Negação de Proposições
Tautologia, Contradição e Contingência
Implicação Lógica
Equivalência Lógica

Prof. Vladimir Píccolo Barcelos

Simbologia de Operadores

- Negação: ~ ¬ !
- Conjunção (and): ^ &&
- Disjunção (or): $\vee$ ||
- Disjunção exclusiva (xor): $\underline{\vee}$ $\oplus$
- Condicional (se): $\rightarrow$
- Bi-condicional (se e somente se): $\leftrightarrow$
- Implicação: $\Rightarrow$
- Equivalência: $\Leftrightarrow$

Construção de Tabelas-Verdade

- Uma coisa muito importante que deve ser dita neste momento é que, na hora de construirmos a *tabela-verdade* de uma proposição composta qualquer, teremos que seguir uma certa **ordem de precedência** dos conectivos. Ou seja, os nossos passos terão que obedecer a uma sequência. Começaremos sempre trabalhando com o que houver **dentro dos parênteses**. Só depois, passaremos ao que houver fora deles. Em ambos os casos, sempre obedecendo à seguinte ordem:

  1. **Faremos as negações (~);**
  2. **Faremos as conjunções ou disjunções, na ordem em que aparecerem;**
  3. **Faremos o condicional;**
  4. **Faremos o bicondicional.**

- **Exemplo:** *Para fixar nossos conhecimentos vamos construir a tabela-verdade da seguinte proposição composta:* ***P(p,q) = (p ∧ ~q) V (q ∧ ~p).***

Precedência dos Operadores Lógicos

Precedência	Descrição
1	Parênteses
2	NÃO (Negação)
3	E (Conjunção), OU (Disjunção)
4	Se ... Então (Condição), Se e somente se (Bicondição)

Exercício

Qual o resultado das seguintes expressões lógicas:

a) V e (V ou F)
b) V e não (V ou não F)
c) (F ou V) e não (F)

Exercício

Qual o resultado das seguintes expressões lógicas:

a) V e (V ou F): Temos somente os parênteses para resolver
V e V: Resolvido a disjunção do parênteses
V: Resolvido a conjunção (resultado final)
b) V e não (V ou não F): Temos parênteses e negação
V e não (V ou V): Resolvida a negação do parêntese
V e não V: Resolvida a disjunção dentro do parêntese
V e F: Resolvido a negação do resultado do parêntese
F: Resolvido a conjunção (resultado final)
c) (F ou V) e não (F): Temos parênteses e negação
V e não F: Resolvido o primeiro parêntese
V e V: Resolvido a negação do segundo parêntese
V: Resolvido a conjunção (resultado final)

Relembrando

- **Construa a tabela verdade da seguinte proposição P, composta por duas proposições simples quaisquer:**

$$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Relembrando

- **Construa a tabela verdade da seguinte proposição P, composta por duas proposições simples quaisquer:**

$$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

- **Vamos analisar: A proposição ‘P’ é composta por duas proposições simples ‘p’ e ‘q’.**
- **Neste contexto, não importa o conteúdo de cada proposição simples.**

Relembrando

$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

- **1º passo:** Montamos a tabela inicial com as TODAS combinações possíveis de valores lógicos que ‘p’ e ‘q’ podem assumir:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Relembrando

$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

- Verificamos que P é composto por dois parênteses disjuntos. Resolveremos um parêntese por vez.
- **2º passo** (resolver o primeiro parêntese): Precisamos saber o valor da negação de q (em cinza).

p	q	~q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Relembrando

$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

- **2º passo** (resolver o primeiro parêntese): Agora fazemos a conjunção de ‘p’ com ‘~q’ (em cinza)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Pronto, o primeiro parêntese foi resolvido. Sabemos os valores lógicos de **$(p \wedge \sim q)$.**

Relembrando

P(p,q) = (p∧~q)∨(q∧~p)

- **3º passo** (resolver o segundo parêntese): Precisamos saber os valores de '~p' (em cinza)

p	q	~q	p∧~q	~p
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Relembrando

$$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

- **3º passo** (resolver o segundo parêntese): Agora fazemos a conjunção de ‘q’ com ‘~p’ (em cinza)

p	q	~q	$p \wedge \sim q$	~p	$q \wedge \sim p$
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F

Pronto, o segundo parêntese foi resolvido. Sabemos os valores lógicos de **$(q \wedge \sim p)$.**

Relembrando

$$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

- **4º passo** (resolver a disjunção): Agora fazemos a disjunção do primeiro parêntese com o segundo

p	q	~q	$p \wedge \sim q$	~p	$q \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F

Relembrando

$$P(p,q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

p	q	~q	p∧~q	~p	q∧~p	(p∧~q)∨(q∧~p)
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F

PRONTO!

Negação de uma Proposição Conjuntiva

- Para negar uma proposição no formato de conjunção (**p e q**), faremos o seguinte:

  1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
  2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
  3. **Trocaremos e por ou.**

- **Exemplo:** Considere a seguinte frase:

"Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista",

Encontre uma outra frase que seja logicamente equivalente a frase acima.

Negação de uma Proposição Conjuntiva

- Para negar uma proposição no formato de conjunção (**p e q**), faremos o seguinte:

  1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
  2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
  3. **Trocaremos e por ou.**

- **Exemplo:** Considere a seguinte frase:

"Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista",

Encontre uma outra frase que seja logicamente equivalente a frase acima.

p = João é médico
q = Pedro é dentista

Não é verdade que João é médico **e** Pedro é dentista = **~**(p $\wedge$ q)

Negação de uma Proposição Conjuntiva

- Para negar uma proposição no formato de conjunção (**p e q**), faremos o seguinte:

  1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
  2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
  3. **Trocaremos e por ou.**

- **Exemplo:** *a questão dirá: "Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista", e pedirá que encontremos, entre as opções de resposta, aquela frase que seja logicamente equivalente a esta fornecida.*
  Solução:

  1. **Nega-se a primeira parte (~p) = João não é médico;**
  2. **Nega-se a segunda parte (~q) = Pedro não é dentista;**
  3. **Troca-se E por OU, e o resultado final será o seguinte:**

JOÃO NÃO É MÉDICO OU PEDRO NÃO É DENTISTA.

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Negação de uma Proposição Conjuntiva

$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

p	**q**	**~p**	**~q**	**p∧q**	**~(p∧q)**	**~p ∨ ~q**

Negação de uma Proposição Conjuntiva

~(p ∧ q) = ~p V ~q

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p V ~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:

- Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Não é verdade que João é médico e Pedro é dentista **=** João não é médico ou Pedro não é dentista

$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
F	F
V	V
V	V
V	V

Negação de uma Proposição Disjuntiva

- Para negar uma proposição no formato de disjunção (**p ou q**), faremos o seguinte:

  1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
  2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
  3. **Trocaremos ou por e.**

- **Exemplo:** Considere a seguinte frase:

“***Não é verdade que*** *João é médico* ***ou*** *Pedro é dentista*”

Encontre uma outra frase que seja logicamente equivalente a frase acima.

p = João é médico
q = Pedro é dentista

Não é verdade que João é médico **ou** Pedro é dentista = **~**$(p \vee q)$

Negação de uma Proposição Disjuntiva

- Para negar uma proposição no formato de disjunção (**p ou q**), faremos o seguinte:

    1. **Negaremos a primeira parte (~p);**
    2. **Negaremos a segunda parte (~q);**
    3. **Trocaremos ou por e.**

- **Exemplo:** *a questão dirá: "**Não é verdade que** João é médico **ou** Pedro é dentista", e pedirá que encontremos, entre as opções de resposta, aquela frase que seja logicamente equivalente a esta fornecida.*

    Sol:

    1. **Nega-se a primeira parte (~p) = João não é médico;**
    2. **Nega-se a segunda parte (~q) = Pedro não é dentista;**
    3. **Troca-se OU por E, e o resultado final será o seguinte:**

JOÃO NÃO É MÉDICO E PEDRO NÃO É DENTISTA.

Negação de uma Proposição Disjuntiva

- Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

- **Como fomos chegar à essa conclusão?**

$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
F	F
F	F
F	F
V	V

Negação de uma Proposição Condicional

- Para negar uma proposição no formato condicional (**p → q**), faremos o seguinte:

  1. **Mantém-se a primeira parte (p); E**
  2. **Nega-se a segunda parte (~q).**

- **Exemplo:** *Como fica a negativa de "se chover então levarei o guarda-chuva".*
  Sol:
  1. **Mantém-se a primeira parte (p) = Chove;**
  2. **Nega-se a segunda parte (~q) = Não levo o guarda-chuva;**

CHOVE E NÃO LEVO O GUARDA-CHUVA.

Negação de uma Proposição Condicional

- *Traduzindo para a linguagem da lógica, dizemos que:*

$$\sim(p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$$

Recapitulando

Estrutura Lógica	*É verdade quando*	*É falso quando*
p $\wedge$ **q**	**p** e **q** são, ambos, verdade	um dos dois for falso
p V q	um dos dois for verdade	**p** e **q**, ambos, são falsos
p → q	Nos demais casos	**p** é verdade e **q** é falso
p↔q	**p** e **q** tiverem valores lógicos iguais	**p** e **q** tiverem valores lógicos diferentes
~p	**p** é falso	**p** é verdade

Recapitulando

Negativa de (p e q)	**~p ou ~q**
Negativa de (p ou q)	**~p e ~q**
Negativa de (p → q)	**p e ~q**
Negativa de (p↔q)	**[(p e ~q) ou (q e ~p)]**

Tautologia

- Uma proposição composta por duas ou mais proposições simples (p, q, r, ...) será dita uma Tautologia se ela for sempre verdadeira.

- **Vejamos o Exemplo:**

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

Tautologia

- Uma proposição composta por duas ou mais proposições simples (p, q, r, ...) será dita uma **Tautologia** se ela for **sempre verdadeira**.

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

Tautologia

- Uma proposição composta por duas ou mais proposições simples (p, q, r, ...) será dita uma **Tautologia** se ela for **sempre verdadeira**.

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Contradição

- Uma proposição composta por duas ou mais proposições simples (p, q, r, ...) será dita uma **Contradição** se ela for **sempre falsa**.

Exemplo: $\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	$\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$
V	V	V	V	V	
V	F	F	V	V	
F	V	F	V	V	
F	F	F	F	V	

Contradição

- Uma proposição composta por duas ou mais proposições simples (p, q, r, ...) será dita uma **Contradição** se ela for **sempre falsa**.

Exemplo: $\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	$\sim((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F

Contingência

- Uma proposição composta que **não é uma Tautologia e nem uma Contradição** é uma Contingência.

Exemplo: $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Exercícios

- Monte a tabela-verdade e classifique as seguintes proposições abaixo como Tautologia, Contradição ou Contingência.

a) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$
b) $p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$
c) $\sim p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow q)$
d) $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$

Implicação Lógica

- Sejam duas proposições compostas **P** e **Q**:
  - A proposição **P** implica a proposição **Q**, quando a condicional **P** $\rightarrow$ **Q** for uma **Tautologia**.
  - O símbolo P $\Rightarrow$ Q (**P implica Q**) representa a implicação lógica.
- **ATENÇÃO:**
  - Símbolo $\rightarrow$ representa a operação de condicional entre as proposições **P** e **Q**, com valor lógico **V** ou **F**.
  - Símbolo $\Rightarrow$ representa a não ocorrência de **Falsidade** na tabela-verdade de **P** $\rightarrow$ **Q**, ou ainda que o valor lógico da condicional **P** $\rightarrow$ **Q** será sempre **V**, ou então que **P** $\rightarrow$ **Q** é uma tautologia.

Implicação Lógica

- Considere:
  - $P = p \wedge q$
  - $Q = p \leftrightarrow q$

- Prove que $P \Rightarrow Q$ (P implica em Q)

Implicação Lógica

- Considere:
  - $P = p \land q$
  - $Q = p \leftrightarrow q$

- Prove que $P \Rightarrow Q$ (P implica em Q)

- **Solução:** Para provar que $P \Rightarrow Q$ (P implica em Q), devemos verificar se $P \rightarrow Q$ (P então Q) é uma tautologia.

  $P \rightarrow Q$ é o mesmo que $(p \land q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Implicação Lógica

- Tabela Verdade:

		P	Q	P Q
p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Implicação Lógica

- Tabela Verdade:

		P	Q	P → Q
p	q	p ∧ q	p ↔ q	(p ∧ q) → (p ↔ q)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

(p ∧ q) → (p ↔ q) é uma tautologia, por isso

(p ∧ q) ⇒ (p ↔ q)

Equivalência Lógica

- Duas expressões lógicas P e Q são equivalentes se **possuem os mesmos valores verdade.**
  - O símbolo $P \Leftrightarrow Q$ (**P equivale a Q**) representa a equivalência lógica.
  - $P \Leftrightarrow Q$ se e somente se $P \leftrightarrow Q$ é uma **Tautologia**.
- **ATENÇÃO:**
  - Símbolo $\leftrightarrow$ representa a operação de condição dupla entre as proposições **P** e **Q**, com valor lógico **V** ou **F**.
  - Símbolo $\Leftrightarrow$ representa a não ocorrência de **Falsidade** na tabela-verdade de **P** $\leftrightarrow$ **Q**, ou ainda que o valor lógico da condicional **P** $\leftrightarrow$ **Q** será sempre **V**, ou então que **P** $\leftrightarrow$ **Q** é uma tautologia.

Equivalência Lógica

- Considere:
  - $P = p \rightarrow q$
  - $Q = \sim q \rightarrow \sim p$

- Prove que $P \Leftrightarrow Q$ (P é equivalente em Q)

Equivalência Lógica

- Considere:
  - $P = p \rightarrow q$
  - $Q = \sim q \rightarrow \sim p$

- Prove que $P \Leftrightarrow Q$ (P é equivalente em Q)

- **Solução:** Para provar que $P \Leftrightarrow Q$ (P é equivalente em Q), devemos verificar se $P \leftrightarrow Q$ (P se e somente se Q) é uma Tautologia.

  $P \leftrightarrow Q$ é o mesmo que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Equivalência Lógica

- Tabela Verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Equivalência Lógica

- Tabela Verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Equivalência Lógica

- Tabela Verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ é uma tautologia, por isso $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

O que vimos até agora

- Conceitos básicos de lógica das proposições
- Operadores lógicos:
  - Negação
  - Conjunção
  - Disjunção
  - Disjunção Exclusiva
  - Condicional
  - Bicondicional
- Construção de tabelas-verdade
- Tautologia, Contradição, Contingência
- Implicação e Equivalência Lógica

Exercícios
Implicação Lógica

- Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de **implicação lógica** seguintes:

1. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
2. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$
3. $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$
4. $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

Exercícios
Implicação Lógica

- Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de **implicação lógica** seguintes:

1. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$ (existe)
2. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$ (existe)
3. $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$ (não existe)
4. $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ (existe)

Exercícios Equivalência Lógica

- Demonstre, utilizando tabelas-verdade, as seguintes **relações de equivalência**:

1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
2. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
3. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow p \vee r$
4. $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

Exercícios
Equivalência Lógica

- Demonstre, utilizando tabelas-verdade, as seguintes **relações de equivalência**:

1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ *(equivalentes)*
2. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ *(equivalentes)*
3. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow p \vee r$ *(não equivalentes)*
4. $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ *(equivalentes)*

Perguntas???