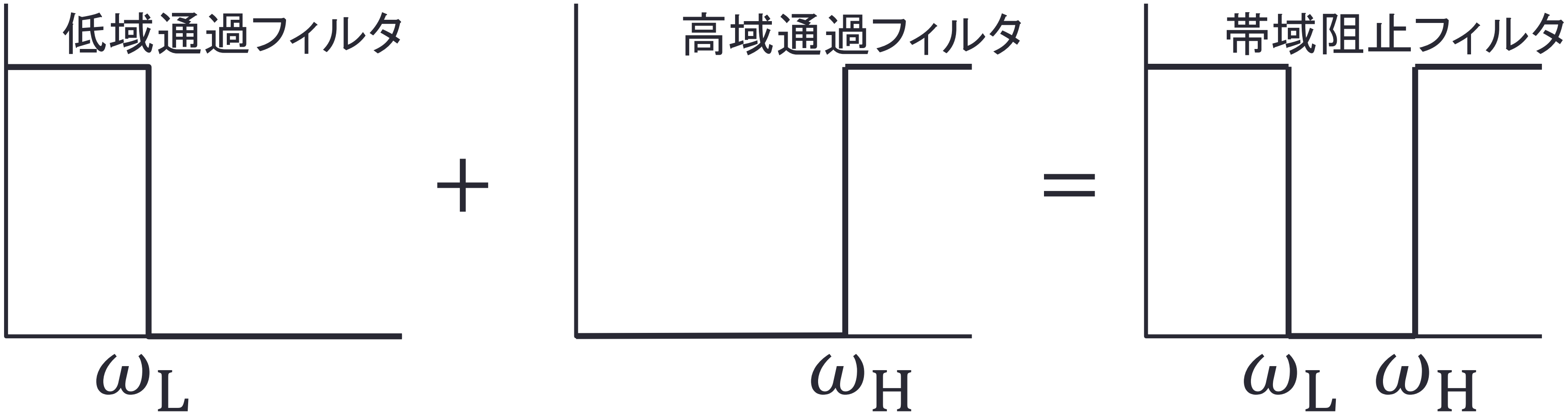
周波数特性から、帯域通過フィルタの伝達関数は次式となる

$$G_{\mathrm{L}}(z) \quad \times \quad G_{\mathrm{H}}(z) \quad = \quad G_{\mathrm{BP}}(z)$$

これをブロック図で表すと以下のようになる

帯域阻止フィルタの設計アルゴリズム

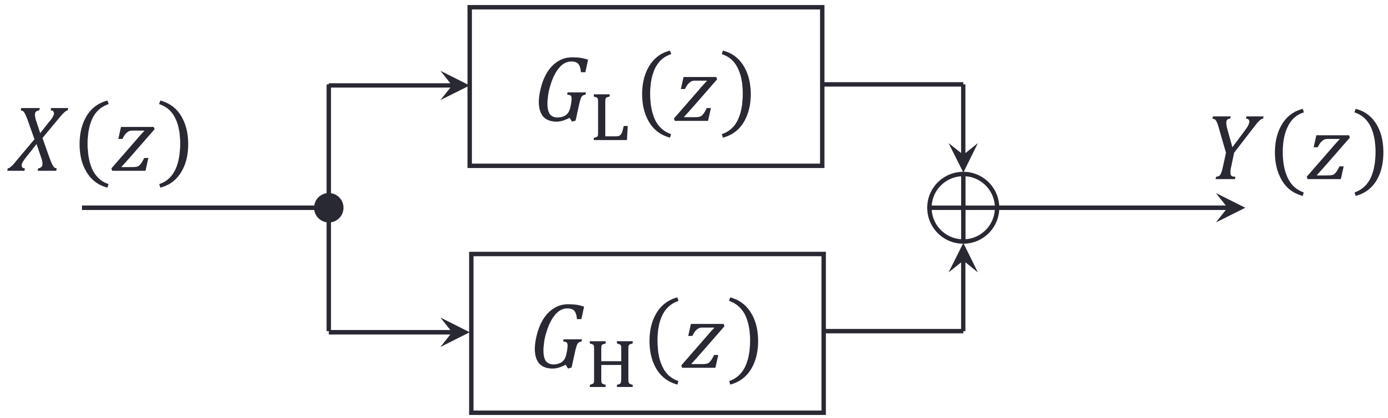
低域通過フィルタと高域通過フィルタから帯域阻止フィルタを設計する



周波数特性から、帯域阻止フィルタの伝達関数は次式となる

$$G_{\mathrm{L}}(z) \quad + \quad G_{\mathrm{H}}(z) \quad = \quad G_{\mathrm{BE}}(z)$$

これをブロック図で表すと
右図のようになる



演習課題 (3/4) (10分間)

- 伝達関数が

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 0.2z - 0.48}$$

で与えられる2次デジタルフィルタを、1次フィルタの縦続接続で実現し、そのブロック線図をかけ。

ヒント：1次フィルタの伝達関数では、z^{-2}以上の項が存在しないということ。分母、分子をそれぞれ1次式に分解し、1次の伝達関数の積に変形すればよい。

演習課題 (4/4) (10分間)

- 伝達関数が

$$H(z) = \frac{2z^2 + 1.2z - 0.6}{z^2 + 0.2z - 0.48}$$

で与えられる2次デジタルフィルタを、1次フィルタの並列接続で実現し、そのブロック線図をかけ。

ヒント: 1次フィルタの伝達関数では、z^{-2}以上の項が存在しないということ。分母、分子をそれぞれ1次式に分解し、1次の伝達関数の和に変形すればよい。