デジタル信号処理
第8～14回講義に関する
演習の解説

立命館大学　情報理工学部
岩居　健太

問題1

＊重ね合わせの原理が成り立つか，確認する．

(1) 入力に10を足すシステムLは(a)である．

$L[x(n)] = x(n) + 10$より，

$$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = \{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} + 10$$
$$= a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + 10$$

$$a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)] = a_1\{x_1(n) + 10\} + a_2\{x_2(n) + 10\}$$
$$= a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + 10(a_1 + a_2)$$

$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \neq a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)]$なので，

(a) (イ) 非線形システム

問題1

＊重ね合わせの原理が成り立つか，確認する．

(2) 入力に5をかけるシステムLは(b)である．

$L[x(n)] = 5x(n)$より，

$$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = 5\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\}$$
$$= 5a_1x_1(n) + 5a_2x_2(n)$$

$$a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)] = a_1 \times 5x_1(n) + a_2 \times 5x_2(n)$$
$$= 5a_1x_1(n) + 5a_2x_2(n)$$

$\Downarrow$

$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)]$なので，

(b) (ア) 線形システム

問題1

＊重ね合わせの原理が成り立つか，確認する．

(3) 入力の3乗を出力するシステムLは(c)である．

$L[x(n)]=x^3(n)$より，

$$
\begin{aligned}
L[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] &= \{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\}^3 \\
&= \{a_1x_1(n)\}^3+3\{a_1x_1(n)\}^2a_2x_2(n) \\
&\quad +3a_1x_1(n)\{a_2x_2(n)\}^2+\{a_2x_2(n)\}^3
\end{aligned}
$$

$$a_1L[x_1(n)]+a_2L[x_2(n)]=a_1\{x_1(n)\}^3+a_2\{x_2(n)\}^3$$

$L[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\neq a_1L[x_1(n)]+a_2L[x_2(n)]$なので，

(c) (イ) 非線形システム

問題1

＊重ね合わせの原理が成り立つか，確認する．

(4) $y(n) = L[x(n)] = \lambda x(n-5)$というシステム$L$は(d)である．
ただし，$x(n), y(n)$はそれぞれ入出力信号である．

$$\begin{aligned} L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] &= \lambda\{a_1x_1(n-5) + a_2x_2(n-5)\} \\ &= \lambda a_1x_1(n-5) + \lambda a_2x_2(n-5) \end{aligned}$$

$$a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)] = a_1\lambda x_1(n-5) + a_2\lambda x_2(n-5)$$

$$\Downarrow$$

$L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)]$なので，

(d) (ア) 線形システム

問題2

$*\, y(n-n_0) = L\{x(n-n_0)\}$が成立するか，確認する．

(1) $y(n) = L[x(n)] = x(n)\cos(\omega n)$というシステム$L$は(a)である．

出力信号をそのまま時間シフトすると，

$$y(n-n_0) = x(n-n_0)\cos\{\omega(n-n_0)\}$$

時間シフトした入力信号をシステムに入力すると，

$$L[x(n-n_0)] = x(n-n_0)\cos(\omega n)$$

⇩

$y(n-n_0) \neq L\{x(n-n_0)\}$なので，

(a) (イ) 時変システム

問題2

＊$y(n-n_0)=L\{x(n-n_0)\}$が成立するか，確認する．

(2) $y(n)=L[x(n)]=\cos\{(\omega-x(n))n\}$というシステム$L$は(b)
である．

出力信号をそのまま時間シフトすると，

$$y(n-n_0)=\cos\{(\omega-x(n-n_0))(n-n_0)\}$$

時間シフトした入力信号をシステムに入力すると，

$$L[x(n-n_0)]=\cos\{(\omega-x(n-n_0))n\}$$

↓

$y(n-n_0)\neq L\{x(n-n_0)\}$なので，

(a) (イ) 時変システム

問題2

$*\ y(n-n_0)=L\{x(n-n_0)\}$が成立するか，確認する．

(3) $y(n)=L[x(n)]=a_1x(n)+a_2x(n-N)$というシステム$L$は(c)である．

出力信号をそのまま時間シフトすると，

$$y(n-n_0)=a_1x(n-n_0)+a_2x(n-n_0-N)$$

時間シフトした入力信号をシステムに入力すると，

$$L[x(n-n_0)]=a_1x(n-n_0)+a_2x(n-n_0-N)$$

⇩

$y(n-n_0)=L\{x(n-n_0)\}$なので，

(a) $\boxed{\text{(ア) 時不変システム}}$

問題3

$$x(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 4 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 0,1) \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} 2 & (n = 0) \\ 5 & (n = 1) \\ 3 & (n = 2) \\ 0 & (n = 0,1,2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=0}^{2} h(i)x(n-i) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) \\ &= 2x(n) + 5x(n-1) + 3x(n-2) \end{aligned}$$

インパルス応答を代入

$$\begin{aligned} y(0) &= 2x(0) + 5x(-1) + 3x(-2) \\ &= 2 \times 1 + 5 \times 0 + 3 \times 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= 2x(1) + 5x(0) + 3x(-1) \\ &= 2 \times 4 + 5 \times 1 + 3 \times 0 \\ &= 8 + 5 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2) &= 2x(2) + 5x(1) + 3x(0) \\ &= 2 \times 0 + 5 \times 4 + 3 \times 1 \\ &= 20 + 3 \\ &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(3) &= 2x(3) + 5x(2) + 3x(1) \\ &= 2 \times 0 + 5 \times 0 + 3 \times 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

問題4

$$x(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 0,1) \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 1 & (n = 2) \\ 0 & (n \neq 0,1,2) \end{cases}$$

<u>**z変換の定義**</u> $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

(1) $x(n)$のz変換

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} = 1 + 2z^{-1}$$

(2) $h(n)$のz変換

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

(3) $y(n)$のz変換

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= (1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + 2z^{-1}) \\ &= 1 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3} \end{aligned}$$

問題5

デシベルの定義

$$A = 20\log_{10}\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

E_1，E_2：振幅
P_1，P_2：パワー

音圧レベルが40 dBの製品があれば,
この製品は基準音圧と比較して

$$40 = 20\log_{10}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$2 = \log_{10}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^2 = 100$$

振幅で100倍

$$40 = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$4 = \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 10^4 = 10000$$

パワーで10 000倍