球対称のSchwarzschild BHへの半古典的アプローチ：

古典力学からブラックホールの計量まで

大阪大学理学研究科　素粒子論
理学部　物理学科　B3 金導賢

1. 概要: ブラックホールの分類

BH の定義

重力場の源となる質量が十分大きい ($M > 3M_{\mathrm{sun}}$) 場合，因果的に断切された時空を作ることができる。これをブラックホールと定義する。

BH の現代的分類

現代の物理学においては、一般相対論により**ブラックホール (BH)** を以下の 3 つに分けて分類する:

1. **Schwarzschild BH** (球対称の回転せず、荷電されていない BH)
2. **Kerr BH** (回転する BH)
3. **Reissner-Nordström BH**(荷電されている BH)

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

2-1. 等価原理から時間遅延へ

ブラックホールへの論議は重力を扱うことから始まる。等価原理により、重力の及ぼす系は加速系として説明できる:

思考実験:

1. $t = 0$ で箱は加速し始める。
2. 慣性系 (ct, y) と非慣性系 (ct', y') を用意する。
3. $t = 0$ と $t = \Delta t_0$ で下方向きでレーザーを照射する。

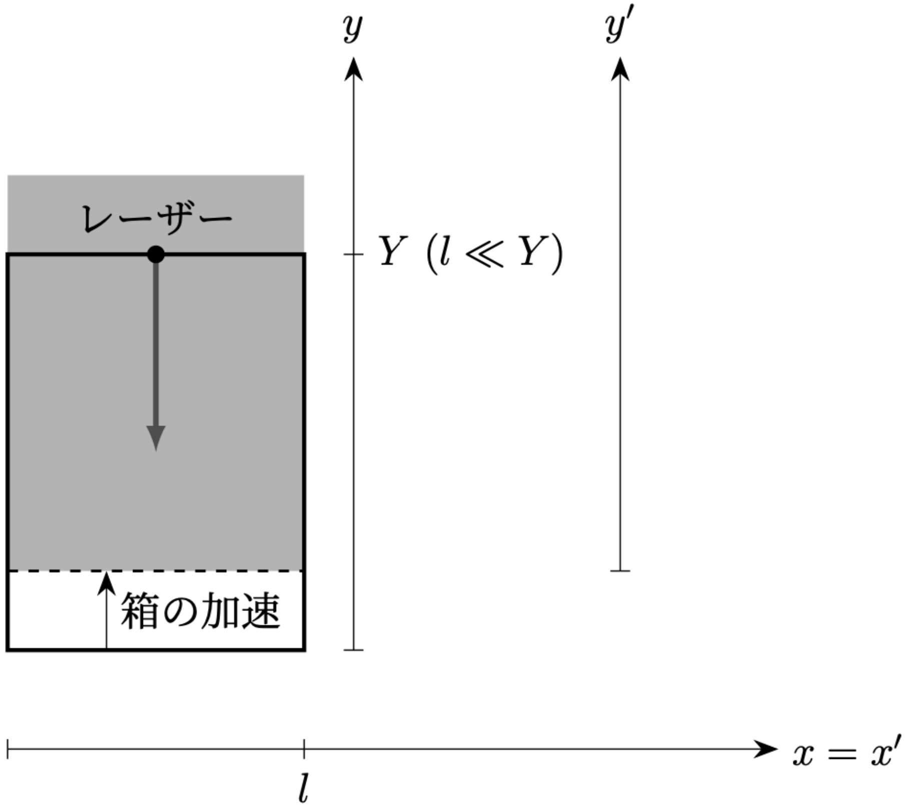
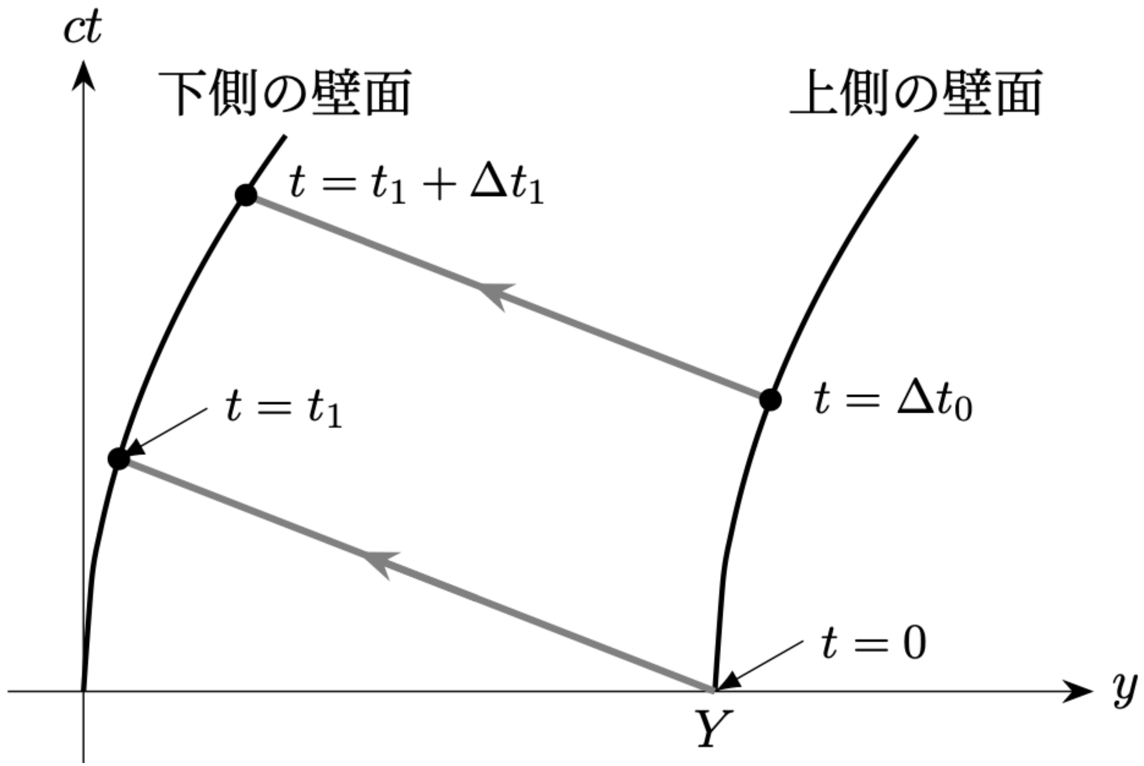


図 1

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

ここからそれぞれの時刻で照射したレーザーが箱の下側の壁面に辿り着くまでの間を観察する (光速不変の原理を忘れてはいけない)。すると、この思考実験は座標系 (ct, y) 上のダイヤグラムとして以下のように示せる:



2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

すると、それぞれのレーザー光線について以下のように運動方程式を立てる:

1 発目のレーザ

$$Y - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \qquad \cdots (*)$$

2 発目のレーザ

$$Y + \frac{1}{2}g(\Delta t_0)^2 - \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta t_1)^2 = c(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t_0) \qquad \cdots (**)$$

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

ここで、今論議では時刻 t_1 に対しては興味がないので、除去すると:

$$\Delta t_0 \left(\frac{1}{2} g \Delta t_0 + c \right) = \Delta t_1 \left(\frac{1}{2} g \Delta t_1 + \sqrt{c^2 + 2gY} \right).$$

また、この上で十分弱い重力場の近似条件 (ニュートンの線形近似) として、$g\Delta t \ll c,\ gY \ll c^2$ を足せば上式は最終的に以下の関係式を導く:

加速による時間遅延

$$\Delta t_0 \simeq \left(1 + \frac{gY}{c^2} \right) \Delta t_1$$

これが加速による時間遅延の効果であり、等価原理により重力場による時間遅延効果にもなる。ただし、これはあくまで**弱い重力場**での近侍式。

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

重力による時間遅延の一般化

続いて、非常に強い重力場の元での一般化された時間遅延の式も全スライドの近侍式から導かれる。強い重力場も激しい加速系として置き換えられるので、箱の高さ Y と時間間隔 Δt_0 を**非常に小さい**ものとして取れば加速度が**一様**なものとして近似される。Δt_Y を高度 Y での時間の流れとすれば:

$$\Delta t_{Y+\Delta Y} \simeq \left(1-\frac{g(Y)}{c^2}(Y+\Delta Y)\right)\left(1+\frac{g(Y)}{c^2}Y\right)\Delta t_Y \simeq \left(1-\frac{g(Y)}{c^2}\Delta Y\right)\Delta t_Y,$$

$$\simeq \left[1-\frac{GM}{c^2Y}+\frac{GM}{c^2Y}\left(1-\frac{\Delta Y}{Y}\right)\right]\Delta t_Y \simeq \left[1-\left(\frac{GM}{c^2Y}-\frac{GM}{c^2(Y+\Delta Y)}\right)\right]\Delta t_Y$$

$$\simeq \left(1-\frac{\Phi(Y)-\Phi(Y+\Delta Y)}{c^2}\right)\Delta t_Y.$$

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

すると、十分強い重力の下でも成立 (もちろん、BH の外部程度の強さを想定する) する、**一般化された時間遅延式**:

$$\Delta t_y = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{\Phi((k-1)\Delta Y)-\Phi(k\Delta Y)}{c^2}\right)\Delta t_0 \qquad \leftarrow \ \Phi(0):=0$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\Phi(y)}{Nc^2}\right)^N \Delta t_0 = \exp\left(\frac{\Phi(y)}{c^2}\right)\Delta t_0 .$$

を得る。ここで十分強い重力場に対しても、その分割を $Y = y/N$ $(\to\infty)$ として十分小さくとれば起潮差が $\Phi(y_{k+1})-\Phi(y_k) \ll c^2$ である。つまり:

$$\left(1+N\frac{\Phi(y)}{Nc^2}\right) \simeq \left(1+\frac{\Phi(y)}{Nc^2}\right)^N .$$

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

2-2. 等価原理から重力長さ収縮へ

重力による長さの収縮効果も、時間遅延と同様に重力の及ぼす系を加速系として置き換えることで説明できる:

思考実験:

1. $t = 0$ で箱は加速し始める。
2. 慣性系 (ct, y) と非慣性系 (ct', y') を用意する。
3. $t = 0$ において箱の中に固定された固有長さ Δr_0 の棒の両端から下方向きでレーザーを同時に照射する。

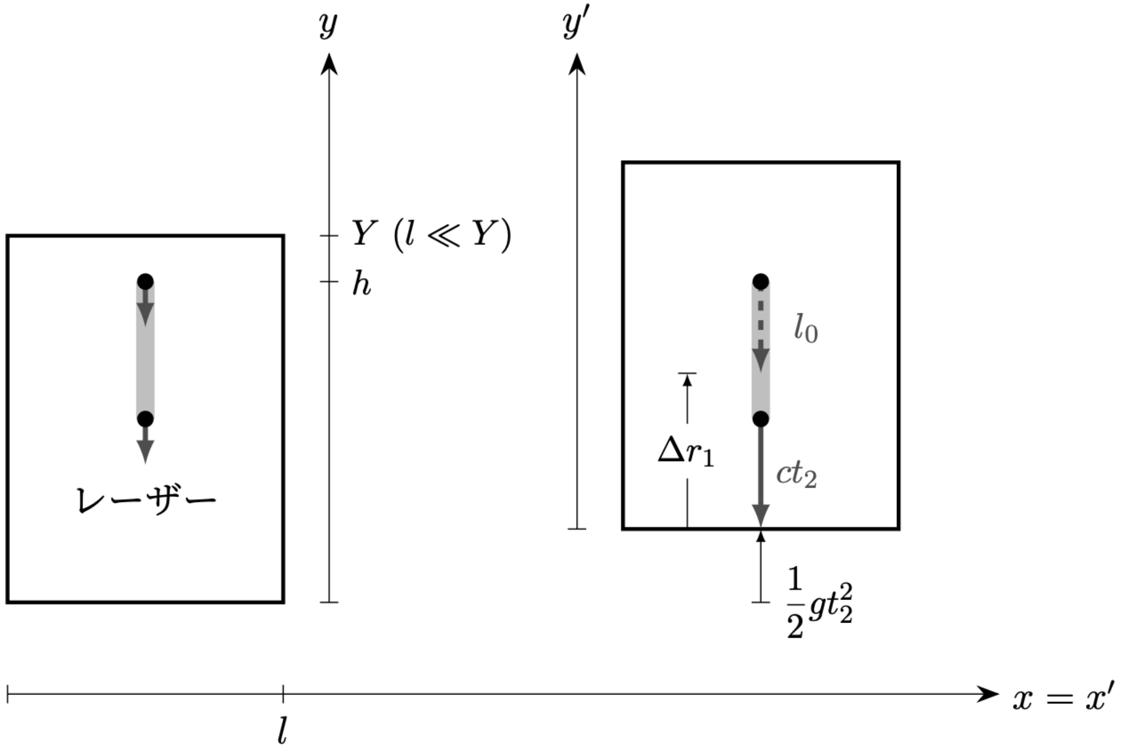


図 2

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

ここから箱の中の非慣性系で観測する棒の長さ Δr_1 について考察する。外部の感性座標系 (ct, y) にて観測した棒の長さは自明に Δr_0 である。非完成座標系にての棒の長さ Δr_1 は、棒の下側から照射されたレーザーの光子が下側の壁面にたどり着いたとき、下側の壁面から測った棒の上側から発射された光子の高さである:

慣性座標系から観測した所要時間

$$h - \Delta r_0 - \frac{1}{2} g t_2^2 = c t_2 \qquad \rightarrow \qquad t_2 = \frac{c}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h - \Delta r_0)}{c^2}}\right).$$

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

非慣性座標系から観測した所要時間

$$t'_2 \simeq \left(1 - \frac{gY}{c^2}\right) t_2 = \frac{c}{g}\left(1 - \frac{gY}{c^2}\right)\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h - \Delta r_0)}{c^2}}\right) \quad \cdots (\alpha)$$

非慣性系における所要時間は、前々スライドで導けた**時間遅延効果**を考慮することで上式のように簡単に導ける。

加速による長さ収縮効果

以上の計算から加速による長さ収縮効果を直ちに計算することができる:

$$\Delta r_1 = h' - ct'_2 \simeq h' - \frac{c^2}{g}\left(1 - \frac{gY}{c^2}\right)\left(\frac{g(h - \Delta r_0)}{c^2}\right) = h' - (h - \Delta r_0) - \frac{gY}{c^2}(h - \Delta r_0).$$

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

ここで非完成座標系上では、棒の位置 h にも加速による収縮効果が発生すること[1]に注意。特に、$h' = h + \Delta h$ とおけば:

$$\Delta r_1 = \Delta r_0 \left(1 + \frac{gY}{c^2}\right) + \Delta h - \frac{gY}{c^2} h,$$

また、箱の高さ Y が十分小さい場合 $(gY \ll c^2)$、長さの収縮効果は棒の高さにほぼ依存しなくなるので、この近似の下では

$$h' = \left(1 + \frac{gY}{c^2}\right) h, \qquad \Delta r_1 = \left(1 + \frac{gY}{c^2}\right) \Delta r_0$$

を導く。これは等価原理により、**弱い重力場による長さの収縮効果**にもなる。

[1] 重力のあるところでの長さが長く測定される.

2. 等価原理から導くSchwarzschild BHの物理

重力による長さ収縮-膨張の一般化

全スライドで導けた弱い重力場 (ニュートン線形近似) における長さの収縮効果は、時間遅延と同様なアプローチをとれば以下のような強い重力場の下でも成立するように一般化できる:

$$\Delta r_y = \exp\left(-\frac{\Phi(y)}{c^2}\right)\Delta r_0.$$

あるいは、その逆:

$$\Delta r_0 = \exp\left(\frac{\Phi(y)}{c^2}\right)\Delta r_y.$$

ここで Δr_y は重力ポテンシャル $\Phi(y)$ を持つ位置の近傍での測定した長さである。より長く見える。これは**光さえも曲がることを意味**する。

3. 球対称BHにおけるSchwarzschild 計量

Schwarzschild 計量

今までの論議に基づいて、Schwarzschild BH の計量を導く。球対称のブラックホールの計量は最も一般的なものとして以下のように導入される:

$$ds^2 = -\xi(r)c^2dt^2 + \Lambda(r)dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

ここで、この計量の作る同じ事件に対して、重力の及ぼす空間上の系 (dt, dr) と重力の及ばない十分遠い空間上の系 $(d\tau, d\Sigma)$ を考える:

$$ds^2 = -\xi(r)c^2dt^2 + \Lambda(r)dr^2 = -c^2d\tau^2 + d\Sigma^2.$$

重力の及ばない十分遠い系での計量はミンコフスキー計量に収束しすることとに注意。ここでどっちも回転成分がないように固定した。

3. 球対称BHにおけるSchwarzschild 計量

Schwarzschild 計量を決定するためには、この関数 $\xi(r)$, $\Lambda(r)$ を決定すれば良い。これは、以前調査した**重力場による時間遅延効果**および**重力場による長さ収縮-膨張効果**を足すことで決定することができる。

3-1. 重力による時間遅延

重力場から十分離れていて重力場の及ばない探査船 A から探査船 B を派遣して重力場に近づける。すると、探査船 A の座標系は (dt, dr)、探査船 B の座標は $(d\tau, d\Sigma)$ である。探査船 B が空間上止まっているときは $dr = d\Sigma = 0$ となり、かつ重力による時間遅延を考えると:

$$ds^2 = -\xi(r)c^2dt^2 = -c^2d\tau^2 \qquad \rightarrow \qquad d\tau = \sqrt{\xi(r)}dt = \exp\left(\frac{\Phi(r)}{c^2}\right)dt.$$

3. 球対称BHにおけるSchwarzschild 計量

3-2. 重力による長さ収縮

同様に、重力場から十分離れていて重力場の及ばない探査船 A から探査船 B を派遣して重力場に近づける。すると、探査船 A の座標系は (dt, dr)、探査船 B の座標は $(d\tau, d\Sigma)$ である。ある時点に探査船 B においての空間上の 2 点を測定する時は $dt = d\tau = 0$ となり、長重力によるさ収縮の効果を考えると:

$$ds^2 = \Lambda(r)dr^2 = d\Sigma^2 \qquad \to \qquad d\Sigma = \sqrt{\Lambda(r)}dr = \exp\left(-\frac{\Phi(r)}{c^2}\right)dr.$$

よって、以上の結果から Schwarzschild 計量が重力ポテンシャルの関数として決定される:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)/c^2}c^2dt^2 + e^{-2\Phi(r)/c^2}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

3. 球対称BHにおけるSchwarzschild 計量

3-3. 重力ポテンシャルの決定

非常に重力の強いところでの重力ポテンシャルを決定しにくいという問題がある (ニュートンの重力ポテンシャルにならない)。一方、ポテンシャルが**一意的**であり、十分離れたところではニュートンの線形近似から:

$$e^{2\Phi(r)/c^2} \underset{r\to\infty}{\simeq} 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \qquad e^{-2\Phi(r)/c^2} \underset{r\to\infty}{\simeq} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

が近似的に言えるが、時間遅延式の質量 M に関する重ね合わせの原理から、これは重力の強い場所でも成立する。つまり正しいのは:

$$e^{2\Phi(r)/c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \qquad e^{-2\Phi(r)/c^2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \qquad \cdots(\beta)$$

3. 球対称BHにおけるSchwarzschild 計量

3-4. Schwarzschild 計量の決定

故に、以上を踏まえると Schwarzschild 計量を以下のように決定することができる:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad \left(r_s = \frac{2GM}{c^2}\right)$$

これが **Schwarzschild 真空解**、あるいは **Schwarzschild 外部解**と呼ばれるもので、物質のない真空での重力場の計量である。これは、1916 年に Schwarzschild が一般相対論により導いた結果と完璧に一致する！

Schwarzschild 半径 $r = r_s$ を境界に、ds^2 の符号が変わるので因果が切れていることがわかる (BH の存在を示唆する)。

4. BHの質量の推定: 光子球(Photon sphere)の半径

4-1. 測地線の方程式

BH の周りの光子 (Photon) は、適当なエネルギーを持つとき、不安定に BH の周りを球面上で円運動することができる。これを BH の**光子球 (photon sphere)** と呼ぶもので、実際観測できるものである。

以下でこの光子球の半径を調べるため、光子が通過する測地線を以下のように調べる:

$$\int ds = -\int d\tau \underbrace{\sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{(dr/d\tau)^2}{1-\frac{r_s}{r}} + +r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}}_{=ds/d\tau=L[t(\tau),r(\tau),\theta(\tau),\phi(\tau)]}.$$

4. BHの質量の推定: 光子球(Photon sphere)の半径

すると、最初作用の原理から測地線の方程式を求めることができる。上の計算で L を Lagrangian として読み取ると、Euler-Lagrange 方程式から:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial r/\partial \tau)}\right) = \frac{c r_s}{2r^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{r\sin^2\theta}{c}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0$$

ここで τ は固有時間として $ds = -c d\tau$ であり、今考えているのは BH の周りを球面上で円運動している光子なので $dr/d\tau = d\theta/d\tau = 0$ である必要がある。すると、以上のことから光子の測地線の方程式を得る。

光子の測地線の方程式

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{(d\phi/d\tau)^2}{(dt/d\tau)^2} = \frac{c^2 r_s}{2r^3\sin^2\theta} \qquad \cdots(\gamma)$$

4. BHの質量の推定: 光子球(Photon sphere)の半径

4-2. 計量条件

続いて、計量を考えてみる。BH の周りを球面上で円運動している光子は以下の計量条件を満たす:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = 0.$$

ここで $dr = d\theta = 0$ であり、light-like な経路であるため $ds^2 = 0$ を用いた。これから、以下の関係式が導かれる:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2 \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \qquad \cdots (\delta)$$

4. BHの質量の推定: 光子球(Photon sphere)の半径

4-3. 光子球の半径

故に、以上から得られる関係式 (γ) および (δ) を結合すれば、以下のように光子球の半径を決定することができる:

光子球の半径

$$\frac{c^2 r_s}{2 r_p^3 \sin^2\theta} = \frac{c^2}{r_p^2 \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_s}{r_p}\right) \quad \rightarrow \quad \underline{\therefore r_p = \frac{3}{2} r_s .}$$

付録 A.　重力ポテンシャルの決定

ここでは式 (β) を確かめる。質量 M の作る重力の下での時間の流れ Δt_y および重力の及ばない自由空間での時間の流れ Δt_0 は以下の関係式を満たす。区別のため、ラベルとして質量 M を書き込むと:

$$\Delta t_y(M) = e^{\Phi_M(r)/c^2}\Delta t_0,$$

すると、質量 M に関する重ね合わせの原理から

$$\Delta t_y(M_1 + M_2) = e^{\Phi_{M_1}(r)/c^2}e^{\Phi_{M_2}(r)/c^2}\Delta t_0 = e^{\Phi_{M_1+M_2}(r)/c^2}\Delta t_0$$

が要請される。この要請と十分離れた $r \to \infty$ ときの近似 (ニュートン線形近似) を合わせれば、重力ポテンシャルを具体的に決定することができる。

付録 A. 重力ポテンシャルの決定

項 $e^{2\Phi_M(r)/c^2}$ を以下のように M に対して

$$e^{2\Phi_M(r)/c^2} = a_0 + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots$$

としてテイラー展開する。すると、$r \to \infty$ における近似で a_0 と a_1 を以下のように決定できる:

$$e^{2\Phi_M(r)/c^2} \underset{r\to\infty}{\simeq} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \qquad \to \qquad e^{2\Phi_M(r)/c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \mathcal{O}_1(M)$$

あるいは、$e^{\Phi_M(r)/c^2}$ を

$$e^{\Phi_M(r)/c^2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + \mathcal{O}_2(M) \qquad \cdots (I)$$

付録 A.　重力ポテンシャルの決定

ここから時間遅延式を前スライドの展開 (I) を持って評価してみる:

$$\frac{\Delta t_y(M_1+M_2)}{\Delta t_0} = \left(\sqrt{1-\frac{2GM_2}{c^2 r'}}+\mathcal{O}_2(M)\right)\left(\sqrt{1-\frac{2GM_1}{c^2 r}}+\mathcal{O}_2(M)\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{2GM_2}{c^2 r\sqrt{1-\frac{2GM_1}{c^2 r}}}+\mathcal{O}_2'(M)}+\mathcal{O}_2(M)\right)\left(\sqrt{1-\frac{2GM_1}{c^2 r}}+\mathcal{O}_2(M)\right)$$

$$= \sqrt{1-\frac{2GM_1}{c^2 r}-\frac{2GM_2}{c^2 r}}+\mathcal{O}_2''(M).$$

ここで重力による長さ収縮に注意せよ。

付録 A.　重力ポテンシャルの決定

故に、以上の計算から、時間遅延式が質量 M に対して重ね合わせの原理を満たすためには、展開 (I) において $\mathcal{O}_2(M) = 0$ でなければならない。以上の論議から、時間遅延式の質量 M に関する重ね合わせの原理は以下のように重力ポテンシャルを決定する:

重力ポテンシャルの決定

$$e^{\Phi(r)/c^2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}, \qquad e^{2\Phi(r)/c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}.$$