(Theoretical Phys.)
Onogi Group　　Honors seminor 2023, Summer

場の共変量子化

Covariant Quantization of Fields

金　導賢 [1] **大野木　哲也** [2]

[1]大阪大学理学部物理学科 *(First author)*
Undergraduate course, Machikaneyama-Cho 1-1, Toyonaka 560-0043, Japan

[2]大阪大学理学研究科物理学専攻 *(Corresponding author)*
Professor, H714, Machikaneyama-Cho 1-1, Toyonaka 560-0043, Japan

E-mail: u685087j@ecs.osaka-u.ac.jp

Abstract: ローレンツ群を中心にして

目 次

1 はじめに 2
1.1 記号と記法 2
1.2 参考文献 3

2 ローレンツ群と表現論 4
2.1 ミンコフスキー計量空間 4
2.1.1 世界間隔 4
2.1.2 ミンコフスキー計量 6
2.1.3 共変ベクトルと反変ベクトル 7
2.1.4 双対基底と双対空間 8
2.1.5 座標変換とローレンツ共変性 10
2.1.6 共変・反変性とテンソル解析 12
2.2 ローレンツ変換とローレンツ群 14
2.2.1 ローレンツ群 14
2.2.2 部分群と無限小ローレンツ変換 17
2.2.3 ローレンツ群の連結成分 19
2.2.4 ローレンツ群の生成子 22
2.2.5 リー代数とローレンツ群の代数 23
2.2.6 ローレンツ群の表現行列 27
2.2.7 ローレンツブーストと空間回転 28

3 角運動量と共変量子化 29
3.1 共変量子化と循環座標 29
3.1.1 空間回転の正式化 29
3.1.2 多重行列規約と多重行列代数 31
3.1.3 空間回転の交換関係 35
3.1.4 共変量子化の正式化 37
3.2 ローレンツ共変量の共変量子化 38
3.2.1 スカラー，4 元ベクトル，スピノル 38

4 自由 Dirac 場とスピン 43

1　はじめに

1.1　記号と記法

この講義では別の指示がない限り，**自然単位系 (Natural Unit)** を使う:

$$c = \mu_0 = \epsilon_0 = \hbar = k_B = 1. \tag{1.1}$$

また，ミンコフスキー空間 (Minkowski space) の符号規約

$$\eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(+, -, -, \cdots, -), \tag{1.2}$$

およびユクリッド空間では

$$g_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(+, +, +, \cdots, +). \tag{1.3}$$

その他の記号規約は次の通りである.

記号 (Symbol)	物理量 (Physical quantity)
$\beta = \dfrac{v}{c}$	非速度
$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	ローレンツ因子 (Lorentz factor)
$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$	ローレンツ変換 (慣性系の変換)
$g = \det g_{\mu\nu}$	計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式
$\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$	ローレンツ群の生成子
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	パウリ行列
$i, j, k, \cdots$	共変・反変の区分なき添え字
$\mu, \nu, \rho, \cdots$	共変・反変の区分付き添え字
$\hat{\mathcal{M}}$	多重行列

表 1. 様々な記号の規約

記号 (Symbol)	物理量 (Physical quantity)
$(\mathbf{1})^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$	単位行列 (k 次元)
$\lvert\mathbf{1}_\rho\rangle$	ρ 番目正規直交基底
$\lvert m\rangle = \lvert 0, m\rangle$	回転数発展ベクトル
$\lvert\not{\xi}^{\mu}\rangle = \lvert\not{\xi}^{\mu}, 0\rangle$	回転角発展ベクトル
$\mathbf{R}^n$	実数空間 (n 次元)
$\mathbf{C}^n$	複素空間 (n 次元)
$\mathbf{V}_k$	ベクトル空間 (k 次元)
$\mathbf{G}_k$	正方行列空間 (k 次元)
$\mathfrak{F}_k$	多重行列空間 (k 次元)
$\mathcal{O}(1,3)$	ローレンツ群
$\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$	本義ローレンツ群
$\mathcal{C}(k)$	多重行列群 ($\mathfrak{F}_k \times \mathfrak{F}_k \mapsto \mathfrak{F}_k$)

表 2. 群と空間の規約

1.2 参考文献

- Tatsuma Nishioka, “Qunatum Field Theory” (大阪大学の講義ノート)
- 佐藤亮介,『相対論的量子力学・場の理論序説』(大阪大学の講義ノート)
- David Tong, “Quantum Field Theory” (Cambridge university lecture note)
- 川村嘉春,『相対論的量子力学』，裳華房，2012
- 坂本眞人,『場の量子論: 不変性と自由場を中心にして』，裳華房，2014
- 中原幹夫,『理論物理学のための幾何学とトポロジー I』，日本評論社，2018

2　ローレンツ群と表現論

2.1　ミンコフスキー計量空間

自由空間で伝播される電磁波の波動方程式は**マクスウェル方程式 (Maxwell equation)** およびローレンツゲージ (Lorentz gauge) により決定される．

自由空間のマクスウェル方程式 (Maxwell's equation)

$$\left[\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\varphi(\mathbf{r})=0, \tag{2.1}$$

$$\left[\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{0}. \tag{2.2}$$

ここでそれぞれのポテンシャルに関する波動方程式 (2.1) および (2.2) では光速不変性を示すために SI 単位系として表した．また，この波動方程式から光速不変性

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{2.3}$$

が得られる．

2.1.1　世界間隔

式 (2.3) の光速不変性を認めれば，光経路 (light path) 上では慣性系の選択とは関係なく常に次の関係が成り立つことが分かる:

$$c^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}, \tag{2.4}$$

あるいは同じ表現：

$$c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=0. \tag{2.5}$$

一般の**ユクリッド内積空間 (Euclidean space)** では，光速不変性が成り立たない場合もあるため，4 元の時空での線素 ds が光速不変性を満たすように再定義する必要がある．

世界間隔 (World interval)

光速不変性を保つような時空の線素として，世界間隔[a]を次のように定義する．

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \tag{2.6}$$

[a] このような時空の光速不変性を保つ空間を**ミンコフスキー空間 (Mincowski space)** とよぶ.

かつ，世界間隔 ds_i^2 は慣性系に依らずに不変である:

$$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2. \tag{2.7}$$

ここの世界間隔 (World interval) の定義から，線素 ds^2 に次のような 2 つの条件を要請することができる:

- **光速不変性 (Constancy of light velocity):**
  光速不変性をマクスウェル方程式 (Maxwell's equations) から確かめたので，線素 ds にもある慣性系 $\mathcal{S}_i$ での線素 $ds_i^2 = 0$(光経路) ならば:

$$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2 = ds_i^2 = 0. \tag{2.8}$$

  を要請する．

- **速度等方性 (Isotropy of velocity):**
  世界間隔の定義から，線素 ds^2 の形式

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2dt^2\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right] \tag{2.9}$$

  から線素 ds^2 の速度等方性を要請する．

以上の要請から，光経路でない一般的な経路の線素 ds^2 も慣性系の選び方に依らないことを証明できる．

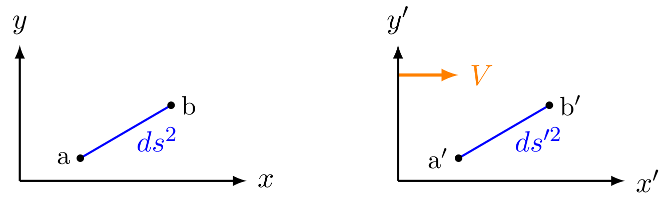

図 1. 異なる慣性系での世界間隔

上の図に示すように，線素 ds^2 は慣性系の取り方に依らないことを証明するため，異なる慣性系 $\mathcal{S}(x, y; t)$ と $\mathcal{S}'(x', y'; t')$ で観測した世界間隔 ds^2 と ds'^2 の関係を考える．上で要請した**光速不変性** (**Constancy of light velocity**) と**速度等方性** (**Isotropy of velocity**) から線素 ds^2 と ds'^2 の関係式は次のように書ける:

$$ds'^2 = \beta(V)ds^2, \tag{2.10}$$

かつ，ds^2 に関しても

$$ds^2 = \beta(-V)ds'^2. \tag{2.11}$$

式 (2.10) および (2.11) から，$\beta(V)$ と $\beta(-V)$ は

$$\beta(-V) = \frac{1}{\beta(V)} \tag{2.12}$$

の条件を満たす．速度等方性 (Isotropy of velocity) から線素の変換関数は $\beta(V) = \beta(-V)$ となり，さらに式 (2.12) から変換関数 $\beta(V)$ は定数になることが分かる．

$$\beta^2(V) = 1 \tag{2.13}$$

ここで，式 (2.6) のように線素 ds^2 を取ったら，ある適切な慣性系 $\mathcal{S}_\tau$ が存在して

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \beta(V_\tau)c^2d\tau^2 \tag{2.14}$$

を満たす．一方で，$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 > 0$ であることに注意すれば $\beta(V) > 0$ を得られ，変換関数は $\beta(V) = 1$ として決定される:

$$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2 > 0. \tag{2.15}$$

2.1.2 ミンコフスキー計量

前の節で，光速不変性 (Constancy of light) を認めれば線素 ds^2 は不変であることが分かった．

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 > 0 \tag{2.16}$$

線素 ds^2 はテンソル表現を使えばより簡単に書ける:

計量テンソル (Metric tensor)

世界間隔 ds^2 は計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を用いて次のように書ける:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.17}$$

ここの計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は次のように定義する:

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

ここで式 (2.17) には同じ添え字が二回現れたときに和の記号を省略する**アインシュタインの縮約記法 (Einstein summation convention)** を使った．この記法を使用するとベクトル計算の表記が簡単になるので，特に混乱がない場合は以下でこの記法を使用する．

$$\sum_\mu a_\mu b_\mu \xrightarrow{\text{縮約}} a_\mu b_\mu \tag{2.19}$$

2.1.3 共変ベクトルと反変ベクトル

ここからは，ベクトルの変換の様子により**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** として区分して扱う．次の図のようにあるベクトル $\mathbf{A}$ を異なる基底の組 $\langle X_1, X_2 \rangle$[1]および $\langle Z_1, Z_2 \rangle$ の上で考える:

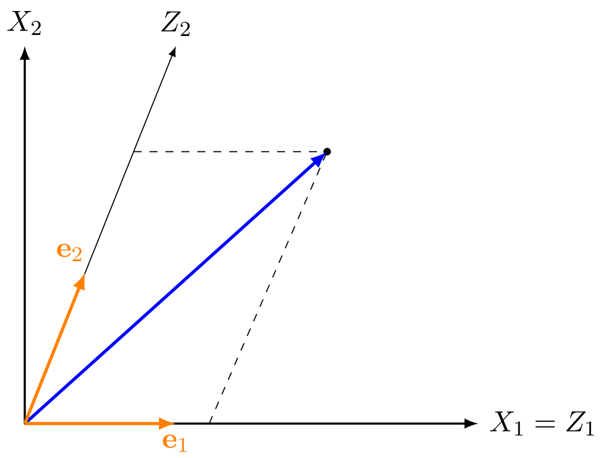

図 2. 共変ベクトル

任意のベクトル $\mathbf{A}$ はそれぞれの基底を用いて一般に次のように書ける．

$$\mathbf{A} = X_i \mathbf{e}_i = Z_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \tag{2.20}$$

式 (2.20) の両辺に X_i に関する偏微分を取ることにより**基底ベクトル (Basis vectors)** の変換式を得る．

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial Z_j}{\partial X_i} \boldsymbol{\varepsilon}_j \tag{2.21}$$

このような変換則を従うベクトルを**共変ベクトル (Covariant vectors)** と呼ぶ:

共変ベクトル (Covariant vectors)

次のような変換則を満たすベクトルを共変ベクトルと定義する:

$$\mathbf{e}_\mu (X^\rho) = \frac{\partial Z^\nu}{\partial X^\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\nu (Z^\rho) \tag{2.22}$$

また，共変ベクトルは下付き添え字として $\mathbf{e}_\mu$ などで書く．

[1]基底の組 $\langle X_1, X_2 \rangle$ は直交座標 (Cartesian coordinates) 上の正規直交基底として与えられる:

$$\mathbf{A} = X_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + X_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

一方で，式 (2.20) のそれぞれの成分 X_i, Z_j の変換はどのように行われるか確かめてみよう．

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} = X_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = Z_j(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} Z_j \tag{2.23}$$

式 (2.23) から，それぞれの成分 X_i, Z_j は共変的でない:

$$X_i = \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} Z_j. \tag{2.24}$$

変換則 (2.24) を満たすようなベクトルは**反変ベクトル (Contravariant vectors)** と呼ぶ:

反変ベクトル (Contravariant vectors)

次のような変換則を満たすベクトルを反変ベクトルと定義する:

$$X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial Z^\nu} Z^\nu \tag{2.25}$$

また，共変ベクトルは上付き添え字として X^μ などで書く．

2.1.4 双対基底と双対空間

式 (2.22) および (2.25) の**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** の定義から，ベクトル $\mathbf{A}$ を共変と反変を区分して表すと:

$$\mathbf{A} = X^\mu \mathbf{e}_\mu = Z^\nu \boldsymbol{\varepsilon}_\nu. \tag{2.26}$$

ここでは反変的に変換される基底 $\mathbf{e}^\mu$ を見つけるため，別の基底 $\langle U_1, U_2 \rangle$ を加える．

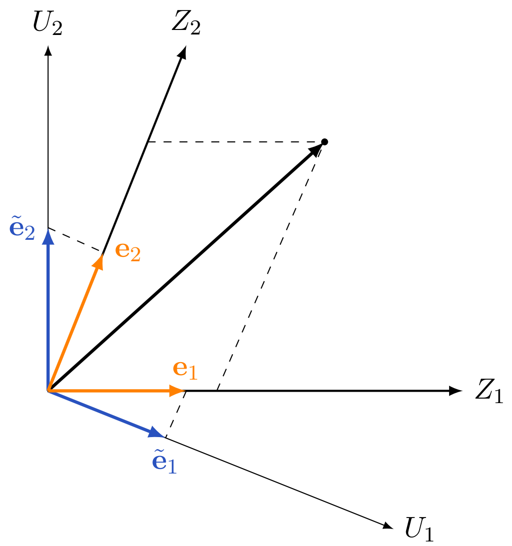

図 3. 双対基底

上の図で示すような取り方で定めた基底を**双対基底 (Dual basis)** と定義する:

双対基底 (Dual basis)

次の条件を満たすように双対基底を定義し，この双対基底からなる空間 $\mathcal{M} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_\mu \rangle$ を双対空間 (Dual space) と呼ぶ:

$$\mathbf{e}_\mu \quad \mapsto \quad \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{i\nu}. \tag{2.27}$$

ここで，双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の共変・反変を区分せずにただの添え字として表した．式 (2.27) で定義した双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の変換が共変的か反変的か調べてみよう:

$$\mathbf{A} = X^\mu \mathbf{e}_\mu = Z^\nu \boldsymbol{\varepsilon}_\nu = A_i \tilde{\mathbf{e}}_i. \tag{2.28}$$

先ず，双対基底の定義と基底 $\mathbf{e}_\mu$ の共変性から次を得る．

$$X^\mu(\mathbf{e}_\mu \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) = Z^\nu(\boldsymbol{\varepsilon}_\nu \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) = Z^\nu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\nu \cdot \mathbf{e}_i) \tag{2.29}$$

以上のことを踏まえると，次のような変換関係が導かれる:

$$1 = \frac{\partial Z^\nu}{\partial X^i}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\nu \cdot \mathbf{e}_i), \tag{2.30}$$

あるいは，スカラー表現

$$\frac{\partial X^i}{\partial Z^\nu} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\nu \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i. \tag{2.31}$$

ここから双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ も正規直交基底 $\boldsymbol{\varepsilon}_\nu$ で生成できることから双対基底の変換が反変的であることが分かる:

双対基底の反変性

基底 $\mathbf{e}_\mu$ 双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ は反変的に変換され，反変的基底 ($\mathbf{e}^\mu = \tilde{\mathbf{e}}_\mu$) として定義される:

$$\mathbf{e}^\mu(X^\rho) = \frac{\partial X^\mu}{\partial Z^\nu}\boldsymbol{\varepsilon}^\nu(Z^\rho). \tag{2.32}$$

ここで，正規直交基底に対しては**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** が同じくなることに注意せよ．ならば，ベクトル $\mathbf{A}$ は共変基底と反変基底を用いて共変・反変の区分付きで:

$$\mathbf{A} = X^\mu \mathbf{e}_\mu = X_\nu \mathbf{e}^\nu = Z^\rho \boldsymbol{\varepsilon}_\rho \tag{2.33}$$

双対基底の共変性・反変性を判断することにあって特に注意すべきことは $|\mathbf{e}^\nu| \neq 1$ であることである．つまり，以下の式は成り立たない:

$$X_\nu \neq Z^\rho(\boldsymbol{\varepsilon}_\rho \cdot \mathbf{e}^\nu) = Z^\rho \frac{\partial X^\nu}{\partial Z^\rho}. \tag{2.34}$$

式 (2.34) に注意すると，反変基底 $\mathbf{e}^\nu$ の成分を共変的に X_ν として書いた理由は式 (2.23) と同様な方法で確かめられる．

$$Z^\rho = X_\nu(\mathbf{e}^\nu \cdot \varepsilon_\rho) = \frac{\partial X^\nu}{\partial Z^\rho} X_\nu \tag{2.35}$$

ここから，双対空間の成分 X_ν は共変的に変換されることを分かる．

2.1.5 座標変換とローレンツ共変性

この節では，ミンコフスキー距離 (Minkowski distance) が不変になるような変換 $x \mapsto \tilde{x}$ について考察する．このような不変性を**ローレンツ不変性 (Lorentz Invariance)** かつ，その変換を**ローレンツ変換 (Lorentz transformation)** と呼ぶ．

これからローレンツ変換を定義するため，ミンコフスキー空間上の**線素ベクトル (infinitesimal displacement)** を共変と反変を区分して次のように書ける:

$$d\mathbf{r} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x_\nu \mathbf{e}^\nu. \tag{2.36}$$

共変・反変的に書けた線素ベクトル (2.36) により，ミンコフスキー空間上の世界間隔 ds^2 は次のように書き直せる．ミンコフスキー空間上の世界間隔 ds^2 は線素ベクトルの演算を用いて次式のようになる．

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) x^\mu x_\nu = \delta_\mu^\nu x^\mu x_\nu = x^\mu x_\mu \tag{2.37}$$

$$= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{2.38}$$

この結果を式 (2.18) と比べて計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を次のように定義できる．

計量テンソルの再定義

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathrm{diag}(+,-,-,-)\ , \qquad \eta^{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathrm{diag}(+,-,-,-). \tag{2.39}$$

ここからローレンツ変換を考えるため，**ミンコフスキー計量 (Minkowski Metric)** として成分 x^μ を次のように決める:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{自然単位系}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

一方で，計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ の定義を考えると共変成分 x_μ は次のような方法で導かれる．

$$x_\mu = \delta_\mu^\nu x_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) x_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \tag{2.41}$$

式 (2.41) により，共変成分 x_μ は:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{自然単位系}} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

また，式 (2.41) から共変ベクトル A_μ と反変ベクトル A^μ には次のような関係が成り立つことが分かる．

共変と反変の接続 (Covariant-contravariant connection)

共変ベクトル A_μ と反変ベクトル A^μ は計量テンソルにより接続される:

$$A^\mu = \delta^\mu_\nu A^\nu = (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) A^\nu = (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) A_\nu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, \tag{2.43}$$

$$A_\mu = \delta^\nu_\mu A_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) A_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) A^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\nu. \tag{2.44}$$

ここから，ローレンツ変換を考える．共変ベクトル x_μ および反変ベクトル x^μ の変換は式 (2.22) および式 (2.25) により，ローレンツ変換は単に次のように書ける:

$$x^\mu \quad \mapsto \quad \tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \ , \qquad x_\mu \quad \mapsto \quad \tilde{x}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} x_\nu. \tag{2.45}$$

2 次変換テンソルとして $\Lambda_\mu{}^\nu$ を導入すればローレンツ変換は次のように書き換える．

ローレンツ変換 (Lorentz transformation)

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ , \quad \tilde{x}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu. \tag{2.46}$$

ここで，2 次テンソル $\Lambda_\mu{}^\nu$ は次のように定義する:

$$\Lambda^\mu{}_\nu := \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \ , \qquad \Lambda_\mu{}^\nu := \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}. \tag{2.47}$$

ローレンツテンソル $\Lambda^\mu{}_\nu$ の添え字の順番に特に注意する必要がある．次のテンソルは互いに違うものである:

テンソルの表記規約 (Index convention of tensors)

座標 $\tilde{x}$ と x の共変・反変性を区別するため，テンソル $\Lambda_\mu{}^\nu$ を添え字は次のように規約する:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \ , \qquad \Lambda^\nu{}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{2.48}$$

前の添え字は $\tilde{x}$ の共変・反変性，後ろの添え字は x の共変・反変性を表すことにする．

ローレンツ変換 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の共変性と反変性について論議してみよう．ローレンツ変換は連鎖律により，次式のように変換されることがことを分かる．

$$\Lambda'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \tilde{x}'^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\omega}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \Lambda^{\omega}{}_{\rho} \tag{2.49}$$

式 (2.49) の変換から座標 $\tilde{x}$ は反変的に変換され，座標 x は共変的に変換されるので式 (2.47) の添え字規約は正しい．

2.1.6 共変・反変性とテンソル解析

ローレンツ変換の詳しい性質に関しては節 2.2 で扱うこととして，この節ではその準備としてのテンソルの共変・反変性に基づいて様々な演算について考察する．

恒等変換 (Identity transformation)

$$I^{\nu}_{\mu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{2.50}$$

式 (2.25) の反変的変換で $Z^{\nu} \to X^{\nu}$ を考えることにより，恒等変換の成分表示[2]:

$$X^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\nu}} X^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} X^{\nu} \tag{2.51}$$

と表せる．恒等変換の成分表示は今後よく使うので覚えてほしい．

テンソルの定義 (Definition of tensors)

次のように座標系に依らない演算 $T_{\mu\nu}$ などをテンソルという:

$$T'_{\mu\nu}\ dx'^{\mu} dx'^{\nu} = T_{\mu\nu}\ dx^{\mu} dx^{\nu}\ , \qquad T'^{\mu\nu}\ dx'_{\mu} dx'_{\nu} = T^{\mu\nu}\ dx_{\mu} dx_{\nu}. \tag{2.52}$$

式 (2.52) のように座標系に依らない演算 $T_{\mu\nu}$ を**テンソル量 (Tensor quantity)** と定義する．ここでそれぞれの基底 dx^{μ}, dx'^{μ} は反変的なのでテンソル $T_{\mu\nu}$ の変換式は次のように書ける:

$$T'_{\mu\nu}\ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\rho} dx^{\sigma} = T_{\mu\nu}\ dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{2.53}$$

かつ，共変的基底 dx_{μ}, dx'_{μ} の上では:

$$T'^{\mu\nu}\ \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\nu}} dx_{\rho} dx_{\sigma} = T^{\mu\nu}\ dx_{\mu} dx_{\nu}. \tag{2.54}$$

[2]式 (2.50) は基底の取り方に依らないことに注意せよ．直交基底でない場合も成立．

ここの式 (2.53) および (2.54) により，テンソルのスカラー積 $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ が座標系の選び方に依らないことをすぐわかる:

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\omega}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}}T'_{\rho\sigma}T'^{\omega\lambda} = T'_{\rho\sigma}T'^{\rho\sigma}. \tag{2.55}$$

このように座標系の取り方に依存しない物理量を**スカラー (Scalar)** と呼ぶ．実際，ミンコフスキー空間を生成するときも ds^2 が慣性系に依らないことから式 (2.36) のようにスカラーになるように線素 $d\mathbf{r}$ を取ったものである．

計量テンソルの変換則

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\ g_{\rho\sigma}\ , \qquad g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}g^{\rho\sigma}. \tag{2.56}$$

これは式 (2.39) の計量テンソルの定義どおりの変換を考えればよい:

$$g'_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\ \mathbf{e}_{\rho}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\ \mathbf{e}_{\sigma}\right) = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\ g_{\rho\sigma}. \tag{2.57}$$

ここで基底 $\mathbf{e}'_{\mu}$ などは共変的に変換されることに注意せよ．反変的な計量 $g'^{\mu\nu}$ についても同様にできて，以上の結果を用いると変換を表すヤコビアンと計量の接続関係:

$$J = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}} \tag{2.58}$$

を得られて以下が座標系に依らない不変的な積分空間であることが分かる．

$$\int_{\mathcal{M}'}\sqrt{-g'}\ d^4x' = \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\ d^4x \tag{2.59}$$

ミンコフスキー空間上ではその計量が $g<0$ となることに注意せよ．

共変と反変の転換 (Covariant-Contravariant transformation)

$$g_{\mu\nu}A^{\nu} = A_{\mu}\ , \qquad g^{\mu\nu}A_{\nu} = A^{\mu}, \tag{2.60}$$

$$g_{\mu\rho}T^{\rho\nu} = T_{\mu}{}^{\nu}\ , \qquad g^{\mu\rho}T_{\rho\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.61}$$

先ずは式 (2.60) の 1 階テンソルに関する変換式から示す．計量テンソルの定義 (2.39) から:

$$g_{\mu\nu}A^{\nu} = (\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu})A^{\nu} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot(\mathbf{e}^{\nu}A_{\nu}) = A_{\mu}. \tag{2.62}$$

これは共変ベクトル A_{ν} に対しても同様にできる．このような変換 (2.62) を用いて 2 階テンソルまで拡張できる:

$$T^{\rho\nu}\ dx_{\rho}dx_{\nu} = g_{\rho\mu}T^{\rho\nu}\ dx^{\mu}dx_{\nu}. \tag{2.63}$$

テンソルの定義から式 (2.61) が成立することが分かる．

2.2　ローレンツ変換とローレンツ群

ローレンツ変換は式 (2.46) のローレンツテンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ を用いて:

$$x^{\mu} \quad \mapsto \quad \tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.64}$$

で書ける．かつ，反変ベクトル x_{μ} の変換は以下のように与えられる．

$$x_{\mu} \quad \mapsto \quad \tilde{x}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \tag{2.65}$$

ここで式 (2.64) および (2.65) により表現されたローレンツ変換で，2 つのローレンツテンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ を逆行列[3]を用いて次のように書ける:

ローレンツテンソル (Lorentz tensors)

テンソル $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ は 2 階テンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列 Λ^{-1} を用いて次のようにも書ける．

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}. \tag{2.66}$$

特に式 (2.66) の表記を採用する場合，式 (2.48) のテンソルの表記規約を無視して単に以下で規約しても構わない:

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \ , \qquad \tilde{x}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x_{\nu}. \tag{2.67}$$

2.2.1　ローレンツ群

ローレンツ変換は世界間隔 ds^2 を変えない変換であることに注意すればローレンツ変換は次のような変換則を満たすことを分かる:

$$\tilde{x}_{\mu}\tilde{x}^{\mu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\tilde{x}^{\mu}\tilde{x}^{\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} \tag{2.68}$$

ここでローレンツ変換 (慣性系の変換) は計量を変えないことと式 (2.67) の表記を採用すれば式 (2.68) の変換則は次のようにも書ける．

$$\Lambda^{\mu}_{\rho}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \tag{2.69}$$

[3] ローレンツテンソルの定義通りで計算すれば:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = \delta^{\nu'}_{\nu}.$$

より，逆行列の定義により行列 Λ を 2 階テンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の表現行列として定めれば $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ をその逆行列 Λ^{-1} を用いて以下の書ける．

$$\Lambda^{-1}: \ \tilde{x} \quad \mapsto \quad x \ , \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}.$$

計量テンソルとローレンツテンソルは両方 2 階テンソルなので行列として演算を考えられる．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ およびローレンツテンソル Λ^{μ}_{ρ} の表現行列として:

$$[\eta]_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} , \quad [\Lambda]_{\rho\mu} := \Lambda^{\mu}_{\rho} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 & \Lambda^2_0 & \Lambda^3_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ \Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ \Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} . \tag{2.70}$$

式 (2.70) として行列 g, Λ を定めると，ローレンツ変換の変換則 (2.69) は以下の行列関係式を満たし，群を生成する:

ローレンツ群 (Lorentz group)

ローレンツ群とは以下の演算に対して閉じた集合族で定義される．

$$\mathcal{O}(1,3) := \{\Lambda \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R}) \mid \Lambda^t \eta \Lambda = \eta\} \tag{2.71}$$

かつ，ここでは計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$ として取っている意味[a]で $\mathcal{O}(1,3)$ と書く．

[a]もし，計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ として取ったら $\mathcal{O}(3,1)$ と書けばよい．

ローレンツ変換の変換則 (2.69) を表現行列 g, Λ で書けば:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{2.72}$$

ここでローレンツ変換が群を生成することを示すためには以下の 3 点を確かめればよい:

- **演算の閉性 (Closure property):**
  集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ が演算 (2.72) に対して閉じていることを示せばよい．つまり，ある任意の $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{O}(1,3)$ に対して:
  $$(\Lambda_1\Lambda_2)^t \eta (\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^t(\Lambda_1^t \eta \Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^t \eta \Lambda_2 = \eta. \tag{2.73}$$
  より，$\Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{O}(1,3)$ となり，集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ は演算に対して閉じている．

- **逆元の存在性 (Existance of inverse element):**
  逆元 (逆行列) が存在することを示すため，演算 (2.72) の両辺に行列式を取る:
  $$(\det \Lambda)^2 = 1 \neq 0. \tag{2.74}$$
  より，逆元が存在することを簡単に分かる．

- **単位元と逆元の閉性 (Closure property of elements):**
  元 $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ を任意でとり，式 (2.72) の演算の両辺に右から Λ^{-1}，左から $(\Lambda^t)^{-1}$ を作用させれば良い:
  $$\eta = (\Lambda^t)^{-1}(\Lambda^t \eta \Lambda)\Lambda^{-1} = (\Lambda^t)^{-1}\eta\Lambda^{-1} , \qquad I_4^{-1}\eta I_4 = \eta. \tag{2.75}$$
  逆元 Λ^{-1} と単位元 I_4 に対しても $\Lambda^{-1}, I_4 \in \mathcal{O}(1,3)$ となる．

以上により，集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ が群構造を持つことが示された．このような群を**ローレンツ群 (Lorentz group)** と呼ぶ．ここで式 (2.71) により得られたローレンツ群は以下の 4 つの部分群[4]で分けられる:

本義ローレンツ群 (Proper orthochronous Lorentz groups)

ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ は以下の部分群で分類される:

- 固有・順時的部分群:

$$\mathcal{O}_+^{\uparrow} := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0_0 \geq 1\}, \tag{2.76}$$

- 非固有・順時的部分群:

$$\mathcal{O}_-^{\uparrow} := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0_0 \geq 1\}, \tag{2.77}$$

- 固有・反順時的部分群:

$$\mathcal{O}_+^{\downarrow} := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0_0 \leq -1\}, \tag{2.78}$$

- 非固有・反順時的部分群:

$$\mathcal{O}_-^{\downarrow} := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0_0 \leq -1\}. \tag{2.79}$$

特に，部分群 $\mathcal{O}_+^{\uparrow}$ を**本義ローレンツ群 (Proper orthochronous Lorentz groups)** と定義する．

ローレンツ群 (2.71) は次のような 2 つの性質を満たす．先ず，ローレンツ群の元 $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ を任意で取れば式 (2.74) から:

$$\det\Lambda = \pm 1. \tag{2.80}$$

ここで $\det\Lambda = 1$ となるローレンツ変換を**固有ローレンツ変換 (Proper Lorentz transformation)**，$\det\Lambda = -1$ となるローレンツ変換を**非固有ローレンツ変換 (Improper Lorentz trnasformation)** と呼ぶ．一方で，ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の元 Λ は定義 (2.71) の定義から:

$$\eta_{00} = \Lambda^\mu_0 \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_\mu (\Lambda^\mu_0)^2. \tag{2.81}$$

計量が $\eta_{00} = 1$ として取ったことに注意すれば式 (2.81) から以下の結果を得る．

$$\Lambda^0_0 \leq -1\ , \qquad \text{あるいは,} \qquad \Lambda^0_0 \geq 1 \tag{2.82}$$

[4]後で詳しく述べるが，ここでは部分群という表現を採用しているけど実際の部分群の構造を持っているのは本義ローレンツ群のみであることに注意せよ．

このようにローレンツ群は行列式 $\det\Lambda$ の正負，成分 Λ^0_0 の正負により 4 つで分かれる．特に，$\Lambda^0_0 \geq 1$ となるローレンツ変換を**順時的ローレンツ変換 (Orthochronous Lorentz transformation)**，Λ^0_0 となるローレンツ変換を**反順時的ローレンツ変換 (Anti-orthochronous Lorentz transformation)** と呼ぶ．

2.2.2　部分群と無限小ローレンツ変換

このようにローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の分類が数学的に意味を持つためにはためには，それぞれがローレンツ群の**部分群 (Subgroup)** になる必要がある．先ず，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ がローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分群になることを示すためには以下の 1 点を確かめれば良い:

ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分集合 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 対して:

$$\forall_{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_1\Lambda_2^{-1} \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+} \tag{2.83}$$

を満たすとき，部分集合 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ をローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分群と定義する．

定義 (2.76) より，任意で取った元 $\Lambda_1,\Lambda_2 \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ が次の 2 点を満たせば本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 部分群になる．

- **固有性 (Proper set):**
  本義ローレンツ変換は $\det\Lambda = 1$ を満たす．より:
  $$\det(\Lambda_1\Lambda_2^{-1}) = \frac{\det\Lambda_1}{\det\Lambda_2} = 1. \tag{2.84}$$
- **順時性 (Orthochronous set):**
  本義ローレンツ変換は $\Lambda^0_0 \geq 1$ を満たすので，積 $\Lambda_1\Lambda_2^{-1}$ の成分を以下のように計算してみる:
  $$(\Lambda_1\Lambda_2^{-1})^0_0 = (\Lambda_1)^\mu_0(\Lambda_2^{-1})^0_\mu. \tag{2.85}$$
  ここで式 (2.69) の関係式を用いると $(\Lambda^{-1})^0_\nu = \eta_{\nu\mu}\Lambda^\mu_0$ が成り立ち[5]，式 (2.85) の成分は以下のように計算できる．(Cauchy-Schwartz 不等式)

$$\begin{aligned}(\Lambda_1\Lambda_2^{-1})^0_0 &= \eta_{\mu\nu}(\Lambda_1)^\mu_0(\Lambda_2)^\nu_0 = (\Lambda_1)^0_0(\Lambda_2)^0_0 - \sum_{\mu=1}^{3}(\Lambda_1)^\mu_0(\Lambda_2)^\mu_0 \\ &\underset{(2.81)}{=} \sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}[(\Lambda_1)^\mu_0]^2}\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}[(\Lambda_2)^\mu_0]^2} - \sum_{\mu=1}^{3}(\Lambda_1)^\mu_0(\Lambda_2)^\mu_0 \geq 1.\end{aligned} \tag{2.86}$$

[5] ローレンツ群の定義により，本義ローレンツ群から任意で取った $\Lambda \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ に対して式 (2.69) が成り立つことを考えれば:

$$\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\rho\eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu.$$

ここで $\sigma = 0$ を取れば求まる関係式が導かれる．

式 (2.84) と (2.86) により本義ローレンツ群が部分群[6]になることが分かる．本義ローレンツ群が部分群の構造を持つことは，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上の演算は閉じていることを意味する．より，以下のように本義ローレンツ群上に明確に定義された[7]**無限小ローレンツ変換 (Infinitesimal Lorentz transformation)** が存在する:

無限小ローレンツ変換 (Infinitesimal Lorentz transformation)

本義ローレンツ群が部分群の構造を持つため，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ が定義される:

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu := \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \in \mathcal{O}_+^\uparrow, \tag{2.87}$$

かつ，無限小ローレンツ変換の逆変換は以下のように考えられる．

$$(\delta\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \Delta\omega^\mu{}_\nu \in \mathcal{O}_+^\uparrow. \tag{2.88}$$

無限小ローレンツ変換が本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ の元になるように式 (2.87) および (2.88) により $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ を定めたので，以下を満たす:

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} (\delta\Lambda)^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}\ , \qquad \det(\delta\Lambda) = 1\ , \qquad (\delta\Lambda)^0_0 \geq 1. \tag{2.89}$$

より，式 (2.89) に無限小ローレンツ変換の定義 (2.87) を代入すれば次の関係式[8]が導かれる．

$$\begin{aligned}\delta^\lambda_\rho &= (\delta\Lambda)^\mu{}_\rho (\delta\Lambda)_\mu{}^\lambda = (\delta^\mu_\rho + \Delta\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\lambda_\mu + \Delta\omega_\mu{}^\lambda) \\ &= \delta^\lambda_\rho + (\Delta\omega^\lambda{}_\rho + \Delta\omega_\rho{}^\lambda) + O(\Delta\omega^2).\end{aligned} \tag{2.90}$$

ここで無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda$ を考えているため，$O(\Delta\omega^2) \to 0$ を取れば以下の反対称関係を得る:

$$\Delta\omega^\lambda{}_\rho = -\Delta\omega_\rho{}^\lambda. \tag{2.91}$$

本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ は部分群の構造を持つため，反対称関係 (2.91) を用いて無限小ローレ

[6] ここで部分群の構造を持つのは本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ のみであることに注意せよ．

[7] 英訳: Well-defined

[8] ここで本義ローレンツ群の定義 (2.87) および共変と反変の反転関係式 (2.61) を用いてクロネッカーデルタを以下のように展開した:

$$\delta^\lambda_\rho = \eta_{\sigma\rho}\eta^{\sigma\lambda} = (\delta\Lambda)^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} (\delta\Lambda)^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\lambda} = (\delta\Lambda)^\mu{}_\rho (\delta\Lambda)_\mu{}^\lambda.$$

ンツ変換の逆変換 $\delta\Lambda^{-1}$ も:

$$(\delta\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \underset{(2.66)}{=} (\delta\Lambda)_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.92}$$

のように明確に定義される．ここから式 (2.88) が導かれる．

2.2.3　ローレンツ群の連結成分

ここでは式 (2.76) から (2.79) までのように分かれたローレンツ群の 4 つの部分の構造について詳しく調べてみよう．部分群としての本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ が存在することは分かったが，それぞれの 4 つの部分群[9]がこのような無限小ローレンツ変換で結びつけるかの問題[10]が残っている．それを評価するため，**ローレンツ変換の連結 (Connection of Lorentz transformation)** を次のように定義する:

ローレンツ変換の連結 (Connection of Lorentz transformation)

ローレンツ群の部分 $\mathcal{M}$ が**連結**であることは，部分 $\mathcal{M}$ の任意の元 $\Lambda_m, \Lambda_n \in \mathcal{M}$ と無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ に対して:

$$(\Lambda_n)^{\mu}{}_{\nu} = (\delta\Lambda)^{\mu}{}_{\mu_1}(\delta\Lambda)^{\mu_1}{}_{\mu_2}\cdots(\delta\Lambda)^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_n}(\Lambda_m)^{\mu_n}{}_{\nu} \in \mathcal{M} \tag{2.93}$$

を意味する．

このような定義に基づいて以下の 4 つの部分群の連結性を確認してみよう:

- **固有・順時的部分群 (本義ローレンツ群):**
  本義ローレンツ群の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは恒等変換である:
  $$\Lambda_I = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$
  本義ローレンツ群の定義より $(\delta\Lambda)\Lambda_I \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ となるため，どんな任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ に対しても Λ_I に無限小ローレンツ変換を反復作用させることで Λ' が得られる．このことから，本義ローレンツ群は Λ_I に連結な部分群になり，このときの Λ_I を本義ローレンツ群の**連結成分 (Connected component)** と呼ぶ．

[9] 部分群という表現を使っているが，先述した通り実際部分群の構造を持つのは本義ローレンツ群のみである．

[10] もし，無限小ローレンツ変換でローレンツ群上の 4 つの領域 $(\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}, \mathcal{O}^{\uparrow}_{-}, \mathcal{O}^{\downarrow}_{+}, \mathcal{O}^{\downarrow}_{-})$ を結びつけるのができなかったら，それぞれの領域は独立的なものになる．つまり，ローレンツ変換を通じては異なる領域に移ることはできない．

- **非固有・順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは空間反転である:

$$\Lambda_S = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.95}$$

無限小ローレンツ変換は $\det(\delta\Lambda) = 1$ であることと，式 (2.86) により，部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ は空間反転 Λ_S と連結な部分になる．連結成分は Λ_S である．

- **非固有・反順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_-^\downarrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは時間反転である:

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

無限小ローレンツ変換が本義ローレンツ群の元 ($\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$) であることに注意すれば[11]，式 (2.86)[12]から部分群 $\mathcal{O}_-^\downarrow$ は時間反転 Λ_T と連結な部分になる．連結成分は Λ_T である．

- **固有・反順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_+^\downarrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは時・空間反転である:

$$\Lambda_S\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.97}$$

部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ と $\mathcal{O}_-^\downarrow$ がそれぞれ Λ_S と Λ_T に連結なので，任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}_+^\downarrow$ に対して

$$\begin{aligned} (\Lambda')^\mu{}_\nu &= (\Lambda_1)^\mu{}_\rho (\Lambda_2)^\rho{}_\nu \\ &= (\delta\Lambda)^\mu{}_{\mu_1} \cdots (\delta\Lambda)^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_n} (\delta\Lambda)^\rho{}_{\rho_1} \cdots (\delta\Lambda)^{\rho_{n-1}}{}_{\rho_n} (\Lambda_S)^{\mu_n}{}_\rho (\Lambda_T)^{\rho_n}{}_\nu. \end{aligned} \tag{2.98}$$

が成り立つことが分かって，$\mathcal{O}_+^\downarrow$ は $\Lambda_S\Lambda_T$ に連結である．連結成分は $\Lambda_S\Lambda_T$ である．

[11] 任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}_-^\downarrow$ に対して，$\det(\delta\Lambda)\det\Lambda' = -1$ が成り立つ．

[12] 成分 $(\delta\Lambda\cdot\Lambda')^0_0$ を計算すると:

$$(\delta\Lambda\cdot\Lambda')^0_0 = (\delta\Lambda)^0_0\Lambda'^0_0 - \sum_{\mu=1}^3 (\delta\Lambda)^\mu_0\Lambda'^\mu_0 = -\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^3[(\delta\Lambda)^\mu_0]^2}\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^3(\Lambda'^\mu_0)^2} - \sum_{\mu=1}^3(\delta\Lambda)^\mu_0\Lambda'^\mu_0 \le -1.$$

以上により，それぞれの空間 $\mathcal{O}_+^\uparrow, \mathcal{O}_-^\uparrow, \mathcal{O}_+^\downarrow, \mathcal{O}_-^\downarrow$ は各々は連結な部分であるが，互いには連結でない[13]ことが分かる．かつ，それぞれの連結成分 $\Lambda_I, \Lambda_S, \Lambda_T, \Lambda_S\Lambda_T$ が及ぼす変換をミンコフスキー空間上で表すと以下のようになる:

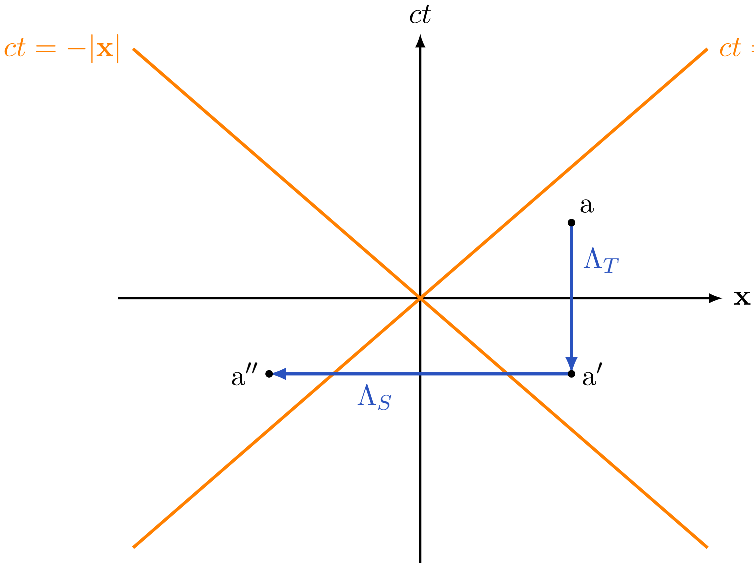

図 4. 連結成分

ここで事件 a から a′ への変換を及ぼす連結成分 Λ_T は**時間のパリティ変換 (Time parity transformation)** で，事件 a′ から a″ への変換を及ぼす連結成分 Λ_S は**空間のパリティ変換 (Space parity trnasformation)** となることが分かる:

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Lambda_T]{} \begin{pmatrix} -t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Lambda_S]{} \begin{pmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

運動方程式は恒等変換 Λ_I に連結なローレンツ変換に対しては不変性を持つが，時・空間パリティ変換に対しても不変性を必ず持つとは限らない[14]．この観点で見ると，ローレンツ群の 4 つの部分 (それぞれ $\Lambda_I, \Lambda_S, \Lambda_T, \Lambda_S\Lambda_T$ に連結な部分) で互いに連結でないことは正しい結論である．

[13] 例えば，$\mathcal{O}_+^\uparrow$ は $\mathcal{O}_-^\uparrow$ に連結でない．
[14] このような要請により，今後は本義ローレンツ群の上で変換のみを考える．

2.2.4　ローレンツ群の生成子

節 2.2.2 で本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ の上では無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ が存在することが分かった．無限小ローレンツ変換はさらに以下のように展開できる:

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu \underset{(2.91)}{=} \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}(\Delta\omega^\mu{}_\nu - \Delta\omega_\nu{}^\mu) = \delta^\mu_\nu + \frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}(\delta^\mu_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu}). \tag{2.100}$$

より，無限小ローレンツ変換は**生成子 (Generator)** 定義して次のように書ける:

ローレンツ群の生成子 (Generator of Lorentz group)

本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ は次のように生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を用いて生成できる．

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - i\frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \left(\mathbf{1} - i\frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu. \tag{2.101}$$

ここでローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は成分ごとで:

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu}). \tag{2.102}$$

無限小ローレンツ変換が式 (2.86) のように展開される理由は，無限小ローレンツ変換を本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上で定義したので連結成分 Λ_I と連結なものになったからである．2 階テンソル $\Delta\omega^{\rho\sigma}$ の物理的意味を調べるため，生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を定義 (2.102) に従って計算する:

- **ローレンツブースト (Lorentz boost):**

$$(\hat{\mathcal{F}}_{01})^\mu{}_\nu \underset{(2.102)}{=} i(\delta^\mu_0 \eta_{1\nu} - \delta^\mu_1 \eta_{0\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.103}$$

同様に $\hat{\mathcal{F}}_{02}, \hat{\mathcal{F}}_{03}$ についてもできる:

$$\hat{\mathcal{F}}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{F}}_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.104}$$

ここでローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は以下のような反対称性を持つ．

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\rho})^\mu{}_\nu = -i(\delta^\mu_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu}) = -(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \tag{2.105}$$

式 (2.105) の反対称性により，生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{10}, \hat{\mathcal{F}}_{20}, \hat{\mathcal{F}}_{30}$ も同様にできる．

- **空間回転 (Spatial rotation)**

$$(\hat{\mathcal{F}}_{12})^{\mu}{}_{\nu} = i(\delta^{\mu}_{1}\eta_{2\nu} - \delta^{\mu}_{2}\eta_{1\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.106}$$

同様に $\hat{\mathcal{F}}_{23}, \hat{\mathcal{F}}_{31}$ についてもできる:

$$\hat{\mathcal{F}}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathcal{F}}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.107}$$

以上の計算により，**ローレンツブースト**と**空間回転**に関するローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ が求まった．ローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は一般に以下のような性質を満たす:

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\dagger} = -\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} , \qquad \hat{\mathcal{F}}_{\sigma\rho} = (\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\dagger}. \tag{2.108}$$

2.2.5 リー代数とローレンツ群の代数

ここからは，ローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ が満たす代数について考察する．一般的にローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は可換でないため，**交換子 (Communicator)**[15]

$$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] = \hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} \tag{2.109}$$

のように定義し，この交換子の代数について考える必要がある．ここで一般的に演算子は可換でないため，実際交換子を計算する際は**試験関数**[16]を用いて計算すべきであることに注意せよ．例えば，ある演算子 $\hat{x} = x^{\mu}, \hat{D} = \partial_{\nu}$ どうしの交換子は試験関数 f を用いて以下のように計算する:

$$[\hat{x}, \hat{D}]f = x^{\mu}\partial_{\nu}f - \partial_{\nu}(x^{\mu}f) = \delta^{\mu}_{\nu}f , \qquad [\hat{x}, \hat{D}] = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{2.110}$$

先ずはローレンツ群の生成子が以下の**リー代数 (Lie Algebra)** を満たすか確かめてみよう．

[15]特に，代数構造がリー代数を満たすとき，交換子 $[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]$ を**リー括弧積**と呼ぶ．通常，**リーブラケット (Lie braket)** とも呼ばれるが，筆者は英語表現が嫌いなので今後はリー括弧積とする．
[16]英訳: Test function

リー代数 (Lie Algebra)

ベクトル空間 **G** 上の代数構造が以下の 3 点を満たする．このときの代数構造を**リー代数 (Lie algebra)** と定義する:

- **双線形性 (Bilinear map):**
  任意の元 $x, y, z \in \mathbf{G}$ と実数 $a, b \in \mathcal{R}$ 対して以下を満たす:
  $$[ax+by, z] = a[x,z] + b[y,z]\ , \qquad [z, ax+by] = a[z,x] + b[z,y]. \tag{2.111}$$

- **交代性 (Alternative property):**
  任意の元 $x \in \mathbf{G}$ に対して以下を満たす:
  $$[x,x] = 0. \tag{2.112}$$

- **ヤコビ恒等式 (Jacobi identity):**
  任意の元 $x, y, z \in \mathbf{G}$ に対して以下の恒等式が成り立つ:
  $$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0. \tag{2.113}$$

ここから，ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ がリー代数を満たすかを評価してみよう．ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は式 (2.102) のように線形的に定義されたので，双線形性と交代性が成り立つことは自明[17]に分かる．よって，以下のようにリー括弧積[18]$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]^{\mu}{}_{\nu}$ を成分ごとで評価することでヤコビ恒等式を満たすかを確かめればよい．

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\tau}(\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda})^{\tau}{}_{\nu} \underset{(2.102)}{=} \eta_{\rho\omega}(\delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\lambda\nu}) + \eta_{\sigma\lambda}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\omega\nu}) - \eta_{\sigma\omega}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\lambda\nu}) - \eta_{\rho\lambda}(\delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\omega\nu}), \tag{2.114}$$

同様に，

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda})^{\mu}{}_{\tau}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\tau}{}_{\nu} \underset{(2.102)}{=} \eta_{\rho\omega}(\delta^{\mu}_{\lambda}\eta_{\sigma\nu}) + \eta_{\sigma\lambda}(\delta^{\mu}_{\omega}\eta_{\rho\nu}) - \eta_{\sigma\omega}(\delta^{\mu}_{\lambda}\eta_{\rho\nu}) - \eta_{\rho\lambda}(\delta^{\mu}_{\omega}\eta_{\sigma\nu}). \tag{2.115}$$

式 (2.114) および (2.115) により，リー括弧積 $[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]$ は次式のようにかける．

ローレンツ生成子のリー括弧積 (Lie braket relation of Lorentz operator)

$$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] = i(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda} + \eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega} - \eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}). \tag{2.116}$$

[17]英訳: Trivial.
[18]以後の計算でこれがリー代数を満たすことが分かる．

ここで (2.116) により得られた生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ のリー括弧積を簡単に表すため，以下のような置換を与える:

$$K_\mu := \hat{\mathcal{F}}_{0\mu}\ , \qquad J_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} \qquad (\mu = 1,2,3) \tag{2.117}$$

このような置換により，ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を**ローレンツブーストの生成子 (Generator of Lorentz boost)** と呼ばれる 1 階テンソル K_μ と**空間回転の生成子 (Generator of spatial rotaion)** と呼ばれる 1 階テンソル J_μ で表せる．式 (2.116) の結果により，それぞれの生成子 K_μ, J_μ の演算は以下のように定義される:

- **ローレンツブーストの演算:**

$$\begin{aligned}[K_\mu, K_\nu] &\underset{(2.116)}{=} i(\eta_{\mu 0}\hat{\mathcal{F}}_{0\nu} + \eta_{0\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu 0} - \eta_{00}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{00}) \\ &\underset{(2.102)}{=} -i\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \underset{(2.108)}{=} -i\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho.\end{aligned} \tag{2.118}$$

  ここの計算[19]では，生成子 $\hat{x}_{\rho\sigma}$ の反対称性により $\hat{\mathcal{F}}_{00} = 0$ となることを用いた．かつ，空間回転の生成子 J_μ の定義により:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon_{\rho\omega\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{2.119}$$

  が成立することに注意せよ.

- **空間回転の演算:**

$$\begin{aligned}[J_\mu, J_\nu] &\underset{(2.117)}{=} \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] \\ &\underset{(2.116)}{=} \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda} + \eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega} - \eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}) \\ &\underset{(2.18)}{=} i\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho.\end{aligned} \tag{2.120}$$

  ここの計算ではミンコフスキー計量の定義[20]により，レヴィ＝チヴィタ記号と計量テンソルの間の演算を行った．例えば，第 1 項は:

$$\frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda}) = \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\nu\sigma}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda}) = \frac{i}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{2.121}$$

[19]仮に $\mu = \nu = 0$ とすれば，$\hat{\mathcal{F}}_{00} = 0$ により:

$$\eta_{\mu 0}\hat{\mathcal{F}}_{0\nu} + \eta_{0\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu 0} = 0$$

を得られ，$\mu \neq 0, \nu \neq 0$ の場合は $\eta_{\mu 0} = \eta_{0\nu} = 0$ により同様である．

[20]空間回転の生成子 J_μ の定義により $\mu, \nu = 1, 2, 3$ を取っているので:

$$\eta_{\sigma\omega} = \eta_{\rho\lambda} = \eta_{\rho\omega} = \eta_{\sigma\lambda} = -1.$$

ここの演算 (2.121) ではローレンツ生成子の反対称性により $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\rho}=0$ となることを用いた．同様な計算により:

$$\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega}) = -\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda}) = -\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}) = \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{2.122}$$

が成立する．

- **ローレンツブーストと空間回転の演算:**

$$\begin{aligned} [J_\mu, K_\nu] &\underset{(2.117)}{=} \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{0\nu}] \\ &\underset{(2.116)}{=} \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}(\eta_{\sigma 0}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\nu} + \eta_{\rho\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma 0} - \eta_{\rho 0}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\nu} - \eta_{\sigma\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\rho 0}) = i\epsilon_{\mu\nu\sigma}K_\sigma. \end{aligned} \tag{2.123}$$

ここで計量テンソルの定義により $\eta_{\rho\nu}=\eta_{\sigma\nu}=-1$ となることとレヴィ＝チヴィタ記号の性質から得られる関係式[21]:

$$\epsilon_{\mu\rho\sigma}(\eta_{\sigma 0}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\nu} - \eta_{\rho 0}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\nu}) = 0 \tag{2.124}$$

を用いた．

以上の計算により，ローレンツブーストの生成子 K_μ と空間回転の生成子 J_μ は以下のような交換関係を持つ:

ローレンツブーストと空間回転のリー代数
(Lie algebra of Lorentz boost and spatial roations)

$$[J_\mu, J_\nu] = -[K_\mu, K_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}J_\lambda\ , \qquad [J_\mu, K_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}K_\lambda. \tag{2.125}$$

以上の計算により得られたローレンツブーストの生成子 K_μ および空間回転の生成子 J_μ のリー括弧積から，生成子 K_μ, J_μ が**ヤコビ恒等式 (Jacobi identity)** を満たす:

$$\begin{aligned} [J_1,[J_2,J_3]]+[J_2,[J_3,J_1]]+[J_3,[J_1,J_2]] &\underset{(2.125)}{=} 0, \\ [K_1,[K_2,K_3]]+[K_2,[K_3,K_1]]+[K_3,[K_1,K_2]] &\underset{(2.125)}{=} 0. \end{aligned} \tag{2.126}$$

このことから，ローレンツブーストと空間回転のそれぞれの生成子 K_μ, J_μ はリー代数を満たすことが分かる．かつ，ここではローレンツブーストと空間回転との演算は**可換 (Commutative property)** になっていることに特別な注意[22]が必要である:

$$J_\mu K_\nu = K_\nu J_\mu. \tag{2.127}$$

[21] それぞれの添え字は $\mu,\nu,\rho,\sigma=1,2,3$ であることに注意せよ．
[22] 生成子 K_μ と J_μ は互いに独立的に働くことを意味する．

2.2.6　ローレンツ群の表現行列

今までは無限小変換 $\Delta\omega \to 0$ が与えられたときの本義ローレンツ群上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ の展開を考えた．無限小変換でない一般的な**本義ローレンツ変換 (Proper orthochronous Lorentz transformation)** は以下のように書ける．

$$x^\nu \xrightarrow[\Lambda\in\mathcal{O}_+^\uparrow]{} \tilde{x}^\mu; \qquad \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.128}$$

ここで無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda$ を用いるため，本義ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を**図 5** のように N 分割[23]して無限小ローレンツ変換が連鎖的に行われたものとして考える:

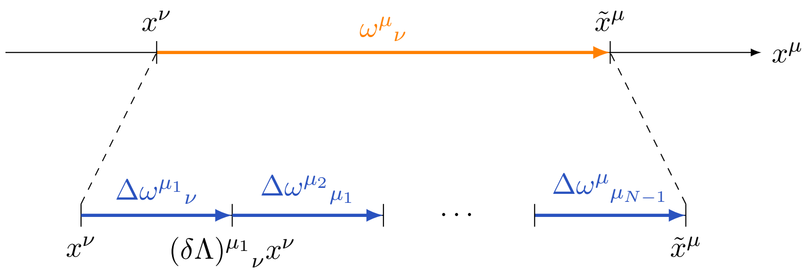

図 5. ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ の等分割

ならば変換 $x^\nu \to \tilde{x}^\mu$ は無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu &\underset{(2.46)}{=} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta\Lambda)^\mu{}_{\mu_{N-1}} \cdots (\delta\Lambda)^{\mu_2}{}_{\mu_1} (\delta\Lambda)^{\mu_1}{}_\nu x^\nu \\ &\underset{(2.87)}{=} \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_{\mu_{N-1}} \cdots \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{\mu_2}{}_{\mu_1} \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{\mu_1}{}_\nu x^\nu.\end{aligned} \tag{2.129}$$

任意の 2 階テンソル Λ, Λ' に対して $(\Lambda\Lambda')^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_{\mu_1}\Lambda'^{\mu_1}{}_\nu$ と書けるので，ローレンツ変換 (2.129) の表現行列は以下のように展開できる:

ローレンツ群の表現行列 (Matrices of Lorentz group)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \lim_{N\to\infty}\left[\left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^N\right]^\mu{}_\nu = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu. \tag{2.130}$$

ここでローレンツ群 $\Lambda^\mu{}_\nu$ の展開を成分ごとで書くと:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \underset{(2.86)}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\delta^\mu_\nu - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right)^N = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\right) \tag{2.131}$$

のようなただの代数的演算として扱える．前の節で得られたように生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ がリー代数を満たすことを思い出せば交代性により:

$$[\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}] = 0. \tag{2.132}$$

[23]等分割する．

式 (2.131) の成分表示は，この交代性により式 (2.130) として一般に拡張できる．ここでローレンツ群の表現行列 (2.130) も前の節で導入したローレンツブーストの生成子 K_μ と空間回転の生成子 J_μ として 1 階テンソルの展開で表すため，$\omega^{\rho\sigma}$ を以下のように再定義する:

$$\eta^\mu = \omega^{0\mu}\ , \qquad \xi^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}. \tag{2.133}$$

ローレンツ群の表現行列は 1 階テンソル η^μ, ξ^μ の展開として以下のように書ける．

$$\Lambda = \exp(-iK_\mu\eta^\mu - iJ_\mu\xi^\mu). \tag{2.134}$$

ここで第 2 項 $J_\mu\xi^\mu$ の計算は以下のように行われた:

$$J_\mu\xi^\mu = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\omega\lambda}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \frac{1}{4}\delta^{\rho\sigma}_{\omega\lambda}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}. \tag{2.135}$$

節 2.2.5 で計算したリー括弧積 $[J_\mu, K_\nu] = 0$ から，ローレンツ群 Λ ではローレンツブースト成分と空間回転の成分を分離できる[24]ことが分かる．

2.2.7 ローレンツブーストと空間回転

[24]例えば，ローレンツ群 Λ はさらに以下のように展開できる:

$$\Lambda = \exp\left(-iK_\mu\eta^\mu - iJ_\mu\xi^\mu\right) = \exp\left(-iK_\mu\eta^\mu\right)\exp\left(-iJ_\mu\xi^\mu\right).$$

3　角運動量と共変量子化

3.1　共変量子化と循環座標

この節ではローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の共変的構造により導かれる**共変量子化 (Covariant Quantization)**[25]について考えてみる．以下の一般的なローレンツ変換から出発する:

$$x \xrightarrow[\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow]{} \tilde{x} = \exp\left(-iK_\mu \eta^\mu - iJ_\mu \xi^\mu\right) x \tag{3.1}$$

節 2.2.6 での論議により，ローレンツブーストと空間回転は完全に分離できるので以下のように**空間回転 (Spatial rotation)** と**ローレンツブースト (Lorentz boost)** を分離して考えることができる．

3.1.1　空間回転の正式化

先ずは空間回転だけを与えるローレンツ変換は J_μ のみの作用として:

$$\Lambda_s = \exp\left(-iJ_\mu \xi^\mu\right) \tag{3.2}$$

のように書ける．簡単に，ある任意の軸 z の周りの回転変換を考えるとその変換は以下のように表せる[26]:

軸対称回転の生成 (Generation of axial symmetric rotation)

ある任意の軸 z の周りの回転は以下の多重行列表示として書ける:

$$\Lambda_{s(z)} = \exp\left[-\frac{i}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}3\mathbf{J}_1 & & \\ & 3\mathbf{J}_2 & \\ & & 3\mathbf{J}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\\ \psi^3\end{pmatrix}\right]. \tag{3.3}$$

ここでパラメータ $\not{\xi}_z^\mu$ は以下のように定義される:

$$\xi_z^\mu = \not{\xi}_z^\mu + \pi_{z;m}^\mu, \qquad \not{\xi}_z^\mu \in [0, 2\pi), \qquad \frac{\pi_{z;m}^\mu}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

設定した軸 z はそれぞれの生成子[27]$\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ のどちらとも平行にならない一般的な回転軸[28]として取っていることに特別に注意せよ:

[25]大阪大学の金導賢により考案された (2023).
[26]今からはこの表示を使うことにする．
[27]式 (3.3) の形式では，各 $\mathbf{J}_\mu$ を演算子として扱うことで行列の成分として書ける．演算子として扱っていることを表す記号として $\mathbf{J}_\mu$ のように書いた．
[28]ページ 30 の図 6 参考．

今からは以下の**図 6** のような空間上の任意の回転軸 z に関する回転循環性を考えよう．変換 $\Lambda_{s(z)}$ は図に示すように軸 z に関する回転角 φ のみの関数として $\Lambda_{s(z)}[\varphi]$ で書ける．ならば回転の循環性は $\Lambda_{s(z)}[\varphi] = \Lambda_{s(z)}[\varphi + 2\pi m]$ を要請[29]する．

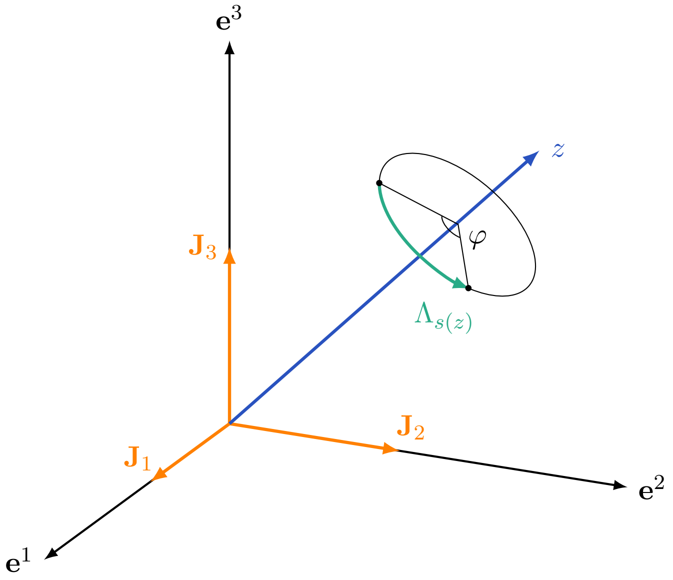

図 6. 回転と軸の設定

ここからは変換 $\Lambda_{s(z)}[\varphi]$ を回転軸の方向の発展成分 $\hat{\mathcal{J}}$ と回転数と回転角の発展成分としての $|\xi_z^\mu\rangle$ で分離して考えたい．このような変換 $\Lambda_{s(z)}[\varphi]$ の分解を考慮し，Dirac notation によるベクトル $|\xi_z^\mu\rangle, |\mathbf{1}\rangle$ および多重行列演算子 $\hat{\mathcal{J}}$ を以下のように定義する:

$$\langle\mathbf{1}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^\dagger \quad , \qquad |\xi_z^\mu\rangle = \begin{pmatrix}\psi^1\\\psi^2\\\psi^3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\xi_z^1\\\xi_z^2\\\xi_z^3\end{pmatrix} \quad , \qquad \hat{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix}3\mathbf{J}_1 & & \\ & 3\mathbf{J}_2 & \\ & & 3\mathbf{J}_3\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

ゆえに，節 2.2.7 の結果により ξ^μ は各 $\mathbf{J}_\mu$ が及ぼす回転成分の一般回転角であることが分かったので，ここで $0 \le \not\xi_z^\mu < 2\pi$ となることに注意すれば $|\xi_z^\mu\rangle$ は**回転数 (Number of revolutions)** を決定するパラメータ m の区分をつけ，以下のように定まる:[30]

$$|\xi_z^\mu\rangle = |\not\xi^\mu, \pi_{z;m}^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\not\xi_z^1 + \pi_{z;m}^1(\not\xi_z^\mu)\\ \not\xi_z^2 + \pi_{z;m}^2(\not\xi_z^\mu)\\ \not\xi_z^3 + \pi_{z;m}^3(\not\xi_z^\mu)\end{pmatrix} \quad , \qquad |0, \pi_{z;m}^\mu\rangle = U^\mu(z, m) \tag{3.6}$$

ならば，式 (3.3) の行列表示は Dirac notation により以下のようにも表せる:

[29] このようにおけば m は**回転数 (Number of revolutions)** を示す．つまり，整数として規約する．逆向き回転の場合 $m < 0$ を与える．

[30] ここで与えられる回転ベクトル $|\not\xi_z^\mu\rangle$ のそれぞれの成分 $\not\xi_z^\mu = T_z^\mu(\varphi)$ の演算で現れる; $T^\mu : \varphi \mapsto \not\xi_z^\mu$.

$$\Lambda_{s(z)}[\varphi] \underset{(3.3)}{=} \exp(-i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not\xi^{\mu}_{z},\pi^{\mu}_{z;m}\rangle). \tag{3.7}$$

ここで規約 $|\not\xi^{\mu}_{z},\pi^{\mu}_{z;m}\rangle$ は変換 $\Lambda_{s(z)}[\varphi]$ 上の回転数 m の区分をつけるため，式 (3.6) のケットベクトル $|\xi^{\mu}_{z}\rangle$ に回転数 m を追記したものである．空間回転の要請として $\Lambda_{s(z)}[\varphi] = \Lambda_{s(z)}[\varphi+2\pi m]$ は式 (3.7) を用いて以下のように書き換える:

$$\begin{aligned}\exp(-i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not\xi^{\mu}_{z},0\rangle) &= \exp(-i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not\xi^{\mu}_{z},\pi^{\mu}_{z;m}\rangle) \\ &= \exp(-i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not\xi^{\mu}_{z},0\rangle - i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|0,\pi^{\mu}_{z;m}\rangle).\end{aligned} \tag{3.8}$$

軸 z における空間回転の回転数発展ベクトル $|0,\pi^{\mu}_{z;m}\rangle$ は可換なので，式 (3.8) の行列演算から以下を得る．以下の式は $0<\varphi<2\pi$ とは関係なく常に成り立つ**恒等式 (Identity)** であることに特別な注意が必要である．

$$\mathbf{1} = \exp(-i\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\pi^{\mu}_{z;m}\rangle). \tag{3.9}$$

ここで $|0,\pi^{\mu}_{z;m}\rangle = |\pi^{\mu}_{z;m}\rangle$ と置き，式 (3.7) などの演算のために以下の新しい代数を導入する．

3.1.2 多重行列規約と多重行列代数

この時点で式 (3.3) のように現れた**多重行列表示 (Multiple matrices representation)** の演算を以下のように新しく規約する:

多重行列規約 (Multiple Matrices convention)

任意の $n\times n$ 行列形式を持つ演算子 $\mathbf{M}_{\mu}$ と k 次元ベクトル $|\eta^{\mu}\rangle, |\xi^{\mu}\rangle$ の間の多重行列表示は以下のように規約する:

$$\langle\eta^{\mu}|\hat{\mathcal{M}}|\xi^{\mu}\rangle = \begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^k\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}\mathbf{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^k\end{pmatrix} := \sum_{\mu=1}^{k}\mathbf{M}_{\mu}(\overline{\eta^{\mu}}\xi^{\mu}). \tag{3.10}$$

この多重行列表示上の演算は以下のような単位元・逆元を持つ．

- **単位元 (Identity element):**
  多重行列表示の単位元は以下のように定義する．

$$\langle\eta^{\mu}|\hat{\mathcal{I}}|\xi^{\mu}\rangle = \begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^k\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^k\end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{k}\mathbf{1}(\overline{\eta^{\mu}}\xi^{\mu}). \tag{3.11}$$

- **逆元 (Inverse element):**
  式 (3.10) により定義された多重行列 $\hat{\mathcal{M}}$ の逆元は以下のように与えられる:

$$\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}^{-1}|\xi^\mu\rangle = \begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots \\ \eta^k\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}\mathbf{M}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_k^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots \\ \xi^k\end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{k}\mathbf{M}_\mu^{-1}(\overline{\eta^\mu}\xi^\mu). \tag{3.12}$$

以上のように多重行列表示における**多重行列代数 (Multiple matrices algebra)** を定義すれば，多重行列の集合 $\mathfrak{F}$ は**群 (Group)** 構造を満たす.

先ず，上記のように**多重行列規約 (Multiple Matrices convention)** を規約したのは以下のような行列形式の演算子 $\mathbf{M}_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, k)$ の線形結合:

$$\mathbf{M}_1(\overline{\eta^1}\xi^1) + \mathbf{M}_2(\overline{\eta^1}\xi^1) + \cdots + \mathbf{M}_k(\overline{\eta^k}\xi^k) \tag{3.13}$$

を式 (3.10) のように成分ごとで分離するためである．よって，多重行列 $\hat{\mathcal{M}}$ は対角成分のみを持つように定義することが望ましい.

$$\hat{\mathcal{M}} := \begin{pmatrix}\mathbf{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_k\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

ここで Dirac notation による演算 $\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle$ を実行した結果が行列になることに注意すれば，多重行列は行列の変換則を従わない[31]ものになる．よって，この**多重行列代数 (Multiple matrices algebra)** を定義するために以下のような演算子を導入する:

恒等行列元 (Identity matrix element)

$$\mathbf{e} = \sum_\rho |\mathbf{1}_\rho\rangle\langle\mathbf{1}_\rho|. \tag{3.15}$$

この恒等行列元は以下の計算により，多重行列演算を変えないことを分かる:

$$\sum_\rho \langle\eta^\mu|\mathbf{1}_\rho\rangle\langle\mathbf{1}_\rho|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle \underset{(3.10)}{=} \sum_\rho \overline{\eta^\rho}\mathbf{M}_\rho\xi^\rho = \langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle. \tag{3.16}$$

[31] 仮に，$\hat{\mathcal{M}}$ も行列の変換則従う量とすれば以下の演算は:

$$\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle \in \mathbf{C}$$

となり，行列でなくスカラー量になることが分かる.

計算 (3.16) より，恒等行列元 $\mathbf{e}$ は多重行列演算を変えないことを分かった．このように恒等行列元 $\mathbf{e}$ を用いると，行列形式により多重行列代数を定義することができる．演算を定義するため，先ずは以下のような空間を用意[32]する:

$$\mathbf{G}_k := \{\mathbf{M}|\langle\eta^\mu|\mathbf{M}|\xi^\mu\rangle \in \mathbf{C},\ \det\mathbf{M} \neq 0\}, \qquad \mathfrak{F}_k := \left\{\hat{\mathcal{M}}\middle|\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle \in \mathbf{G}_k\right\}. \tag{3.17}$$

ここで任意の $\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{F}_k$ を取り，$\mathfrak{F}_k$ 上の演算 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ を考える．そのため，以下のように恒等行列元 $\mathbf{e}$ を用いると行列形式の上で演算 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ を行うことができる．

$$\begin{aligned}\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}|\xi^\mu\rangle &\underset{(3.16)}{=} \sum_\rho \langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{A}}|\mathbf{1}_\rho\rangle\langle\mathbf{1}_\rho|\hat{\mathcal{B}}|\xi^\mu\rangle \\ &\underset{(3.10)}{=} \sum_\rho \overline{\eta^\rho}(\mathbf{A}_\rho \times \mathbf{B}_\rho)\xi^\rho\end{aligned} \tag{3.18}$$

逆にその交換 $\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{A}}$ に対しても:

$$\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{A}}|\xi^\mu\rangle = \sum_\rho \overline{\eta^\rho}(\mathbf{B}_\rho \times \mathbf{A}_\rho)\xi^\rho. \tag{3.19}$$

式 (3.18) および (3.19) より，演算 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ は式 (3.17) で定義された多重行列集合 $\hat{\mathcal{A}},\hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{F}_k$ 上で一般に以下のように定義できる:

多重行列の積 (Product of multiple matrices)

$$\mathfrak{F}_k \times \mathfrak{F}_k \quad \mapsto \quad \mathfrak{F}_k : \qquad \hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (\mathbf{A}_k\mathbf{B}_k) \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_k. \tag{3.20}$$

今，式 (3.20) のような行列形式で演算 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ を定義[33]することができたので，**単位元 (Identity element)** の定義 $\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{I}} = \hat{\mathcal{I}}\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}}$ を用いると単位元が以下のように導かれる:

$$\hat{\mathcal{I}} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_k. \tag{3.21}$$

ここから $\hat{\mathcal{I}} \in \mathfrak{F}_k$ 上の単位元が存在することが分かる．つまり，$\hat{\mathcal{I}}$ は任意の $\hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{F}_k$ に対して

$$\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{I}}\hat{\mathcal{B}}|\xi^\mu\rangle = \sum_\rho \overline{\eta^\rho}(\mathbf{I} \times \mathbf{B}_\rho)\xi^\rho = \langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{B}}|\xi^\mu\rangle. \tag{3.22}$$

[32] 多重行列の演算はこの空間 $\hat{\mathcal{F}}_k, \mathbf{G}_k$ の上で定義する．

[33] ここで積 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ は，仮に $\hat{\mathcal{A}} \in \mathfrak{F}_l, \hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{F}_m (l \neq m)$ のときは定義されない．

を満たすものである．かつ，**逆元 (Inverse element)** に対しても同様にできる:

$$\hat{\mathcal{M}}^{-1} := \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_k^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}_k. \tag{3.23}$$

以上の論議より，定義された多重行列演算 $\mathfrak{F}_k \times \mathfrak{F}_k \mapsto \mathfrak{F}_k$ 上の式 (3.21) および (3.23) により与えられる単位元と逆元の存在を分かる．この単位元と逆元を用いて多重行列演算の代数を評価することができて，式 (3.20) により $\mathfrak{F}_k$ 上で定義された演算は**群構造 (Group)** を満たしていることが以下の手順により示される:

多重行列群 (Multiple matrices groups)

多重行列群とは以下の演算に対して閉じた集合族で定義される．

$$\mathcal{C}(k) := \left\{ \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{F}_k \;\middle|\; \langle \eta^\mu | \hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} | \xi^\mu \rangle = \sum_\rho \overline{\eta^\rho} (\mathbf{A}_\rho \times \mathbf{B}_\rho) \xi^\rho \right\} \tag{3.24}$$

ここでベクトル $|\eta^\mu\rangle, |\xi^\mu\rangle$ は多重行列規約の定義式 (3.10) から先述したように任意で取ったものである．これが群構造になっていることは次の手順[34]により確認できる:

- **演算の閉性 (Closure property):**
  集合族 $\mathcal{C}(k)$ が $\mathfrak{F}_k$ 上の多重行列演算に対して閉じていることを示せばよい．つまり，ある任意の $\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{P}} \in \mathcal{C}(k)$ 対して:

$$\begin{aligned} \langle \eta^\mu | (\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}) \hat{\mathcal{P}} | \xi^\mu \rangle &= \sum_\rho \langle \eta^\mu | \hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} | \mathbf{1}_\rho \rangle \langle \mathbf{1}_\rho | \hat{\mathcal{P}} | \xi^\mu \rangle \underset{(3.24)}{=} \sum_\rho \overline{\eta^\rho} (\mathbf{A}_\rho \times \mathbf{B}_\rho) \times \mathbf{P}_\rho \xi^\rho \\ &= \sum_\rho \overline{\eta^\rho} ((\mathbf{A}_\rho \times \mathbf{B}_\rho) \times \mathbf{P}_\rho) \xi^\rho. \end{aligned} \tag{3.25}$$

  以上の計算 (3.25) から結局 $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} \in \mathcal{C}(k)$ となり[35]，集合族 $\mathcal{C}(k)$ は $\mathfrak{F}_k \times \mathfrak{F}_k \mapsto \mathfrak{F}_k$ 上の多重行列演算に対して閉じている．

- **逆元の存在性 (Existance of inverse element):**
  式 (3.23) から任意の元 $\hat{\mathcal{M}} \in \mathcal{C}(k)$ に対しての逆元が

$$\hat{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_k^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

  として逆元が存在することを簡単に分かる．

[34] 節 2.2.1 でローレンツ群が群構造持っていることを示したときの手順と同様である．

[35] 計算 (3.25) より，ある任意の $\hat{\mathcal{P}} \in \mathcal{C}(k)$ に対して $\langle \eta^\mu | (\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}) \hat{\mathcal{P}} | \xi^\mu \rangle$ も式 (3.24) の形式で書けたので $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}}$ も集合族 $\mathcal{C}(k)$ の元になると言える．

- **単位元と逆元の閉性 (Closure property of elements):**
  元 $\hat{\mathcal{M}} \in \mathcal{C}(k)$ を任意でとり，$|\eta^\mu\rangle, |\xi^\mu\rangle \in \mathbf{V}_k$ に対して $\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}^{-1}|\xi^\mu\rangle$ および $\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{I}}|\xi^\mu\rangle$ を以下のように評価すれば良い:

$$\langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{M}}|\xi^\mu\rangle = \sum_\mu \overline{\eta^\mu}(\mathbf{M}_\mu^{-1} \times \mathbf{P}_\mu)\xi^\mu \ , \qquad \langle\eta^\mu|\hat{\mathcal{I}}|\xi^\mu\rangle = \sum_\mu \overline{\eta^\mu}(\mathbf{1} \times \mathbf{P}_\mu)\xi^\mu \tag{3.27}$$

  逆元 $\hat{\mathcal{M}}^{-1}$ と単位元 $\hat{\mathcal{I}}$ に対しても $\hat{\mathcal{M}}^{-1},\hat{\mathcal{I}} \in \mathcal{C}(k)$ となる．

以上により，集合族 $\mathcal{C}(k)$ の代数構造が群構造を満たしていることが示された．このような群を**多重行列群 (Multiple matrices groups)** と呼ぶ．一方で，定義 (3.24) の通りにベクトル $|\eta^\mu\rangle, |\xi^\mu\rangle \in \mathbf{V}_k$ を用いて演算を評価すれば，以下の演算則が成り立つことが示される:

多重行列の演算則 (Rules of multiple matrices):

- **交換関係 (commutator)**

  式 (3.18) より得られる関係式の上で単位行列の可換性 ($\mathbf{A}_\rho \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{A}_\rho$) を用いると以下の対称関係が恒等的に成立することが示される:

$$[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{I}}] := \hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{I}} - \hat{\mathcal{I}}\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{O}}. \tag{3.28}$$

- **結合法則 (Associative property)**

  式 (3.25) により得られる関係式と行列演算の結合法則[a]を合わせると以下の関係が成立することが示される:

$$\hat{\mathcal{A}}(\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{C}}) = (\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}})\hat{\mathcal{C}}. \tag{3.29}$$

[a] $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

3.1.3 空間回転の交換関係

節 3.1.1 の論議から，この多重行列代数が群構造を満たしていることが分かった．ここからはその代数的構造の評価の一環として，多重行列代数がさらに**リー代数 (Lie algebra)** も満たしているかを確かめてみよう．多重行列生成子 $\hat{\mathcal{J}}_\mu$ の交換関係 $[\hat{\mathcal{J}}_\mu, \hat{\mathcal{J}}_\nu]$ を計算するため，以下のような軸選択の任意性を要請[36]する (図 7):

$$\langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{\xi}_x^\mu\rangle = \mathbf{J}_x\varphi_x \ , \quad \langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{\xi}_y^\mu\rangle = \mathbf{J}_y\varphi_y \ , \quad \langle\mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{\xi}_z^\mu\rangle = \mathbf{J}_z\varphi_z. \tag{3.30}$$

軸選択の任意性を与えるときは，今考える z 軸を含む新しい基底の組として取っている他の基底成分 x 軸，y 軸は一意的に決まるわけではないことに特別な注意が必要である．

[36] 一般に，多重行列生成子 $\hat{\mathcal{J}}_\mu$ は行列の演算則を満たさないため，以下のような特殊な方法で展開を行う．

これは今後の**不確定性 (Principle of Uncertainty)** の論議にも繋がる．ゆえに，今以下のような展開を想定することができる:

基底選択の任意性 (Ramdomness of basis selection)

基底選択の任意性は以下を要請する:

$$\mathbf{J}_z\varphi_z = \langle \mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{g}_z^{\mu}, m\rangle = \langle \mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{g}_z^{\mu}\rangle, \tag{3.31}$$

任意性は $\mathbf{J}_\mu(\mu = 1, 2, 3)$ の交換関係を変換後の $\mathbf{J}_i(i = x, y, z)$ 上でも保つ.

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k\ , \qquad (i, j, k = x, y, z) \tag{3.32}$$

ここで式 (3.30) は原理的に $\langle \mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}\,|\not{g}^{\mu}, m\rangle$ などで展開されるべきであるが，以前要請した空間回転の循環性[37]を認めると式 (3.31) のようにさらに等価的に拡張できる．今考えてる基底変換 $\langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\rangle \mapsto \langle x, y, z\rangle$ を図表示すると以下のようになる:

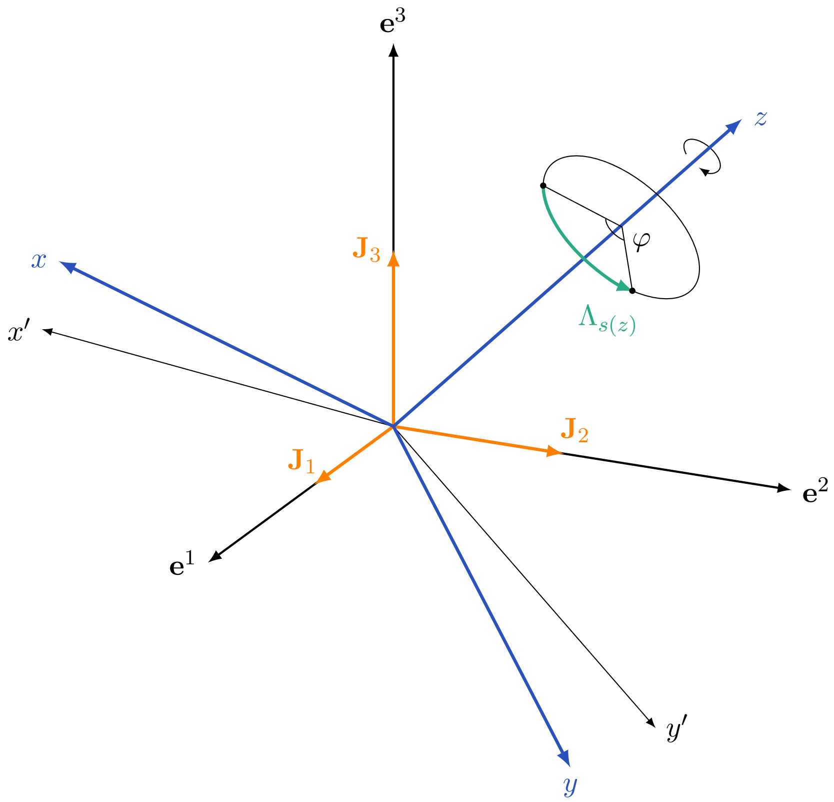

図 7. 基底選択の任意性と不確定性

[37] ページ 30.

系全体に**軸選択の任意性**を与えたので，一般の任意の軸 z を基底として取る新しい基底の組み $\langle x, y, z\rangle$ の下でも式 (3.31) および (3.32) が成り立っていることが分かった．ならば，この基底に当る多重行列演算子 $\hat{\mathcal{K}}$ および回転発展ベクトル $|\varphi_z^\mu\rangle$:

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 3\mathbf{J}_x & & \\ & 3\mathbf{J}_y & \\ & & 3\mathbf{J}_z \end{pmatrix}, \quad |\varphi_z^\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{\varphi}_z + 2\pi m \end{pmatrix}, \quad m = 0, \pm 1, \cdots \tag{3.33}$$

としておき，ローレンツ群の表現行列の Dirac 表示は以下のように書き換える:

$$\Lambda_{s(z)}[\varphi] = \exp\left(-i\langle \mathbf{1}|\hat{\mathcal{K}}|\cancel{\varphi}_z^\mu, \pi_{z;m}^\mu\rangle\right) = \exp\left(-i\mathbf{J}_z\varphi_z\right). \tag{3.34}$$

つまり，回転変換の軸 z の取り方には関わらず，式 (3.34) のように書けるような基底 $\langle x, y, z\rangle$ の組みが必ず存在[38]する．しかし，まだ大事な問題が 1 点残っていることをに留意せよ: 回転軸 z が決定されたとしても残りの 2 つの基底 $\langle x, y\rangle$ も一意的に決まるとは限らない[39]．

3.1.4　共変量子化の正式化

次は本格的に正準量子化[40]の話をしよう．空間回転の循環性の要請から得られた境界条件 (3.9) はある任意の基底 $\langle \alpha^i, \beta^i, \gamma^i\rangle$ および回転軸成分を含んでいる基底 $\langle x, y, z\rangle$ の上で書けば:

$$\mathbf{1} = \exp\left(-i\langle \mathbf{1}|\hat{\mathcal{J}}|\pi_{z;m}^\mu\rangle\right) = \exp\left(-i\mathbf{J}_z(2\pi m)\right). \tag{3.35}$$

ここで回転の循環性 (3.35) は任意の基底 $\langle \alpha^i, \beta^i, \gamma^i\rangle$ 上の多重行列演算子 $\hat{\mathcal{J}}$ に対しても成立するべきなので，以下を要請する．

$$\sum_i \mathbf{J}_i \pi_{z;m}^i = \sum_i m_z \pi_{z;m}^i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.36}$$

物理量 $\pi_{z;m}^i$ は式 (3.6) で述べたように回転軸 z および生成子 $\mathbf{J}_i$ により決まる演算子であることに注意する必要がある．よって，4 元ベクトル表記で以下のような共変量子化の条件[41]が得られる:

共変量子化 (Covariant Quantization)

$$J_\mu \pi_{z;m}^\mu = m_z(s_\mu \pi_{z;m}^\mu). \tag{3.37}$$

[38]実は，この結論は "軸選択の任意性" を与えた時点で自明である．
[39]一例として，図 7 が示す 2 つの基底 $\langle x', y', z\rangle$, $\langle x, y, z\rangle$ 見よう．どちらを選んでも数学的・物理的に等価である!
[40]Canonical quantization. Dirac により提唱された．
[41]方向ベクトル s^μ に関しては (**??**) を参照すること．

3.2　ローレンツ共変量の共変量子化

前の節で 4 元固有ベクトル[42]$\pi^{\mu}_{z;m}$ における共変量子化を展開することができた．今からは，方向成分 s^{μ} を定義し:

$$\pi^{\mu}_{z;m} = s^{\mu}(\pi_{z;m}) \ , \qquad s^{\mu} s_{\mu} = 1, \tag{3.38}$$

Dirac の表示[43]より $\mathbf{J} = (\mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3)$ とすれば与えられた共変量子化 (3.37) はもっと簡単に

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{s})\pi_{z;m} = (J^{\mu}s_{\mu})\pi_{z;m} = m_z \pi_{z;m} \tag{3.39}$$

として取れる．実はこの共変量子化 (3.37) はローレンツ共変量[44]のうち，1 つである 4 元ベクトルにおける **4 元共変量子化 (4-Covariant Quantization)** であった．この節では，ローレンツ群から可能なローレンツ共変量を分類し，それぞれのローレンツ共変量における共変量子化を分類する．

3.2.1　スカラー，4 元ベクトル，スピノル

ここでローレンツ群の定義を再度呼び出そう．節 2.2.6 から，ローレンツ群は以下のような生成子 J_{μ}, K_{μ} とそれらのローレンツ代数から定義された:

$$\Lambda = \exp\left(-iK_{\mu}\eta^{\mu} - iJ_{\mu}\xi^{\mu}\right), \tag{3.40}$$

$$[J_{\mu}, J_{\nu}] = -[K_{\mu}, K_{\nu}] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}J_{\lambda} \ , \qquad [J_{\mu}, K_{\nu}] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}K_{\lambda}. \tag{3.41}$$

今までの節 2.2.6 などでの論議は具体的に J_{μ}, K_{μ} を与えてからその群構造を考える比較的に狭い意味としてのローレンツ群の論議であった:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \cdots \tag{3.42}$$

つまり，今までの論議は 4 元ベクトル (4-vectors) における群構造を調べる作業をしていた．ここで一個の疑問が思いつく: “このようなローレンツ不変量は**スカラー**と **4 元ベクトル**以外

[42]回転数発展ベクトル.
[43]Dirac representation.
[44]ローレンツ共変量とは，簡単に言えばローレンツ不変量を作れる物理量をいう:

$$\Phi, \ A_{\mu}A^{\mu}, \ \cdots \quad \text{など}$$

は存在しないのか?” この節では，ローレンツ群をその生成子 (3.42) を全て無くして式 (3.40) および (3.41) のローレンツ代数だけを残したときに可能なローレンツ共変量には何があるか調べる．そのため，まずは以下のようにスピン A_μ, B_μ を定義しよう:

スピンの導入 (Adoption of Spin)

$$A_\mu := \frac{1}{2}(J_\mu + iK_\mu)\ , \qquad B_\mu := \frac{1}{2}(J_\mu - iK_\mu). \tag{3.43}$$

ローレンツ群の生成子 J_μ, K_μ は可換ではなかったことに注意すると，ローレンツ群は J_μ を生成子として取る下位群と K_μ を生成子として取る下位群では分離されないことを示している．しかし，式 (3.43) のように既存の生成子 J_μ, K_μ の代わりにスピン A_μ, B_μ を導入すれば群の分離ができることが以下の演算から分かる:

スピンの交換関係 (Commutator of Spins)

$$[A_\mu, A_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}A_\lambda\ , \qquad [B_\mu, B_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}B_\lambda\ , \qquad [A_\mu, B_\nu] = 0. \tag{3.44}$$

この式 (3.44) が与えるスピンの交換関係[45]は，今考えている本義ローレン群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ がそれぞれ A_μ と B_μ を生成子として取る 2 つの SU(2) 群で分離できることを示す:

$$\mathcal{O}_+^\uparrow = SU(2) \oplus SU(2). \tag{3.45}$$

かつ，このスピン A_μ, B_μ でローレンツ群を書けば以下のようになる:

$$\Lambda = \exp\left[-i(A_\mu + B_\mu)\xi^\mu - (A_\mu - B_\mu)\eta^\mu\right]. \tag{3.46}$$

次順はそれぞれのスピン A_μ, B_μ の状態を与えたときにそれぞれの生成子 J_μ, K_μ を復元することである．その前に式 (3.45) でなぜ SU(2) 群で分離されるかを確認する必要がある．そのため，J_μ, K_μ を復元する前に SU(2) 群について以下で調べる:

SU(2) 対称群

リー群うちにも，以下のようにエルミートかつ行列式が 1 になる条件を満たす 2 次複素行列からなる群を **2 次特殊ユニタリ群**あるいは **SU(2)** と定義する．

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}\ , \qquad \det(U) = 1 \quad (U \in SU(2)) \tag{3.47}$$

[45] Lie 群の言語で言うと，分離された下位群の構造方程式とも言える．

SU(2) 群がリー群 (Lie groups) であることから，SU(2) のある元 $U \in SU(2)$ は 2 次複素行列 X を用いて以下のように表せる:

$$U = e^{iX} \in SU(2) \tag{3.48}$$

このような X をリー群の元と呼ぶ．この結果から見るとただこの X の生成子を SU(2) 群の生成子として扱っても良いものである．このリー群の元 X で SU(2) の定義 (3.47) を書き直せば:

特殊ユニタリ群の定義 (Definition of SU(2) groups)

$$\begin{aligned} UU^\dagger = e^{iX}e^{-iX^\dagger} = \mathbf{1} \quad &\mapsto \quad X^\dagger = X, \\ \det(U) = e^{i\mathrm{tr}X} = 1 \quad &\mapsto \quad \mathrm{tr}X = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

定義 (3.57) から SU(2) 群を作成することにより，以下のようにこの SU(2) 群の生成子および構造方程式を決定することができる．任意の $e^{iX} \in SU(2)$ を取れば

a. ユニタリ条件

$$X^\dagger = X \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{cases} a_{11} = a_{11}^* \\ a_{22} = a_{22}^* \\ a_{12} = a_{21}^* \end{cases}, \tag{3.50}$$

b. 行列式条件

$$\det X = 0 \quad \mapsto \quad a_{11} + a_{22} = 0 \quad \mapsto \quad a_{11} = -a_{22}. \tag{3.51}$$

を満たすことが分かる．このことから，SU(2) の任意の元 $U = e^{iX} \in SU(2)$ は一般に任意の実数 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ に対して以下のように書ける:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta^3 & \theta^1 - i\theta^2 \\ \theta^1 + i\theta^2 & -\theta^3 \end{pmatrix} = \sum_i \theta^i \frac{\sigma^i}{2} = \sum_i \theta^i T^i. \tag{3.52}$$

ここで T^i が SU(2) 群の生成子になり，σ^i はいわゆる**パウリ行列**と言うものとして

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

とする．このパウリ行列の交換関係 $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$ により，SU(2) 群の構造方程式および構造定数は以下のように決定される:

特殊ユニタリ群の構造方程式 (Structural equation of SU(2) groups)

$$[T^\mu, T^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\lambda}T^\lambda \tag{3.54}$$

得られた SU(2) 群の構造方程式 (3.54) とスピンの交換関係 (3.44) を比べると，ようやくローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ は生成子 A_μ の SU(2) と生成子 B_μ の SU(2) 群で分離できることを分かる．

スピンの決定

ここから分離された群の各スピン A_μ, B_μ を復元[46]してみる．ローレンツ群の分離 (3.45) より，A_μ, B_μ は互いに等々な SU(2) 群の生成子なので各スピンを復元するためには以下の**リー代数の表現 (Representaion of Lie algebra)** を求めるだけで十分である:

$$[X_\mu, X_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}X_\lambda \qquad (\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3) \tag{3.55}$$

さて，式 (3.55) の交換関係だけを用いてこのリー代数の表現を求めてみよう．そのため，成分 X_3 の固有状態を用意する:

$$X_3|n\rangle = \lambda_n|n\rangle \tag{3.56}$$

次に以下のように X_3 に対する上昇演算子 $\mathbf{a}_+$ および下降演算子 $\mathbf{a}_-$:

昇降演算子の定義 (Definition of ladder operators)

$$\mathbf{a}_+ := X_1 + iX_2\ , \qquad \mathbf{a}_- := X_1 - iX_2 \tag{3.57}$$

のように定義すると，以下のような演算が得られる．

$$\begin{aligned} X_3(\mathbf{a}_+|n\rangle) &= (\mathbf{a}_+X_3 + \mathbf{a}_+)|n\rangle = (\lambda_n + 1)\mathbf{a}_+|n\rangle, \\ X_3(\mathbf{a}_-|n\rangle) &= (\mathbf{a}_-X_3 - \mathbf{a}_-)|n\rangle = (\lambda_n - 1)\mathbf{a}_-|n\rangle. \end{aligned} \tag{3.58}$$

ここで想定したリー代数 (3.55) より，元 X_3 と乗降演算子 $\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_-$ との演算が可換でないことに特別な注意が必要である:

$$[\mathbf{a}_\pm, X_3] = [X_1, X_3] \pm i[X_2, X_3] = \mp\mathbf{a}_\pm. \tag{3.59}$$

[46] この節の論議に当たって，最初に J_μ, K_μ の具体形を無くしてから論議を始めたのでそれに相当するスピン A_μ, B_μ の具体形もまだ知らないままである．

演算 (3.58) の結果より，各昇降演算子 $\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_-$ はそれぞれの固有値を上げたり下げる作用[47]をしていることが分かる．つまり，状態ベクトル $|n\rangle$ 上の昇降演算子の作用は:

$$\mathbf{a}_+|n\rangle = \alpha_n^+|n+1\rangle\ , \qquad \mathbf{a}_-|n\rangle = \alpha_n^-|n-1\rangle. \tag{3.60}$$

しかし，昇降演算子 $\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_-$ の作用の通りであればこのリー代数の表現は無限次元になってしまうので下限と上限を設定する必要がある．

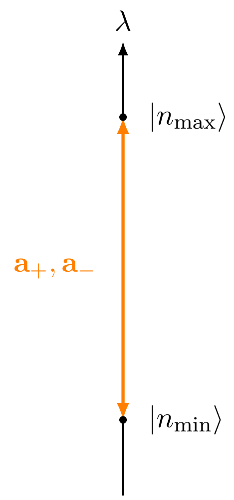

図 8. 昇降演算子の作用

つまり，$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ に対して

$$\mathbf{a}_+|n_{\max}\rangle = \mathbf{a}_-|n_{\min}\rangle = 0 \tag{3.61}$$

を要請する必要がある．このようにリー代数の下限と上限を設定しておくと，昇降演算子の作用 (3.60) より以下の関係が成立する:

$$|n_{\max}\rangle = \frac{1}{\alpha_1^+ \cdots \alpha_k^+}(\mathbf{a}_+)^k|n_{\min}\rangle\ , \qquad |n_{\min}\rangle = \frac{1}{\alpha_1^- \cdots \alpha_k^-}(\mathbf{a}_-)^k|n_{\max}\rangle \tag{3.62}$$

このとき，定数 k はこのリー代数の次元を示す．式 (3.61) に注意すれば，$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ の演算に関する関係式:

$$\mathbf{a}_-\mathbf{a}_+|n_{\max}\rangle = 0 \qquad \mapsto \qquad (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)|n_{\max}\rangle = \lambda_{\max}(\lambda_{\max}+1), \tag{3.63}$$

[47] これが演算子 $\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_-$ に昇降演算子と言う名前がついた理由である．

4 自由 Dirac 場とスピン