令 和 4 年 度 前 期 履 修 科 目

力　学　詳　論　I

ラザフォード散乱 (問題)

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

(計　算　用　紙)

〔１〕**(2021 大阪大学)**　質量 m の質点が，ポテンシャル U による中心力を受けて，2 次元平面内を運動する合を考える．位置ベクトルを $\mathbf{r}$, 速度ベクトルを $\dot{\mathbf{r}} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ とする．2 次元極座標表示 (r, θ) において，r 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$，θ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とすると，$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ であることを用いてよい．一般に $\dot{f}$ と $\ddot{f}$ は，関数 f の時間微分 $\dfrac{df}{dt}$ と，時間の 2 階微分 $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ をそれぞれ表すものとする．[*1]

I.　ポテンシャルが $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$（α は正の定数）の場合を考える．

(1) このポテンシャル $U(r)$ による中心力の r および θ についての運動方程式を導け．

(2) 前問の θ についての運動方程式から，角運動量が保存していることが分かる．その大きさを L とする．以下の手順に従って，質点の軌道が

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) + \dfrac{m\alpha}{L^2}} \quad \cdots (*)$$

で表されることを示せ．ここで，A と θ_0 は積分定数である．

【手順】 角運動量 L を用いて r のみで表した系の運動方程式を $u = \dfrac{1}{r}$ により置換して $E(u)$ で表す．そのあと，θ に関する u の微分方程式を解く．

必要であれば次の積分関係式を利用しても良い:

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \cos^{-1} x + C \quad \cdots (**)$$

(次のページへ)

[*1] 令和 3 年度　大阪大学理学研究科　入学試験１問 (変形)

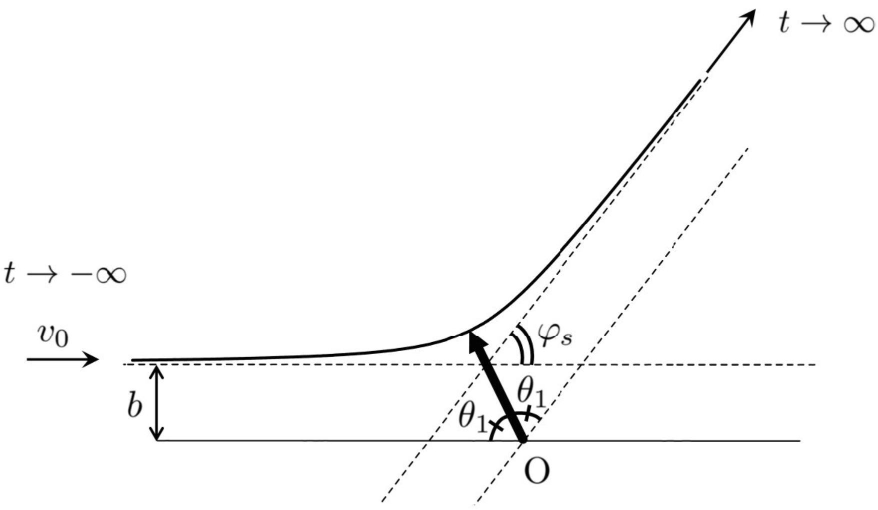

図 1

次に，図 1 に示すように，入射する速さ v_0，衝突パラメータ b で入射した質点について考える．ここで b は，入射側の軌道の漸近線と原点 O との距離で定義される．このときの散乱角 φ_s を以下の手順で導出することを考える．散乱角とは，$t \to -\infty$ のときの速度ベクトルと，$t \to \infty$ のときの速度ベクトルのなす角で，図 1 に示した φ_s である．なお以下の問いでは，前問で示した質点の軌道の式 $(*)$ を<u>既知のものとして用いてよい</u>.

(3) 保存している角運動量の大きさ L を m, α, v_0, b のうち必要なものを用いて求めよ.

(4) 式 $(*)$ において，質点が原点 O に最も近づくとき，$\theta = \theta_0$ であり，図 1 の太矢印に対応する．以後は $\theta_0 = 0$ となるように座標系を取る．太矢印と $t \to \pm\infty$ における質点の位置ベクトルとのなす角度を $\theta_1 (> 0)$ としたとき，$\cos\theta_1$ を m, α, L, A を用いて求めよ.

(5) $t \to -\infty$ における質点の速さが v_0 であることを利用して，$\sin\theta_1$ を m, L, A, v_0 を用いて求めよ.

【手順】 式 $(*)$ を時間で微分し，さらに $\dot{\theta}$ と L の関係を用いる.

(6) $\tan\left(\dfrac{\varphi_s}{2}\right)$ を m, α, v_0, b うち必要なものを用いて求めよ.