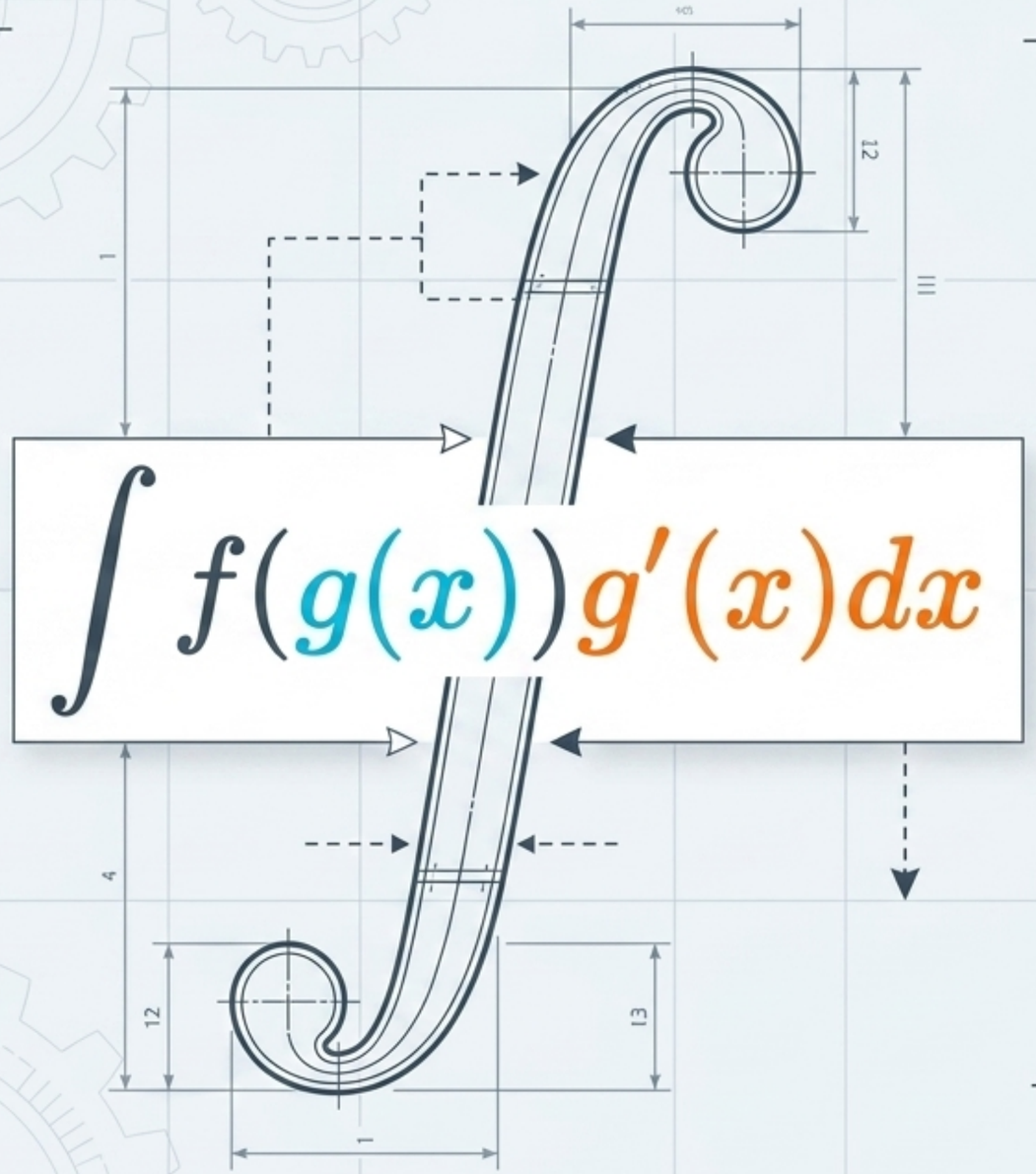



# مفتاح فك التشفير للتكاملات المعقدة

إتقان التكامل بالتعويض لعكس مسار "قاعدة السلسلة" وفتح الهياكل الرياضية المعقدة.

NotebookLM

# المفهوم الأساسي: هندسة عكسية لقاعدة السلسلة

التفاضل
(قاعدة السلسلة)

$$F(g(x)) \longrightarrow f(g(x)) \cdot g'(x)$$

الظل الناتج عن مشتقة
الدالة الداخلية

التكامل (التعويض)

$$\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}$$

عقبة: يجب تحديدها وامتصاصها

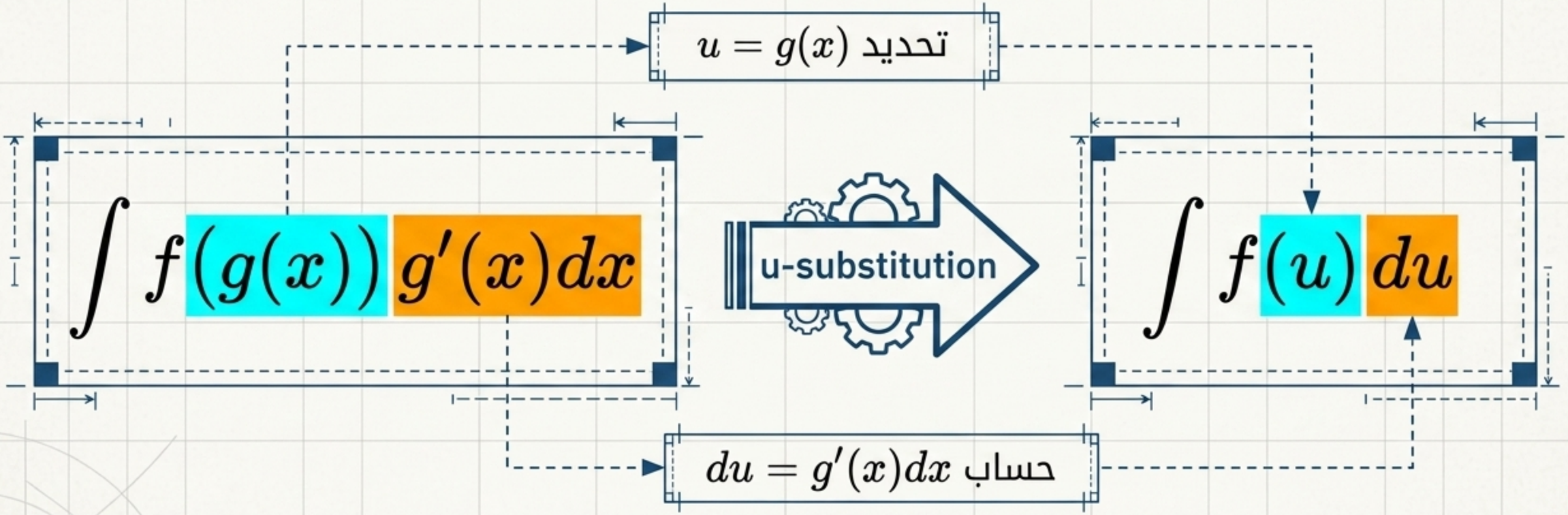
10:9

إذا كان التفاضل يستخدم قاعدة السلسلة للضرب في المشتقة الداخلية, فإن التكامل يجب أن يجد هذه المشتقة المشتقة ويمتصها لإعادة بناء الدالة الأصلية.

NotebookLM

# الآلية: تقليص التكامل عبر التقاط المتغيرات

الهدف هو تحديد دالة خفية (u) متداخلة بعمق داخل التكامل، بشرط أن تكون مشتقتها الدقيقة (du) متواجدة في الخارج.




NotebookLM

# محرك التعويض خماسي الخطوات

**1. تحديد**
اختر التعبير الداخلي كـ u.

**2. تفاضل**
احسب du/dx واستخرج قيمة du.

**3. تعويض**
استبدل كل مصطلحات x بالكامل بـ u و du.

**4. تكامل**
حل التكامل المبسط بالنسبة للمتغير u.

**5. استرجاع**
أعد تعبير x الأصلي مكان u.

**فحص تشخيصي:** إذا لم تتمكن من إجراء التكامل بعد الخطوة 3، فقد تحتاج لاختيار u مختلف أو استخدام معالجة جبرية.

NotebookLM

# النمط المعماري 1: القوة المتداخلة

الهيكل المعماري الأكثر شيوعاً. ابحث عن أس ذو قوة عالية يحتوي على دالة داخلية مشتقتها الدقيقة تجلس بجوارها مباشرة.

| | |
|---|---|
| القفل: | $\int (x^3+5)^{100}(3x^2)\,dx$ |
| المفاتيح: | $u = (x^3+5)$<br>$du = 3x^2\,dx$ |
| فك التشفير: | $\int u^{100}\,du$ |
| الحل: | $\frac{u^{101}}{101} + C \longrightarrow \frac{(x^3+5)^{101}}{101} + C$ |

NotebookLM

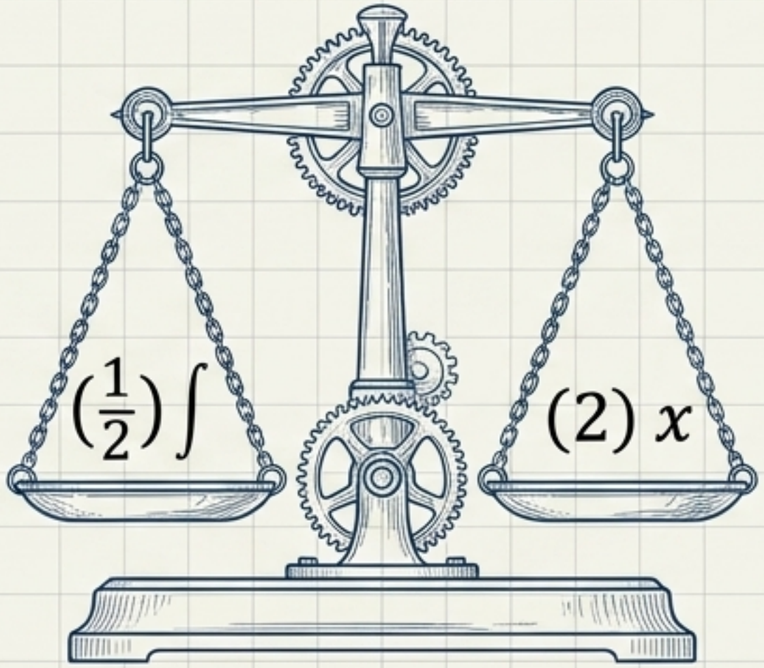
# النمط المعماري 2: النواة المثلثية والثوابت المفقودة

إذا كانت المشتقة تفتقر إلى مُعامل ثابت, يجب موازنة الكفتين رياضياً عن طريق الضرب في الداخل والقسمة في الخارج.

$$\int x \cos(x^2)\, dx$$

$$u = x^2$$
$$du = 2x\, dx$$

**العقبة:** المعادلة تحتوي على **x** فقط, وليس **2x**.




$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\, du$$

$$\frac{1}{2}\sin(u) + C$$

$$\frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

NotebookLM

# النمط المعماري 3: الكسر اللوغاريتمي

عندما يكون البسط هو المشتقة الدقيقة للمقام، ينهار الهيكل الرياضي فوراً وبشكل أنيق إلى لوغاريتم طبيعي.

Top Panel (The Structural Rule)

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

مثال تطبيقي:

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}dx \Longrightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx \Longrightarrow \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du \Longrightarrow \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$$

NotebookLM

# مصفوفة التعويض التشخيصية

امسح التكاملات الواردة بحثاً عن هذه الأنماط المعمارية الأساسية قبل البدء في الحسابات.

| خيار u المُوصى به | المُعرّف البصري | اسم النمط |
|---|---|---|
| التعبير داخل القوس | $(\ldots)^n$ | القوى المتداخلة |
| التعبير داخل الدالة المثلثية | $\cos(\ldots)$ | النوى المثلثية |
| المقام بالكامل | $\frac{[\text{بسط}]}{[\text{مقام}]}$ | الكسور اللوغاريتمية |
| الدالة بأكملها أو نواة الجذر | $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ or $\frac{1}{1+x^2}$ | تنسيقات الدوال العكسية |

NotebookLM

# التكتيك المتقدم: حيلة التوسيع للمتغيرات العنيدة

عندما يترك التعويض متغيرات $x$ مارقة، أعد ترتيب معادلة $u$ لفرض التوافق الجبري.

**المعادلة الأصلية:**

$$\int x\sqrt{2-x}\,dx$$

**العقبة:**

بعد اختيار $u = 2 - x$ $u$
و $du = -dx$

$$-\int x\sqrt{u}\,du$$

**الارتكاز:**

$$x = 2 - u$$

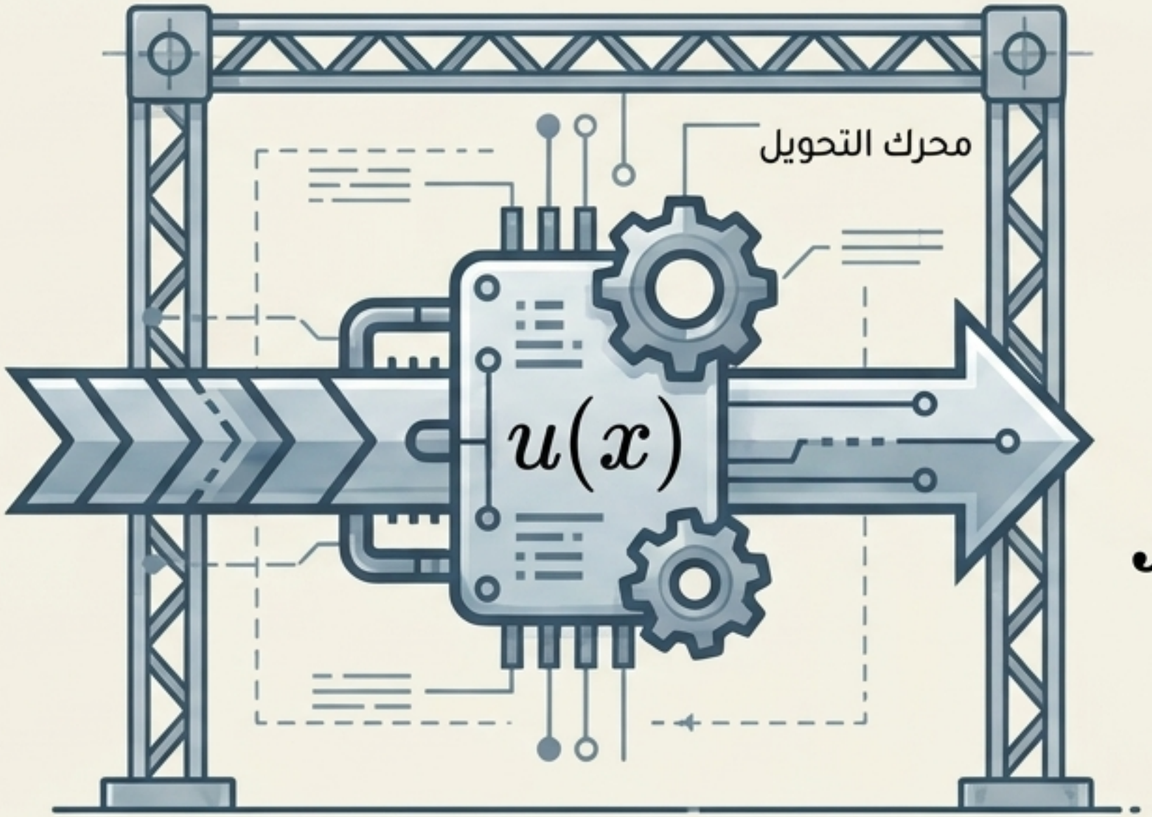
**الحل النهائي:**

$$-\int (2-u)\sqrt{u}\,du$$

NotebookLM

# تحول جذري: محرك التكاملات المحددة

$$\int_a^b f(x)dx$$




$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

**قاعدة حاسمة:** في اللحظة التي تغير فيها المتغير الأساسي إلى $u$، يجب عليك تغيير حدود التكامل بشكل دائم لتتطابق مع $u$.

NotebookLM

# الآلية المحددة: ترجمة الحدود المرجعية

## المتغيرات

$$\int_0^{15} te^{-t^2/2}dt$$

$$u = -\frac{t^2}{2}$$

$$du = -t\,dt$$

## ترجمة الحدود

Lower limit:

$$t = 0 \longrightarrow u = 0$$

Upper limit:

$$t = 15 \longrightarrow u = -225/2$$

## الهيكل الجديد

$$-\int_0^{-225/2} e^u du$$

$$-e^{-112.5} + 1$$

NotebookLM

# تباين مسارات العمل: غير المحدد مقابل المحدد

النتيجة التحليلية: تغيير الحدود في التكامل المحدد هو مسار رياضي أكثر كفاءة, حيث يوفر عليك عناء عكس عملية التعويض في النهاية.

## التكامل غير المحدد

1. Substitute u
2. Integrate f(u)du
3. Get result in terms of u

Restore x to finalise the equation.

## التكامل المحدد

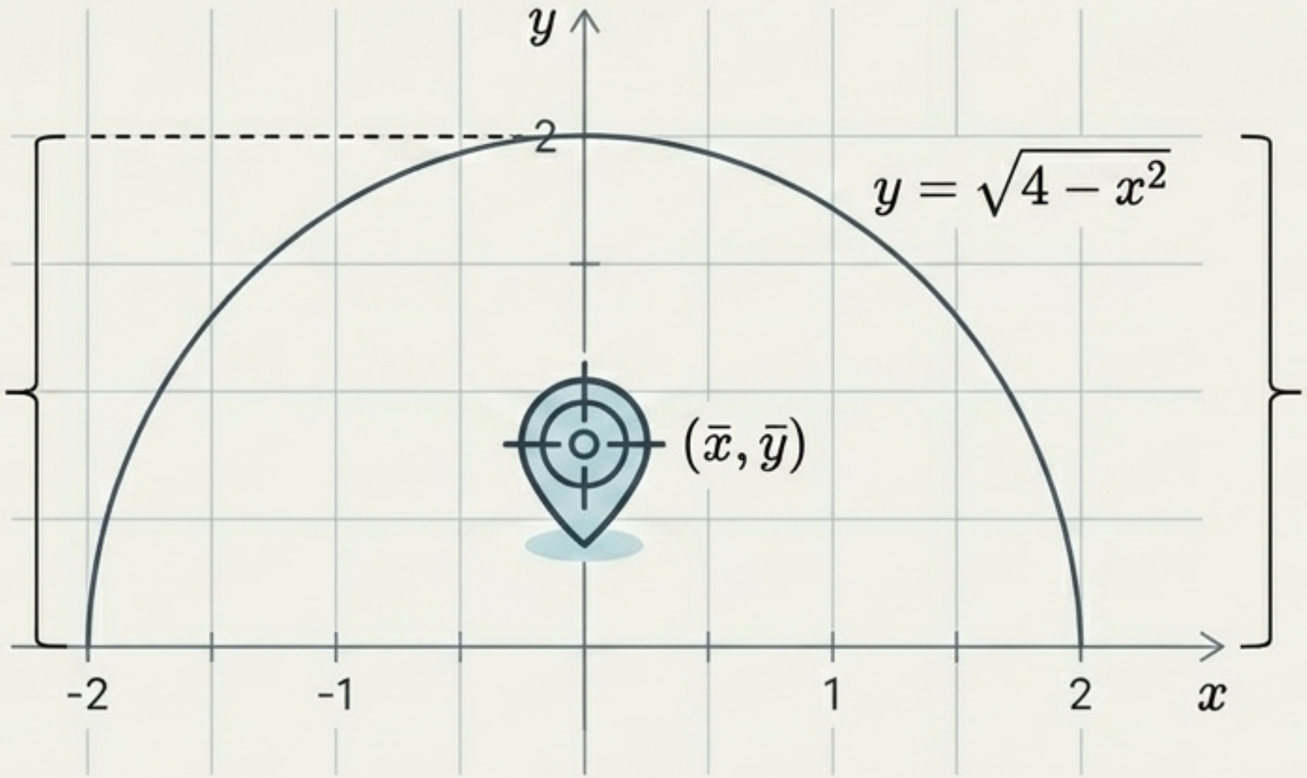
1. Substitute u & limits
2. Integrate f(u)du
3. Get result in terms of u & u-limits

يتم التقييم باستخدام حدود u الجديدة.
لا تنظر أبداً إلى الخلف لاسترجاع x.

NotebookLM

# التطبيق الهندسي: تحديد مركز الثقل الدقيق

التكامل بالتعويض ليس مجرد أحجية تجريدية؛ بل هو المفتاح الرياضي لحساب نقاط التوازن المادي الدقيقة للهياكل الهندسية المعقدة.




$$\bar{y} = \frac{\int f(x)^2 \, dx}{2 \int f(x) dx}$$

(يتطلب تكامل المقام استخدام تقنيات تعويض متقدمة لتحديد هذا التوازن).

NotebookLM

# ورقة المخطط المرجعية

أربعة مبادئ هندسية أساسية لضمان الدقة الكاملة في التكامل بالتعويض. تأكد من من اكتمال هذه القائمة قبل اعتماد أي معادلة نهائية.

1. حدد موقع الدالة الداخلية الأعمق لتكون $u$.
2. تأكد من أن المشتقة الدقيقة $du$ متواجدة بجوارها (قم بموازنة الثوابت إذا لزم الأمر).
3. للتكاملات المحددة، قم بقفل حدود $u$ الجديدة بشكل فوري ودائم.
4. قم بتفاضل إجابتك النهائية للتحقق من تطابقها التام مع التكامل الأصلي.

NotebookLM