量子力学２演義

Dohyun Kim*[1]

[1](04B22078) B3, Department of Physics, Osaka University.

令和 6 年 8 月 4 日

目次

1 中心力で記述される物理系

中心力に拘束された ($E<0$) 非相対論的粒子*1のエネルギー固有状態はシュレーディンガー方程式により:

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right)\psi = E\psi \qquad (E<0). \tag{1}$$

一方、波動関数の回転変換 $\psi(\mathbf{r}) \to \psi(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})$ について考察する。まず、微小な回転変換に基底ベクトル $|\mathbf{r}\rangle$ の変換*2は:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}\rangle &= |\mathbf{r}\rangle + (\delta\theta\ \mathbf{n}\times\mathbf{r})\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle + \mathcal{O}(\delta\mathbf{r}) \\ &= |\mathbf{r}\rangle + \frac{i\delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{r}\times\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)|\mathbf{r}\rangle + \mathcal{O}(\delta\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

ここで回転変換の変数関係 $\delta\mathbf{r} = \delta\theta\ \mathbf{n}\times\mathbf{r}$ を用いた。すると、$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}$ の置換を行うことにより、微小変換に限らず角 $\Delta\theta$ の一般回転変換の表現は:

$$|\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}\rangle = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbf{1} + \frac{i\Delta\theta}{N\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}\right)^N|\mathbf{r}\rangle = e^{\frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}}|\mathbf{r}\rangle \tag{3}$$

* Please, contact to u685087j@ecs.osaka-u.ac.jp.

*1 相対論的な場合は電子は Dirac spinor として扱わないといけない．ゆえに，Dirac 方程式を用いて

$$(i\hbar\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - mc)\psi = 0, \qquad \left(A^0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},\quad \mathbf{A} = \mathbf{0}\right)$$

で記述される．ここで Dirac のスラッシュ表記 $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$ を採用した．

*2 $\partial/\partial\mathbf{r} := \boldsymbol{\nabla}$.

として得られる。ゆえに波動関数の変換[*3]は

$$\psi \quad \to \quad \psi' = e^{-\frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}}\psi. \tag{4}$$

しかし、中心力を受ける系は回転変換に対して系のエネルギーが不変なので、$E_\theta = E_{\theta+\Delta\theta}$ が要請される。エネルギー固有状態の表現 $E = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ と波動関数の回転変換 (4)、Campbell-Baker-Hausdorff の公式[*4]を結合すると:

$$\begin{aligned} E_{\theta+\Delta\theta} - E_\theta &= \langle\psi|e^{\frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}}\hat{H}e^{-\frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}} - \hat{H}|\psi\rangle \\ &= \frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\langle\psi|[\hat{\mathbf{L}},\hat{H}] + \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{L}},[\hat{\mathbf{L}},\hat{H}]] + \cdots|\psi\rangle = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

ゆえに、式 (5) の計算により保存量 $[\hat{\mathbf{L}},\hat{H}] = 0$ を得られる。ここから、この演算子 $\hat{\mathbf{L}}$ について論議する。それぞれ成分ごとで分けて:

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k \tag{6}$$

とおく。すると、成分同士の交換関係は:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i,\hat{L}_j] &= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}[\hat{r}_k\hat{p}_l,\hat{r}_m\hat{p}_n] = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}(\hat{r}_k[\hat{p}_l,\hat{r}_m]\hat{p}_n + \hat{p}_l[\hat{r}_k,\hat{p}_n]\hat{r}_m) \\ &= i\hbar(\hat{r}_i\hat{p}_j - \hat{r}_j\hat{p}_i) = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

ゆえに、演算子 $\hat{L}_i$ は SU(2) のリー代数の表現を満たす。一方で、ここで各演算子 $\hat{L}_i \ (i = 1,2,3)$ の具体的な表現を求める。式 (**??**) の結果により:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 &= -\hbar^2(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}) = -\hbar^2r^2\nabla^2 + \hbar^2(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r}) \\ &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

それぞれの成分は:

$$\hat{L}_x = i\hbar\left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{9}$$

$$\hat{L}_y = i\hbar\left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{10}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{11}$$

[*3] 式 (3) による回転における基底 $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ の変換式から，この回転に応じて波動関数は

$$\langle\mathbf{r}|\psi\rangle \quad \to \quad \langle\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}|\psi\rangle = e^{-\frac{i\Delta\theta}{\hbar}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle$$

のように変換される．

[*4] 演算子 $\hat{A},\hat{B}$ に対して:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \cdots.$$

となる。ここまで計算して、一旦シュレーディンガー方程式に戻ろう。中心力のシュレーディンガー方程式を演算子 $\hat{L}^2$ を用いて表現すると、方程式は r の成分とその他保存量[*5] $\hat{L}^2$ からなる成分で完全に分離できる:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}\psi+V(\hat{r})\psi=E\psi. \tag{12}$$

これは角変位 θ, ϕ のエネルギーの成分が定数の角運動量でかけた古典力学の結果とも類似である。今からやることは、$[\hat{L^2}, \hat{H}]=0$ となり、演算子 $\hat{L}^2$ とハミルトニアン $\hat{H}$ が同時固有状態を保つことに着目し、ψ に対する演算子 $\hat{L}$ の固有値を求めることである。そのため、生成・消滅演算子:

$$\begin{aligned}\hat{L}_+&=\hat{L}_x+i\hat{L}_y=\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\ \hat{L}_-&=\hat{L}_x-i\hat{L}_y=\hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

とおく。すると、交換関係 (7) により、

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]=i\hbar\hat{L}_y\pm\hbar\hat{L}_x=\pm\hbar\hat{L}_\pm. \tag{14}$$

ゆえに、$\hat{L}_z$ の固有状態[*6] $\hat{L}_z\psi=\lambda\psi$ に対して $\hat{L}_\pm\psi$ は

$$\hat{L}_z(\hat{L}_\pm\psi)=\hat{L}_\pm(\hat{L}_z\psi\pm\hbar\psi)=(\lambda\pm\hbar)(\hat{L}_\pm\psi) \tag{15}$$

として固有値の上昇・下降作用を起こす。一方、演算子 $\hat{L}^2$ の固有状態 $\hat{L}^2\psi=\Lambda\psi$ を考えれば、この $\hat{L}_z$ の固有値 λ は上限と下限両方[*7]を持ったないといけない。ゆえに、最大ウェイト状態 ψ_t と最低ウェイト状態 ψ_b に対して:

$$\hat{L}_+\psi_t=0\ , \qquad \hat{L}_-\psi_b=0 \tag{16}$$

が成立する。それぞれ最大ウェイト ψ_t と最低ウェイト ψ_b での $\hat{L}_z$ の固有値をそれぞれ $l, \bar{l}$ とすれば、演算子 $\hat{L}^2$ の固有状態は以下の 2 通りの表現を持つ:

$$\begin{aligned}\hat{L}^2\psi_t&=(\hat{L}_-\hat{L}_+-i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]+\hat{L}_z^2)\psi_t=\hbar^2l(l+1)\psi_t,\\ \hat{L}^2\psi_b&=(\hat{L}_+\hat{L}_-+i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]+\hat{L}_z^2)\psi_b=\hbar^2\bar{l}(\bar{l}-1)\psi_b.\end{aligned} \tag{17}$$

しかし、それぞれの最大ウェイト状態と最低ウェイト状態は 1 つの $\hat{L}^2$ 固有状態から取り出した状態であるため、式 (17) の固有値 $\hbar^2l(l+1)$ と $\hbar^2\bar{l}(\bar{l}-1)$ は互いに等しい。ゆえに、$l=-\bar{l}$ が要請

[*5] (5) の計算より，$[\hat{L}^2, \hat{H}]=0$.

[*6] 当然に，$\hat{L}_z$ に関しても:

$$[\hat{L}_z, \hat{H}]=0$$

が成立する．これは式 (5) の計算で $\hat{n}=\mathbf{e}_z$ を取ることで簡単に示せる．

[*7] これは以下の計算より明らかである:

$$\hat{L}^2\psi=(\hat{L}_+\hat{L}_-+i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]+\hat{L}_z^2)\psi=\hat{L}_+\hat{L}_-\psi+\hbar^2\lambda(\lambda-1)\psi=\Lambda\psi,$$

しかし，$\langle\psi|\hat{L}_+\hat{L}_-|\psi\rangle=\langle\hat{L}_-\psi|\hat{L}_-\psi\rangle\geq 0$ なので，$\hbar^3\lambda(\lambda-1)<\Lambda$ となる．そのためには，λ が上限と下限両方を持つ必要がある．

され、それぞれの固有状態を以下のように書くことができる:

$$\hat{L}^2\psi^l = \hbar^2 l(l+1)\psi^l, \qquad \hat{L}_z\psi_l = \hbar l\psi_l. \tag{18}$$

ゆえに、式 (12) での中心力場下でのシュレーディンガー方程式はこれらの固有値 (18) を用いて:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\psi + V(\hat{r})\psi = E\psi, \tag{19}$$

あるいは:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0. \tag{20}$$

ここから波動関数を $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y^l_m(\theta,\phi)$ で変分した。一方、$\hat{L}^2$ の固有状態から球面調和関数 $Y^l_m(\theta,\phi)$ の微分方程式が以下のように得られる:

$$\hat{L}^2Y^l_m(\theta,\phi) = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y^l_m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1)Y^l_m(\theta,\phi), \tag{21}$$

変分 $Y^l_m(\theta,\phi) = \Theta^l(\theta)\Phi_m(\phi)$ を取ることで、微分方程式 (21) は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta^l(\theta)}{\partial\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta^l(\theta) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_m(\phi)}{\partial\phi^2} = -m^2\Phi_m(\phi). \tag{23}$$

以上で、$\lambda = l(l+1)$ とすると問題文の式が得られる。

2 球面調和関数 (Spherical Harmonic Function)

ここからは実際微分方程式を解いて球面調和関数 $Y^l_m(\theta,\phi)$ を求める。この微分方程式を直接解くのは非常に時間がかかる作業なので、ここでは生成・消滅演算子を使う。そのため、まずは演算子 $\hat{L}^2$ の固有状態の表現 (21) に加えて、$\hat{L}_z$ の固有状態の表現:

$$\hat{L}_zY^l_m = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}Y^l_m(\theta,\phi) = \hbar mY^l_m(\theta,\phi) \tag{24}$$

を導入する。ここで、式 (17) の制約によって $-l \leq m \leq l$ であることに注意せよ。ここから変分から得られる微分方程式 (23) の物理的意味がわかる: 演算子 $\hat{L}_z$ の固有状態を示す。固有方程式 (24) を固有状態 (21) に代入することで角変位 θ の微分方程式 (22) が再現される。ゆえに、球面調和関数 $Y^l_m(\theta,\phi)$ を以下のように変分[*8]する:

$$Y^l_m(\theta,\phi) = \Theta^l_m(\theta)\Phi_m(\phi). \tag{25}$$

さて、まず演算子 $\hat{L}_z$ の固有値方程式 (24) を解けば

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi} \qquad (-l \leq m \leq l). \tag{26}$$

[*8] 今，前の説で変分より得られた微分方程式 (23) が演算子 $\hat{L}_z$ の固有状態他ならないことを確かめたので，$\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ は互いに同時固有状態が存在することに着目し，ここからは変分した関数に $\hat{L}_z$ の固有値の index として m をつける．

続いて演算子 $\hat{L}^2$ の固有値方程式を解く。式 (21) の固有値方程式から

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta^l_m(\theta)}{\partial\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta^l_m(\theta)=0, \tag{27}$$

を解くのが目的である。前の節で論議した通りで、球面調和関数は最大ウェイト状態と最低ウェイト状態をもつ。以上の設定で、それぞれの最大ウェイト状態および最低ウェイト状態は $Y^l_l(\theta,\phi)$ と $Y^l_{-l}(\theta,\phi)$ で書くことができる。すると、生成・消滅演算子 $\hat{L}_\pm$ を導入すると、式 (16) の論議のように各最大ウェイト状態および最低ウェイト状態に対して:

$$\hat{L}_+Y^l_l(\theta,\phi)=\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y^l_l(\theta,\phi)\underset{(26)}{=}\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-l\cot\theta\right)\Theta^l_l(\theta)=0, \tag{28}$$

$$\hat{L}_-Y^l_{-l}(\theta,\phi)=\hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y^l_{-l}(\theta,\phi)\underset{(26)}{=}-\hbar e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-l\cot\theta\right)\Theta^l_{-l}(\theta)=0 \tag{29}$$

が成立する。式 (28) と式 (29) を変数分離法により解くと、以下のように最大ウェイトおよび最低ウェイトの固有関数が得られる:

$$\int\frac{d\Theta}{\Theta}=l\int\cot\theta\ d\theta \quad\rightarrow\quad \Theta^l_l(\theta)=\Theta^l_{-l}(\theta)=C_l\sin^l\theta. \tag{30}$$

ここで C_l は規格化定数である。後で決める。

すると、ゼロ状態 $Y_0^l(\theta,\phi)$ は生成消滅演算子 $\hat{L}_\pm$ を用いてそれぞれ:

$$Y_0^l(\theta,\phi) = (c_1\hat{L}_-)\cdots(c_l\hat{L}_-)Y_l^l(\theta,\phi) = (d_1\hat{L}_+)\cdots(d_l\hat{L}_+)Y_{-l}^l(\theta,\phi) \tag{31}$$

ここで c_l, d_l は以下のような手順[*9]で導入できる:

$$\frac{1}{c_l^2} = \langle\hat{L}_-Y_m^l|\hat{L}_-Y_m^l\rangle = \langle Y_m^l|\hat{L}_+\hat{L}_-|Y_m^l\rangle \underset{(17)}{=} \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{d_l^2} = \langle\hat{L}_+Y_m^l|\hat{L}_+Y_m^l\rangle = \langle Y_m^l|\hat{L}_-\hat{L}_+|Y_m^l\rangle \underset{(17)}{=} \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}. \tag{33}$$

ゆえに、c_l, d_l の表現 (32) および (33) を式 (31) を結合することで

$$\begin{aligned}
Y_0^l(\theta,\phi) &= \frac{1}{\hbar^l\sqrt{(2l)!}}(\hat{L}_-)^l\left(\frac{C_l}{\sqrt{2\pi}}e^{il\phi}\sin^l\theta\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^l\sqrt{(2l)!}}(\hat{L}_-)^{l-1}\hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\frac{C_l}{\sqrt{2\pi}}e^{il\phi}\sin^l\theta\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^l\sqrt{(2l)!}}(\hat{L}_-)^{l-1}\hbar e^{i(l-1)\phi}\frac{C_l}{\sqrt{2\pi}}\left(-2l\sin^{l-1}\theta\cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^l\sqrt{(2l)!}}(\hat{L}_-)^{l-1}\hbar e^{i(l-1)\phi}\frac{C_l}{\sqrt{2\pi}}\left(\sin^{-l}\theta\ \underbrace{\sin\theta\frac{d}{d\cos\theta}}_{d/d\theta}\sin^{2l}\theta\right) = \cdots \\
&= \frac{C_l}{\sqrt{2\pi(2l)!}}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l\sin^{2l}\theta.
\end{aligned} \tag{34}$$

が得られる。ここからこの式 (34) から得られる $Y_0^l(\theta,\phi)$ を規格化するため、定数 C_l を決定する。定数 C_l は状態 $Y_l^l(\theta,\phi)$ の規格化定数として、式 (32) および式 (33) での発展が規格化を壊さないように演算子 $c_l\hat{L}_-, d_l\hat{L}_+$ を導入したので、C_l が規格化されれば $Y_0^l(\theta,\phi)$ も規格化される。ここで C_l は以下の積分を評価[*10] することで求められる:

$$I_l = \int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta\ d\theta \underset{\text{partial integration}}{=} 2l\int_0^\pi \sin^{2l-1}\theta\cos^2\theta\ d\theta = 2lI_{l-1} - 2lI_l, \tag{35}$$

ゆえに、積分 I_l から

$$I_l = \frac{2l}{2l+1}I_{l-1} = \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!} \qquad\rightarrow\qquad C_l = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}. \tag{36}$$

*9 式 (17) を参照.

*10 規格化定数 C_l は

$$1 = |C_l|^2\int_0^\pi |\Theta_l^l(\theta)|^2\ \sin\theta\ d\theta = 1$$

として定まる.

すると、式 (34) と式 (36) を結合することで

$$Y_0^l(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l \sin^{2l}\theta\right], \tag{37}$$

あるいは

$$\Theta_0^l(\theta) = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l \sin^{2l}\theta = (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(\cos\theta)\ , \qquad \Phi_0(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{38}$$

これはルジャンドル多項式の再現である。以上より、規格化された $Y_0^l(\theta,\phi)$ を (37) のように得られた。得られたゼロ状態の球面調和関数 $Y_0^l(\theta,\phi)$ から式 (34) と同様な操作を通して:

$$\begin{aligned}
Y_m^l(\theta,\phi) &= \frac{1}{\hbar^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\hat{L}_+)^m Y_0^l(\theta,\phi) \\
&= \frac{1}{\hbar^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\hat{L}_+)^{m-1}\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_0^l(\theta,\phi) \\
&= \frac{1}{2^l l!\hbar^m}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\hat{L}_+)^{m-1}\hbar e^{i\phi}\left[-\sin\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+1}\sin^{2l}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2^l l!\hbar^{m-1}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\hat{L}_+)^{m-2}\hbar e^{i\phi}\left[(-1)^2\sin^2\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+2}\sin^{2l}\theta\right] \\
&= \frac{(-1)^m}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{im\phi}\left[\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m}\sin^{2l}\theta\right].
\end{aligned} \tag{39}$$

同様に、$\hat{L}_+ = (\hat{L}_-)^\dagger$ および $Y_0^{l*}(\theta,\phi) = (-1)^l Y_0^l(\theta,\phi)$ の関係を用いると:

$$\begin{aligned}
Y_{-m}^l(\theta,\phi) &= \frac{1}{\hbar^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(\hat{L}_+)^m Y_0^l(\theta,\phi) \\
&= \frac{1}{\hbar^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\left[(\hat{L}_-)^m Y_0^{l*}(\theta,\phi)\right]^\dagger \\
&= \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{-im\phi}\left[\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m}\sin^{2l}\theta\right]^\dagger \\
&= \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{-im\phi}\left[\sin^m\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m}\sin^{2l}\theta\right].
\end{aligned} \tag{40}$$

ゆえに、式 (39) と式 (40) を合わせると、以下のような 1 つの式でまとめられる:

$$Y_m^l(\theta,\phi) = \frac{(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}e^{im\phi}\left[\sin^{|m|}\theta\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+|m|}\sin^{2l}\theta\right] \tag{41}$$

あるいは、ルジャンドル多項式 $P_l(\cos\theta)$ を用いて:

$$Y_m^l(\theta,\phi) = (-1)^{l+\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} \left[\sin^{|m|}\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|m|} P_l(\cos\theta)\right] \tag{42}$$

このことから、固有関数 $\Theta_m^l(\theta), \Phi_m(\phi)$ および球面調和関数の規格化定数 N_m^l を以下のように決定することができる:

$$\Theta_m^l(\theta) = \sin^{|m|}\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|m|} P_l(\cos\theta)\ , \qquad e^{i\delta} = (-1)^{l+\frac{m+|m|}{2}}\ , \tag{43}$$

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}\ , \qquad N_m^l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}. \tag{44}$$

ここで $z = \cos\theta$ の置換を行えば問題文の (13) が示される。