単極子場の量子化とその対称性

The Quantization of Monopole fields and Symmetricity

KIM Dohyun, ONOGI Tetsuya

Onogi Group, Hep-th., Dept. of Phys., Osaka Univ.

September 5, 2023

大阪大学 OSAKA UNIVERSITY

目次

The Correction of Maxwell Fields

体積電荷密度 ϱ_e と体積磁荷密度 ϱ_g が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\varrho_e\ , \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\varrho_g\ , \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\left(\mathbf{J}_g(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)\ , \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}_e(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t).
\end{gathered} \tag{1}$$

Action integral of Monopole Fields

単極子場の作用積分を書くため，4 元電荷ポテンシャル A^μ および 4 元磁荷ポテンシャル B^μ：

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} \quad , \qquad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする.

Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (2) の上に，**相対論的共変性**と**ゲージ不変性**を加えると，系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$S = -\int \frac{1}{4(q_e^2 + q_g^2)}[D^\mu, D^\nu]^2 \ d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \ d^4x + \int (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - m^2(\Phi^*\Phi) \ d^4x \tag{3}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (3) のように書いた時の **4 元ポテンシャル** A^μ, B^μ および**スピノル** $\psi(x^\mu)$ のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto \quad A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) \ , \\ B_\mu & \mapsto \quad B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) \ , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto \quad e^{-iq_e \Lambda(x^\mu) - iq_g \Gamma(x^\mu)} \psi(x^\mu) \end{cases} \tag{4}$$

を想定すると，系の共変微分 D_μ を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_e A_\mu + iq_g B_\mu . \tag{5}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル $G_{\mu\nu}$ を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}(q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}). \tag{6}$$

ここでテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$, $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}B_{\nu]}$ とする.

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

ここから**ハミルトンの最小作用の原理**を用いるため，作用積分 (3) の各項の変分を以下のように計算する：

$$
\begin{cases}
\delta_A(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = -\dfrac{4}{q_e^2+q_g^2}(q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu})\delta A_\nu + \partial_\mu \mathcal{O}^\mu \ , \\
\delta_A\{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi\} = \bar{\psi}(i\delta\not{D})\psi = -(q_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\delta A_\mu \ , \\
\delta_A\{(D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi)\} = \delta A_\mu[-iq_e\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\}].
\end{cases}
\tag{7}
$$

4 元ポテンシャル B^μ に関する変分も同様にできて，ここからマクスウェル方程式が導かれる．

The Maxwell equations of Dyons

それぞれの 4 元カレント J^μ, K^μ を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ , \tag{8}$$

$$K^\mu \equiv iq_g\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\} + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{9}$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2)J^\nu \ , \tag{10}$$

$$q_g^2\partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2)K^\nu . \tag{11}$$

Construction of Dyon-electron system-SU(2) Gauge theory

電子 e^- とダイオン ν_{eg} が**相互作用するもの**として，系のスピノルをスピノル ψ_e と $\psi_{\nu_{eg}}$ の二重項として以下のように書く：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで 3 元パラメーター $\boldsymbol{\alpha}$ を用意してゲージ群 SU(2) のスピノル変換を：

$$\Psi \quad \mapsto \quad \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \simeq \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \tag{13}$$

として設定する．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (13) により，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を用意すると系の共変微分 D_μ は：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{14}$$

として定義できる．パウリ行列が非可換で $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ となることに注意して，以下の Dirac 方程式：

$$\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) - m\right]\begin{pmatrix}\psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}}\end{pmatrix} = 0 \tag{15}$$

が不変になるようにゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の変換則を決める．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (15) が不変になるための変換 $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$ は：

$$i\gamma^\mu \left[(\partial_\mu U) - \frac{ig}{2} U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2}(\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma})U \right] \Psi = 0 \tag{16}$$

の関係を満たすべきである．SU(2) 群の生成子 $U = \mathbf{1} - \frac{ig}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ とする．

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \mapsto \quad \mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1} + \frac{2i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{17}$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (17) にゲージ群の生成子 U を代入して具体的に計算できる：

$$\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) + \frac{2i}{g}\left(-\frac{i}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{18}$$

$$= \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{2}\alpha^i W^j_\mu[\sigma^i, \sigma^j] + \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

導入したゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は式 (18) の変換式を満たす.

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Dirac fields

Dyon-電子相互作用を示す Dirac 場の Lagrangian 密度は：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} &= (\bar{\psi}_e,\ \bar{\psi}_{\nu_{eg}}) \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{g}{2}\mathbf{W\!\!\!/} \cdot \boldsymbol{\sigma} - m \right) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \\
&= \bar{\psi}_e \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{g}{2} W\!\!\!/^3 - m \right) \psi_e - \frac{g}{2}\bar{\psi}_e (W\!\!\!/^1 - iW\!\!\!/^2)\psi_{\nu_{eg}} \\
&\quad + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\partial\!\!\!/ + \frac{g}{2} W\!\!\!/^3 - m \right) \psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2}\bar{\psi}_{\nu_{eg}} (W\!\!\!/^1 + iW\!\!\!/^2)\psi_e .
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここでゲージ場 $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1,\ W_\mu^2,\ W_\mu^3)$ としておいた.

Construction of Dirac equations

それぞれのスピノルの **Dirac 共役**の変分 $\delta\bar{\psi}_e$, $\delta\bar{\psi}_{\nu_{eg}}$ に関する LAP は Dirac 方程式を示す：

$$
\begin{aligned}
e^-: &\quad \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{g}{2}W\!\!\!\!/^3 - m\right)\psi_e - \frac{g}{2}(W\!\!\!\!/^1 - iW\!\!\!\!/^2)\psi_{\nu_{eg}} = 0, \\
\nu_{eg}: &\quad \left(i\partial\!\!\!/ + \frac{g}{2}W\!\!\!\!/^3 - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2}(W\!\!\!\!/^1 + iW\!\!\!\!/^2)\psi_e = 0.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

この模型では電子とダイオンの**異なる粒子間の相互作用**を想定しているため，片方が無い極限では Dirac 方程式 (20) は **U(1) 電磁場**に収束する：

$$
\left(i\partial\!\!\!/ + q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_e = 0\ , \qquad \left(i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - q_g B\!\!\!\!/ - m\right)\psi_{\nu_{eg}} = 0 \tag{21}
$$

Determination of Gauge fields

以下の要請を加えると，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を決定できる：

Dirac 場の要請

電荷からなるゲージ場 A^μ は**局所的相互作用**を媒介する．磁荷からなるゲージ場 B^μ は**大域的相互作用**を媒介する．

電子とダイオンを入れ替える変換 $(e^- \leftrightarrow \nu_{eg})$ に対して不変である．

以上の条件から，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は以下のみが許される：

$$W_\mu^1 = q_e A_\mu + q_g B_\mu \ , \quad W_\mu^2 = 0 \ , \quad W_\mu^3 = q_e A_\mu + q_g B_\mu \tag{22}$$

Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (22) より，Dirac 場の Lagrangian は：

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}_e \left(i\not{\partial} - q_e \not{A} - q_g \not{B} - m \right) \psi_e - \bar{\psi}_e (q_e \not{A} + q_g \not{B}) \psi_{\nu_{eg}} + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\not{\partial} + q_e \not{A} + q_g \not{B} - m \right) \psi_{\nu_{eg}} - \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (q_e \not{A} + q_g \not{B}) \psi_e .$$

ダイオンの部分極限 $q_g \to 0,\ B_\mu \to 0$ の下では **U(1) ゲージ場**に収束する：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e (i\not{\partial} - q_e \not{A} - m) \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (i\not{\partial} - q_e \not{A} - m) \psi_{\nu_{eg}} . \tag{23}$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Curvature Tensors

U(1) ゲージ理論と同様に，SU(2) ゲージ場の場の強さ $G^k_{\mu\nu}$ は**曲率テンソルの拡張として**：

$$G^k_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_{[\mu} W^k_{\nu]} \sigma^k + \frac{ig}{2} W^i_\mu W^j_\nu [\sigma^i, \sigma^j] \\ = \left(\partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu\right) \sigma^k . \tag{24}$$

ここでゲージ場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{\text{field}}$ を導出するため，式 (24) を用いて以下を計算する：

$$\mathrm{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) = \sum_{k=1}^{3} \left(\partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu\right)^2 . \tag{25}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (25) の計算より，場の強さ $G^k_{\mu\nu}$ は以下のものとして切り替えても良い.

$$G^k_{\mu\nu} \quad \mapsto \quad \partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu \tag{26}$$

場の強さ $G^k_{\mu\nu}(k = 1, 2, 3)$ を以下のように計算できる：

ゲージ場の曲率 (Curvature tensors of Gauge field)

$$G^1_{\mu\nu} = q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu} \ , \qquad G^2_{\mu\nu} = 0 \ , \qquad G^3_{\mu\nu} = q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu} . \tag{27}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (27) の結果を踏まえると，系のゲージ場のみの Lagrangian 密度は以下になるのが一番正しい：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{SU}(2)}_{\mathrm{field}} = -\frac{1}{8(q_e^2+q_g^2)}\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = \mathcal{L}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{field}} . \tag{28}$$

得られたゲージ場の Lagrangian 密度は **U(1) ゲージ場と同じくなる**正当な結果が得られた．同時に Dirac 場 (17) の $\not{A}$ に関する変分からなる 3 つの **4 元ベクトル**を定義する．

$$J^\mu_e = q_e\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e \ , \quad J^\mu_g = q_e\bar{\psi}_{\nu_{eg}}\gamma^\mu\psi_{\nu_{eg}} \ , \quad J^\mu_{eg} = q_e(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\nu_{eg}} + \bar{\psi}_{\nu_{eg}}\gamma^\mu\psi_e).$$

Maxwell equations of SU(2) Gauge groups

同様に $\not{B}$ に関する Dirac 場の変分についても $K_e^\mu, K_g^\mu, K_{eg}^\mu$ を定義できる.
Hamilton 原理は次の Maxwell 方程式を示す：

SU(2) ゲージ群の Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} q_e^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} &= (q_e^2 + q_g^2)(J_e^\nu - J_g^\nu + J_{eg}^\nu), \\ q_g^2 \partial_\mu E^{\mu\nu} + q_g q_e \partial_\mu F^{\mu\nu} &= (q_e^2 + q_g^2)(K_e^\nu - K_g^\nu + K_{eg}^\nu). \end{aligned} \tag{29}$$

これが磁荷のある系の**一般化された Maxwell 方程式**である.

Generalized Continuity equation

反対称テンソル $F^{\mu\nu}, E^{\mu\nu}$ は以下の恒等式を満たしている：

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu E^{\mu\nu} = 0. \tag{30}$$

この恒等式を一般化された Maxwell 方程式に代入することにより，以下の**連続方程式**が導かれる：

一般化された連続方程式

$$\partial_\nu (J_e^\nu - J_g^\nu + J_{eg}^\nu) = \partial_\nu (K_e^\nu - K_g^\nu + K_{eg}^\nu) = 0. \tag{31}$$

これは，**電荷**からなる $J_e^\nu = q_e \bar{\psi}_e \gamma^\nu \psi_e$ が保存されない可能性を示している．

Adoption of Differentail froms

相対論を認めると以下のように $\mathcal{M}$ の Lorentz 多様体を用意する．計量は Mincowski 計量として：

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+) \tag{32}$$

として取る．既知の電磁気テンソルと Maxwell 方程式は：

微分形式の導入

2-形式 $\Omega^2(\mathcal{M})$ 上で電磁気テンソルは次のように書ける．

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{33}$$

The Hodge dual

2-形式での電磁気テンソルにおける磁荷のない場の Maxwell 方程式は以下の 2 つでまとまる.

$$\mathrm{d}F = 0\ , \qquad \star\mathrm{d}\star F = J_e \tag{34}$$

ここで Hodge 作用素と呼ばれる同型写像 $\star$ を以下のように定義する：

Hodge 作用素

m 次元のベクトル空間 $\mathcal{M}$ に対して，写像 $\Omega^r(\mathcal{M}) \mapsto \Omega^{m-r}(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_r}\, dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_r} \\ \mapsto \quad \star\omega &= \frac{\sqrt{-g}}{r!(m-r)!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_r}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_{r+1}\cdots\nu_m}\, dx^{\nu_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_m} \end{aligned} .$$

The Hodge dual

ある任意の r-形式 ω の 2 重 Hodge 作用 $\star\star\omega$ は定義により：

$$\star\star\omega = \frac{-g}{(r!)^2(m-r)!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_r}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_{r+1}\cdots\nu_m}\epsilon^{\nu_{r+1}\cdots\nu_m}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_r}\ dx^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\sigma_r}$$

$$= \frac{(-1)^{r(m-r)+1}}{(r!)^2(m-r)!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_r}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_r\nu_{r+1}\nu_m}\epsilon_{\sigma_1\cdots\sigma_r\nu_{r+1}\cdots\nu_m}\ dx^{\sigma_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\sigma_r}$$

$$= (-1)^{r(m-r)+1}\omega.$$

と計算される．より，Mincowski 計量 $g^{\mu\nu}$ 場の 2-形式 $\Omega^2(\mathcal{M})$ の Hodge 変換の繰り返しは：

$$\star\star\omega = (-1)^{2(4-2)+1}\omega = -\omega. \tag{35}$$

The Restriction of Gauge field

磁荷のない Maxwell 方程式 $\mathrm{d}F = 0$ は **Gauss 法則**と **Faraday 原理**を示すため，磁荷の影響を受けない成分だと仮定できる．[1] まずは，Poincaré の補題より F をある 1-形式 $A = A_\mu \, dx^\mu$ の完全微分として：

$$\mathrm{d}F = 0 \qquad \mapsto \qquad F = \mathrm{d}A. \tag{36}$$

よって，磁荷のあるときの場の強さ $G = \frac{1}{2!} G_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ も微分形式によりある 2-形式の $C = \frac{1}{2!} C_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ を用いて

$$G = \mathrm{d}A + C \tag{37}$$

の形式しかできない．

[1] このように設定すると，この模型では Gauss 法則と Faraday 原理は磁荷と独立的なものになる問題は残る．

Determination of Electromagnetic Tensor

今からゲージ場を決定する．電流密度は 1-形式なので，Maxwell 方程式は **1-形式の線形微分方程式**である条件が追加で与えられる．外微分 d の作用で 1-形式になるものは以下の 2 通りしかない：

$$\star\mathrm{d}\star G = \star\mathrm{d}\star\mathrm{d}A + \star\mathrm{d}\star C = J_e\ , \qquad \star\mathrm{d}G = \star\mathrm{d}^2A + \star\mathrm{d}C = J_g$$

ここで，Gauss 法則は磁荷のある電磁場のときも磁流密度 J_g と独立でないと行けないので $\star\mathrm{d}\star C = 0$ を満たす．Poincaré の補題は以下を示す．

$$\mathrm{d}\star C = 0 \quad \mapsto \quad C = -\star\mathrm{d}B. \tag{38}$$

ただし，1-形式として $B = B_\mu\ dx^\mu$ とする．

U(1)×U(1) Gauge groups-Action integrals

式 (38) の結果より，場の強さは以下のようにかける：

$$G = \mathrm{d}A - \star\mathrm{d}B = \frac{1}{2}\left(\partial_{[\mu}A_{\nu]} - \frac{\sqrt{-g}}{2}\theta(x^\mu)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho B^\sigma\right)\ dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (39)$$

ゲージ場の作用積分 S_F は以下のように定義される．これが可能な最も一般的な作用積分である．

ゲージ場の作用積分 (Constant Theta term)

$$S_F = \int -\frac{1}{4}G \wedge \star G = \int -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \theta^2 E_{\mu\nu}E^{\mu\nu})\ \sqrt{-g}d^4x.$$

The Bianchi identity

式 (39) から作用積分を計算することに当たって，以下の項が出てくる.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}B &= \frac{1}{2}\int \theta(x^\mu)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\rho B_\sigma\ d^4x \\ &= (\text{表面項}) - \frac{1}{2}\int (\partial_\rho\theta(x^\mu))\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}B_\sigma\ d^4x.\end{aligned} \tag{40}$$

ここの計算ではビアンキ恒等式と呼ばれる恒等関係 $\mathrm{d}^2A = 0$ を用いた：

ビアンキ恒等式 (Bianchi identity)

$$F = \mathrm{d}A \quad \mapsto \quad \star\mathrm{d}F = \frac{1}{2}\partial_\mu F_{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\rho\sigma}{}_\nu\ dx^\nu = 0.$$

The Witten conditions

Bianchi 恒等式および Theta 項 (40) の計算より，$\partial_\rho\theta(x^\mu) = 0$ の場合は電子と磁荷が相互作用しない少々矛盾的な結果を生み出す．今後は **Witten 条件** ($\partial_\rho\theta(x^\mu) \neq 0$) の上で考える：

ゲージ場の作用積分 (Witten condition)

$$S_F = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\theta^2(x^\mu)}{4}E_{\mu\nu}E^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu(\theta(x^\rho))B_\nu\tilde{F}^{\mu\nu}\right).$$

ここで**双対テンソル (Dual tensor)** は以下のように定義する：

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \tag{41}$$