

Classical Electrodynamics I

古典電磁気学 I

物理学科 専門基礎科目 (必修)

学士課程 KIM Dohyun

担当教員 大野木 哲也

令和 5 年 2 月 15 日

目次

第 I 部	真空での静電気学と静磁気学	ii
第 1 章	最終レポート	1
1.1	ベクトル解析学	1
1.2	静電場とグリーン関数	4
1.3	静磁場とクーロンゲージ	7
1.4	回路理論	15
1.5	電磁気波とゲージ不変性	19

第I部

真空での静電気学と静磁気学

第 1 章

最終レポート

このレポートにおける表記法と記号 このレポートでは、共役と反転を区分して表す.

$$\text{ベクトル: } \mathbf{A} \mapsto A^\mu = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{発散: } \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_\mu A^\mu$$

$$\text{回転: } \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon^{\mu\nu\delta} \partial_\mu A_\nu$$

1.1 ベクトル解析学

問 1-(a1) スカラー倍の勾配は、次のように計算できる:

$$\mathbf{V} \equiv \nabla \varphi = \partial_\mu \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_1x + 2b_2z + 2b_3y \\ 2a_2y + 2b_1z + 2b_3x \\ 2a_3z + 2b_1y + 2b_2x \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

問 1-(a2) 特に、式 (1.1.1) の勾配ベクトルの回転は次のように計算できる:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \epsilon^{\mu\nu\delta} \partial_\mu (\partial_\nu \varphi) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\delta} (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \varphi = 0. \quad (1.1.2)$$

よって、ベクトル場 \mathbf{V} の回転で定義されるベクトル場 \mathbf{W} は:

$$\mathbf{W} \equiv \nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

となる.

問 1-(a3) 線積分を行う 2 つの経路 C_1 および C_2 はそれぞれ座標系上で次のように書ける.

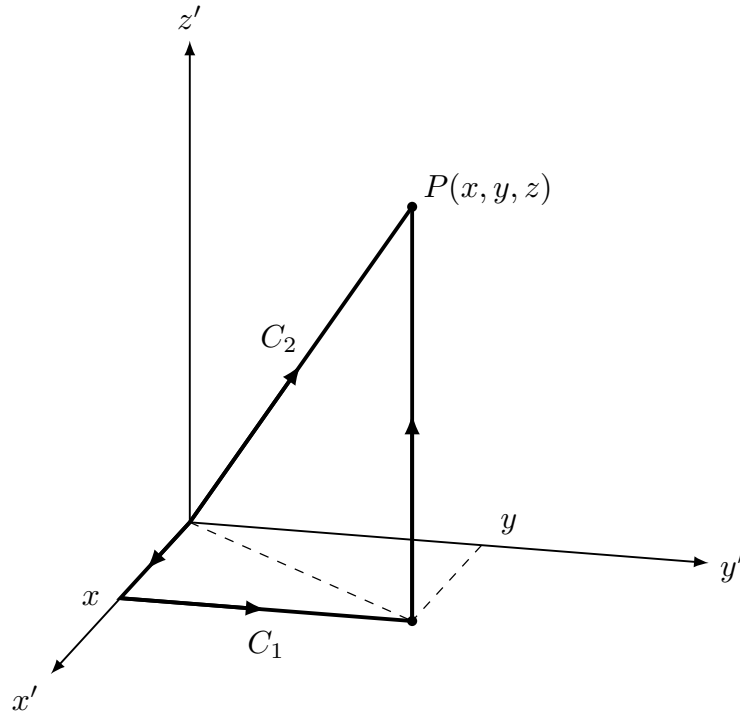


図 1.1 場の定義: 点電荷系

この 2 つの経路に関して, 以前の式 (1.1.1) で求めたようにベクトル場:

$$\mathbf{V} \equiv \begin{pmatrix} V^1(x', y', z') \\ V^2(x', y', z') \\ V^3(x', y', z') \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_1x' + 2b_2z' + 2b_3y' \\ 2a_2y' + 2b_1z' + 2b_3x' \\ 2a_3z' + 2b_1y' + 2b_2x' \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

より, 経路 C_1 に関する線積分 I_1 は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_0^x dx' V^1(x', 0, 0) + \int_0^y dy' V^2(x, y', 0) + \int_0^z dz' V^3(x, y, z') \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^x 2a_1x' dx' + \int_0^y (2a_2y' + 2b_3x) dy' + \int_0^z (2a_3z' + 2b_1y + 2b_2x) dz' \right) \\ &= \frac{1}{2} (a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

かつ, 経路 C_2 に対しても同様にできる. そのため, 経路 C_2 の上での媒介変数 s を次のように導入する:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.1.6)$$

媒介変数 (1.1.6) により, 線積分 I_2 も同様に計算できる:

$$\begin{aligned}
 I_2 &\equiv \int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_0^1 ds \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(s)) \\
 &= \int_0^1 ds \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V^1(sx, sy, sz) \\ V^2(sx, sy, sz) \\ V^3(sx, sy, sz) \end{pmatrix} \\
 &= (a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy) \int_0^1 s \, ds \\
 &= \frac{1}{2}(a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy) \tag{1.1.7}
 \end{aligned}$$

よって, 線積分 (1.1.5) および (1.1.7) の結果により次のことを確かめられる.

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0, \quad \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z) - \varphi(0, 0, 0) \tag{1.1.8}$$

このことから, 勾配の基本定理を確かめられる.

$$\text{勾配の基本定理: } \int_{C(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_f)} d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi = \varphi(\mathbf{r}_f) - \varphi(\mathbf{r}_i) \tag{1.1.9}$$

この勾配の基本定理 (1.1.9) は次のように, あるスカラー関数 $\varphi(r^\mu)$ の全微分を用いて簡約に示される:

$$d\varphi(r^\mu) = (\partial_\mu \varphi) dr^\mu = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \varphi \tag{1.1.10}$$

この式 (1.1.10) の両辺を積分すると, 勾配の基本定理が得られる:

$$\int d\varphi(r^\mu) = \int (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \varphi \tag{1.1.11}$$

これは, 勾配の基本定理を意味する.

1.2 静電場とグリーン関数

問題 2-(a1) 次のようなポアソン方程式から出発する:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\mu_0 c^2 \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2.1)$$

このような方程式 (1.2.1) はゲージ不変性から得られた Maxwell 方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ から簡単に分かる (節 1.5 参照). これの一般解は, グリーン関数:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2.2)$$

により次のように書くことができる.

$$\phi(\mathbf{r}) = \mu_0 c^2 \int_V G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (1.2.3)$$

このグリーン関数 (1.2.2) は, その一般解として次式のように与えられることが (1.3.34) から分かった.

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.4)$$

より, 式 (1.2.3) および (1.2.4) により, 静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は体積積分:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (1.2.5)$$

として与えられる. 問題で与えられたように, 球の中心を原点として取って計算すれば次のような系のポテンシャルを得られる.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \int_V \frac{\rho_0}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} (r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi') \\ &= \frac{\mu_0 c^2 \rho_0}{2} \int_0^a \left(\int_0^\pi \frac{r'^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} d\theta' \right) dr' \\ &= \frac{\mu_0 c^2 \rho_0}{2} \int_0^a \left[\frac{r' \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}{r} \right]_0^\pi dr' \\ &= \frac{\mu_0 c^2 \rho_0}{2r} \int_0^a r' (|r + r'| - |r - r'|) dr' \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

この積分 (1.2.6) を領域 $r < a$ と $r > a$ で, 領域ごとで分けて計算すれば簡単にまとめられる.

つまり,

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 c^2 \rho_0 a^3}{3r}, & (r > a) \\ \frac{\mu_0 c^2 \rho_0}{2} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right), & (r < a) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

のように静電ポテンシャルを得られる．かつ，この式 (1.2.7) の勾配を取ることで電場を求められる (式 (1.5.31)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv -\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\mu_0 c^2 \rho_0 a^3}{3r^3} \right) \mathbf{r}, & (r > a) \\ \left(\frac{\mu_0 c^2 \rho_0}{3} \right) \mathbf{r}, & (r < a) \end{cases} \quad (1.2.9)$$

ここで，一様な電荷密度:

$$\left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \rho_0 \equiv Q \quad (1.2.10)$$

を用いて更に，次のようにも書ける:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(\frac{\mu_0 c^2 Q}{4\pi r^3} \right) \mathbf{r}, & (r > a) \\ \left(\frac{\mu_0 c^2 Q}{4\pi a^3} \right) \mathbf{r}, & (r < a) \end{cases} \quad (1.2.11)$$

問題 2-(a2) 系のエネルギーは，次のように求められる:

$$U_e \equiv \frac{1}{2} \int_V \rho \phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.2.12)$$

ここで，電場に関するガウスの法則:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0 c^2 \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2.13)$$

から，積分 (1.2.12) はさらにに計算できる:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \phi d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c^2} \left(\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\phi \mathbf{E}) d^2\mathbf{r} - \int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla) \phi d^3\mathbf{r} \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

よって、積分 (1.2.14) でのエネルギー U_e を局所的エネルギーではなく、全空間 $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ のエネルギーだとすることで:

$$U_e = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2\mu_0 c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) d^3 \mathbf{r} \quad (1.2.15)$$

で積分が変わる. ここで、電気エネルギー密度 u_e を次のように定義することができる.

$$u_e \equiv \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \quad (1.2.16)$$

ここで、新しい物理定数として ϵ_0 を光速 c と導かれた Maxwell 方程式で導入した定数 μ_0 を用いて次のように定義することにする.

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad (1.2.17)$$

このことから、系の電気エネルギー密度は次のように計算される:

$$u_e = \begin{cases} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, & (r > a) \\ \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^6} r^2, & (r < a) \end{cases} \quad (1.2.18)$$

問題 2-(a3) 式 (1.2.18) のように与えられた電気エネルギー密度を全空間 $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ で積分することで簡単に求められる:

$$U_e = \int_{\mathcal{V}_{\text{in}}} u_{r < a} d^3 \mathbf{r} + \int_{\mathcal{V}_{\text{out}}} u_{r > a} d^3 \mathbf{r} \quad (1.2.19)$$

$$= \int_0^a \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 a^6} r^4 dr + \int_a^\infty \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{3Q^2}{20\pi \epsilon_0 a} \quad (1.2.20)$$

(次のページに続く)

1.3 静磁場とクーロンゲージ

問題 3-(a1) 次のような、一般の電荷密度によるビオ・サバル (Biot-Svart) の法則から出発すれば良い。

$$\text{ビオ・サバルの法則: } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.1)$$

先ずは、式 (1.3.1) から、良く知られている静磁場におけるアンペール (Ampere) の法則を等価的に導かれる:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' \right) \quad (1.3.2)$$

ここでは、次のようなスカラー関数の勾配を用いた。

$$\nabla_{\mathbf{r}}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}; \quad \nabla_{\mathbf{r}}' = -\nabla_{\mathbf{r}} \quad (1.3.3)$$

かつ、次のベクトル微積分学における演算を用いると、式 (1.3.2) をより簡単に計算できる。

$$\begin{aligned} \nabla \times (\alpha \mathbf{W}) &= \epsilon^{\mu\nu\delta} \partial_\mu (\alpha W_\nu) = \epsilon^{\mu\nu\delta} W_\nu \partial_\mu \alpha + \epsilon^{\mu\nu\delta} \alpha \partial_\mu W_\nu \\ &= \epsilon^{\mu\nu\delta} \alpha \partial_\mu W_\nu - \epsilon^{\nu\mu\delta} W_\nu \partial_\mu \alpha \\ &= \alpha (\nabla \times \mathbf{W}) - (\mathbf{W} \times \nabla) \alpha \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

ベクトル演算 (1.3.4) を用いると、式 (1.3.2) の計算は:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right) \right] \quad (1.3.5)$$

と書ける。さらに、式 (1.3.5) にベクトル微積分学における二重回転演算子の関係式:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) &= \epsilon^{\mu\nu\delta} \partial_\mu (\epsilon_{\alpha\beta\nu} \partial^\alpha W^\beta) = -\epsilon^{\mu\delta\nu} \epsilon_{\alpha\beta\nu} \partial_\mu (\partial^\alpha W^\beta) \\ &= (\delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\mu - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\delta) \partial^\alpha (\partial_\mu W^\beta) \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla^2 \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

を用いると、次式により簡単に書ける。

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] = \nabla_{\mathbf{r}} \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.3.7)$$

ここで、式 (1.3.7) の第1項は:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] = \nabla_{\mathbf{r}} \left[(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right], \quad (1.3.8)$$

および、発散の性質により、

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.3.9)$$

かつ、第2項は3次元の Dirac-delta 関数により:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (1.3.10)$$

のように書けることを分かる。より、前で求めた磁場の回転 (1.3.5) および (1.3.7) にベクトル微積分学における関係式 (1.3.8) から (1.3.10) を代入すれば次のように簡単に整理できる。

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\oint_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}' - \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right) + \mu_0 \int_{\mathcal{V}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\oint_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2\mathbf{r}' - \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right) + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

ここで、空間全体の磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を求めるため、積分 (1.3.11) を全空間 $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ の積分に変える:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.12)$$

今は静磁気学を論議しているため、 $\partial\rho/\partial t = 0$ のなるような定常電流 (Steady current) を考えてもよい:

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \quad (1.3.13)$$

以上のことにより、磁場の回転 (1.3.12) および局所的電荷量保存則 (1.3.13) から、次のアンペール法則を得られる。

$$\text{アンペール法則:} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.14)$$

このアンペール法則 (1.3.14) から $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ となるため、電流密度のある場合に限っては、静磁場におけるベクトルポテンシャルを導入し $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ のように書ける:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.15)$$

さらに、ベクトル微積分学における関係式 (1.3.7) を用いると、より簡単に次のように書ける。

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.16)$$

微分方程式 (1.3.16) を解くため、静磁場 (および静電場) における Maxwell 方程式:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.17)$$

を考慮して、次のゲージ変換を考える.

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \lambda, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \right) \quad (1.3.18)$$

かつ、このときの静電ポテンシャルは:

$$\varphi'(\mathbf{r}) \mapsto \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.3.19)$$

とすればよい. 式 (1.3.18) のようにゲージ変換を考えれば、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ の上でも磁場は変わらないことが分かる:

$$\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \times (\nabla \lambda) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.3.20)$$

よって、この $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ を系のベクトルポテンシャルとして取っても良い. 特に、式 (1.3.16) では磁場の時間変化はないため、次のようにゲージ λ_c をとっても問題がない. このようなゲージをクーロンゲージ (Coulomb Gauge) と呼ぶ:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla^2 \lambda_c = 0. \quad (1.3.21)$$

アンペール法則 (1.3.16) でクーロンゲージをとれば、次のポテンシャルの方程式を得られる.

$$\nabla^2 \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.3.22)$$

今後は、この計算の利便性のため、このクーロンゲージによるポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ を系のポテンシャルとして認めるので、ただの区別なしの $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ として書くことにする.

グリーン関数

今からは、式 (1.3.22) の一般解 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を求めるため、次のグリーン関数を先に考える:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.3.23)$$

ここでは、グリーン関数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ を求めるため、左辺および右辺に対する、次のようなフーリエ変換を考える:

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{V}(k)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3\mathbf{k} \quad (1.3.24)$$

および,

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \int_{\mathcal{V}(k)} G_k(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3\mathbf{k} \quad (1.3.25)$$

より、式 (1.3.24) および (1.3.25) をグリーン方程式に加えるだけで $G_k(\mathbf{k})$ が簡単に分かる.

$$G_k(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2}, \quad (k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \quad (1.3.26)$$

以上のことから求めた関数 (1.3.26) をグリーン関数のフーリエ展開 (1.3.25) に代入することで、グリーン関数 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ を求められる。

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \int_{\mathcal{V}(k)} \left[-\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} \right] d^3\mathbf{k} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta}}{k^2} (k^2 \sin \theta \, d\theta dk) \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_0^\pi dk \tag{1.3.27}
 \end{aligned}$$

特に、積分 (1.3.27) をより簡単に計算するため、次のような置換積分を行う：

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_0^\pi dk &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dk \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{ik} dk \tag{1.3.28}
 \end{aligned}$$

ここで、広義積分 (1.3.28) を計算するため、次のような複素数 $z \in \mathbf{C}$ の複素平面上の次の経路 (図 1.2) に沿った複素線積分 I を考える：

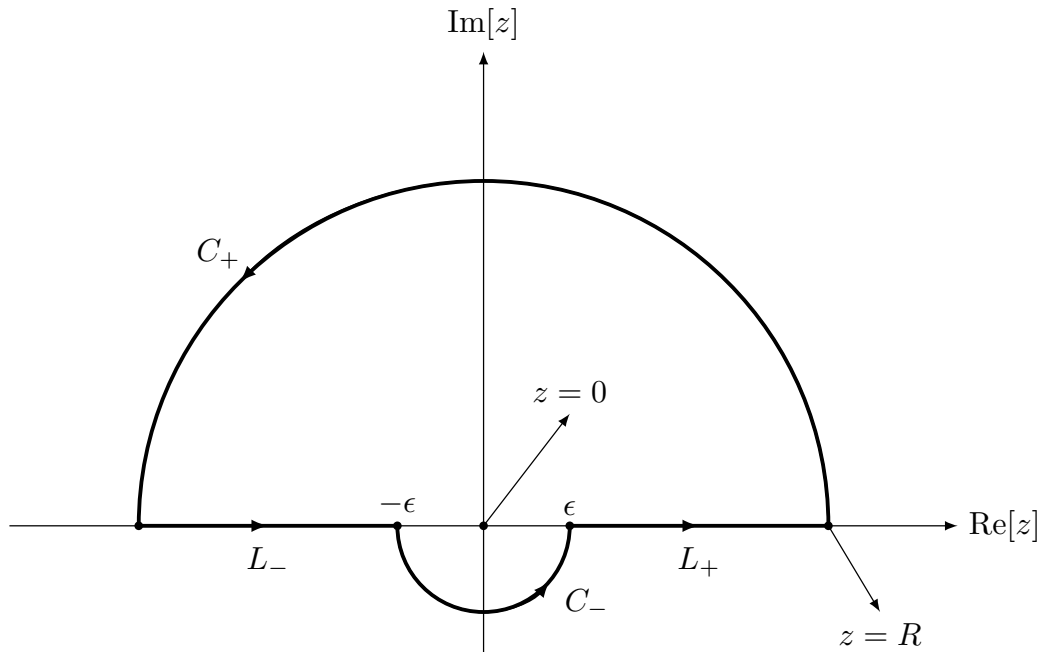


図 1.2 複素線積分の経路

$$I = \oint \frac{e^{iz|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{z} dz = 2\pi i, \quad (z \in \mathbf{C}) \tag{1.3.29}$$

より、コーシー積分 (1.3.29) の結果から、線積分を次のようにも書ける:

$$2\pi i = \int_{C_+} \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z} dz + \int_{C_-} \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z} dz + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{k} dk + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{k} dk \quad (1.3.30)$$

また、ここで $R \rightarrow \infty$ および $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取り、それぞれの線積分を計算すれば:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_+} \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \cos \theta} e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \sin \theta}}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[i e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \sin \theta} e^{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \cos \theta} \right] d\theta = 0 \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

かつ、同様に経路 C_- 対しても:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_-} \frac{e^{iz|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{z} dz &= \int_\pi^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[i e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \sin \theta} e^{i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|R \cos \theta} \right] d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi} i d\theta = \pi i \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

を得る. より、コーシー積分の結果 (1.3.30) に極限 $R \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ を取り、経路 C_+ , C_- に沿った線積分 (1.3.31) および (1.3.32) を用いると、次のような結果を得る:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{k} dk = \pi i, \quad (k \in \mathbf{R}) \quad (1.3.33)$$

この計算結果 (1.3.33) を用いると、式 (1.3.28) により、グリーン関数が次のように与えられることが分かる.

$$\text{グリーン関数: } G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.3.34)$$

こうすると、静磁場におけるポテンシャル方程式 (1.3.22) の一般解の次のように与えられることが分かる:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_V G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1.3.35)$$

これは、実験的結果としてビオ・サバル法則のみを認めて等価的に導かれたものである.

(次のページに続く)

問題 3-(a2) 次のように C_1 , C_2 に対して次のように座標を取る (図 1.4). 計算のため, C_1 および C_2 の半径を共に a , 中心間の距離として r_0 と設定する.

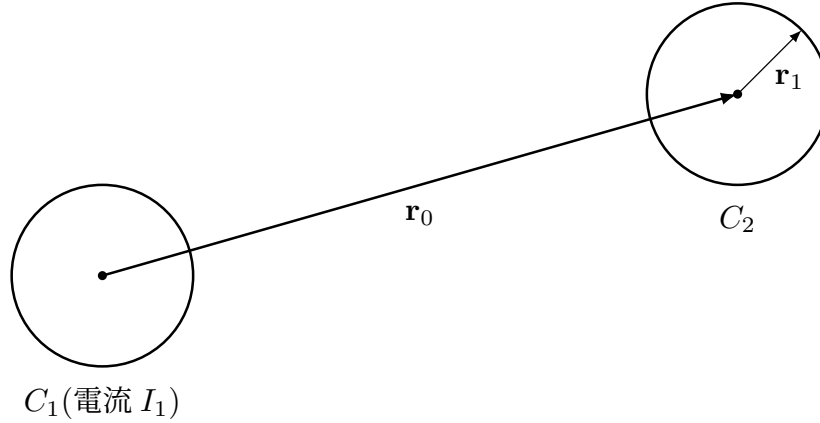


図 1.3 系の座標設定

ここで, Stoke's 定理を用いると C_1 が及ぼす磁場 \mathbf{B}_1 に対して, C_2 を通過する磁束 Φ_{21} は次のように計算できる:

$$\Phi_{21} = \int_{S(C_2)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \int_{S(C_2)} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) d^2\mathbf{r} = \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.3.36)$$

ここで, ベクトルポテンシャルとして前の問題で求めた式 (1.3.35) を用いると磁束 (1.3.36) は次のように書ける.

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.3.37)$$

この磁束の関係式 (1.3.37) は任意の電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ および任意の経路 C_2 に対しても一般に成り立つ. 磁束 Φ_{21} は電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ および経路 C_2 の様子により決まる. ここからは, 問題で与えられた電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ と経路 C_2 の用いて, 式 (1.3.37) に基づいて磁束 Φ_{21} を計算する.

ベクトルポテンシャル計算

そのため, 先ずはこの系のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を計算してみる. 先ず, ここからは対称性により円筒座標系を取る. Dirac-delta 関数を用いて, この系の電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ を円筒座標系上で次のように書ける:

$$\text{電流密度: } \mathbf{J}(\mathbf{r}) = I_1 \delta(r - a) \delta(z) \hat{\varphi} \quad (1.3.38)$$

電流密度 (1.3.38) を用いると, ベクトルポテンシャルに関するアンペール法則は次のように与えられる.

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 I_1 \delta(r - a) \delta(z) \hat{\varphi} \quad (1.3.39)$$

ここからは、アンペール法則 (1.3.39) および電流分布の対称性により、ベクトルポテンシャルを次のような形で仮定することができる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\varphi(r, z) \hat{\varphi}; \quad \hat{\varphi} = (-\sin \theta) \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}} \quad (1.3.40)$$

ならば、アンペール法則 (1.3.39) に前の問題で得られたベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の一般解 (1.3.35) を加えるだけで、この系のベクトルポテンシャルを次のように求められる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r})|_{z=0} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{I_1 \delta(r-a) \delta(z)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \cos \theta' (r' dr' d\theta' dz') \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{a \cos \theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} d\theta \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

式 (1.3.41) は第1種楕円積分および第2種楕円積分の形なので、一般にはこの積分を表せない。より、 $r \gg a$ の遠方近似を考える。この積分はルジャンドル多項式 $P_l(\cos \theta)$ により：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A}_\varphi(\mathbf{r})|_{z=0} &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{a \cos \theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint a \cos \theta \left[\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l P_l(\cos \theta) \right] d\theta \\ &\simeq \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{a \cos \theta}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right) \cos \theta \right] d\theta \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

ここで、三角関数の直交性により、 $r \gg a$ の遠方での近似式 (1.3.42) は次のように計算される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4r^2} \hat{\varphi}, \quad (r \gg a) \quad (1.3.43)$$

ここまで求めた、ベクトルポテンシャル (1.3.43) を用いて、式 (1.3.37) で示すように与えられた経路 C_2 に沿って線積分することで、求める磁束 Φ_{21} を求められる。そのため、媒介変数としてのなす角 α により、次のような $\mathbf{r}(\alpha)$ を導入する：

$$\mathbf{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} = \begin{pmatrix} -a \sin \alpha \\ a \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.3.44)$$

より、求める磁束 Φ_{21} は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \oint_{C_2} d\alpha \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(\alpha)) = \frac{\mu_0 I_1 a^3}{4} \oint \frac{r_0 \cos \alpha + a}{(r_0^2 + a^2 + 2ar_0 \cos \alpha)^{3/2}} d\alpha \\ &\simeq \frac{\mu_0 I_1 a^3}{4} \oint \frac{r_0 \cos \alpha + a}{r_0^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r_0} \right) \left(\frac{a}{r_0} + 2 \cos \alpha \right) \right] d\alpha \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

ここでの積分 (1.3.45) もベクトルポテンシャルと同様に遠方近似 $r_0 \gg a$ を取れる:

$$\Phi_{21} \simeq \frac{\mu_0 \pi I_1 a^4}{2r_0^3}, \quad \left(\frac{a^4}{r_0^4} \simeq 0 \right) \quad (1.3.46)$$

これが求める磁束と言える.

問題 3-(a3) 相互インダクタンス L_{12} の定義により, $d\Phi_{12} = L_{12} dI_1$ の関係から:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi a^5}{2r_0^4} \quad (1.3.47)$$

となることが分かる. かつ, 回路 C_2 が発生する電流 I_1 が及ぼす磁束変化に応じる回路 C_2 自身への電磁気誘導は起こらない ($L_1 = 0$). 一方で, 電流 I_1 を用いて, 式 (1.3.37) の磁束関係式を書き直せば:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.3.48)$$

あるいは,

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.3.49)$$

のようにも書ける. よって, 式 (1.3.48) および (1.3.49) で示すように, 内積と重積分の演算の可換性から $L_{12} = L_{21}$ を自明に分かる.

(次のようページに続く)

1.4 回路理論

問題 3-(b1) キルヒホッフ法則により，回路方程式は次のような微分方程式として書ける：

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t) \quad (1.4.1)$$

これが，ある $V(t)$ の起電力に応じる応答関数 $I(t)$ の微分方程式である．このように与えられた方程式 (1.4.1) の起電力 $V(t)$ に関する一般解を求めるため，式 (1.3.23) のようなグリーン関数 $G(t; t')$ をここでも考慮する．このグリーン方程式は：

$$\left[L \frac{d}{dt} + R \right] G(t; t') = \delta(t - t') \quad (1.4.2)$$

のように書ける．ならば，この非同次微分方程式 (1.4.1) の一般解は (1.3.35) のように：

$$I(t) = \int G(t; t') V(t') dt' \quad (1.4.3)$$

と計算されることが簡単に分かる（代入してみれば分かる）．より，以前と同様にフーリエ変換を次のように定めてグリーン関数を求める．

グリーン関数

1次元の Dirac-delta 関数 $\delta(t - t')$ ，グリーン関数 $G(t; t')$ は次のようにフーリエ展開できる．

$$\delta(t - t') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|t-t'|} dk \quad (1.4.4)$$

および，

$$G(t; t') = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(k) e^{ik|t-t'|} dk \quad (1.4.5)$$

より，(1.4.4) および (1.4.5) をグリーン方程式で代入するだけで $G_k(k)$ が簡単に分かる．

$$t > t' : \quad G_k(k) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{ikL + R} \right), \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1.4.6)$$

$$t < t' : \quad G_k(k) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{-ikL + R} \right), \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (1.4.7)$$

式 (1.4.7) から得られた $G_k(k)$ を用いて，グリーン関数 $G(t; t')$ のフーリエ展開 (1.4.5) は逆に次のように計算できる：

$$G(t; t') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|t-t'|}}{\pm ikL + R} dk \quad (1.4.8)$$

積分 (1.4.8) 計算するため，(1.3.29) のようにある経路に沿った複素線積分を考える．

よって、積分 (1.4.8) を計算するため、次の経路積分を想定する:

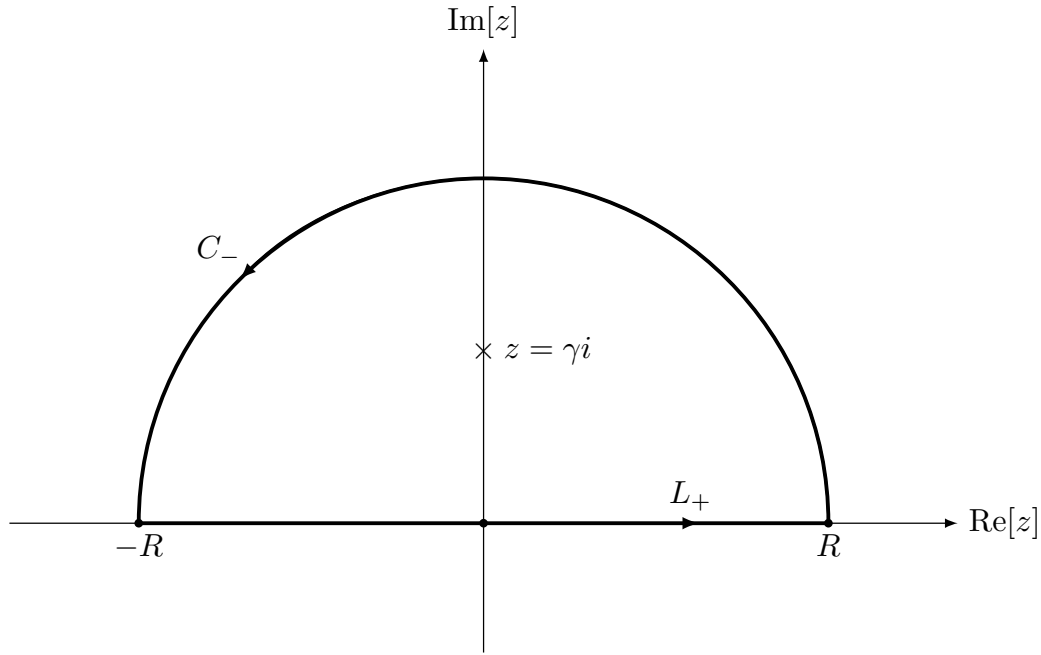


図 1.4 複素線積分の経路

複素線積分 I をこのような経路 (図 1.4) で定めれば、留数定理 (Residue Thm.) により:

$$\oint \frac{e^{iz|t-t'|}}{z - i\gamma} dz = 2\pi i e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (z \in \mathbf{C}) \quad (1.4.9)$$

を得られる。簡略に書くため、ここからはよくある理論物理学の慣習表記として $|\gamma| = R/L$ として取る。ここで、図 1.4 で示すようなそれぞれの経路 C_- , L_+ における複素線積分は:

$$\begin{aligned} \int_{C_-(R \rightarrow \infty)} \frac{e^{iz|t-t'|}}{z - i\gamma} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{i|t-t'|R \cos \theta} e^{-|t-t'|R \sin \theta}}{Re^{i\theta} - i\gamma} (iRe^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[iR \frac{e^{i|t-t'|R \cos \theta} e^{-|t-t'|R \sin \theta}}{R - i\gamma e^{-i\theta}} \right] d\theta = 0 \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

かつ、経路 L_+ に沿った複素線積分は:

$$\int_{L_+(R \rightarrow \infty)} \frac{e^{iz|t-t'|}}{z - i\gamma} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ik|t-t'|}}{k - i\gamma} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|t-t'|}}{k - i\gamma} dk \quad (1.4.11)$$

で与えられる。留数定理 (1.4.9) および複素線積分 (1.4.10), (1.4.11) を合わせると、次の広義積分の結果を分かる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik|t-t'|}}{k - i\gamma} dk = 2\pi i e^{-\gamma|t-t'|} \quad (1.4.12)$$

以上のことから、グリーン関数 $G(t; t')$ は次のように計算される:

$$\text{グリーン関数: } G(t; t') = \begin{cases} \frac{1}{2L} e^{-\gamma(t-t')}, & (t > t') \\ -\frac{1}{2L} e^{-\gamma(t-t')}, & (t < t') \end{cases} \quad (1.4.13)$$

より、一般解 (1.4.8) および求めたグリーン関数 (1.4.13) から、求める応答関数 $I(t)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int G(t; t') V(t') dt' \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^t V(t') e^{-\gamma(t-t')} dt' - \frac{1}{2L} \int_t^{\infty} V(t') e^{-\gamma(t-t')} dt' \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

これが求まる応答関数 $I(t)$ となる.

問題 3-(b2) このときの電流 $I(t)$ は次のように計算される:

1. 非同次解 $I_h(t)$

$$\begin{aligned} 0 < t < t_1: \quad I_h(t) &= \frac{V_0}{2L} \left(\int_0^t e^{-\gamma(t-t')} dt' - \int_t^{t_1} e^{-\gamma(t-t')} dt' \right) \\ &= \frac{V_0}{2R} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{V_0}{2R} (1 - e^{-\gamma(t-t_1)}) \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

かつ、その他に,

$$t > t_1: \quad I_h(t) = \frac{V_0}{2L} \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t-t')} dt' = \frac{V_0(e^{\gamma t_1} - 1)}{2R} e^{-\gamma t} \quad (1.4.16)$$

がわかる.

2. 同次解 $I_0(t)$

同次解は、微分方程式を簡単に解ける:

$$\left[L \frac{d}{dt} + R \right] I_0(t) = 0; \quad I_0(t) = C e^{-\gamma t} \quad (1.4.17)$$

より、この場合の応答関数 $I(t)$ はその和として $I(t) = I_0(t) + I_h(t)$ で表すことができ、 $I(0) = 0$ から次のように与えられる.

つまり,

$$I(t) = I_0(t) + I_h(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\gamma t}), & (0 \leq t \leq t_1) \\ \frac{V_0(e^{\gamma t_1} - 1)}{R}e^{-\gamma t}, & (t_1 \leq t < \infty) \end{cases} \quad (1.4.18)$$

これが与えられた起電力 $V(t)$ に対する応答関数 $I(t)$ である.

問題 3-(b3) 同様にできる:

$$I(t) = I_0(t) + I_h(t) = V \int_{-\infty}^{\infty} G(t; t') \cos \omega t' dt' \quad (1.4.19)$$

ここで, 非同次解 $I_h(t)$ は次のように計算される.

$$I_h(t) = \frac{V}{2L} \times \text{PV} \left(\int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega t' dt' - \int_t^{\infty} e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega t' dt' \right)$$

$$= \frac{V}{2L} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{t-\alpha}^t e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega t' dt' - \int_t^{t+\alpha} e^{-\gamma(t-t')} \cos \omega t' dt' \right)$$

$$= \frac{V}{R} \cos \omega t + \frac{V}{L\omega} \sin \omega t \quad (1.4.20)$$

をわかる. ここでの意味あるコーシーの主値は:

$$\frac{1}{\gamma} \cos \omega(t + \alpha) = -\frac{1}{\omega} \sin \omega(t + \alpha) \quad (1.4.21)$$

になるように取る. よって, この系の一般解 $I(t)$ は次のように書ける:

$$I(t) = \frac{V}{R} \cos \omega t + \frac{V}{L\omega} \sin \omega t - \frac{V}{R} e^{-\gamma t} \quad (1.4.22)$$

1.5 電磁気波とゲージ不変性

問題 4-(a) 今からは、電磁気学における実験的事実およびそれからなるすべてのものは認めないことにする。クーロン法則およびビオ・サバールの法則は一切認めずに (Maxwell 方程式も含む)、理論的な公理としてゲージ不変性・重ね合わせの原理・ローレンツ共変性のみを認めることにする。系の一般的な作用 (Action) の記述から出発すればよい:

$$S = S_m + S_{mf} + S_f \quad (1.5.1)$$

系の作用は、式 (1.5.1) に示すように粒子のみが及ぼす作用 S_m 、粒子-場の相互作用が及ぼす作用 S_{mf} 、場のみが及ぼす作用 S_f の線形結合として書ける。線形性を失えば、重ね合わせの原理が成り立たないことに注意せよ。それぞれの作用は次のように書ける:

1. 粒子のみの作用

粒子のみの作用は、自由粒子の作用を考えればよい。自由粒子なので、固有時間 τ を用いると、系のラグランジアンを定数として、作用は次のように書ける:

$$S_m = \int -mc^2 d\tau \quad (1.5.2)$$

ここで、 m, c は必ず質量・光速とは限らない。定数のラグランジアンを取るために任意でとった文字だけである。まだは物理的意味を持たない。

2. 粒子-場相互作用の作用

先ずは、場が及ぼすポテンシャルを 4 元項として A^μ と一般に書ける。ここで、ポテンシャル A^μ と粒子の相互作用に関与する物理変数を q と置けば、粒子-場相互作用の作用は次のように書いても問題がないかもしれない:

$$S_{mf} = \int -qA_\mu dx^\mu \quad (1.5.3)$$

ここでの相互作用 (1.5.3) は粒子の位置的・時間的情報とも関係があるので、相互作用の作用 S_{mf} は dx^μ で積分する方が正しい。この作用がローレンツ共変性を持っていることは:

$$S_{mf} = \int -qA_\mu dx^\mu = \int -q(\Lambda_\mu^\nu A_\nu) (\Lambda_\nu^\mu dx^\nu) = \int -qA_\nu dx^\nu \quad (1.5.4)$$

で簡単にわかる。かつ、この作用 (1.5.3) がゲージ不変性を持っていることを確かめるため、今からは系にある粒子の運動方程式を考える:

$$S_{\text{mot}} = S_m + S_{mf} = \int (-mc^2 d\tau - qA_\mu dx^\mu) \quad (1.5.5)$$

粒子の運動方程式

粒子の運動方程式を考えるときには、(1.5.5) に示すように作用 S_m および S_{mf} のみを考えればよい。作用 S_f は場のみの作用なので、粒子運動方程式には寄与しない。運動方程式は運動を及ぼす作用 S_{mot} の変分を考えればよい:

$$\begin{aligned} S_{\text{mot}}[x^\mu] &= \int (-m u_\mu u^\mu d\tau - q A_\mu dx^\mu) \\ &= \int (-m \eta_{\mu\nu} u^\nu u^\mu - q A_\mu u^\mu) d\tau \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

より、最小作用の原理 $\delta S_{\text{mot}}[x^\mu] = 0$ から、次のようなオイラー方程式を得られる。

$$-m \partial_\mu (\eta_{\alpha\nu} u^\nu u^\alpha) - q \partial_\mu (A_\nu u^\nu) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu} (-m \eta_{\alpha\nu} u^\nu u^\alpha - q A_\alpha u^\alpha) \right) \quad (1.5.7)$$

この式 (1.5.7) での 4 元ベクトルを演算すれば:

$$-q(\partial_\mu A_\nu)u^\nu = -m \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} - q \delta_\mu^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \tau} \quad (1.5.8)$$

のような結果になることが簡単に分かる。更に、連鎖律を使って得られた次の関係式も式 (1.5.8) に加えることができる。

$$\delta_\mu^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \tau} = \delta_\mu^\alpha (\partial_\nu A_\alpha) u^\nu = (\partial_\nu A_\mu) u^\nu \quad (1.5.9)$$

より、4 元ベクトル関係式 (1.5.9) および方程式 (1.5.8) から、粒子の運動方程式のような形を持つような次の方程式が導かれる:

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\nu \quad (1.5.10)$$

ここから、式 (1.5.10) の方程式が系の粒子の運動に関する運動方程式だと認めれば、運動方程式に現れた電磁気テンソル:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5.11)$$

は次のようなゲージ不変性を満たすことが分かる。

$$\text{ゲージ不変性: } F_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Gamma) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Gamma) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5.12)$$

以上のことから、粒子-場相互作用の作用 S_{mf} を (1.5.3) のように一般に書けることが確かめられた。この結果を用いて、場のみの作用を一般に書ける。

(次のページに続く)

3. 場のみの作用

先ずは、場のみの作用を構成する際には、このような作用 S_f は次のような空間の上での積分として定義されるべきであることが分かる:

$$S_f \mapsto \int \mathcal{L}[A^\mu] d^4x \quad (1.5.13)$$

ここで、このような作用を $d\tau$ の積分として取ればいけない由は、 $d\tau$ そのものとして粒子の情報が既に含まれているからである。ここで、積分変数:

$$d^4x \mapsto (c dt) dx dy dz \quad (1.5.14)$$

として定義され、作用 S_f をこの積分の上で定義すれば次のようにローレンツ共変性を持つことが分かる。

$$\text{ローレンツ共変性:} \quad \int d^4x_1 = \int \sqrt{-g} d^4x_2 = \int d^4x_2 \quad (1.5.15)$$

より、このような積分 (1.5.15) は座標系によらない。この理由によって、場のみの作用 S_f は積分変数 d^4x の上での積分として (1.5.13) のように書けることである。かつ、場のみの作用を及ぼすラグランジアン密度 $\mathcal{L}[A^\mu]$ はゲージ不変性を保つべきである:

$$\mathcal{L}[A^\mu + \partial^\mu \Gamma] = \mathcal{L}[A^\mu] \quad (1.5.16)$$

より、ゲージ不変性 (1.5.16) から、ラグランジアンは式 (1.5.10) の運動方程式で現れた電磁気テンソル $F_{\mu\nu}$ の線形結合の表せることが自明である。このことから、場のラグランジアン密度がスカラーになるということを考えて、一般に次のように書いても一般性を失わない:

$$\mathcal{L}[A^\mu] = -\frac{1}{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \beta \quad (1.5.17)$$

線形性を失えば、「重ね合わせの原理」が成り立たないことに注意せよ。以上のことにより、場のみの作用は:

$$S_f = \int -\frac{1}{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \beta d^4x \quad (1.5.18)$$

以上の作用 (1.5.2), (1.5.3) および場の作用 (1.5.18) のことから、系全体の作用 S は次のように書ける。

$$S = \int \left(-mc^2 d\tau - q A_\mu dx^\mu - \frac{1}{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \beta d^4x \right) \quad (1.5.19)$$

ここから、場の方程式を探したいんだが、この定数 β は作用 (1.5.19) の変分に影響を与えないので $\beta = 0$ と置いても構わない。更に、作用をより簡単に書くため、前で定義した場-粒子相互作用を媒介する物理変数 q の空間密度として:

$$q = \int \rho d^3x \quad (1.5.20)$$

を導入する。

よって、この密度 ρ を用いて、系の作用をより簡単に書ける:

$$S_{mf} = \int -qA_\mu dx^\mu = \iint -\rho A_\mu dx^\mu d^3x = \int A_\mu \left(\frac{\rho}{\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) d^4x \quad (1.5.21)$$

ただし、このパラメータ γ はローレンツ因子とする。ここで、新しい4元ベクトルとして J^μ を定める。

$$J^\mu \equiv \frac{\rho}{\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (1.5.22)$$

この c は光速、 \mathbf{v} は速度であることは認める (ローレンツ共変性を認めたので)。ならば、系全体の作用は:

$$S[A^\mu] = \int \left(-mc^2 d\tau - \left(A_\mu J^\mu + \frac{1}{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x \right) \quad (1.5.23)$$

今からは、場の方程式を求めるため、次のように4元ポテンシャル A^μ に関する変分原理を考える。より、次式のオイラー方程式を得られる。

$$\begin{aligned} \delta S[A^\mu] &= - \int \left(\delta A_\mu J^\mu + \frac{2}{\alpha} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= - \int \left(\delta A_\mu J^\mu + \frac{4}{\alpha} \partial_\mu (\delta A_\nu) F^{\mu\nu} \right) d^4x \\ &= - \int \left(J^\nu - \frac{4}{\alpha} \partial_\mu F^{\mu\nu} \right) \delta(A_\nu) d^4x = 0 \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

ここから、次のような場の方程式が導かれる:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{4} J^\nu \quad (1.5.25)$$

このような場の方程式 (1.5.25) は、ある4元ベクトル J^μ を4元電流密度ベクトルだと考えても一般性を失わずに成り立つ。

Maxwell 方程式の導出

そうすると、最初に想定したいいくつかの意味の分からない定数 m, c, q の意味を分かる。それぞれ、質量・光速・電荷に相当するものである。このようなことを分かったら、簡単に $\alpha = 4\mu_0$ と置き、4元ポテンシャル A^μ を電気ポテンシャルおよびベクトルポテンシャルの組として:

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad J^\mu \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (1.5.26)$$

のように定まることにしても、場の方程式 (1.5.25) は相変わらず成り立つ。

つまり、場の方程式:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (1.5.27)$$

をそれぞれの成分ごとで書くと、次のような方程式として書き直せる.

1. Gauss 法則

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 J^0; \quad \partial_\mu \left(\frac{1}{c} \partial^\mu \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A^\mu}{\partial t} \right) = \mu_0 c \rho \quad (1.5.28)$$

あるいは、3次元表示により:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 c^2 \rho \quad (1.5.29)$$

2. Ampere-Maxwell 法則

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 J^i; \quad \partial_\mu (\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = \mu_0 J^i \quad (1.5.30)$$

あるいは、3次元表示により:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.5.31)$$

これは、ポテンシャルに関する2つの Maxwell 方程式である.

ここから、それぞれの新しいベクトル場として:

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.5.32)$$

で定めれば、数学的恒等式から残りの2つの Maxwell 方程式が導かれる. ここの \mathbf{E} と \mathbf{B} はそれぞれ、電場と磁場に相当する.

3. Faraday-Lentz 法則

これは、ベクトル場 \mathbf{E} の定義式の両辺に回転を取ることで簡単に導かれる.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) - \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.5.33)$$

ここから、Faraday-Lentz 法則が導かれる:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.5.34)$$

4. 磁場に関する Gauss 法則

これは、定義式から自明に分かる:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5.35)$$

ここまで、ゲージ不変性のみに基づいて Maxwell 方程式がすべて導かれた。

問題 4-(b1) ゲージ不変性から、Maxwell 方程式が導かれたため、ゲージ変換:

$$A'^{\mu} \mapsto A^{\mu} + \partial^{\mu} \Gamma \quad (1.5.36)$$

を行っても系の電磁気場は変わらない。より、3次元表式として:

$$\phi' \mapsto \phi + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' \mapsto \mathbf{A} - \nabla \Gamma \quad (1.5.37)$$

のゲージ変換を考える。この上で、電磁気波の波動方程式を考えるため、真空の自由空間 ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$) での Maxwell 方程式 (1.5.31) を考える:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (1.5.38)$$

ここで、ベクトル微積分学における関係式 (1.3.7) を用いた。この Maxwell 方程式 (1.5.38) を簡単にするため、このようなゲージ変換 (1.5.37) を用いられ:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Gamma_L = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.5.39)$$

ここで、式 (1.5.39) を満たすような適切なゲージ Γ_L を取ることができる。このようなゲージを取れば、式 (1.5.38) の Maxwell 方程式から、次のベクトルポテンシャルに関する波動方程式を導ける。

$$\text{波動方程式:} \quad \square^2 \mathbf{A} \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1.5.40)$$

このようなゲージの取り方を **ローレンツゲージ (Lorentz Gauge)** と呼ぶ。電気ポテンシャルに対しても同じような波動方程式を探すことができる。Gauss 法則を見ればよい:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})_L = -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5.41)$$

ここで、真空の自由空間なので $\rho = 0$ であることに注意せよ。より、電場も同様な波動方程式が導かれる。

$$\text{波動方程式:} \quad \square^2 \phi \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = 0 \quad (1.5.42)$$

この波動方程式 (1.5.40) および (1.5.42) から、電磁気波は伝播速度 c で進めることがここからわかる。

電磁気ポテンシャルの波動方程式 (1.5.40) および (1.5.42) を合わせると次の電場と磁場の振動に関する波動方程式も得られる:

$$\square^2 \mathbf{E} = \square^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.5.43)$$

この波動方程式 (1.5.43) に電場の一般解 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t)$ を代入することで次のような分散関係 (Dispersion relation) を得る.

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0; \quad \omega(k) = ck \quad (1.5.44)$$

これが求める, 真空中を進める電磁気波の分散関係式である. ただし, このような分散関係は進める媒質などによって変わること注意到せよ.

問題 4-(b2) 上で示した (略).

問題 4-(b3) 先ずは, 電場の波動方程式として:

$$\square^2 \mathbf{E}(z, t) = \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(z, t) = \mathbf{0} \quad (1.5.45)$$

を考える. この波動方程式 (1.5.45) の一般解は次のように与えられる:

$$E^\mu(z, t) = \int_{\mathcal{V}(k)} A(\mathbf{k}) e^{i(k_\mu r^\mu - \omega(k^\mu)t)} dk^\mu, \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (1.5.46)$$

この一般解を電場の波動の空間発展を求めらる. フーリエ積分 (1.5.46) を成分ごと分離して次のように解く:

1. x 成分の波動

この場合の $z = 0$ のディリクレ境界条件は次のように書ける.

$$\frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) e^{-ick_x t} dk_x \quad (1.5.47)$$

ここで, 電磁気波の分散関係 $\omega(k) = ck$ を用いた. この係数 $A(k_x)$ は Fourier's Trick により次のように計算される:

$$A(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{ick_x t} dt = \left(\frac{\delta(ck_x - \omega) + \delta(ck_x + \omega)}{2} \right) E_0 \quad (1.5.48)$$

より, この (1.5.48) によ求めた $A(k_x)$ により x 成分の電場の空間発展は次のように書ける.

$$E^x(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x) e^{ik_x(z-ct)} dk_x = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \quad (1.5.49)$$

これが x 成分電場の空間発展である.

2. y, z 成分の波動

同様なことを繰り返すと, E^y, E^z は次のように書ける.

$$E^y = E^z = 0 \quad (1.5.50)$$

以上のことで得られた電場 (1.5.49) および (1.5.50) を用いて空間を進める磁場 $\mathbf{B}(z, t)$ を求めるため, ゲージ不変性から得られた次の Maxwell 方程式考える.

$$\text{Faraday-Lentz 法則:} \quad \nabla \times \mathbf{E}(z, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(z, t)}{\partial t} \quad (1.5.51)$$

そのため, 電場 $\mathbf{E}(z, t)$ の回転を先ず計算すると:

$$\nabla \times \mathbf{E}(z, t) = -\frac{\partial E^x(z, t)}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_0 \omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \hat{\mathbf{y}} \quad (1.5.52)$$

よって, 先述した Faraday-Lentz 法則 (1.5.51) から, 磁場の方程式を次のように得られる:

$$-\frac{\partial B^y(z, t)}{\partial t} = \frac{E_0 \omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right), \quad B^x(z, t) = B^z(z, t) = 0 \quad (1.5.53)$$

以上のことを磁場 $\mathbf{B}(z, t)$ は次のように書ける.

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \hat{\mathbf{y}} \quad (1.5.54)$$

問題 4-(c1) 磁束の定義により, 求める磁束 Φ は次のように計算される:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \mathbf{B}(z, t) d^2\mathbf{r} = \int_0^b \frac{E_0 a}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) dz \\ &= \frac{E_0 a}{\omega} \left[\sin\left(\frac{\omega b}{c} - \omega t\right) + \sin \omega t \right]. \end{aligned} \quad (1.5.55)$$

問題 4-(c2) ゲージ不変性からなる, 恒等式としての Maxwell 方程式 (1.5.34) の両辺を面積分すれば電磁気誘導により起こる誘導起電力 V_{ind} を次のように計算できる:

$$V_{\text{ind}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) d^2\mathbf{r} = - \int \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^2\mathbf{r} \quad (1.5.56)$$

より, 電磁気誘導により抵抗 R の両端にかけられる誘導起電力は:

$$V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = E_0 a \left[\cos\left(\frac{\omega b}{c} - \omega t\right) + \cos \omega t \right] \quad (1.5.57)$$

で与えられる.

問題 4-(c3) コンデンサーを入れた回路のキルヒホッフ法則は:

$$V(t) = \frac{1}{C}Q(t) \quad (1.5.58)$$

で書ける. より, このとき回路に流れる電流は次のように計算できる:

$$I(t) \equiv -\frac{dQ(t)}{dt} = -C \frac{dV(t)}{dt} = E_0 C a \omega \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega b}{c} \right) + \sin \omega t \right]. \quad (1.5.59)$$

■

終わり.