

Quantum Field Theory 2

経路積分と汎函数的摂動論

Schrödinger 場における経路積分の定式化を中心として

KIM DOHYUN

u685087j@ecs.osaka-u.ac.jp



大阪大学理学部・物理学科

りゼミ 3rd・spm 28th・spmAd 6th

Quantum Field Theory 2

Path integrals and Functionals

About Formulation of Path integral representation
on Shrödinger Fields

KIM DOHYUN

u685087j@ecs.osaka-u.ac.jp



Dept. of Phys., University of OSAKA

目次

第 1 章	経路積分の導入	5
1.1	非相対論的量子力学における経路積分	5
1.1.1	Dirac 表示の定義	5
1.1.2	位置空間	6
1.1.3	電子の量子状態の決定	10
1.1.4	位置基底選択の任意性	13
1.1.5	非相対論的量子力学系の経路積分	14
1.2	生成汎函数としての経路積分	22
1.2.1	真空ノルムの経路積分表示とエプシロン処方	22
1.2.2	経路積分表示上での T 積	24
1.2.3	生成汎函数としての経路積分とカウンター項 (Counter term) . .	27
第 2 章	漸近場の理論	29
2.1	シュレーディンガー場の 2 次量子化	29
2.1.1	U(1)-ネーターチャージに関する理論	30
2.1.2	場のハミルトニアンと共役運動量	31
2.1.3	シュレーディンガー場の 2 次量子化可能性	33
2.1.4	2 次量子化における正準量子化の再定義	41
2.2	非相対論的場における LSZ 簡約公式	44
2.2.1	Lehmann-Källén 型スペクトル表示と漸近場	50
2.2.2	Lehmann-Symanzik-Zimmerman の簡約公式	57
付録 A	正準量子化	59
A.1	ハミルトニアン時間に依存する場合における時間発展演算子の論議 . . .	59
A.2	直交函数展開における Jackson の Trick	63

1

CHAPTER

経路積分の導入

1.1 非相対論的量子力学における経路積分

経路積分の導入は状態の遷移 $|x_i, t_i\rangle \mapsto |x_f, t_f\rangle$ を考えることから始まる．この遷移の確率振幅の計算は Dirac notation を用いて行われるため，ここからはこの表記法に対するより深い理解が求められる．以下で Dirac notation に関してより深く考察してみよう：

1.1.1 Dirac 表示の定義

量子力学および場の量子論では基底変換が重要である．もし関数から基底を分離することができれば，この基底変換を簡単に行うことができるので楽である．Dirac はこのような関数から基底を分離したような **Bra-ket 表記法**^{*1}(**Bra-ket notation**) を考案した：

Dirac 表示

Bra-ket 表示は以下のように規約する：

- Ket ベクトル: $|\psi\rangle$
- Bra ベクトル: $\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger$
- 基底の表現: $\psi(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_i | \psi \rangle$
- 内積ルール: $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi| \cdot |\psi\rangle$

上記のように Dirac 表示を定義して今後使うことにする．上記の 4 つのものは単なる定

^{*1}Dirac 表示ともよぶ．

義として認めてほしい．Dirac 表示により演算を記述することになれば，関数と基底を分離して考えることに容易である：

$$\psi(x_i) = \langle x_i | \psi \rangle = \underbrace{\langle x_i | \cdot | \psi \rangle}_{\text{関数と基底の分離}} . \quad (1.1)$$

また，Dirac 表示上の関数 $\psi(x_i)$ の複素共役は

$$\psi^*(x_i) = \langle x_i | \psi \rangle^\dagger = (|\psi\rangle)^\dagger \cdot (\langle x_i |)^\dagger = \langle \psi | x_i \rangle . \quad (1.2)$$

特に，Dirac 表示では状態 $|\psi\rangle$ およびある演算子 \hat{A} に対して：

$$|\hat{A}\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}|\psi\rangle . \quad (1.3)$$

1.1.2 位置空間

さて，ここから量子論の最初に行った電子の二重スリット実験の再解析^{*2}を行う．この思考実験では，以下のように発射された電子が単スリット (M) と二重スリット (C) を次々に通過しスクリーン (S) に衝突する (図 1.1)：

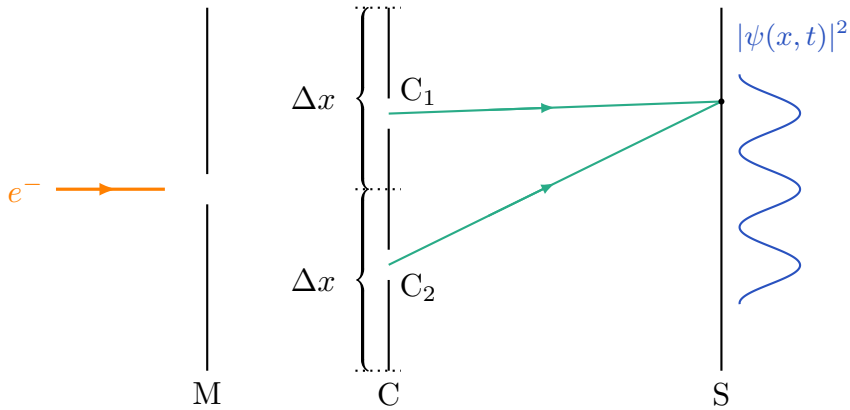


図 1.1: ファインマンの思考実験

さて，ここから確率解析を導入する．M から出た電子が S まで行く経路は $M \rightarrow C_1 \rightarrow S$ と $M \rightarrow C_2 \rightarrow S$ の 2 通りがあるので，確率に関する和の法則から，

$$P_{M \rightarrow S} = P_{M \rightarrow C_1} P_{C_1 \rightarrow S} + P_{M \rightarrow C_2} P_{C_2 \rightarrow S} . \quad (1.4)$$

^{*2}Feynman, R.P., “Spacetime approach to non-relativistic Quantum Mechanics” (1946).

ここで $P_{a \rightarrow b}$ は経路 $a \rightarrow b$ における確率を示す．今，量子論的確率解析をしているので，以下のように波動関数による**確率振幅 (Probability amplitude)** の概念を導入することが望ましい：

$$P_{a \rightarrow b} = \|\Psi_{a \rightarrow b}\|^2. \quad (1.5)$$

ここで $\Psi_{a \rightarrow b}$ は状態変化 $a \rightarrow b$ における系の波動関数を示す．式 (1.4) の確率則をこの確率振幅を用いて書けば，

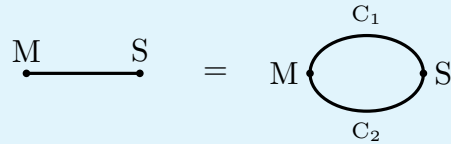
$$\begin{aligned} P_{M \rightarrow S} &= \|\Psi_{M \rightarrow C_1} \Psi_{C_1 \rightarrow S} + \Psi_{M \rightarrow C_2} \Psi_{C_2 \rightarrow S}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \underbrace{(\Psi_{M \rightarrow C_1} \Psi_{M \rightarrow C_2}^* \Psi_{C_1 \rightarrow S} \Psi_{C_2 \rightarrow S}^*)}_0 \\ &= \|\Psi_{M \rightarrow C_1} \Psi_{C_1 \rightarrow S} + \Psi_{M \rightarrow C_2} \Psi_{C_2 \rightarrow S}\|^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

とも言える．ここで，想定した 2 つの経路 $M \rightarrow C_1 \rightarrow S$ および $M \rightarrow C_2 \rightarrow S$ は独立的なので互いの確率振幅は直交^{*3}する．一方，式 (1.6) の確率は $P_{M \rightarrow S} = \|\Psi_{M \rightarrow S}\|^2$ と書けるので，確率振幅には重ね合わせの原理が成り立っていることを示している：

重ね合わせの原理

確率振幅^aにおいて，もし 2 通りの経路 $M \rightarrow C_1 \rightarrow S$ と $M \rightarrow C_2 \rightarrow S$ が**独立的**なのであれば，

$$\Psi_{M \rightarrow S} = \Psi_{M \rightarrow C_1} \Psi_{C_1 \rightarrow S} + \Psi_{M \rightarrow C_2} \Psi_{C_2 \rightarrow S}. \quad (1.7)$$



^aあるいは，波動関数．

また，系の確率振幅はその定義と式 (1.7) より得られた重ね合わせの原理より，内積として

$$\Psi_{M \rightarrow C_i} = \langle M | C_i \rangle, \quad \Psi_{C_i \rightarrow S} = \langle C_i | S \rangle \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

のようにも書ける．これは，式 (1.8) の下で計算を行っても：

$$\underbrace{\langle M | C_i \rangle \langle C_i | M \rangle}_{\|\Psi_{M \rightarrow C_i}\|^2} \geq 0, \quad \underbrace{\langle M | C_1 + C_2 \rangle}_{\Psi_{M \rightarrow C_1 + C_2}} = \langle M | C_1 \rangle + \langle M | C_2 \rangle \quad (1.9)$$

^{*3}内積が 0 になることを意味する．つまり，

$$(\Psi_{M \rightarrow C_1} \Psi_{C_1 \rightarrow S})^* \Psi_{M \rightarrow C_2} \Psi_{C_2 \rightarrow S} = 0.$$

この項は原理的に電子が 2 つの経路を同時に通る確率を示す．

となり、特に矛盾にならないので $|M\rangle, |C_i\rangle$ など上手くすることで式 (1.8) が成立するように作れるからである。上式 (1.9) では内積の定義より $\langle M|C_i\rangle \in \mathbb{C}$ の数になることと、式 (1.2) を用いて

$$\langle M|C_i\rangle\langle C_i|M\rangle = \underbrace{\langle M|C_i\rangle(\langle M|C_i\rangle)^*}_{\text{複素ノルム}} \geq 0. \quad (1.10)$$

図 1.1 の論議に戻って、二重スリットの確率振幅 $\Psi_{M \rightarrow S}$ を Dirac 表示を用いて計算してみる。電子の 2 通りの経路を考えると、式 (1.7) より:

$$\Psi_{M \rightarrow S} = \langle M|C_1\rangle\langle C_1|S\rangle + \langle M|C_2\rangle\langle C_2|S\rangle. \quad (1.11)$$

二重スリットの実験で電子の確率振幅は式 (1.11) より計算できる。さらに、ここでスリットの個数を増やして n -スリットを考えてみよう。この場合は、電子の経路が n 個あるので、

$$\Psi_{M \rightarrow S}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \langle M|C_i\rangle\langle C_i|S\rangle = \langle M| \left(\sum_{i=1}^n |C_i\rangle\langle C_i| \right) |S\rangle \quad (1.12)$$

まで拡張できる。こうやってスリットの個数を増やせばどうなるんだろう？これがファインマンが彼の論文で投げた最も大事な質問であった。ここでファインマンが提唱した重要なアイデア^{*4}を紹介する:

Feynman のアイデア

スリットの個数が無限に多い極限 ($n \rightarrow \infty$) では、スリットの穴が空間を全て埋めてスリットのない**真空状態**と等しくなる。

極限 $n \rightarrow \infty$ では、式 (1.12) は始状態と終状態のみに依存するものとして:

$$\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n\rangle\langle C_n|. \quad (1.13)$$

スリットの個数 n がどんどん増えて、 $n \rightarrow \infty$ になれば、図 1.1 のスリット C 上ではどの点を取ってもスリットの穴になってしまう。つまり、スリットの穴ですべての空間が埋められるようになり、実質**真空と同じ様な物理現象**を示すはずである。真空状態では、電子と相互作用するスリットがないため、始状態と終状態のみで電子の確率振幅が決まる:

$$\langle M|S\rangle = \langle M| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |C_n\rangle\langle C_n| \right) |S\rangle. \quad (1.14)$$

^{*4}Dirac より初めて提案され、ファインマンが完成させた理論 (1946) である。このようなアイデアを拡張すれば、「経路積分」まで辿り着けるがここでは扱わない。

以上より, $|M\rangle, |S\rangle$ とは関わらず式 (1.13) が常に成立する. 以上, n -スリットに対して一般に式 (1.13) が成り立つこと確認した:

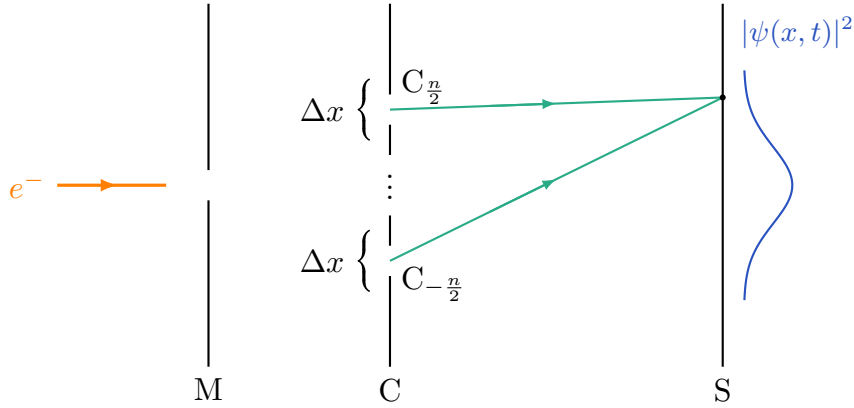


図 1.2: ファインマンの思考実験: n -スリット

ここからスリット状態 $|C_i\rangle$ の物理的意味について考える. 状態 $|C_i\rangle$ は第 i 番目のスリットを通過する電子の量子的状態を示す. これは, 内積 $\langle M|C_i\rangle$ が M を出てスリット C_i に行く確率振幅であることを思い出せばその意味がより鮮明に分かる. 一方で, スリットの座標 x_i と状態 $|C_i\rangle$ の単射写像 $f: x_i \mapsto |C_i\rangle$ を以下のように作ることができる:

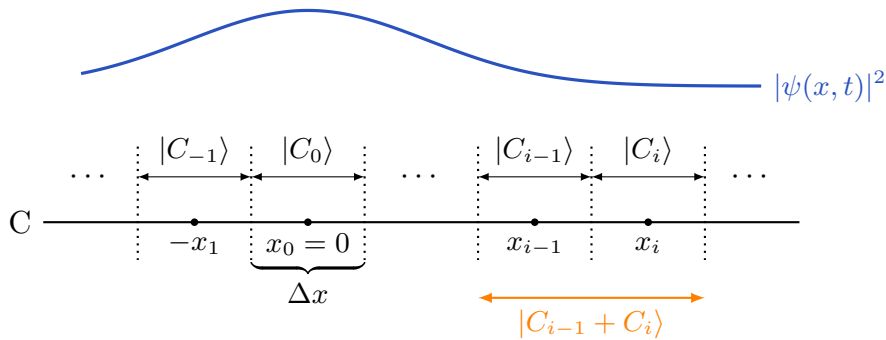


図 1.3: 状態 $|C_i\rangle$ の座標化

ゆえに, 図 1.3 のようにスリットに座標 x_i を与えると状態 $|C_i\rangle$ はその座標 x_i と幅 Δx により一意的に決まる^{*5}ため, $|C_i\rangle$ は以下のように展開できる:

$$|C_i\rangle = f(\Delta x)|x_i\rangle. \quad (1.15)$$

^{*5}確率振幅 $\langle M|C_i\rangle$ は電子が M を出て C_i のスリットを通過するまでの確率振幅を意味する. よって, スリットの座標 x_i とその幅 Δx のみで決定することができる.

ここで $|x_i\rangle$ は第 i 番目のスリットに与えた座標 x_i の位置ベクトルである．すると，式 (1.15) の展開では $|x_i\rangle$ を**基底 (Basis)** として持っている解析できる．

1.1.3 電子の量子状態の決定

ここで $|C_i\rangle$ が重ね合わせの原理を満たしていることを用いると $f(\Delta x)$ を決定することができる．そのため，スリット数が十分多いとき，電子がスリット C_{i-1} か C_i を通過するときの確率振幅について考える．重ね合わせの原理によると，

$$\langle M|C_{i-1} + C_i\rangle = \langle M|C_{i-1}\rangle + \langle M|C_i\rangle. \quad (1.16)$$

ここで式 (1.16) より，このときの電子の転移確率 $P_{M \rightarrow C_{i-1} + C_i}$ は

$$\underbrace{\langle M|C_{i-1} + C_i\rangle \langle C_{i-1} + C_i|M\rangle}_{P_{M \rightarrow C_{i-1} + C_i}} = \langle M|C_{i-1}\rangle \langle C_{i-1}|M\rangle + \langle M|C_i\rangle \langle C_i|M\rangle. \quad (1.17)$$

一方，スリットごとでその幅を異なるものとして取っても一般性を失うことはないので，今後の論議ではスリット C_i の幅を Δx_i とする．スリット数が十分大きいときはスリット C_{i-1} と C_i を合わせて幅 $\Delta x_{i-1} + \Delta x_i$ の 1 つのスリットとして見なせることができる (図 1.4):

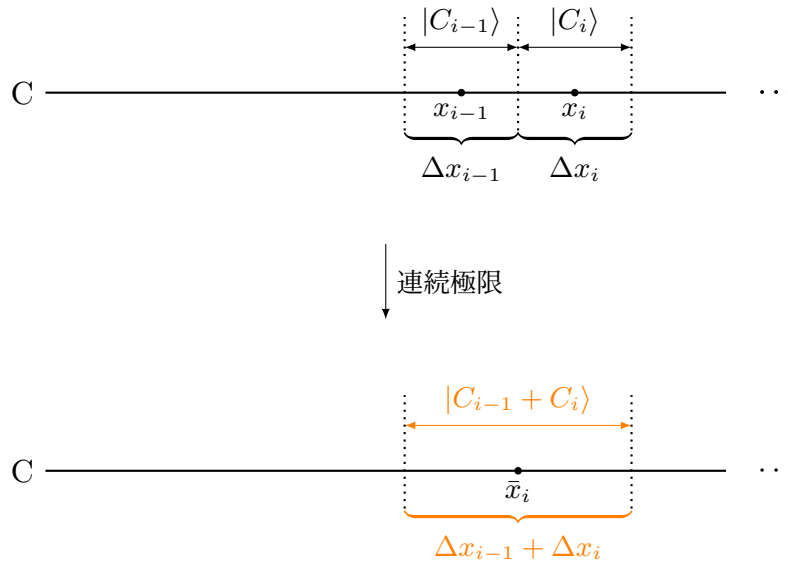


図 1.4: スリットの連続極限 ($n \rightarrow \infty$)

ここから図 1.4 の通り, スリット (C_1, C_2, \dots) ごとの穴に連続極限^{*6}を与えると,

$$|C_{i-1} + C_i\rangle = \underbrace{f(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}_{\text{幅 } \Delta x_{i-1} + \Delta x_i \text{ になる穴として見なす}} |\bar{x}_i\rangle, \quad \bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \quad (1.18)$$

これを式 (1.17) より得られた転移確率 $P_{M \rightarrow C_{i-1} + C_i}$ の式に代入することで以下のような結果が導かれる:

$$|f(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)|^2 |\langle M | \bar{x}_i \rangle|^2 = |f(\Delta x_{i-1})|^2 |\langle M | x_{i-1} \rangle|^2 + |f(\Delta x_i)|^2 |\langle M | x_i \rangle|^2. \quad (1.19)$$

この計算では式 (1.2) の複素共役表示を用いた. また, 十分多くなスリット数 n に対しては $\Delta x_i \rightarrow 0$ となる^{*7}ため, 近似式

$$|\langle M | x_{i-1} \rangle|^2 \simeq |\langle M | x_i \rangle|^2 \simeq |\langle M | \bar{x}_i \rangle|^2 \quad (1.20)$$

が成立する. 近似式 (1.20) により, 式 (1.19) はさらに以下の関数方程式を導く:

$$|f(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)|^2 = |f(\Delta x_{i-1})|^2 + |f(\Delta x_i)|^2. \quad (1.21)$$

この関数方程式 (1.21) より, 基底変換 (1.15) の関数 $f(\Delta x)$ は一意的に定まる. また, この関数方程式はスリットと通過する電子の量子状態という特殊な状態の下で導かれたが, 関数 $f(\Delta x)$ は基底 $|x_i\rangle$ が持つ固有な特性であることに注意すれば一般的に成立することが明らかである. さて, 関数方程式 (1.21) の関数解 $f(\Delta x)$ を求めるため, テイラー展開^{*8}

$$|f(\Delta x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\Delta x)^n = \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 (\Delta x)^2 + \dots \quad (1.22)$$

を考える. ここで $\alpha_0 = 0$ として定数項を落とした理由は, 電子が幅のないスリット ($\Delta x \rightarrow 0$) を通過することはできないので

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Psi_{M \rightarrow C_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle M | C_i \rangle = 0 \quad (1.23)$$

が要請されたからである. しかし, $k \geq 2$ に対しては

$$\alpha_k (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)^k \neq \alpha_k (\Delta x_{i-1})^k + \alpha_k (\Delta x_i)^k \quad (1.24)$$

^{*6}有限個のスリットを持つ場合はスリットごとの穴が離散的に分布していたが, スリットの個数が十分多くなればスリットごとの穴が連続分布に近づく. 遂に $n \rightarrow \infty$ になればスリットのない真空状態 (**Vacuum**) と等しくなる (ファインマン原理).

^{*7}数学的厳密性を保つためには, $\sup(\Delta x_i) \rightarrow 0$ が望ましい.

^{*8}一般的に $f(\Delta x)$ は複素関数になってしまう恐れがあるが, $|f(\Delta x)|^2$ は実関数になり, テイラー展開できる. これが $f(\Delta x)$ でなく, $|f(\Delta x)|^2$ をテイラー展開する理由である.

なので $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$ が得られる．よって，関数 $f(\Delta x)$ は以下のように与えられる：

$$|f(\Delta x)|^2 = \alpha_1 \Delta x. \quad (1.25)$$

あるいは， $|C_i\rangle$ の基底変換：

$$|C_i\rangle = \alpha_1 \sqrt{\Delta x} |x_i\rangle = \sqrt{\Delta x} |x'_i\rangle. \quad (1.26)$$

式 (1.25) および (1.26) では，スリット間隔が等間隔になるように設定を戻した ($\Delta x_i \rightarrow \Delta x$)．また， $f(\Delta x)$ に対して $\alpha_1 |x_i\rangle \mapsto |x'_i\rangle$ として位置基底を再定義すれば式 (1.26) のように綺麗な変換式が導かれる．一方，ファインマンのアイデアより得られた式 (1.13) の上に基底変換 (1.26) を与えると，位置空間における射影演算子が以下のように得られる：

位置空間における射影演算子

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n\rangle \langle C_n| \xrightarrow{\text{連続極限}} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta x |x'_n\rangle \langle x'_n| = \int dx |x\rangle \langle x|. \quad (1.27)$$

また，式 (1.27) より導かれた射影演算子を用いて様々な演算を基底 $|x\rangle$ の下で展開することができる．例えば，状態 $|\psi\rangle$ を基底 $|x\rangle$ 上の展開は

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle \stackrel{(1.1)}{=} \int dx \psi(x) |x\rangle. \quad (1.28)$$

これは，線形代数の言葉で言えばあるベクトル \mathbf{v} の基底 $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$ 上^{*9}の展開が

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}^i \quad (1.29)$$

として与えられることに対応される．つまり，式 (1.28) は数学的にベクトル $|\psi\rangle$ の基底表現を Dirac 表示 (あるいは，Bra-ket 表示) の下で展開したことに過ぎない．式 (1.29) から，式 (1.28) を展開を**無限基底による展開**^{*10}として解析することができる．実際 n -スリットの場合，式 (1.12) のようにその転移確率が

$$\langle M|S\rangle = \langle M| \left(\sum_{i=1}^n |C_i\rangle \langle C_i| \right) S\rangle \quad (1.30)$$

^{*9}具体的には，正規直交基底．

^{*10}恒等演算子 (1.27) はファインマンのアイデアより導かれた**真空状態**の基底からなる演算子であるため，真空状態を無限個の基底を持つことが分かる．

として展開できるので、以下のような n -スリットでの射影演算子の表現を得る:

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n |C_i\rangle\langle C_i|. \quad (1.31)$$

以上の論議より、スリットの個数が数学的には基底に対応されるという結論^{*11}に辿り着く。真空の場合は、ファインマンのアイデアより無限個のスリットとして解析できるので基底も無限個になることが納得できる。

1.1.4 位置基底選択の任意性

さて、ここで基底 $|x_i\rangle$ について考えてみる。基底 $|x_i\rangle$ は 図 1.3 より定義されたため、スリットの幅 Δx を用いて

$$|x_i\rangle = |x_0 + i\Delta x\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x\rangle. \quad (1.32)$$

これは $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_i = \dots$ となる特殊な場合である。しかし、脚注^{*7}で要請した通り、一般の $\sup(\Delta x_i) \rightarrow 0$ の元では:

$$|x'_i\rangle = |x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \Delta x_k\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x\rangle \quad (1.33)$$

となり、特に問題は起こらない。つまり、 $|x_i\rangle$ の代わりにこの $|x'_i\rangle$ を位置基底として取っても連続極限を取れば同じ基底に収束^{*12}する。スリットの細かい設定 (スリットの幅や位置など) によって異なる基底はいくらでも取れるが、これらの基底選択によって物理系が変わる^{*13}ことはない:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x |x_i\rangle\langle x_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i |x'_i\rangle\langle x'_i| = \int dx |x\rangle\langle x|. \quad (1.34)$$

よって、異なる基底 $|x\rangle$ と $|x'\rangle$ の間の変換式を

$$|x'\rangle = \int dx |x\rangle\langle x|x'\rangle \quad (1.35)$$

を演算するより導くこともできる。式 (1.35) から Dirac をデルタ関数の定義を思い出せば、以下のような基底間変換式が得られる:

^{*11} 正確には、電子の可能な各経路がそれぞれの基底に対応される。

^{*12} Riemann 和が収束すれば、その収束値は分割 Δx_i の取り方に依らず一定である。

^{*13} これは、古典力学における正準変換 (Canonical transformation) に該当するものである。

基底変換の完全性

$$\langle x|x'\rangle = \langle x'|x\rangle = \delta(x - x'). \quad (1.36)$$

先述した通り，式 (1.36) の射影演算子は無限基底上の表現である．特に有限次元の基底においては，式 (1.31) より

$$|C_j\rangle = \sum_{i=1}^n |C_i\rangle \langle C_i|C_j\rangle \quad (1.37)$$

が得られ，有限次元における射影演算子は以下のように与えられる：

基底変換の完全性 (有限次元)

$$\langle C_i|C_j\rangle = \langle C_j|C_i\rangle = \delta_{ij}. \quad (1.38)$$

1.1.5 非相対論的量子力学系の経路積分

以上の論議で，導入した Dirac notation 上で位置空間の射影演算子を以下のように導入することができた：

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \mathbf{1}, \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x'). \quad (1.39)$$

また，粒子の物理状態 (x_i, p_i) は位置と運動量の組み合わせによって決定されるため，物理系の記述のためには位置空間の射影演算子 (1.39) 以外にも運動量空間の射影演算子の表現が必要であることがわかる．そのため，運動量空間の固有状態 $|p\rangle$ ^{*14}を導入して以下のような演算子を確かめてみよう：

$$\begin{aligned} \left(\int dp |p\rangle \langle p| \right) |\xi\rangle &= \int dp dx dx' |x'\rangle \langle x'|p\rangle \langle p|x\rangle \langle x|\xi\rangle \\ &= \int dx dx' |x'\rangle 2\pi \delta(x - x') \langle x|\xi\rangle = 2\pi \int dx |x\rangle \langle x|\xi\rangle = 2\pi |\xi\rangle. \\ \hookrightarrow \delta(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}, \quad \langle x|p\rangle = e^{ipx} \end{aligned} \quad (1.40)$$

^{*14}つまり，運動量演算子 \hat{P} に対して $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$ を満たすような基底。

ここで位置空間と運動量空間の変換因子 $\langle x|p\rangle$ は以下のように導入された:

C.1. 位置空間と運動量空間の基底変換

ディラックの正準量子化から出発する. ディラックがやったように^{*15}, 古典系に非可換代数を要請すれば $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ を満たさないといけない (その他の組み合わせは全て 0) ことがわかる. ここから, Campbell-Backer-Hausdorff の公式から:

$$e^{i\hat{p}a}\hat{x}e^{-i\hat{p}a} = \hat{x} - i[\hat{x}, \hat{p}]a + \mathcal{O}(a^2) = \hat{x} + a. \quad (1.41)$$

すると, この展開 (1.41) に右から $e^{i\hat{p}a}$ をかければ

$$\langle x'|e^{i\hat{p}a}\hat{x} = \langle x'|(\hat{x} + a)e^{i\hat{p}a} = (x' + a)\langle x'|e^{i\hat{p}a} \quad (1.42)$$

となって $\langle x'|e^{i\hat{p}a} = \langle x' + a|$ が成立^{*16}することがわかる. これはある任意の状態ベクトル $|\xi\rangle$ に対して展開し, 両辺比べることで

$$\begin{aligned} \langle x'|e^{i\hat{p}a}|\xi\rangle &= \langle x'|\xi\rangle + ia\langle x'|\hat{p}|\xi\rangle + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \langle x' + a|\xi\rangle = \xi(x') + a\frac{\partial}{\partial x}\xi(x)\Big|_{x=x'} + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (1.43)$$

つまり, 項別要請は

$$\langle x'|\hat{p}|\xi\rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\xi\rangle. \quad (1.44)$$

故に, 式 (1.44) で状態 $|\xi\rangle$ の代わりに運動量空間の固有状態を選べば ($\xi = p$), 式 (1.44) はさらに以下を導く:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p\rangle = p\langle x'|p\rangle \quad \rightarrow \quad \langle x'|p\rangle = e^{ipx'}. \quad (1.45)$$

式 (1.40) の計算結果から, 運動量空間の射影演算子も位置空間のときと同様に

運動量空間における射影演算子

$$\mathbf{1} = \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p|. \quad (1.46)$$

^{*15}P.A.M. Dirac, 'The Principles of Quantum Mechanics', (1930).

^{*16}ブラケットのラベルは固有値を意味する.

以上の論議により，式 (1.27) および式 (1.46) として位置空間と運動量空間両方においての射影演算子の表現を求めることができた．このことから，運動量空間における基底の変換は次のように与えられることがわかる：

$$|p'\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p|p'\rangle \quad \rightarrow \quad \langle p|p'\rangle = 2\pi\delta(p-p'). \quad (1.47)$$

さては，位置空間と運動量空間における式 (1.27)，(1.36)，(1.46)，(1.47) を用いて確率振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ を展開してみよう．この遷移において以下のような座標：

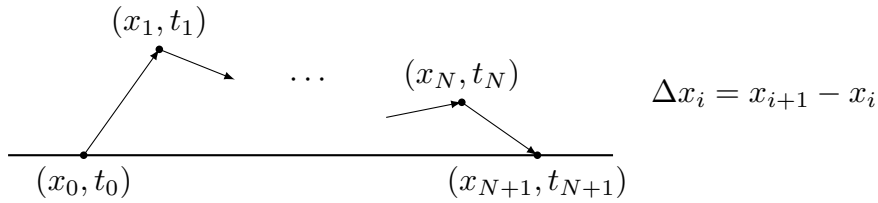


図 1.5: 遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ における経路積分表示のための経路.

を系に付与する．すると，遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ を以下のように展開することができる：

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \langle x_{N+1}, t_{N+1} | x_N, t_N \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x_0, t_0 \rangle \\ &= \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \prod_{j=0}^N \langle x_{j+1}, t_j | e^{-i\hat{H}\Delta t_j} | x_j, t_j \rangle \\ &\quad \hookrightarrow |x_{N+1}, t_{N+1} \rangle = e^{i\hat{H}(t_{N+1}-t_N)} |x_{N+1}, t_N \rangle \end{aligned} \quad (1.48)$$

ここで計算をと止めて時間発展演算子 $e^{i\hat{H}\Delta t_j}$ の導入に関して考察してみよう．ここには 2 通りの方法がある：(a) シュレーディンガー方程式を用いる方法^{*17}と (b) ディラックの正準量子化を古典力学から引き上げる方法がある．以下では，より理論的な構造が納得し

^{*17} これはすごく大凡で直感的なやり方で，シュレーディンガー方程式を認めて：

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t; t_0) |\psi(t_0)\rangle = \hat{H} \hat{U}(t; t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad \leftarrow |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t; t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

と展開して導入する方法である．上の展開で，時間発展演算子の満たす微分方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t; t_0) = \hat{H} \hat{U}(t; t_0) \quad \rightarrow \quad \hat{U}(t; t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$$

が得られ， $\psi(x, t) = \langle x | \hat{U}(t-t_0) | \psi \rangle = \langle x, t | \psi$ から $|x, t\rangle = e^{i\hat{H}(t-t_0)} |x, t_0\rangle$ が導かれる．このようなアプローチはすごく直感的であるが，シュレーディンガー方程式をどう認めるかの問題が残っている．実験を認めるような理解の仕方はおすすめしない．

やすい後者のアプローチに関して考察してみる:

C.2. ディラック正準量子化の再考察と時間発展演算子

以下でディラックの正準量子化条件について再考察してみよう。まずは古典系のポアソン方程式から出発すれば良いが、古典系の理論（ハミルトン＝ヤコビ理論など）で最も大事な概念はポアソン括弧なのでそこから論議を始める。任意の2つの力学変数 u, v におけるポアソン括弧の定義は:

$$\{u_i, v_j\}_{pb} = \sum_{r=1,2,3} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \frac{\partial v_j}{\partial p_r} - \frac{\partial u_i}{\partial p_r} \frac{\partial v_j}{\partial x_r} \right\}, \quad (1.49)$$

すると、複数の物理量の積からなるポアソン括弧は式 (1.49) から以下のように整理することができる:

$$\begin{aligned} \{u_1 u_2, V\}_{pb} &= \sum_{r=1,2,3} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_r} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \right) \frac{\partial V}{\partial p_r} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_r} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial p_r} \right) \frac{\partial V}{\partial x_r} \right\} \\ &= u_1 \{u_2, V\}_{pb} + \{u_1, V\}_{pb} u_2, \end{aligned} \quad (1.50)$$

同様な計算を通して

$$\{\hat{U}, \hat{v}_1 \hat{v}_2\}_{pb} = \{\hat{U}, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 + \{\hat{U}, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{v}_2. \quad (1.51)$$

今、古典系から量子系への引き上げのために非可換代数を導入したので、量子系の記述のためには $[\hat{u}_i, \hat{u}_j] = \hat{u}_i \hat{u}_j - \hat{u}_j \hat{u}_i$ などがどうなるか^{*18}の情報が必要である。そのため、ポアソン括弧 $\{\hat{u}_1 \hat{u}_2, \hat{v}_1 \hat{v}_2\}_{pb}$ を以下の2通りで展開してみよう:

1. $\hat{u}_1 \hat{u}_2$ を先にばらす場合

$$\begin{aligned} \{\hat{u}_1 \hat{u}_2, \hat{v}_1 \hat{v}_2\}_{pb} &= \hat{u}_1 \{\hat{u}_2, \hat{v}_1 \hat{v}_2\}_{pb} + \hat{u}_2 \{\hat{u}_1, \hat{v}_1 \hat{v}_2\}_{pb} \\ &= \hat{u}_1 \{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 + \hat{u}_1 \{\hat{u}_2, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{v}_2 \\ &\quad + \hat{u}_2 \{\hat{u}_1, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 + \hat{u}_2 \{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{v}_2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

^{*18}明らかに0にはならない(非可換なので)。また、各 \hat{U} や \hat{V} は \hat{u}_i, \hat{v}_i からなる関数 $\hat{U}(\hat{u}_1, \hat{u}_2), \hat{V}(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ として取る。

2. $\hat{v}_1\hat{v}_2$ を先にばらす場合

$$\begin{aligned}
\{\hat{u}_1\hat{u}_2, \hat{v}_1\hat{v}_2\}_{pb} &= \{\hat{u}_1\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 + \{\hat{u}_1\hat{u}_2, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{v}_2 \\
&= \hat{u}_1 \{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 + \hat{u}_2 \{\hat{u}_1, \hat{v}_2\}_{pb} \hat{v}_1 \\
&\quad + \hat{u}_1 \{\hat{u}_2, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{v}_2 + \{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb} \hat{u}_2 \hat{v}_2.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

しかしながら、これらは同じ式 $\{\hat{u}_1\hat{u}_2, \hat{v}_1\hat{v}_2\}_{pb}$ の展開なので互いを引けば 0 他ならない。式 (1.52) と式 (1.53) の差から：

$$(\hat{u}_1\hat{v}_1 - \hat{v}_1\hat{u}_1) \{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb} = (\hat{u}_2\hat{v}_2 - \hat{v}_2\hat{u}_2) \{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb}. \tag{1.54}$$

以上より得られる関係式 (1.54) から、ポアソン括弧 $\{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb}$ や $\{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb}$ を最も一般的な形として

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1\hat{v}_1 - \hat{v}_1\hat{u}_1 &= i\hbar_1(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb} \\
\hat{u}_2\hat{v}_2 - \hat{v}_2\hat{u}_2 &= i\hbar_2(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

で書けるが、これを再び得られたもとの関係式 (1.54) に代入することで上式の関係数 $\hbar_i(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$ ($i = 1, 2$) は具体的に $\hbar_1(\hat{u}_1, \hat{v}_1) = \hbar_2(\hat{u}_2, \hat{v}_2) = \hbar$ のみが許されることがわかる。故に、関係式 (1.55) は最終的に

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1\hat{v}_1 - \hat{v}_1\hat{u}_1 &= i\hbar \{\hat{u}_1, \hat{v}_1\}_{pb} \\
\hat{u}_2\hat{v}_2 - \hat{v}_2\hat{u}_2 &= i\hbar \{\hat{u}_2, \hat{v}_2\}_{pb}
\end{aligned} \tag{1.56}$$

で収まる。これがディラック正準量子化と呼ばれる^{*19}量子化の定式化である。さて、ここより得られた関係式 (1.56) を用いると古典力学の正準関係式を量子論的關係式で引き上げることができる。故に、時間発展の関係においては：

$$\frac{d}{dt}\hat{Q}(t) = \{\hat{Q}(t), \hat{H}(t)\}_{pb} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{Q}(t), \hat{H}(t)] \tag{1.57}$$

として展開^{*20}が得られる。これは時間発展演算子におけるハイゼンベルク方程式他ならない。この方程式 (1.57) から再び：

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{Q}(t) = \hat{Q}(t)\hat{H}(t) - \hat{H}(t)\hat{Q}(t), \tag{1.58}$$

^{*19}現代の物理学においては、場の量子化との区別のため**第一量子化**と呼ばれることが多い。

^{*20} $\hat{Q}(\hat{x}_r, \hat{p}_r)$ は任意の演算子である。

ここで演算子 $\hat{Q}(t)$ はある時間に依存しない演算子^{*21*} \hat{Q}_0 の期待値の時間発展成分を演算子に乗せたものとして考えられるので

$$\langle Q \rangle = \langle \psi(t) | \hat{Q}_0 | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{Q}_0 \hat{U}(t; t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (1.59)$$

から直ちに演算子の展開 $\hat{Q}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{Q}_0 \hat{U}(t; t_0)$ が得られ、故に式 (1.58) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) \hat{Q}(t) + \hat{U}(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{Q}(t) &= \hat{Q}_0 \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0), \\ \xrightarrow{(1.58)} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{Q}(t) &= i\hbar \left(\hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{Q}_0 \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) \hat{Q}(t) \right) \\ &= \hat{Q}(t) \hat{H}(t) - \hat{H}(t) \hat{Q}(t) \end{aligned} \quad (1.60)$$

を^{*22}導く。そこから、式 (1.60) で再び $\hat{Q}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{Q}_0 \hat{U}(t; t_0)$ であることに注意すれば:

$$\hat{Q}(t) \left(i\hbar \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{H}(t) \right) = \left(i\hbar \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{H}(t) \right) \hat{Q}(t). \quad (1.61)$$

ここで**シューアの補題 (Schur's lemma)**により、任意でとった演算子 $\hat{Q}(t)$ と可換な演算子は恒等演算子の定数倍に限るので

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) = \hat{U}(t; t_0) \hat{H}(t) + \lambda \hat{U}(t; t_0), \quad (1.62)$$

あるいは、 $\hat{Q}(t)$ と同様なやり方で $\hat{H}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{H}_0 \hat{U}(t; t_0)$ として展開^{*23}でき

^{*21}もちろん、測ろうとしてる物理量 \hat{Q}_0 がそもそも時間に依存するものもある。しかし、この場合は古典力学のポアソン括弧関係式 (1.57) が修正されるので、最終的に得られる結果 (式 (1.64) など) は変わらない。

^{*22}ここで、量子力学で考える系は粒子の数が変わらない系である。故に、この確率流密度が保存されるべきなので

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{U}(t; t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad \rightarrow \quad \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{U}(t; t_0) = \mathbf{1}$$

を満たさないといけない。

^{*23}この \hat{X}_0 の表記はある時刻 $t = t_0$ での演算子 $\hat{X}_0 := \hat{X}(t_0)$ として定義される。つまり、

$$\langle X(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{X}(t_0) | \psi(t_0) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\delta t \rightarrow 0} \langle X(t_0 + \delta t) \rangle &= \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t; t_0) \left(\hat{X}(t_0) + \frac{\partial \hat{X}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \delta t + \mathcal{O}(\delta t) \right) \hat{U}(t; t_0) | \psi(t_0) \rangle \\ &= \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{X}(t_0) \hat{U}(t; t_0) | \psi(t_0) \rangle \\ &\quad + \delta t \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t; t_0) \left(\frac{\partial \hat{X}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \right) \hat{U}(t; t_0) | \psi(t_0) \rangle + \mathcal{O}(\delta t). \end{aligned}$$

$$\hookleftarrow t = t_0 + \delta t$$

るので, 式 (1.62) をさらに

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) = \hat{H}_0 \hat{U}(t; t_0) + \lambda \hat{U}(t; t_0) = [\hat{H}_0 + \lambda] \hat{U}(t; t_0) \quad (1.63)$$

とも書ける. すると, このパラメータ λ は系のエネルギースペクトルを一様にシフトさせるだけの役割をしているので, 系の物理を変えない. 故に, $\lambda = 0$ を選べば:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) = \hat{H}_0 \hat{U}(t; t_0) \quad \xrightarrow{\hbar=1} \quad \hat{U}(t; t_0) = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}. \quad (1.64)$$

時間発展演算子 $\hat{U}(t; t_0)$ はこのように導入された. ここで, 境界条件 $\hat{U}(t_0; t_0) = \mathbf{1}$ に注意せよ.

さて, 経路積分表示の計算 (1.48) に戻ろう. 遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \prod_{j=0}^N \langle x_{j+1}, t_j | e^{-i\hat{H}\Delta t_j} | x_j, t_j \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \prod_{j=0}^N \langle x_{j+1}, t_j | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t_j} e^{-iV(\hat{x})\Delta t_j} | x_j, t_j \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dx_i dp_i}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N \langle x_{j+1} | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t_j} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-iV(\hat{x})\Delta t_j} | x_j \rangle \end{aligned} \quad (1.65)$$

のように展開できる. ここで 2 行目の計算では極限 $N \rightarrow \infty$ を実施することによって:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j, V(\hat{x}) \Delta t_j \right] = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0+} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j, V(\hat{x}) \Delta t_j \right] = 0 \quad (1.66)$$

が得られ, Campbell-Backer-Hausdorff の公式により得られる結果

$$\begin{aligned} \exp \left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j - iV(\hat{x}) \Delta t_j \right) &= \exp \left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j \right) \exp (-iV(\hat{x}) \Delta t_j) + \mathcal{O}(\Delta t_j) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp \left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j \right) \exp (-iV(\hat{x}) \Delta t_j) \end{aligned} \quad (1.67)$$

のように \hat{X}_0 と $\hat{X}(t)$ が導入された. \hat{Q}_0 も同様である. もちろん, ここでは \hat{H}_0 や \hat{Q}_0 が時間に非依存的な状況について論議しているので第 2 項は無視される.

を用いた。故に、固有状態 $\hat{p}|p_j\rangle = p_j|p_j\rangle, \hat{x}|x_j\rangle = x_j|x_j\rangle$ に注意すると式 (1.65) による遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ は最終的に以下のように計算することができる:

$$\begin{aligned}
\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dx_i dp_i}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N \langle x_{j+1} | e^{-i \frac{\hat{p}^2}{2m} \Delta t_j} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-i V(\hat{x}) \Delta t_j} | x_j \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dx_i dp_i}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N \left(e^{-i H_j(x, p) \Delta t_j} e^{i p_j \Delta x_j} \right) \\
&\quad \curvearrowright \quad H_j(x, p) = \frac{p_j^2}{2m} + V(x_j), \quad (p_j, x_j \in \mathbf{C}) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \left(\prod_{i=1}^N \frac{dx_i dp_i}{2\pi} \right) \exp \left(i \sum_{j=0}^N \Delta t_j \left(p_j \frac{\Delta x_j}{\Delta t} - H_j(x, p) \right) \right) \\
&= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(i \int_{t=t_i}^{t=t_f} L dt \right)
\end{aligned} \tag{1.68}$$

これが遷移振幅の**経路積分表示 (Path integral representation)** と呼ばれるものである。ここで L はラグランジアンとして $L = p\dot{x} - H(x, p)$ として定義される。また、式 (1.68) 上の表記 $\mathcal{D}x$ や $\mathcal{D}p$ は以下のように定義される:

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N dx_i, \quad \mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \frac{dp_i}{2\pi}. \tag{1.69}$$

1.2 生成汎函数としての経路積分

前節の論議から、 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ を経路積分表示表すことができた。この節では、このような経路積分表示を生成汎函数として採用し、様々な物理量の期待値を楽に計算する汎函数的方法を紹介する。このような汎函数を用いた計算方法は後で紹介する量子力学における汎函数的摂動論での計算で有用に使える。まず、真空期待値 $\langle 0|0 \rangle$ の経路積分表示について取り組んでみよう：

1.2.1 真空ノルムの経路積分表示とエプシロン処方

先述した通り、この説で主に議論の対象になるのは真空 $\langle 0|0 \rangle$ である。前の節などでは遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ の経路積分表示について調べたので、ここからはこの物理量 $\langle 0|0 \rangle$ の経路積分表示について取り組んでみよう。ここで空間の場が必ずしも相互作用のない自由場とは限らないが、遷移振幅要素で $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$ をとればその状態 $|x_i, t_i\rangle$ や $|x_f, t_f\rangle$ は自由場のものとして扱える^{*24}。故に、ここから収束性を保証するために $\hat{H} \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (1 - i\epsilon)\hat{H}$ で切り替えると^{*25}

$$\begin{aligned} |x_i, t_i\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} e^{i(1-i\epsilon)\hat{H}_0 t_i} |x_i\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_n |n\rangle \langle n| e^{i(1-i\epsilon)\hat{H}_0 t_i} |x_i\rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_n e^{i(1-i\epsilon)E_n t_i} \psi_n^*(x_i) |n\rangle \xrightarrow{t_i \rightarrow -\infty} \psi_0^*(x_i) |0\rangle \end{aligned} \quad (1.70)$$

や式 (1.70) の両辺に任意の函数 (テスト函数) $\chi(x_i)$ を書いて積分したもの：

$$\lim_{t_f \rightarrow +\infty} \int dx_i \chi(x_i) |x_i, t_i\rangle = \int \psi_0^*(x_i) \chi(x_i) |0\rangle = \langle 0 | \chi | 0 \rangle \quad (1.71)$$

が得られる。ここで式 (1.70) の展開では基底エネルギー $E_0 = 0$ とおいた (そうでなければ、エネルギースペクトル全体を一斉に定数ほど引き下げれば良い)。引き続き、 $\langle x_f, t_f |$ に対しても同様な論議を通せば式 (1.71) と同様な関係式が得られるので、これらの関係式から遷移振幅 $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ と真空 $\langle 0|0 \rangle$ の関係式を

$$\int dx_i dx_f \chi(x_i) \eta^*(x_f) \langle x_f, +\infty | x_i, -\infty \rangle = \langle 0 | \chi | 0 \rangle \langle \eta | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle \quad (1.72)$$

^{*24} イメージ的には、相互作用がある前の状態と相互作用が終わった後の状態に引き伸ばす操作に相応する。

^{*25} このようなハミルトニアン²⁵の切り替え $\hat{H} \rightarrow (1 - i\epsilon)\hat{H}$ をエプシロン処方という。

が導かれる．状態 $\langle x_f, t_f |$ に対しては式変形 (1.70) や (1.71) が以下のような形として与えられることに注意せよ：

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \langle x_i | e^{-i(1-i\epsilon)\hat{H}_0 t_f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_n \langle x_i | e^{-i(1-i\epsilon)\hat{H}_0 t_f} | n \rangle \langle n | \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \sum_n \langle n | e^{-i(1-i\epsilon)E_n t_f} \psi_n(x_i) \xrightarrow{t_f \rightarrow +\infty} \langle 0 | \psi_0(x_i), \end{aligned} \quad (1.73)$$

およびその積分

$$\lim_{t_f \rightarrow +\infty} \int dx_f \langle x_f, t_f | \eta^*(x_f) = \int \psi_0(x_i) \eta^*(x_i) | 0 \rangle = \langle 0 | \langle \eta | 0 \rangle. \quad (1.74)$$

ここで各項 $\langle 0 | \chi \rangle$ や $\langle \eta | 0 \rangle$ は定数となるが， $\langle 0 | \chi \rangle \langle \eta | 0 \rangle$ を経路積分の規格化定数の部分に入れてくれば，結局 $\langle 0 | 0 \rangle$ はなおさら簡単に以下のような経路積分表示として書ける：

真空の経路積分表示

$$\langle 0 | 0 \rangle = Z_0 \int \bar{\mathcal{D}}x \bar{\mathcal{D}}p \exp \left(i \int_{t=-\infty}^{t=\infty} L dt \right). \quad (1.75)$$

ここで記号 $\bar{\mathcal{D}}x$ や $\bar{\mathcal{D}}p$ ，および定数 Z_0 は

$$\bar{\mathcal{D}}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N+1} dx_i, \quad \bar{\mathcal{D}}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \frac{dp_i}{2\pi}, \quad Z_0 = \frac{1}{\langle \eta | 0 \rangle \langle 0 | \chi \rangle}. \quad (1.76)$$

C.3 テスト函数の決定

真空の経路積分表示に関する論議を一旦ここで切って，どのようなテスト函数 $\chi(x_i)$ や $\eta^*(x_f)$ を持ってれば式 (1.72) から望ましい結果 (1.75) を導けるかについて少し考えよう．式 (1.72) での各テスト函数 $\chi(x_i)$ や $\eta^*(x_f)$ は任意で取ったものなので，特別に一番簡単なものとして

$$\chi(x_i) = \eta^*(x_f) = 1 \quad (1.77)$$

として取っても構わない．この場合は明らかに：

$$\int dx_i dx_f \langle x_f, +\infty | x_i, -\infty \rangle = \langle 0 | \chi \rangle \langle \eta | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle \quad (1.78)$$

となっており，式 (1.75) の結果を指していることがすぐわかる．

1.2.2 経路積分表示上での T 積

前節の論議から真空 $\langle 0|0\rangle$ の完全な経路積分表示を求めることができた。さては、この節ではこれら真空状態からなる様々な真空期待値 ($\langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle, \dots$ など) の経路積分表示について調べてみよう。以下のような手順で取り組んでみる:

A. 1 点相関関数 $\langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle$

まずは一番簡単なものとして **1 点相関関数 (1-point correlation function)** と呼ばれる量 $\langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle$ の経路積分表示が欲しいが、直ちにこれの経路積分表示に取り組んでみようとするとかかなり大変な過程になるので前節にて導入したトリック (エプシロン処方) を使って導いてみる。そのため、ここの論議では元の $\langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle$ よりも $\langle x_f, t_f|\hat{x}(t_1)|x_i, t_i\rangle$ から出発する:

$$\begin{aligned}
 \langle x_f, t_f|\hat{x}(t_1)|x_i, t_i\rangle &= \int dx_1 dx'_1 \langle x_f, t_f|x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1|\hat{x}(t_1)|x'_1, t_1\rangle \langle x'_1, t_1|x_i, t_i\rangle \\
 &\stackrel{\text{⌞}}{=} t_i < t_1 < t_f, \quad \langle x_1, t_1|\hat{x}(t_1)|x'_1, t_1\rangle = x_1(t_1)\delta(x_1 - x'_1) \\
 &= \int dx_1 x_1(t_1) \langle x_f, t_f|x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1|x_i, t_i\rangle \\
 &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p x_1(t_1) \exp\left(i \int_{t=t_i}^{t=t_f} L dt\right).
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

ここで式 (1.79) の 1 行目の展開ではブラケットの中に位置空間の射影演算子 (1.39) を差し込む操作^{*26}を実施した。また、第 3 行目の展開については前節で得られた遷移振幅 $\langle x_f, t_f|x_1, t_1\rangle$ や $\langle x_1, t_1|x_i, t_i\rangle$ の経路積分表示 (1.68) を用いた。さては、式 (1.79) の展開を真空期待値 $\langle 0|\hat{x}(t)|0\rangle$ として移してみよう。そのためには、前節の**エプシロン処方**を使って $\hat{H} \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (1 - i\epsilon)\hat{H}$ や $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$ を取り、以下の計算を実行すれば良い:

$$\int dx_f dx_i \chi(x_i) \eta^*(x_f) \langle x_f, +\infty|\hat{x}(t_1)|x_i, -\infty\rangle \stackrel{(1.72)}{=} \langle \eta|0\rangle \langle 0|\chi\rangle \langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle. \tag{1.80}$$

ここで項 $\langle x_f, t_f|\hat{x}(t_1)|x_i, t_i\rangle$ の展開は

$$\begin{aligned}
 \langle x_f, t_f|\hat{x}(t_1)|x_i, t_i\rangle &= \sum_{m,n} \langle x_f|n\rangle \langle n|e^{-i(1-i\epsilon)\hat{H}t_f}\hat{x}(t_1)e^{i(1-i\epsilon)\hat{H}t_i}|m\rangle \langle m|x_i\rangle \\
 &\xrightarrow{t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty} \langle x_f|0\rangle \langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle \langle 0|x_i\rangle
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

^{*26} 前節で経路積分の展開で使った操作と同様な操作を行った。

であることに注意せよ. 故に, 式 (1.76) のような積分変数 $\bar{\mathcal{D}}x, \bar{\mathcal{D}}p$ や定数 Z_0 をとれば, 1 点相関関数の経路積分表示を以下のように書ける:

1 点相関関数の経路積分表示

$$\langle 0|\hat{x}(t_1)|0\rangle = Z_0 \int \bar{\mathcal{D}}x \bar{\mathcal{D}}p \, x_1(t_1) \exp \left(i \int_{t=-\infty}^{t=\infty} L \, dt \right). \quad (1.82)$$

B. 2 点相関関数 $\langle 0|T\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle$

さて, 以前の 1 点相関関数の論議を受け, その続きとして **2 点相関関数 (2-point correlation function)** と呼ばれる量 $\langle 0|T\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)|0\rangle$ について考察してみよう. ここで $T\{\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\}$ は時間順序積^{*27}あるいは T 積と呼ばれるもので (A.12) や (A.13) として定義されたものである (付録 A.1 参照). 前の論議と同様に, $t_i < t_1 < t_2 < t_f$ に対して以下の展開を考える:

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | \hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle &= \int dx_2 dx_1 \, x_1(t_1)x_2(t_2) \\ &\quad \times \langle x_f, t_f | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &\hookrightarrow \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \, \exp \left(i \int_{t=t_i}^{t=t_f} L \, dt \right) \quad (1.83) \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \, x(t_1)x(t_2) \exp \left(i \int_{t=t_i}^{t=t_f} L \, dt \right). \end{aligned}$$

以上の展開は各演算子 $\hat{x}(t_1)$ と $\hat{x}(t_2)$ の間に位置空間の射影演算子を挿入することで得られた. 得られた展開式 (1.83) の上でさらに前節にて導入したエプシロン処方を使って $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$ をとれば^{*28}, **A.** と同様なアプローチができて

$$\langle 0|\hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1)|0\rangle = Z_0 \int \bar{\mathcal{D}}x \bar{\mathcal{D}}p \, x_1(t_1)x_2(t_2) \exp \left(i \int_{t=-\infty}^{t=\infty} L \, dt \right), \quad (t_1 < t_2) \quad (1.84)$$

^{*27}たまに, 簡単のために $T\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)$ として括弧を省略する場合もある.

^{*28}式 (1.80) や式 (1.81) と同様な操作である.

が言える．また，ここで 2 点相関関数の経路積分表示 (1.84) 上の $\bar{D}x$ は (1.76) と同様に以下のように定義されているものである：

$$\bar{D}x = \left(\prod_{k=0}^N dx_{i_k^{2 \rightarrow f}} \right) \left(\prod_{k=0}^N dx_{i_k^{1 \rightarrow 2}} \right) \left(\prod_{k=0}^N dx_{i_k^{i \rightarrow 1}} \right) \times dx_2 dx_1. \quad (1.85)$$

↳ 遷移 $2 \rightarrow f$ の経路積分から来た dx_{i_k} ら

すると，式 (1.84) より得られた結果は任意の t_1, t_2 (必ずしも $t_1 < t_2$ とは限らない) に対しては以下のように拡張^{*29}することができる：

2 点相関関数の経路積分表示

$$\langle 0 | T \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) | 0 \rangle = Z_0 \int \bar{D}x \bar{D}p \, x_1(t_1) x_2(t_2) \exp \left(i \int_{t=-\infty}^{t=\infty} L \, dt \right). \quad (1.86)$$

さらに，同様なアプローチをとれば多重相関関数の経路積分表示も

多重相関関数の経路積分表示

$$\langle 0 | T \hat{x}(t_1) \cdots \hat{x}(t_n) | 0 \rangle = Z_0 \int \bar{D}x \bar{D}p \, x_1(t_1) \cdots x_n(t_n) \exp \left(i \int_{t=-\infty}^{t=\infty} L \, dt \right). \quad (1.87)$$

として求められる．

^{*29}一般的に，相異なる時刻 $t_1 \neq t_2$ において $\hat{x}(t_1)$ と $\hat{x}(t_2)$ は非可換となる．このことを考えると明らかに $\langle 0 | \hat{x}(t_2) \hat{x}(t_1) | 0 \rangle \neq \langle 0 | \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) | 0 \rangle$ となり，式 (1.84) は項 $\langle 0 | \hat{x}(t_2) \hat{x}(t_1) | 0 \rangle$ に対しての経路積分表示のみを示していることに特別に注意せよ．

1.2.3 生成汎函数としての経路積分とカウンター項 (Counter term)

CHAPTER

2

漸近場の理論

2.1 シュレーディンガー場の 2 次量子化

この節では、既存のシュレーディンガー方程式を拡張し、波動関数としての $\psi(x)$ を場として解析する仕様を紹介する。まず、以下のような作用積分 S およびラグランジアン密度 $\mathcal{L}_S[\psi, \psi^*]$ を持つような自由場を導入する:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_S = \int d^4x i\psi^* \partial_0 \psi - \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \psi)^* (\nabla_i \psi), \quad (2.1)$$

このとき、そのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_S[\psi, \psi^*] := i\psi^* (\partial_0 \psi) - \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \psi)^* (\nabla_i \psi). \quad (2.2)$$

この論議全般を渡って、自由場のみの議論を想定することにする。すると、以上のラグランジアン密度 (2.1) の要請からなる場 $\psi(x)$ の満たす**場の方程式 (Field equation)** は期待した通りにシュレーディンガー型方程式:

シュレーディンガー場の方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) = i\partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i)^2 \psi = 0. \quad (2.3)$$

となることを場の古典論から簡単に確かめることができる。

C.4 場の方程式 (2.3) の導出

導入したシュレーディンガー場 $\psi(x)$ のラグランジアン密度からなる作用積分 $S[\psi, \psi^*]$ に最小作用の原理を適用すれば直ちに導かれる． ψ^* の変分における最小作用の原理は:

$$\begin{aligned} \delta S[\psi, \psi^*] &= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \delta(\partial_\mu \psi^*) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) \right) \delta \psi^* + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \delta \psi^* \right) \quad (2.4) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right) \right) \delta \psi^* + \oint d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \delta \psi^* \end{aligned}$$

となり，ここで第 2 項は表面項として落とすことができる．ここから，式 (2.3) の場の方程式を直ちに導くことができる．

以下でこのラグランジアン密度 $\mathcal{L}_S[\psi, \psi^*]$ からなる場 $\psi(x)$ の U(1) ネーターチャージの論議を行う．その上で，得られたネーターチャージに基づいて生成・消滅演算子による場の量子論的観点の解析を与える．

2.1.1 U(1)-ネーターチャージに関する理論

ラグランジアン密度 (2.1) から定義した場 $\psi(x)$ の大域的 U(1) ゲージ対称性から出発する．U(1) ゲージ変換 $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x)$ に対してラグランジアン密度の変分は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}[\psi, \psi^*] &= \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} \delta \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \delta (\partial_\mu \psi^*) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \delta \psi^* \right) + (\text{EL-eqs.}) \quad (2.5) \\ &= i\theta \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \psi^* \right). \end{aligned}$$

一方，ラグランジアン密度の計算 (2.5) は大域的 U(1) ゲージ変換 $\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x)$ から直ちに以下のようにも計算できる:

$$\delta \mathcal{L}[\psi, \psi^*] = \mathcal{L}[\psi', \psi'^*] - \mathcal{L}[\psi, \psi^*] = 0, \quad (2.6)$$

それゆえ、式 (2.5) と式 (2.6) を合わせることで^{*1}このシュレーディンガー場における U(1) ネーターカレントが

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= 0; \quad j^\mu := -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \psi^* \right) \\ &= \left(\psi^* \psi, \frac{i}{2m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \right),\end{aligned}\tag{2.7}$$

あるいは、具体的に成分ごとでわければ、このシュレーディンガー場における U(1) ネーターカレント以下のようにも書ける:

U(1) ネーターチャージ

$$j^0 = \psi^* \psi, \quad j^i = \frac{i}{2m} \text{Im}[(\nabla \psi) \psi^*].\tag{2.8}$$

これがシュレーディンガー場の大域的 U(1) ゲージ対称性から得られる U(1) ネーターチャージである。

2.1.2 場のハミルトニアンと共役運動量

このシュレーディンガー場 $\psi(x)$ の量子化に関する論議を行うため、ネーターの定理から場 $\psi(x)$ のハミルトニアン H を取り出す。時空上の一様な並行移動 $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ におけるネーターカレントは以下のように計算できる:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}[\psi, \psi^*] &= \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta(\partial_\mu \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} \delta \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \delta(\partial_\mu \psi^*) \\ &\quad \hookrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right) = 0 \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \delta \psi^* \right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

この変換に関するラグランジアン密度の変分は以前の式 (2.5) と同様に上式のように展開することができる。一方で、この時空上の一様な並行移動が与える場の変分は $\delta \psi(x) = a^\mu \partial_\mu \psi(x)$ であり、故にラグランジアンの変分は直ちに

$$\delta \mathcal{L}[\psi, \psi^*] = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}_S = a^\nu \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}_S).\tag{2.10}$$

^{*1} $\theta \rightarrow 0$.

すると、以上の結果 (2.9) および (2.10) の両方を踏まえると、互いを引くことで以下のよう
にネーターカレントを得られることができる。それゆえ、

時空の並進移動におけるネーターの定理

$$a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \partial_\nu \psi^* - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_S \right) = 0. \quad (2.11)$$

このときに得られるネーターカレントは**エネルギー＝運動量テンソル**他ならない。このよ
うなテンソルを T^μ_ν と規約^{*2}すると、そのラグランジアン密度の具体形から：

$$\begin{aligned} T^{00} &= i\psi^*(\partial_0 \psi) - i\psi^*(\partial_0 \psi) + \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \psi)^* (\nabla_i \psi) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \psi)^* (\nabla_i \psi), \end{aligned} \quad (2.12)$$

同様に、他のテンソル成分 T^{0i} ($i = 1, 2, 3$) に対しても

$$T^{0i} = i\psi^*(\nabla^i \psi). \quad (2.13)$$

このように書いてしまえば、得られるエネルギー＝運動量テンソルの各成分において T^{00}
はエネルギー密度、 T^{0i} は運動量密度になり、このシュレーディンガー場におけるハミル
トニアン H および運動量 P^i は以下のように書ける：

場のハミルトニアンと運動量

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x T^{00} = \int d^3x \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \psi)^* (\nabla_i \psi), \\ P^i &= \int d^3x T^{0i} = \int d^3x i\psi^*(\nabla^i \psi) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.14)$$

さては、以上のようにシュレーディンガー場 $\psi(x)$ におけるハミルトニアン H および運
動量 P^i を求めることができたが、ここからは以後の物理的解析のため、共役運動量 $\pi(x)$
を導入して以下の正準形式：

$$H = \int d^3x \mathcal{H}_S = \int d^3x \pi(x) \partial_0 \psi(x) - \mathcal{L}_S[\psi, \psi^*] \quad (2.15)$$

^{*2}つまり、式 (2.11) が $a^\nu \partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ と書けるようにエネルギー＝運動量テンソル T^μ_ν を規約した。

のような形式で書きたい．式 (2.14) と式 (2.15) を比べると，共役運動量 $\pi(x)$ および場の運動量 P^i を以下のように

$$\pi(x) := i\psi^*(x), \quad P^i = \int d^3x \pi(x) \partial^i \psi(x). \quad (2.16)$$

この節より得られたシュレーディンガー場におけるハミルトニアン H や運動量 P^i を用いて以後でシュレーディンガー場の量子化について考察してみる．

2.1.3 シュレーディンガー場の 2 次量子化可能性

この節ではシュレーディンガー場 $\psi(x)$ の 2 次量子化可能性について調べてみる．そのため，ここからは量子力学レベルで自由粒子の理論を見直ししてみる．以下のように (L_x, L_y, L_z) の単位格子になっている格子系を考える：

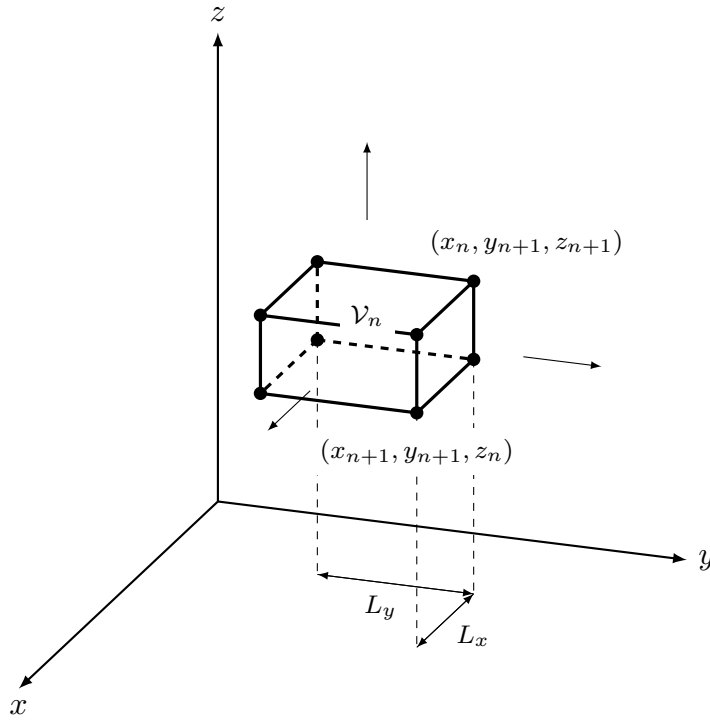


図 2.1: (L_x, L_y, L_z) の単位格子から成っている自由場 $\psi(x)$ 。

以下で既知の量子力学の結果を用いてこの自由格子モデルにおける場 $\psi(x)$ について考察してみる．ここで単位格子 \mathcal{V}_n の各格子間隔を

$$\Delta x_n^i := x_{n+1}^i - x_n^i = L_{x^i} \quad (x^i = x, y, z) \quad (2.17)$$

として以下の論議でこの単位格子の体積を $V := L_x L_y L_z$ として規約しておく．節 2.1 にて導入した通りに，この場 $\psi(x)$ はその場の方程式としてシュレーディンガー方程式 (2.3)

を満たすため、シュレーディンガー方程式を解くことで $\psi(x)$ が得られる:

$$\langle k|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{k^2}{2m}\langle k|\psi\rangle = i\partial_0\langle k|\psi\rangle; \quad \tilde{\psi}(k) := \langle k|\psi\rangle = a_k e^{-i\frac{k^2}{2m}t}. \quad (2.18)$$

すると、格子の周期条件が要請する空間並進演算子^{*3}の条件 $k_i = 2\pi n_i/L_i$ から、求まるこの格子モデルにおける場 $\psi(x)$ の表現は

運動量空間におけるシュレーディンガー場の展開

$$\psi(x) = \sum_{\{k_n\}} \frac{1}{V} \langle x|k_n\rangle \langle k_n|\psi\rangle = \sum_{\{k_n\}} \frac{1}{V} a_{k_n} e^{-ik_n \cdot x}. \quad (2.19)$$

ここで記号 $\{k\}$ は運動量ベクトル^{*3} \mathbf{k} の状態ごとで和を取ることを意味する。また、今後からは内積 $k \cdot x$ は共変形式を用いて

$$k_n \cdot x := k_n^\mu x_\mu = E_n t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \quad (2.20)$$

と書くことにする。次の段階に行く前に、式 (2.19) の展開でなぜ因子 $1/V$ が加えられたかについて少し説明しておく:

C.5 量子化された運動量空間上の射影演算子

因子 $1/V$ の話をするためには、量子化された運動量空間における射影演算子を先に求める必要がある。前節の^{*3}での言及したように、この格子モデルにおいては運動量固有値が量子化されるため、式 (1.46) の射影演算子が使えない:

$$\langle p_m|p_n\rangle = \int d^3x \langle p_m|x\rangle \langle x|p_n\rangle = \int_V e^{i(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m) \cdot \mathbf{x}} d^3x = V \delta_{\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m}. \quad (2.21)$$

ここで波動関数の規格化は単位格子ごとに行われることに注意せよ。すると、

$$\left(\sum_{\mathbf{n}} |p_n\rangle \langle p_n| \right) |\xi\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \sum_{\mathbf{n}} |x_1\rangle \langle x_2|\xi\rangle e^{i\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} = V |\xi\rangle \quad (2.22)$$

^{*3}つまり、Campbell-Backer-Hausdorff 公式から得られる空間並進関係 $e^{i\hat{p}_i L_i} \hat{x}_i e^{-i\hat{p}_i L_i} = \hat{x}_i + L_i$ から、 $\langle x'|e^{i\hat{p}_i L_i} \hat{x}_i = \langle x'|(\hat{x}_i + L_i)e^{i\hat{p}_i L_i} = \langle x'|e^{i\hat{p}_i L_i} (x'_i + L_i)$ から、 $\langle x' + L_i| = \langle x'|e^{i\hat{p}_i L_i}$ となることを用いる。すると、

$$\psi(x') - \psi(x' + L) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(1 - \exp \left(\sum_i i p_i L_i \right) \right) \exp \left(\sum_i i p_i x'_i \right) \langle p|\psi\rangle = 0; \quad p_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}.$$

が簡単に確かめられる。故に、以上の論議から直ちに:

$$\mathbf{1} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} |p_{\mathbf{n}}\rangle \langle p_{\mathbf{n}}|. \quad (2.23)$$

これが量子化された運動量空間における射影演算子である。

以下で得られた場の表現 (2.19) を用いて、以前の節にてネーターの定理から導入された場のハミルトニアン (2.14) を評価する。今は、単位格子の大きさ (L_x, L_y, L_z) の格子モデル上で考えているが、あとで極限 $V \rightarrow \infty$ を取れば一般の自由空間についても言える:

運動量空間における場のハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= \int_V d^3x - \frac{1}{2mV^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} (-i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}) \cdot (-i\mathbf{k}_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{m}}} e^{-i\mathbf{k}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}}) \\ &= \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{k}_{\mathbf{m}}}{2mV} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* a_{\mathbf{k}_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}, \mathbf{k}_{\mathbf{m}}} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_{\mathbf{n}}|^2}{2mV} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

また、上の場のハミルトニアン H と同様なアプローチを取ると、シュレーディンガー場 $\psi(x)$ における運動量 P^i の運動量空間上展開を以下のように求めることもできる。つまり、前節の式 (2.15) の結論から

運動量空間における場の運動量

$$\begin{aligned} P^i &= \int_V d^3x \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} (i a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}}) (-ik_m^i a_{\mathbf{k}_{\mathbf{m}}} e^{-i\mathbf{k}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}}) \\ &= \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \frac{k_m^i}{V} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* a_{\mathbf{k}_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}, \mathbf{k}_{\mathbf{m}}} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{k_n^i}{V} a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}^* a_{\mathbf{k}_{\mathbf{n}}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

これが運動量空間における場の運動量 P^i の表現である。

場の生成演算子と消滅演算子の導入

節 2.1.3 の論議により、図 2.1 のような格子モデルにおける場 $\psi(x)$ および場のハミルトニアン H を式 (2.19) および式 (2.24) のように得られることができた。しかし、ここで場のハミルトニアン H が量子調和振動子のモデルと似ているとめ、ここでも同様な生成・

消滅演算子による解析ができる:

$$|0\rangle \xrightarrow{\text{生成}} |n\rangle = a_n^\dagger |0\rangle, \quad |0\rangle \xrightarrow{\text{消滅}} a_n |0\rangle = 0. \quad (2.26)$$

つまり, ここからは場 $\psi(x)$ の展開における各係数 $a_{k_n} \rightarrow a_{k_n}$ および $a_{k_n}^* \rightarrow a_{k_n}^\dagger$ をそれぞれモード^{*4} n の粒子を消滅および生成する演算子として読み取ってみる.

C.6 生成・消滅演算子の正当化

次の段階に行く前に, このような演算子への読み替えを正当化する必要がある. 上の論理の通りでは, ネーターカレントから得られる式 (2.24) や (2.25) で演算子への以下のような読み替え:

$$a_{k_n} \rightarrow a_{k_n}, \quad a_{k_n}^* \rightarrow a_{k_n}^\dagger \quad (2.27)$$

を行なって (2.26) が得られたことになる. そのためには, このような読み替えが

↖ 運動量演算子 \hat{P}^i

$$\left[\sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2mV} a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, \sum_{\mathbf{m}} \frac{k_m^i}{V} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = 0 \quad (2.28)$$

↗ 場のハミルトニアン \hat{H}

という前提 ($H|0\rangle = P^i|0\rangle = 0$) が必要である. そうでなければ, 場のハミルトニアンと運動量演算子が**非可換**となり, 式 (2.26) にて P^i の固有状態として取っているスペクトル $\{|n\rangle\}$ らがハミルトニアンの固有状態にならないからだ.

ここで量子調和振動子で対照的に, ここの生成・消滅演算子が粒子自体を生成・消滅する作用をしているのはこれらの生成消滅演算子が演算子ではなく場 $\psi(x)$ にかかっているからである. すると, このときの場の演算子は

$$\hat{\psi}(x) := \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} a_{k_n} e^{-ik_n \cdot x}, \quad \hat{\pi}(x) := \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} i a_{k_n}^\dagger e^{ik_n \cdot x} \quad (2.29)$$

このとき, これら生成・消滅演算子には次のような条件^{*5}が要請される:

^{*4}以前の論議^{*3}から, この格子系においては運動量の固有値が $p = 2\pi(n_x/L_x, n_y/L_y, n_z/L_z)$ であることがわかった. そのとき, (n_x, n_y, n_z) が粒子の状態を決めるので, これを粒子のモードと呼ぶことにする.

^{*5}シュレーディンガー場は既にそのローレンツ不変性を破っている (非相対論的モデル) ため, 生成・消滅演算子を適当に定義し直すことによりボーズ粒子とフェルミ粒子の両方の統計性をみことができる. 因果律が破られているため, 因果律と統計性の矛盾 (スピン-統計定理) を考えなくていいからだ.

A. ボーズ粒子としての生成・消滅演算子

まず、取っているシュレーディンガー場 $\psi(x)$ が**ボーズ＝アインシュタイン統計**を示す場合を考える．すると、この統計性から場のハミルトニアンや運動量演算子に対して以下の条件が要請される：

固有状態および統計性の要請

場のハミルトニアン演算子 \hat{H} および運動量演算子 \hat{P}^i の固有状態から：

$$\hat{H}|n\rangle = \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m}|n\rangle, \quad \hat{P}^i|n\rangle = k_n^i|n\rangle. \quad (2.30)$$

同時に、粒子の統計性の要請 $|n, m\rangle = |m, n\rangle$ および重ね合わせの原理から

$$\hat{H}|n, m\rangle = \left(\frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m} + \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2m} \right) |n, m\rangle, \quad \hat{P}^i|n, m\rangle = (k_n^i + k_m^i) |n, m\rangle. \quad (2.31)$$

さては、以上の要請 (2.30), (2.31) と **C.6.** の前提条件からの要請 (2.28) を合わせると、生成・消滅演算子として導入した $a_{k_n}, a_{k_n}^\dagger$ らの関係を調べることができる (生成・消滅演算子の量子化)．以下で順次的に確かめてみよう．まず、式 (2.30) からは

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} (a_{k_n}^\dagger |0\rangle) = \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger \left([a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_n}^\dagger a_{k_m} \right) |0\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger [a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} |0\rangle = \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m} |0\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm}}{V} = \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m} \end{aligned} \quad (2.32)$$

が導かれる．また、統計性の要請 (2.31) に対しても同様な計算を通せば

$$\begin{aligned} H|m, n\rangle &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger a_{k_p} (a_{k_m}^\dagger a_{k_n}^\dagger |0\rangle) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger \left([a_{k_p}, a_{k_m}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_m}^\dagger a_{k_p} \right) a_{k_n}^\dagger |0\rangle \quad \leftarrow [a_{k_p}, a_{k_m}^\dagger]_{\pm} = V\delta_{\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_m} \\ &= \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |m, n\rangle \pm \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger a_{k_m}^\dagger \left([a_{k_p}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_n}^\dagger a_{k_p} \right) |0\rangle \\ &= \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |m, n\rangle \pm \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |n, m\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm}}{V} = \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m} \end{aligned} \quad (2.33)$$

のような関係が得られる。上式の計算では、第 2 行では式 (2.32) の結果を満たすような符号 (sign convention) を選択し、第 4 行ではボーズ粒子の入れ替え対称性^{*6}を用いた。すると、ここまでの計算からは式 (2.30) および (2.31) の両方を満たすための必要十分条件が交換関係 $\left[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger \right]_+ = V \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}$ として収まる。最後に、このような交換関係が式 (2.28) の前提を満たすか^{*7}を確かめる必要がある。これは:

↙ 運動量演算子 \hat{P}^i

$$\left[\sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2mV} a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, \sum_{\mathbf{m}} \frac{k_m^i}{V} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2 k_m^i}{2mV^2} \left[a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = 0 \quad (2.34)$$

↖ 場のハミルトニアン \hat{H}

より簡単に確かめられる。ここで交換子 (2.34) の計算はボーズ統計性 ($|m, n\rangle = |n, m\rangle$) を生成演算子で書き換えることより要請される

$$|m, n\rangle = |n, m\rangle \xrightarrow{\text{生成演算子}} \left[a_{k_m}^\dagger, a_{k_n}^\dagger \right] = a_{k_m}^\dagger a_{k_n}^\dagger - a_{k_n}^\dagger a_{k_m}^\dagger = 0 \quad (2.35)$$

あるいは、そのユニタリ共役 (unitary conjugation)

$$\left[a_{k_m}^\dagger, a_{k_n}^\dagger \right]^\dagger = [a_{k_n} a_{k_m}] = 0, \quad (2.36)$$

を用いて以下のように展開したものである:

$$\left[a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = a_{k_n}^\dagger \left[a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger \right] a_{k_m} + a_{k_m}^\dagger \left[a_{k_n}^\dagger, a_{k_m} \right] a_{k_n} = 0. \quad (2.37)$$

これはボーズ粒子としての生成・消滅演算子の量子化可能を意味する:

生成・消滅演算子の量子化 (ボーズ=アインシュタイン統計)

$$[a_{k_n}, a_{k_m}] = [a_{k_n}^\dagger, a_{k_m}^\dagger] = 0, \quad [a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger] = V \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}. \quad (2.38)$$

^{*6}つまり、 $|m, n\rangle = |n, m\rangle$.

^{*7}そうでなければ、このときに取っているスペクトル $|n\rangle$ は場のハミルトニアン \hat{H} と運動量演算子 \hat{P}^i 両方の固有状態を持たない (2 次量子化不可).

B. フェルミ粒子としての生成・消滅演算子

続いて、取っているシュレーディンガー場 $\psi(x)$ が**フェルミ＝ディラック統計**を示す場合を考える．論議 **A.** と同様なアプローチを取れば、場のハミルトニアンや運動量演算子に対して以下の条件が要請される：

固有状態および統計性の要請

場のハミルトニアン演算子 \hat{H} および運動量演算子 \hat{P}^i の固有状態から：

$$\hat{H}|n\rangle = \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m}|n\rangle, \quad \hat{P}^i|n\rangle = k_n^i|n\rangle. \quad (2.39)$$

同時に、粒子の統計性の要請 $|n, m\rangle = -|m, n\rangle$ および重ね合わせの原理から

$$\hat{H}|n, m\rangle = \left(\frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m} + \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2m} \right) |n, m\rangle, \quad \hat{P}^i|n, m\rangle = (k_n^i + k_m^i) |n, m\rangle. \quad (2.40)$$

さては、以上の要請 (2.39), (2.40) と **C.6.** の前提条件からの要請 (2.28) を合わせると、生成・消滅演算子として導入した $a_{k_n}, a_{k_n}^\dagger$ らの関係を調べることができる (生成・消滅演算子の量子化)．以下で順次的に確かめてみよう．まず、式 (2.39) からは

$$\begin{aligned} \hat{H}|n\rangle &= \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} (a_{k_n}^\dagger |0\rangle) = \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger \left([a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_n}^\dagger a_{k_m} \right) |0\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{m}} \frac{|\mathbf{k}_m|^2}{2mV} a_{k_m}^\dagger [a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} |0\rangle = \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2m} |0\rangle \quad \rightarrow \quad \underline{[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} = V\delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

が導かれる．また、統計性の要請 (2.40) に対しても同様な計算を通せば

$$\begin{aligned} H|m, n\rangle &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger a_{k_p} (a_{k_m}^\dagger a_{k_n}^\dagger |0\rangle) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger \left([a_{k_p}, a_{k_m}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_m}^\dagger a_{k_p} \right) a_{k_n}^\dagger |0\rangle \\ &\quad \hookrightarrow \quad \underline{[a_{k_p}, a_{k_m}^\dagger]_{\pm} = V\delta_{\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_m}} \quad (2.42) \\ &= \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |m, n\rangle \pm \sum_{\mathbf{p}} \frac{|\mathbf{k}_p|^2}{2mV} a_{k_p}^\dagger a_{k_m}^\dagger \left([a_{k_p}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} \pm a_{k_n}^\dagger a_{k_p} \right) |0\rangle \\ &= \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |m, n\rangle \pm \frac{|\mathbf{p}_m|^2}{2m} |n, m\rangle \quad \rightarrow \quad \underline{[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger]_{\pm} = V\delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}} \end{aligned}$$

のような関係が得られる．このフェルミ統計性の要請においては，その入れ替え反対称性から $\pm = -$ が選ばれることに注意せよ．すると，ここまでの計算から式 (2.39) および (2.40) の両方を満たすための必要十分条件は反交換関係 $\left[a_{k_m}, a_{k_n}^\dagger \right]_- = V \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}$ で収まる．最後に，このような反交換関係が式 (2.28) の前提を満たすかを確かめる必要がある．これは以下の手順により簡単に確かめることができる：

↵ 運動量演算子 \hat{P}^i

$$\left[\sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2mV} a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, \sum_{\mathbf{m}} \frac{k_m^i}{V} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2 k_m^i}{2mV^2} \left[a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] = 0, \quad (2.43)$$

↵ 場のハミルトニアン \hat{H}

ここで交換子 (2.43) の計算はフェルミ統計性 ($|m, n\rangle = -|n, m\rangle$) を生成演算子で書き換えることより要請される

$$|m, n\rangle = -|n, m\rangle \xrightarrow{\text{生成演算子}} \left\{ a_{k_m}^\dagger, a_{k_n}^\dagger \right\} = a_{k_m}^\dagger a_{k_n}^\dagger + a_{k_n}^\dagger a_{k_m}^\dagger = 0, \quad (2.44)$$

あるいは，そのユニタリ共役 (unitary conjugation):

$$\left\{ a_{k_m}^\dagger, a_{k_n}^\dagger \right\}^\dagger = \{ a_{k_n} a_{k_m} \} = 0, \quad (2.45)$$

を用いて展開したものである．式 (2.43) 上の個数演算子 $a_{k_m}^\dagger a_{k_m}$ と $a_{k_n}^\dagger a_{k_n}$ の可換性の証明に関わる具体的な展開については以下のコメントを参照せよ．

C.7 反交換する生成・消滅演算子における個数演算子の交換性

以下のように求まる交換子に適切な式変形を起こすことで，これらの個数演算子が互いに交換することが簡単にわかる：

$$\begin{aligned} \left[a_{k_n}^\dagger a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger a_{k_m} \right] &= a_{k_n}^\dagger a_{k_n} a_{k_m}^\dagger a_{k_m} + a_{k_n}^\dagger a_{k_m}^\dagger a_{k_n} a_{k_m} \\ &\quad - a_{k_n}^\dagger a_{k_m}^\dagger a_{k_n} a_{k_m} - a_{k_m}^\dagger a_{k_m} a_{k_n}^\dagger a_{k_n} \\ &\stackrel{\text{↵}}{=} a_{k_n}^\dagger a_{k_m}^\dagger a_{k_n} a_{k_m} = a_{k_m}^\dagger a_{k_n}^\dagger a_{k_m} a_{k_n} \\ &= a_{k_n}^\dagger \left\{ a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger \right\} - a_{k_m}^\dagger \left\{ a_{k_n}^\dagger, a_{k_m} \right\} a_{k_n} = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

故に，これら個数演算子 $a_{k_n}^\dagger a_{k_n}$ や $a_{k_m}^\dagger a_{k_m}$ は互いに交換することをわかる．

これはフェルミ粒子としての生成・消滅演算子の量子化可能を意味する:

生成・消滅演算子の量子化 (フェルミ=ディラック統計)

$$\{a_{k_n}, a_{k_m}\} = \{a_{k_n}^\dagger, a_{k_m}^\dagger\} = 0, \quad \{a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger\} = V\delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m}. \quad (2.47)$$

2.1.4 2次量子化における正準量子化の再定義

さて、前節の論議により、シュレーディンガー場 $\psi(x)$ においてはボーズ統計とフェルミ統計の両方による量子化が可能であることがわかった。前節の論議が単位格子の大きさ (L_x, L_y, L_z) の格子モデルの説明であったことを思い出すと、前節にて得られた結果はこの格子モデルに限られるもので、故に一般の自由場に対してこのようなことを言うためには熱力学極限 ($V \rightarrow \infty$) が必要である。すると、熱力学極限の下で

$$\mathbf{k}_n \rightarrow \mathbf{k}, \quad \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{\Delta k_n^x \Delta k_n^y \Delta k_n^z}{(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (2.48)$$

となるため、前節の格子モデルの下で導かれた物理量は以下のように変わる:

1. 場 $\hat{\psi}(x)$ および $\hat{\pi}(x)$ の熱力学極限

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} a_{k_n} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.49)$$

$$\hat{\pi}(x) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{i}{V} a_{k_n}^\dagger e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.50)$$

2. 場の演算子 \hat{H} および \hat{P}^i の熱力学極限

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_n|^2}{2mV} a_{k_n}^\dagger a_{k_n} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (2.51)$$

$$\hat{P}^i = \sum_{\mathbf{n}} \frac{k_n^i}{V} a_{k_n}^\dagger a_{k_n} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (2.52)$$

これらが一般の自由場での運動量空間における場 $\psi(x)$ の表現 (2.19) から生成・消滅演算

子への読み替え (2.27) を行うことで得られる**場の演算子 (field operator)** である。今までの論議を通して、格子モデル上の理論に熱力学極限 ($V \rightarrow \infty$) を取ることで、生成・消滅演算子の読み替え (2.27) に伴う結果 (2.49), (2.50), (2.51), (2.52) を導くことができた。ここでこの熱力学極限の下では、格子モデル上における統計性の要請からなる生成・消滅演算子の量子化条件 (2.38) および (2.47) が

$$\left[a_{k_m}, a_{k_m}^\dagger \right]_{\pm} = V \delta_{\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \left[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.53)$$

となることを簡単に確かめられる。これが自由場における生成・消滅演算子の正しい量子化条件^{*8}である。これは直観により簡単に予想ができるものだが、より深い理解のために以下にその厳密な証明を与える:

C.8 熱力学極限における量子化条件 (2.38), (2.47) の振る舞い

式 (2.54) で示すように、これら (ボーズとフェルミ統計性における量子化) の熱力学極限 ($V \rightarrow \infty$) における振る舞いは以下のようにクロネッカーデルタ関数を直交関数展開することで簡単に確かめられる:

$$\begin{aligned} \left[a_{k_n}, a_{k_m}^\dagger \right]_{\pm} &= \int_V d^3x \, e^{i(k_n - k_m) \cdot x} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int_{V \rightarrow \infty} d^3x \, e^{i(k - k') \cdot x}. \\ \hookrightarrow \mathbf{k}_n &\rightarrow \mathbf{k}, \quad \Delta k_n^x \Delta k_n^y \Delta k_n^z = \frac{(2\pi)^3}{V} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

これは式 (2.54) の予想そのものである。

ここまで来ると、感のいい人は量子力学 (あるいは 1 次量子化) における正準量子化条件 ($[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$) と同じ形式で、この 2 次量子化における**量子化 (quantization)** と言う操作を正準量子化条件の形式として書けることに気づく。これは、得られた式 (2.49), (2.50) に C.8 の示す量子化条件 (2.54) を足すことで:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{\pm} &= i \int d^3k d^3p \, [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]_{\pm} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{y})} \\ &= i \int d^3k \, e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.55)$$

として簡単に確かめられる。ここで式 (2.55) 上の微分形式 d^3k などは

$$d^3k := \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (2.56)$$

^{*8}熱力学極限 ($V \rightarrow \infty$) を足したからこそ、漸く一般の自由場における論議に辿り着いたことになる。前節 2.1.3 上の論議は単なる格子モデル上の議論に過ぎない。

を意味する (規約). 以上の関係式 (2.55) を **2 次量子化における正準量子化条件** と言う. しかし, これは上の論議のように格子モデルから熱力学極限 ($V \rightarrow \infty$) を取ってからのみ成立するものではなく, 格子モデル上でも一般に成立することに十分注意せよ:

C.9 格子モデルにおける正準量子化条件

ここで少し節 2.1.3 の格子モデルの論議に戻って, この格子モデル上では (2.55) の計算がどう評価されるかについて考察してみる. 格子モデルにおける場の演算子の表現 (2.29) に対しては, 式 (2.55) が

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{\pm} &= i \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \frac{1}{V^2} \left[a_{\mathbf{k}_n}, a_{\mathbf{k}_m}^{\dagger} \right]_{\pm} e^{-i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{y})} \\ &= i \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{V} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \underset{A.2}{=} i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.57)$$

故に, この格子モデルにおいても相変わらず, その正準量子化が同じくディラックのデルタ関数として与えられることがわかる.

最後に, 格子上の理論か一般の自由場における理論かに関わらず, その 2 次量子化における正準量子化条件を一般に以下のように書くことができる:

シュレーディンガー場における 2 次量子化の正準量子化

$$\left[\hat{\psi}(x), \hat{\pi}(y) \right]_{\pm} = i\delta^3(x - y), \quad \left[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^{\dagger}(y) \right]_{\pm} = \delta^3(x - y). \quad (2.58)$$

ここで複符号 \pm は先述した通りに, 粒子系の統計性を指定することで一意的^{*9}に決まる (ボーズ統計: +, フェルミ統計: -).

^{*9} 今までの論議では, 相互作用のない自由場におけるモデル (相互作用のない格子上のモデルとその熱力学極限) を想定して議論してきたが, 漸近場 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi(x)$ を考えることで相互作用のあるモデルにおいても類似にその議論を与えることができる. その場合は, 散乱行列 S_{fi} の導入が必要である:

$$S_{fi} := \langle \mathbf{p}_f, t = +\infty | \mathbf{p}_i, t = -\infty \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}_f}(+\infty) a_{\mathbf{p}_i}^{\dagger}(t = -\infty) | 0 \rangle.$$

詳しくには, 次節の **LSZ 簡約公式**を参照.

乱過程における相互作用場 $\hat{\psi}(x)$ を自由場にソース $\hat{\eta}(x)$ を入れたものとして

$$i\partial_0\hat{\psi}(x) + \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i)^2 \hat{\psi}(x) = \hat{\eta}(x) \quad (2.61)$$

を場の方程式として持つようなもので導入する．この節の全般に渡ってより一般的な散乱における論議を与えるため，以下の論議では上式にて与えたような一般的な相互作用場^{*12}を考えることにする．すると，場の方程式 (2.61) を満たす相互作用場 $\hat{\psi}(x)$ は既知のグリーン関数の理論^{*13}を使って以下のような一般解を得ることができる．例えば，**遅延グリーン関数 (retarded green's function)** を用いると：

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \hat{\psi}_0^R(x) + \int d^4y \left(x \xrightarrow{\Delta_R(x-y)} y \right)_{x^0 > y^0} \times \hat{\eta}(y) \\ &= \hat{\psi}_0^R(x) + \int d^4y \Delta_R(x-y) \hat{\eta}(y), \end{aligned} \quad (2.62)$$

ここで遅延グリーン関数 $\hat{\psi}_0^R(x)$ は自由場^{*14}を示す．また，上式での展開 (2.62) での遅延グリーン関数 $0 \xrightarrow{x^0} x^0 |_{x^0 > 0} = \Delta_R(x-0)$ はホイヘンスの原理に基づいて以下のように未来に向かうグリーン関数として設定されたものである：

$$\Delta_R(x) = \theta(x^0) \frac{1}{i} \Delta_0(x). \quad (2.63)$$

このとき， $\Delta_0(x)$ と $\theta(x^0)$ はそれぞれ数学的グリーン関数とヘヴィサイト関数として

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= \left(\sum_{s_i=\pm} \frac{s_i \theta(s_i x^0)}{2} \right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad \theta(x^0) = \begin{cases} 1 & (x^0 > 0), \\ 0 & (x^0 \leq 0) \end{cases} \\ \hookleftarrow k \cdot x &= k_\mu x^\mu = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.64)$$

としておく．上で定義した数学的グリーン関数がどのように導入されたか，なぜこれらのグリーン関数は時間に順行する成分 (遅延グリーン関数) として切断されるべきなのかについては以下のコメントを参照せよ．

^{*12}ソース $\hat{\eta}(x)$ を適切に選んでくれることで，任意の相互作用による散乱も説明することができる．つまり，今後の理論の展開において相互作用場の方程式を (2.61) の形式として持っていけば，摂動論によらない一般的な理論を作ることができる．

^{*13}ホイヘンスの原理によって，このときのグリーン関数は**遅延グリーン関数**として切断されるべきであることに特別に注意せよ．

^{*14}相互作用のないシュレーディンガー粒子 (ここでは，シュレーディンガー方程式を場の方程式として持つような粒子をシュレーディンガー粒子と命名する)．

C.10 数学的グリーン関数の導入

式 (2.64) で導入した数学的グリーン関数 $\Delta_0(x)$ がどのように導入されたのかについて少し考えてみる。まず、数学的グリーン関数 $\Delta_0(x)$ をその伝搬の向きを考慮してない、単なるグリーン方程式^{*15}:

$$\left(i\partial_0 + \frac{1}{2m}\nabla^2\right)\Delta_0(x) = i\delta^4(x) \quad (2.65)$$

を満たすものとして導入する。このようにしておくと、あとでこの $\Delta_0(x)$ に適当なヘヴィサイド階段関数を加えることで^{*16}グリーン関数を遅延と先行の成分で簡単に分離できる。すると、 $\Delta_0(x)$ の 4 元フーリエ展開考えることで

$$\Delta_0(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_0(k) e^{ik \cdot x}; \quad \left(-k_0 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}\right) \tilde{\Delta}_0(k) = i, \quad (2.66)$$

が導かれ、そこから

$$\Delta_0(x) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}}, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}. \quad (2.67)$$

ただし、式 (2.66) や (2.67) では一般のフーリエ変換を考えているだけなので、この縮約 $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ 上の k_0 はエネルギー＝運動量関係式を満たさない一般のものであることに特別に注意せよ。このような条件を k^μ が質量殻の外にある (off the mass-shell)^{*17}という。すると、フーリエ展開 (2.67) は複素積分からさらに

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}} = -i \oint_{\gamma_+ - C_+(\epsilon)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (x^0 > 0) \end{aligned} \quad (2.68)$$

として $x^0 > 0$ における計算を与えることができる。また、 $x^0 < 0$ の場合においても上の計算 (2.68) と同様なやり方を取れば (もちろん、この場合は下半円を積分路として持つ)、このときは $\Delta_0(x)$ が

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) &= -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}} = i \oint_{\gamma_- - C_-(\epsilon)} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(E_{\mathbf{k}}t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (x^0 < 0). \end{aligned} \quad (2.69)$$

^{*15}今後、 $\sum_i (\nabla_i)^2 \rightarrow \nabla^2$ としてラプラシアンを縮約する。

^{*16}これが数学的グリーン関数と命名した理由である。伝搬の向きなどを考えていない数学的な導入としてのグリーン関数という意味で。

^{*17}これと対照的に、エネルギー＝運動量の関係式 $|\mathbf{k}|^2 = 2mk_0$ を満たす場合は質量殻の上にある (on the mass-shell) という。

ここで与えた複素積分の経路は以下の通りである:

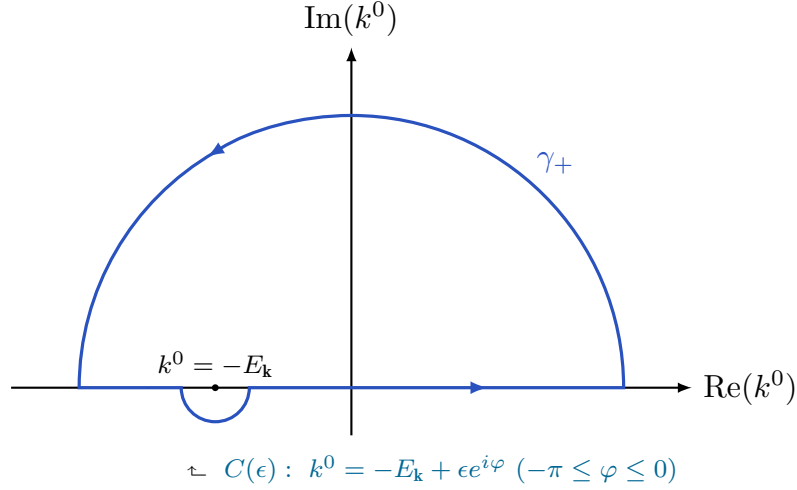


図 2.2: 複素積分 (2.68) の $x^0 > 0$ における積分経路.

以上の計算 (2.68) と (2.69) および最初に要請したグリーン方程式 (2.65) を合わせると, 結局求まる $\Delta_0(x)$ は以下の表式で書けることがすぐわかる:

$$\Delta_0(x) = \left(\sum_{s_i = \pm} \frac{s_i \theta(s_i x^0)}{2} \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.70)$$

ただし, $\Delta_0(x)$ の定義上で $x^0 = 0$ のときは定義されない^{*18} ことにする. また, ここでは式 (2.68) や (2.69) の表式から空間成分の変換 $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ を行った. 最初の式 (2.64) はこのような理由に基づいて導入されたものである. 当然ながら, このように $\Delta_0(x)$ を導入すると, 実際 $\Delta_R(x)$ が切断されたグリーン関数を与えることがわかる. 確かに, 遅延グリーン関数においての以下の計算:

$$\square_S \theta(x^0) \frac{1}{i} \Delta_0(x) = (\partial_0 \theta(x^0)) \Delta_0(x) + \theta(x^0) \frac{1}{i} \square_S \Delta_0(x) \quad \hookleftarrow x^0 > 0 \quad (2.71)$$

$$= \delta(x^0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\Delta_0(x)|_{x_0=\epsilon} - \Delta_0(x)|_{x_0=-\epsilon}) \stackrel{(2.70)}{=} \delta^4(x),$$

^{*18}確かに, その定義式 (2.66) において $x^0 = 0$ のときの関数値を評価しようとするとうまく定義されない:

$$\Delta_0(x)|_{x^0=0} \stackrel{(2.66)}{=} -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^0 + E_{\mathbf{k}}} \rightarrow \text{non def.}$$

およびその境界条件

$$\Delta_R(x)|_{x^0 \leq 0} = \theta(x^0) \frac{1}{i} \Delta_0(x) \Big|_{x^0 \leq 0} = 0 \quad (2.72)$$

から $\Delta_R(x)$ が領域 $x^0 > 0$ のみを取る切断されたグリーン関数^{*19}になることが確かめられる. まとめて, 式 (2.63) にて導入した遅延グリーン関数は cut-off される:

$$0 \longrightarrow x^0 |_{x^0 > 0} : \quad \square_S \Delta_R(x) = \delta^4(x), \quad \Delta_R(x)|_{x^0 \leq 0} = 0. \quad (2.73)$$

C.11 ホイヘンスの原理とグリーン関数の分離 (遅延成分)

以前のコメント C.10 にて, 式 (2.63) のようなグリーン関数 $\Delta_R(x)$ を取ると確かに未来向かう切断されたグリーン関数になることが確かめられた. 以下では, なぜこのようにグリーン関数が切断されるべきなのかについての物理的な説明を与える. まず, ホイヘンスの原理 (Huygen's principle) から, 物理的には波 (ここでは平面波) が過去から未来の順時的な向きを持って伝搬されるのみ^{*20}ができる. このことから, 物理的に許可されるのは:

$$\square_S \Delta_R(x) = \delta^4(x), \quad \Delta_R(x)|_{x^0 \leq 0} = 0 \quad (2.74)$$

のみである (過去から未来の伝播). このグリーン関数は $x^0 \leq 0$ における cut-off により, 未来から過去への伝播は起こさないグリーン関数である. このように切断したグリーン関数をを特別に区分して遅延グリーン関数 (retarded green's function) と定義して使う. つまり, シュレーディンガー場においては物理的にこの遅延グリーン関数による過去から未来への伝搬のみが許され, 最後にその遅延グリーン関数を複素積分を使って一般に以下のように書ける:

$$\Delta_R(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \oint_{\gamma} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^0 - E_{\mathbf{k}} + i\epsilon}. \quad (2.75)$$

^{*19} ここで簡単のため, 演算子 \square_S を

$$\square_S = \left(i\partial_0 + \frac{1}{2m} \nabla^2 \right)$$

として縮約することにする (今後も同じ縮約を採用する). すると, $x^0 > 0$ において式 (2.71) の第 2 行の第 2 項を以下のように評価できる:

$$\square_S \Delta_0(x) \Big|_{x^0 > 0} = \left(\sum_{s_i = \pm} \frac{s_i \theta(s_i x^0)}{2} \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(E_{\mathbf{k}} - \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m} \right) e^{i(E_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = 0.$$

^{*20} ホイヘンスの原理によると, $t = 0$ で生成された波面が新しく $t = dt > 0$ での波面 (次の波面) を作りながら伝搬されるので, 物理的には未来から過去に伝搬されるのはできない.

ここでの上式の定義における適切な積分経路は以下の通りである:

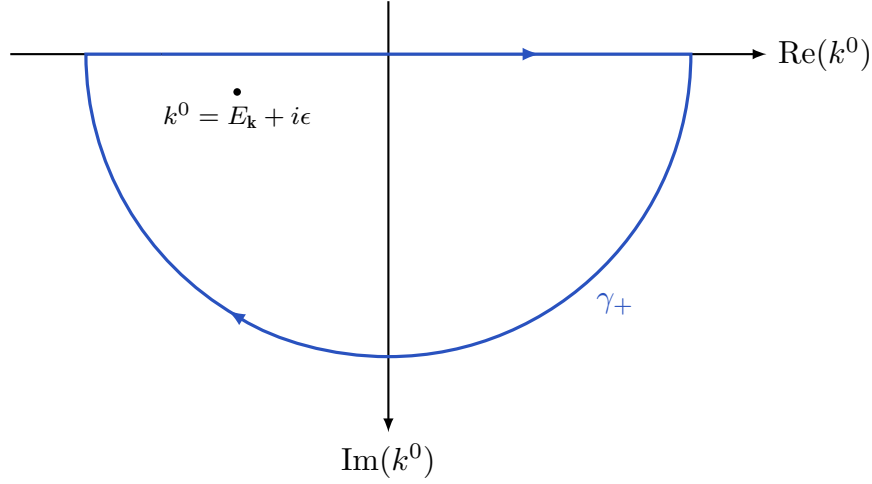


図 2.3: 複素積分 (2.75) の $x^0 > 0$ における積分経路.

例えば $x^0 > 0$ の場合は, 積分経路上の複素線積分の収束性^{*21}のために下半円の経路 γ_- が選ばれる. ただし, この表式は式 (2.68) や (2.63) から time-like な成分の置換 $k^0 \rightarrow -k^0$ を行ったものであることに注意せよ.

さて, ここからは遅延グリーン関数 (2.63) を用いて得られた相互作用場 $\hat{\psi}(x)$ の展開式 (2.62) に関する議論に戻ろう. まず, 相互作用場 $\hat{\psi}(x)$ の展開式 (2.62) に関して場 $\hat{\psi}_0^R(x)$ が自由場を示すという前の主張を証明する必要がある. それは以下の計算:

$$\begin{aligned} \square_S \hat{\psi}_0^R(x) &= \square_S \hat{\psi}(x) - \int d^4y \square_S \Delta_R(x-y) \hat{\eta}(y) \\ &= \hat{\eta}(x) - \int d^4y \delta^4(x-y) \hat{\eta}(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

から簡単に確かめられる. すると, 展開式 (2.62) において場 $\hat{\psi}_0^R(x)$ を自由場として

$$\hat{\psi}_0^R(x) \stackrel{(2.49)}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} \quad (2.77)$$

^{*21} しかし, $x^0 < 0$ においてはその複素線積分の収束性から上半円が選ばれるが, この場合は取っている積分経路の内部に極や真性特異点を持たないので $\Delta_R(x)$ が期待した通りに 0 として落ちる.

のように展開することができる．この上にさらに相互作用場の漸近条件 (2.60) を使えば，遅延グリーン関数の境界条件 (2.73) から

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \hat{\psi}_0^R(x) &= \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \hat{\psi}(x) - \int d^4y \Delta_R(x-y) \hat{\eta}(y) = \sqrt{Z} \hat{\psi}_{\text{in}}(x) \\ &\stackrel{\text{blue}}{\hookrightarrow} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \Delta_R(x-y) = 0 \quad (2.78) \\ &= \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{Z} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} e^{-ik \cdot x} \end{aligned}$$

が簡単に導かれる．最後に， $x^0 \rightarrow -\infty$ において式 (2.77) と (2.78) を等しい^{*22}とおけば：

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} = \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{Z} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} e^{-ik \cdot x}; \quad a_{\mathbf{k}} = \sqrt{Z} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \quad (2.79)$$

が導かれ，このことから得られる各時刻 x^0 において恒等的な関係 $\hat{\psi}_0^R(x) = \sqrt{Z} \hat{\psi}_{\text{in}}(x)$ および式 (2.62) が以下の漸近場と相互作用場の関係式を導く：

Yang-Feldman の方程式

$$\hat{\psi}(x) = \sqrt{Z} \hat{\psi}_{\text{in}}(x) + \int d^4y \Delta_R(x-y) \hat{\eta}(y). \quad (2.80)$$

2.2.1 Lehmann-Källén 型スペクトル表示と漸近場

この節では，相互作用場 $\hat{\psi}(x)$ のグリーン関数を自由場のグリーン関数 $\Delta_R^0(x)$ およびその重み関数 $\varrho(k)$ と書く，いわゆる**スペクトル表示**^{*23}について工夫^{*24}する．まず，今取っているシュレーディンガー場がどこから来たのかその起源を調べるため，特別に以下のスピン 0 の相対論的スカラー場^{*25}を想定する：

$$\mathcal{L}_{(0,0)} = \frac{1}{2} \partial^\mu \hat{\varphi}^\dagger \partial_\mu \hat{\varphi} - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi}. \quad (2.81)$$

^{*22} この式 (2.79) の具体的な誘導については以下の展開を参照せよ：

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \int (2.79) \times e^{ik' \cdot x'} d^3x = \sqrt{Z} a_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = a_{\mathbf{k}}, \quad \int e^{-i(k-k') \cdot x} d^3x = (2\pi)^3 \delta^3(k-k').$$

^{*23} あるいは，Lehmann-Källén 表示とも呼ばれる．

^{*24} この節からは，主にボーズ統計性を示すシュレーディンガー場の散乱理論に注目する．もちろん，フェルミ統計性についても同様な論議ができる（ただし，grassman 数の導入が必要）．

^{*25} 複素スカラー場．

シュレーディンガー場はこのスカラー場の非相対論的な極限であるという予想ができるので、このラグランジアン密度の非相対論的極限を取ったときにシュレーディンガー場に戻るかを確かめてみよう（そのために単位を SI 単位系に戻した）。非相対論的極限は場（波動関数と呼んでもいい）の置換 $\hat{\varphi} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\hat{\psi}$ から出発する。すると：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(0,0)} &= \frac{1}{2c^2}\partial_0\hat{\varphi}^\dagger\partial_0\hat{\varphi} - \frac{1}{2}(\nabla\hat{\varphi})^\dagger \cdot (\nabla\hat{\varphi}) - \frac{m^2c^2}{2\hbar^2}\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi} \\ &= \frac{1}{2c^2}\left| -i\frac{mc^2}{\hbar}e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\hat{\psi} + e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\dot{\hat{\psi}} \right|^2 - \frac{1}{2}(\nabla\hat{\psi})^\dagger \cdot (\nabla\hat{\psi}) - \frac{m^2c^2}{2\hbar^2}\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \quad (2.82) \\ &= i\frac{m}{2\hbar}\left(\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} - \dot{\hat{\psi}}^\dagger\hat{\psi}\right) - \frac{1}{2}\sum_i(\nabla_i\hat{\psi})^\dagger(\nabla_i\hat{\psi}) + \frac{1}{2c^2}\dot{\hat{\psi}}^\dagger\dot{\hat{\psi}}.\end{aligned}$$

ここでさらに非相対論的極限 ($E_{\mathbf{k}} - mc^2 \ll mc^2$) を与えることで、式 (2.82) における第 3 行の最後の項は以下のように

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2c^2}\dot{\hat{\psi}}^\dagger\dot{\hat{\psi}} d^3x &= \int d^3k \frac{1}{4E_{\mathbf{k}}}\left[\left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar c}\right)^2 a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar c}\right)^2 b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_{\mathbf{k}}^2 - m^2c^4}{2\hbar^2c^2}e^{i\frac{2mc^2}{\hbar}t}\left(a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}\right) \right] \\ &\stackrel{\text{①}}{\sim} \hat{\psi}(x) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\hat{\varphi}(x) = \int d^3k a_{\mathbf{k}}e^{i\frac{E_{\mathbf{k}}+mc^2}{\hbar}t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\frac{E_{\mathbf{k}}-mc^2}{\hbar}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\sim \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\hbar^2c^2} \left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{2E_{\mathbf{k}}}\right)^2 \xrightarrow{E_{\mathbf{k}}-mc^2 \ll mc^2} 0 \quad (2.83)\end{aligned}$$

として落とせる。故に、非相対論的極限ではスカラー場のラグランジアン密度 (2.81) が近似的に以下のものに落ちる：

$$\mathcal{L}_{(0,0)} \sim i\frac{m}{\hbar}\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} - \frac{1}{2}\sum_i(\nabla_i\hat{\psi})^\dagger(\nabla_i\hat{\psi}). \quad (2.84)$$

ここで第 1 項は式 (2.82) に以下の計算結果を加えることで簡単に確かめれる。式 (2.83) のような演算をラグランジアン密度の展開式 (2.82) の第 1 項に適用すれば

$$\begin{aligned}i \int \hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} d^3x &= \int d^3k \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}}\left[-\left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar}\right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar}\right) b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar}\right) b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar}\right) a_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger \right] \quad (2.85)\end{aligned}$$

および^{*26}そのエルミート共役:

$$\begin{aligned}
 -i \int \dot{\hat{\psi}}^\dagger \hat{\psi} d^3x &= \int d^3k \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \left[- \left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar} \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar} \right) b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar} \right) b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar} \right) a_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger \right] \\
 &\quad \hookleftarrow E_{-\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

から直ちに作用積分上の各項に対して $i \int d^4x \dot{\hat{\psi}}^\dagger \hat{\psi} = -i \int d^4x \dot{\hat{\psi}} \hat{\psi}^\dagger$ が成立することが言えるので、最終的にはラグランジアン密度の非相対論的極限を式 (2.84) のように書いても^{*27}一般性を失うことはない。なお、以上の非相対論的極限により得られる近似場 (2.84) の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(0,0)}}{\partial \hat{\psi}^\dagger} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(0,0)}}{\partial (\partial_\mu \hat{\psi}^\dagger)} \right) = \frac{m}{\hbar^2} \left(i \partial_0 \hat{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\psi} \right) = 0 \tag{2.87}$$

となり、故に非相対論的極限に伴って得られる近似場はこの章の最初に導入したシュレーディンガー場他ならない。まとめると、以上の相対論的場 (複素スカラー場) の非相対論的極限に関する論議からわかるものは、**相対論的な複素スカラー場に単なる非相対論的極限を飾るだけでシュレーディンガー場がその近似場として現れることである**。すると、この非相対論的極限におけるラグランジアン密度の振る舞いを受け、場 $\hat{\psi}(x)$ も同じく非相対論的極限に伴って以下の振る舞いを持つ:

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}(x) &= \int d^3k a_{\mathbf{k}} e^{i \frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{\hbar} t - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i \frac{E_{\mathbf{k}} - mc^2}{\hbar} t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\
 &\xrightarrow{E_{\mathbf{k}} - mc^2 \ll mc^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{-i \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m} t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

言い換えれば、これは非相対論的極限に伴う生成・消滅演算子 ($a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$) およびエネルギー $E_{\mathbf{k}}$ の振る舞いが

$$E_{\mathbf{k}} \rightarrow mc^2 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}, \quad a_{\mathbf{k}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \rightarrow a_{\mathbf{k}} \tag{2.89}$$

として与えられることを意味する。次に、これらの非相対論的多粒子系 ($n \geq 1$) においてエネルギーと運動量の作る位相空間 ($E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}$) について考察する。簡単な例として 1 粒子系

^{*26}もちろん、式 (2.82) 上の最後の項が非相対論的極限の下では式 (2.83) の結果により 0 として落とせることに注意せよ。

^{*27}運動を決定するのはラグランジアンではなく、作用積分である (ラグランジアンの不変性)。

($n = 1$) および 2 粒子系 ($n = 2$) について考えると:

(a) 1 粒子系 ($n = 1$)

まず, 1 粒子の場合は得られた結果 (2.89) そのものとして

$$E_{\mathbf{k}}^{(1)} = mc^2 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}. \quad \leftarrow \mathbf{K} = \mathbf{k} \quad (2.90)$$

(b) 2 粒子系 ($n = 2$)

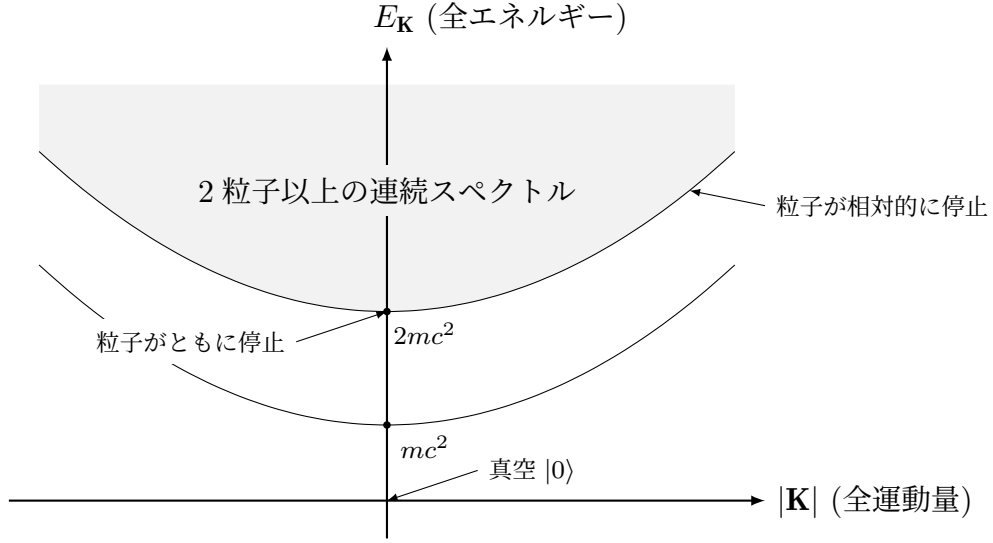
2 粒子系の場合は 2 つの粒子による寄与があるため, 式 (2.89) から

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{K}}^{(2)} &= E_{\mathbf{k}_1}^1 + E_{\mathbf{k}_2}^2 = Mc^2 + \frac{|\mathbf{k}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{k}_2|^2}{2m_2} \quad \leftarrow M = m_1 + m_2 \\ &\geq Mc^2 + \frac{|\mathbf{K}|^2}{2M}. \quad \leftarrow \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ &\quad \leftarrow \underbrace{\left(\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M}\right)}_{=1} \left(\frac{|\mathbf{k}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{k}_2|^2}{2m_2}\right) \geq \frac{|\mathbf{k}_1|^2 + |\mathbf{k}_2|^2 + 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|}{2M} \geq \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2}{2M} \end{aligned} \quad (2.91)$$

が導かれる. 上の計算 (2.91) と同じ計算を一般の n 粒子系に対して展開すると, n 粒子系に関するエネルギースペクトル (2.89) は以下のように展開することができる:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{K}} &= \sum_{i=1}^n E_{\mathbf{k}_i}^i = Mc^2 + \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{k}_i|^2}{2m_i} \geq \frac{1}{2M} \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{k}_i|^2 + \sum_{i>j} |\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_j| \right) \\ &\quad \leftarrow \text{Cauchy-Schwartz 不等式: } \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M}\right)}_{=1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{k}_i|^2}{2m_i}\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{i=1}^n |\mathbf{k}_i|\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2M} \left(\sum_{i=1}^n |\mathbf{k}_i|^2 + \sum_{i>j} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \right) = \frac{|\mathbf{K}|^2}{2M}. \quad M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \end{aligned} \quad (2.92)$$

以上の結果 (2.90), (2.91) および (2.92) をまとめると, 各粒子状態 (真空 $|0\rangle$, 1 粒子状態 $|K\rangle$, $n(n \geq 2)$ 粒子状態 $|K, o_i\rangle$) の成す領域を位相空間 $(E_{\mathbf{K}}, \mathbf{K})$ 上のダイアグラムとして以下のように表せる:

図 2.4: 多粒子形における位相空間 $(E_{\mathbf{K}}, \mathbf{K})$.

ここで 2 粒子以上の多粒子状態は全運動量 \mathbf{K} のみで一意的に決まらないことに注意せよ. 2 粒子以上の多粒子状態を一意的に指定するには, この全運動量 \mathbf{K} に加えて別の物理量 (例えば, 全運動量-相対運動量など) が必要であり, 今後は**全運動量 \mathbf{K}** と粒子どうしの**相対運動量** $o_n = \{O_1, \dots, O_i, \dots, O_n\}$ のラベルで 2 粒子以上の状態を $|K, o_n\rangle$ として^{*28} 取ることとする. 今まで特別な言及はなかったが, 節 2.1 による**場の量子化**の論議を受け入れると, これら状態 $|K, o_n\rangle$ ($n \geq 1$) は

$$|K, o_n\rangle = \left(\prod_{i=1}^n a_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle = a_{(\mathbf{K}, o_n)}^\dagger |0\rangle \quad (2.93)$$

として定義されるもので, それゆえ:

$$\begin{aligned} \hat{P}_i |K, o_n\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n}^\dagger |0\rangle \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i a_{\mathbf{k}}^\dagger \left([a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}_1}^\dagger] + a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) a_{\mathbf{k}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= (\mathbf{k}_1)_i \left(\prod_{i=1}^n a_{\mathbf{k}_i}^\dagger \right) |0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \cdots = (\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n)_i |K, o_n\rangle = K_i |K, o_n\rangle \end{aligned} \quad (2.94)$$

^{*28}もちろん, 節 2.1.3 の論議で使ったような個々の粒子要素の運動量それぞれをラベルとして状態を指定すること ($|p_1, p_2, \dots\rangle$ など) もできる. 今は系の全運動量に注目しているのでこのような notation を取っている (そもそも, 何時も個々の運動量成分を何時も完璧に知っているのとは限らないこともある) だけだ.

としての固有状態を満たすように^{*29}する。以上の多粒子系のスペクトルに関する論議の結果から、章1で紹介した**ファインマンのアイデア**と同様なアプローチを取るとかの多粒子系におけるスペクトル $\{|0\rangle\}, \{|K\rangle\}, \{|K, o_i\rangle\}$ ^{*30}の射影演算子を以下のように得る:

多粒子系における射影演算子

$$1 = \underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{\text{真空成分}} + \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |k\rangle\langle k|}_{\text{1粒子成分}} + \underbrace{\sum_{\{o_i\}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |k, o_i\rangle\langle k, o_i|}_{\text{2粒子以上の成分}} \quad (2.95)$$

今後においては、単に全運動量 \mathbf{K} を添字なきの小文字として \mathbf{k} で書くことにする。以上の射影演算子 (2.95) はエネルギースペクトル (2.89) に対する射影演算子であることを忘れてはいけない。故に、上で得た射影演算子 (2.95) は場 $\hat{\psi}(x)$ に対するものではなく、質量エネルギーを含んでいる非相対論的場 $\hat{\varphi}(x) = e^{-imt}\hat{\psi}(x)$ ^{*31}に対する射影演算子であることに注意せよ。さては、Lehmann-Källén 型スペクトル表示への本格的な論議はその準備として用意した以上の論議 (シュレーディンガー場の起源と多粒子系における射影演算子の論議) を使って **Wightman 関数**、**不変デルタ関数**および **Feynman 伝播関数**を展開することから始まる:

相互作用場における Lehmann-Källén 型スペクトル表示

最初に、論議の第1段階として Wightman 関数の多粒子系の射影演算子 (2.95) による展開を考える。今後の論議において、**Wightman 関数** $W(x-y)$ を以下の定義を満たす関数として導入する:

$$W(x-y) := \langle 0|\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)|0\rangle = \langle 0|\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(y)|0\rangle. \quad (2.96)$$

ここで場 $\hat{\varphi}(x)$ ^{*32}は節 2.2.1 の最初に導入した相対論的複素スカラー場 (2.82) の非相対論的極限として、シュレーディンガー場に対して $\hat{\varphi}(x) = e^{-imt}\hat{\psi}(x)$ として取れている場である。すると、この Wightman 関数 (2.96) に多粒子系の射影演算子 (2.95) を差し込むこ

^{*29}特に、 $n=1$ のときは1粒子系を示す。

^{*30}真空 $|0\rangle$, 1粒子状態のスペクトル $\{|K\rangle\}$, 2粒子以上のスペクトル $\{|K, o\rangle\}$ が完全系をなす。

^{*31}上の相対論的複素スカラー場に対する非相対論的極限の論議から分かるように、シュレーディンガー場 $\hat{\psi}(x)$ は複素スカラー場の非相対論的極限の上にさらに質量エネルギーを除去したものに注意せよ。また、簡単のために今後においては単位系を SI から自然単位系に再び戻すことにする。

^{*32}この本全般に渡って、相対論的な複素スカラー場とその非相対論的極限を互いに区別せずに両方ともに $\hat{\varphi}(x)$ として書いているので混同しないように特別に注意する必要がある。

とでさらに以下のように展開することができる:

$$\begin{aligned}
 W(x-y) = & \langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle\langle 0|\hat{\varphi}^\dagger(y)|0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle 0|\hat{\varphi}(x)|k\rangle\langle k|\hat{\varphi}^\dagger(y)|0\rangle \\
 & + \sum_{\{o_i\}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle 0|\hat{\varphi}(x)|k, o_i\rangle\langle k, o_i|\hat{\varphi}^\dagger(y)|0\rangle
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

ここまでで計算を止めて^{*33}, 今取っている相互作用場 $\hat{\varphi}(x)$ の運動量演算子 \hat{P}_i について考察してみる. 今後からは, ソースが場 $\hat{\psi}$ およびそのエルミート共役 $\hat{\psi}^\dagger$ のみに依存しているが, その微分 $\partial_\mu \hat{\psi}$ や $\partial_\mu \hat{\psi}^\dagger$ などには依存していない ($\hat{\eta}[\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger]$) モデル^{*34}について理論を展開していく. このときの相互作用のソースを入れた相互作用場のラグランジアン密度は以下のように導入することができる:

$$\mathcal{L}_S[\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger, \hat{\eta}] := i\hat{\psi}^\dagger \partial_0 \hat{\psi} - \frac{1}{2m} \sum_i (\nabla_i \hat{\psi})^\dagger (\nabla_i \hat{\psi}) - \hat{\psi}^\dagger \hat{\eta}[\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger]. \tag{2.98}$$

^{*33}ここでは, 多粒子系の射影演算子 (2.95) による展開を与えるため, 元の注目しているシュレーディンガー場 $\hat{\psi}(x)$ ではなく, 場 $\hat{\varphi}(x)$ で展開したことに注意せよ.

^{*34}ここでは単なる仮定としてこのような制限を入れたが, これはシュレーディンガー方程式の起源を考えると物凄く一般的な要請である. シュレーディンガー場は結局粗く言えばスピン 0 の相対論的複素スカラー場の非相対論的極限なので, その原形である複素スカラー場の可能な形を考えると相互作用を入れても

$$\mathcal{L}_{(0,0),n(\eta)=4} = \frac{1}{2} \partial^\mu \hat{\varphi}^\dagger \partial_\mu \hat{\varphi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi} - \frac{\lambda}{2} (\hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi})^2$$

など意外はできない ($|\hat{\varphi}|^4$ モデル). $\partial^\mu \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi}$ などは相対論的複素スカラー場のローレンツ不変性を破るためダメであり, $(\hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi})^4$ などは繰り込み可能性により除かれる. すると, このモデルにおけるラグランジアン密度の非相対論的極限は以下のような形で収まる:

$$\mathcal{L}_{(0,0),n(\eta)=4} \xrightarrow{\text{非相対論的極限}} \mathcal{L}_{(0,0),n(\eta)=4}^{\text{cl}} = i \frac{m}{\hbar} \hat{\psi}^\dagger \dot{\hat{\psi}} - \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_i \hat{\psi})^\dagger (\nabla_i \hat{\psi}) - \frac{\lambda}{2} (\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi})^2.$$

2.2.2 Lehmann-Symanzik-Zimmerman の簡約公式

CHAPTER

正準量子化

A.1 ハミルトニアン時間に依存する場合における時間発展演算子の論議

ここでは、論議 C.2 をより一般化して $(\partial \hat{H}_0 / \partial t)|_{t=t_0} \neq 0$ の場合について考える。まずは、時間にあらわに依存しない演算子 \hat{X}_0 を導入する:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}(t)}{dt} &= \sum_{r=1,2,3} \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial \hat{x}_r} \frac{d\hat{x}_r}{dt} + \frac{\partial \hat{X}(t)}{\partial \hat{p}_r} \frac{d\hat{p}_r}{dt} = \left\{ \hat{X}(t), \hat{H}(t) \right\}_{pb} \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{X}(t), \hat{H}(t)]. \quad \leftarrow (1.56) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

すると、式 (1.60) と同様な論議を通せば、時間にあらわに依存しない演算子に関して $\hat{X}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{X}_0 \hat{U}(t; t_0)$ なので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) \hat{X}(t) + \hat{U}(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{X}(t) &= \hat{X}_0 \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0), \\ \xrightarrow{(\text{A.1})} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{X}(t) &= i\hbar \left(\hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{X}_0 \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) \hat{X}(t) \right) \\ &= \hat{X}(t) \hat{H}(t) - \hat{H}(t) \hat{X}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

が導かれる。演算子 \hat{X}_0 を関係式 $\hat{X}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0) \hat{X}_0 \hat{U}(t; t_0)$ を用いて $\hat{X}(t)$ で戻せば、式 (A.2) の両辺を比べることで:

$$\hat{X}(t) \left(i\hbar \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{H}(t) \right) = \left(i\hbar \hat{U}^\dagger(t; t_0) \frac{d}{dt} \hat{U}(t; t_0) - \hat{H}(t) \right) \hat{X}(t). \quad (\text{A.3})$$

さては、ここで $\hat{X}(t)$ は任意で取った時間にあらわに依存しない演算子なので、**シュール**の補題 (Schur's Lemma) からこのような $i\hbar\hat{U}^\dagger(t; t_0)\dot{\hat{U}}(t; t_0) - \hat{H}(t)$ は恒等演算子の定数倍に限られる。故に、定数 λ を導入して:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t; t_0) = \hat{U}(t; t_0)\hat{H}(t) + \lambda\hat{U}(t; t_0). \quad (\text{A.4})$$

一方、ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は^{*23}の論議から

$$\hat{H}(t) = \hat{U}^\dagger(t; t_0)\hat{H}_0\hat{U}(t; t_0) + (t - t_0)\hat{U}^\dagger(t; t_0)\left(\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}\right)\hat{U}(t; t_0) + \mathcal{O}(t) \quad (\text{A.5})$$

のように展開できる。それゆえ、ハミルトニアンの時間発展展開 (A.5) を導かれた時間発展演算子の方程式 (A.4) に代入すれば

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t; t_0) = \left(\hat{H}_0 + (t - t_0)\left(\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}\right) + \mathcal{O}(t)\right)\hat{U}(t; t_0) = \hat{H}(t)\hat{U}(t; t_0). \quad (\text{A.6})$$

これはハミルトニアンと時間発展演算子が可換 ($[\hat{H}(t), \hat{U}(t)] = 0$) であることを意味^{*1}する。方程式 (A.6) として時間発展演算子 $\hat{U}(t; t_0)$ の満たす微分方程式を求めたので、これを解くことで $\hat{U}(t; t_0)$ の表現を決定することができる。そのため、式 (A.6) の両辺を時間に関して積分すると^{*2}

$$\hat{U}(t; t_0) = \hat{U}(t_0; t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1)\hat{U}(t_1; t_0) \quad (\text{A.7})$$

や連鎖的な積分形として

$$\begin{aligned} \hat{U}(t; t_0) &= \hat{\mathbf{1}} - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2) + \cdots \\ &= \hat{\mathbf{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \cdots \hat{H}(t_n) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

として展開できる。このような時間発展演算子の級数展開を**ダイソン展開 (Dyson expansion)**と呼ぶ。ここで $\hat{H}(t_i)$ と $\hat{H}(t_j)$ などは同時間のハミルトニアンではないので、一般に非交換である ($[\hat{H}(t_i), \hat{H}(t_j)] \neq 0$)。非同時間のハミルトニアンどうしの非交換性に注意すると

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2)\hat{H}(t_1) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2) \quad (\text{A.9})$$

^{*1}(A.6) と (A.4) を比較すればすぐわかる。今の論議はハミルトニアンが時間に依存するような状況に関する論議なので、この主張は一般に成立する。

^{*2}かつ、 $\hbar = 1$ 。

が成立 (変数のラベルを $t_1 \leftrightarrow t_2$ で切り替えた) する. ここまで計算を切って, 式 (A.9) の積分領域を以下のように図で表してみよう:

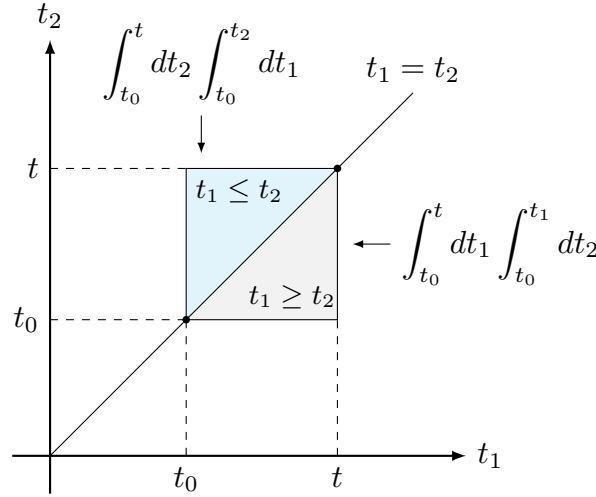


図 A.1: 積分 (A.9) の積分領域の拡張.

すると, 図 A.1 で示すように式 (A.9) の第一項と第二項はそれぞれ青色の領域上の積分と灰色の領域上の積分に対応されることがわかる. それゆえ,

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathcal{T} \left\{ \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right\}. \quad (\text{A.10})$$

このことから, より一般的には

$$\int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \cdots \hat{H}(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} \left\{ \hat{H}(t_1) \cdots \hat{H}(t_n) \right\} \quad (\text{A.11})$$

が成立する. ここで式 (A.10) および (A.11) で導入した記号 $\mathcal{T} \{ \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) \}$ は**時間順序積 (time-ordering product)** と呼ばれる演算で, 以下のように定義される:

$$\mathcal{T} \left\{ \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) \right\} = \theta(t_1 - t_2) \hat{A}(t_1) \hat{B}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{B}(t_2) \hat{A}(t_1), \quad (\text{A.12})$$

あるいは, 一般的に n 個の演算子どうしの時間順序積 (\mathcal{T} 積とも呼ぶ) を

$$\mathcal{T} \left\{ \hat{A}_1(t_1) \hat{A}_2(t_2) \cdots \hat{A}_n(t_n) \right\} = \hat{A}_{p_1}(t_{p_1}) \hat{A}_{p_2}(t_{p_2}) \cdots \hat{A}_{p_n}(t_{p_n}). \quad (\text{A.13})$$

$$\hookleftarrow t_{p_1} > t_{p_2} > \cdots > t_{p_n}$$

すると, 式 (A.11) の結果を (A.8) に代入すれば時間発展演算子の展開はさらに以下のような表現を与える:

時間発展演算子の表現 (ハミルトニアンが時間に依存する場合)

$$\begin{aligned}
 \hat{U}(t; t_0) &= \hat{\mathbf{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \cdots \hat{H}(t_n) \\
 &= \hat{\mathbf{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} \left\{ \hat{H}(t_1) \cdots \hat{H}(t_n) \right\} \\
 &= \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

これが時間発展演算子 $\hat{U}(t; t_0)$ の最も一般的な表現である。

A.2 直交函数展開における Jackson の Trick