力 学 I 演 義 発 表 資 料 (補 完)

連 成 振 動

大阪大学　理学部・物理学科　堀北　はな乃

担当：吉野　元（スタンダード）

◇ M39 (424ー1)

(計　算　用　紙)

〔１〕**(b)** 前回の資料に述べた通りで，この問題では x 軸のみの運動を考慮するので，この系のポテンシャルは,

$$U(x_1, x_2) = \frac{\kappa}{2}x_1^2 + \frac{\kappa}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 \qquad \cdots (*)$$

のように計算される．このことから，ばねが物体 1 および物体 2 に与える力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ はそれぞれ次のように定まる:

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_1} = -\kappa x_1 - k(x_1 - x_2) \\ \\ F_2 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = -\kappa x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

ならば，ニュートン方程式 $F_x = m\ddot{x}$ から，x 軸における物体 1 および物体 2 の運動方程式を次のように得られる.

$$\boxed{\text{運動方程式:} = \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\kappa x_1 - k(x_1 - x_2) \\ \\ m\ddot{x}_2 = -\kappa x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}} \qquad (1)$$

これが (b) が要望する系の振動に関する x_1, x_2 に対する運動方程式である.

(c) この運動方程式をそのまま解けばいいんですが，方程式の内に 2 つの変数 x_1, x_2 が混ざっていて困っている… つまり，この方程式を解くためには，次のように **1 つの変数のみの方程式で分離できるように方程式**の変形が必要である:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_+ = -k_+ x_+ \\ \\ m\ddot{x}_- = -k_- x_- \end{cases} \qquad \cdots (**)$$

ならば，この式 $(**)$ の形になれるように方程式 (1) を変形するためには，基準座標 x_+, x_- をどう定まれば良いか？

そのため，次のように方程式 (1) と式 ($**$) を行列で表したら分かりやすくなるだろう:

$$m\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix}(k+\kappa) & -k\\ -k & (k+\kappa)\end{bmatrix}}_{\mathbb{K}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad \cdots(\alpha)$$

および

$$m\begin{bmatrix}\ddot{x}_+\\ \ddot{x}_-\end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix}k_+ & 0\\ 0 & k_-\end{bmatrix}}_{\mathbb{K}_0}\begin{bmatrix}x_+\\ x_-\end{bmatrix} \qquad \cdots(\beta)$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\hat{\boldsymbol{x}}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\ , \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}x_+\\ x_-\end{bmatrix} \tag{2}$$

ならば，この問題での (a) から得られた変数 x_1, x_2 に対する系の運動方程式 (α)(あるいは，式 (1) の方程式) は，簡単に次のように表せる！

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\mathbb{K}\boldsymbol{x}\ , \qquad m\ddot{\hat{\boldsymbol{x}}} = -\mathbb{K}_0\hat{\boldsymbol{x}}$$

ここで，ある適切な行列 $\mathbb{U}$ をとることにより，次のような変換ができることが分かる．

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{bmatrix}\ , \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}u_1\\ v_1\end{bmatrix},\ \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}u_2\\ v_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

ならば，このような行列 $\mathbb{U}$ およびその逆行列 $\mathbb{U}^{-1}$ に対して，元の運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\mathbb{K}\boldsymbol{x}$ は次のように変換できる:

$$m(\mathbb{U}\ddot{\boldsymbol{x}}) = -\underbrace{(\mathbb{U}\mathbb{K}\mathbb{U}^{-1})}_{\mathbb{K}_0}(\mathbb{U}\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

ここでちょうどいい行列 $\mathbb{U}$ を取ることにより，上式 (β) で定めたように:

$$\therefore \mathbb{K}_0 = \mathbb{U}\mathbb{K}\mathbb{U}^{-1} = \begin{bmatrix}k_+ & 0\\ 0 & k_-\end{bmatrix} \tag{5}$$

のように行列 $\mathbb{K}$ を対角成分のみを持つ対称行列で変えられる．

よって，このような行列 $\mathbb{U}$ に対して，基準座標ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ を次のように定まれば良い:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 x_1 + u_2 x_2 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

なので，このように $\mathbb{UKU}^{-1}$ を対角行列 (対角成分のみ存在する行列) にする，行列 $\mathbb{U}$ があれば，式 $(**)$ のように変えることができて，その時の基準座標ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ は式 (6) のように決まる.

しかし，問題では基準座標ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ を,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{U}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

として与えられたので，ここの行列 $\mathbb{U}$ を次のようになるとすると:

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

つまり，行列 $\mathbb{U}$ を式 (7) として，行列積 $\mathbb{UKU}^{-1}$ を計算してみる.

$$\mathbb{UKU}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (k+\kappa) & -k \\ -k & (k+\kappa) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & (2k+\kappa) \end{bmatrix}$$

より，$\mathbb{K}_0 = \mathbb{UKU}^{-1}$ は対角成分のみの行列になったので，望んでいた式 (β) の形で方程式を変えることができた.

$$\mathbb{K}_0 = \begin{bmatrix} k_+ & 0 \\ 0 & k_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & (2k+\kappa) \end{bmatrix}; \qquad k_+ = \kappa\ , \quad k_- = 2k + \kappa$$

よって，この場合の系の運動方程式 $m\ddot{\hat{\boldsymbol{x}}} = -\mathbb{K}_0 \hat{\boldsymbol{x}}$ から，次の変換された簡単な方程式を得られる.

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_+ \\ \ddot{x}_- \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 2k+\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix}$$

あるいは,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_+ = -\kappa x_+ \\ \\ m\ddot{x}_- = -(2k+\kappa) x_- \end{cases} \tag{8}$$

ならば，この x_+, x_- に対する方程式は，式 (8) で与えられたようにただの単純調和振動子なので，簡単に解ける．より，次のような一般解を得られる．

$$\begin{cases} x_+(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}t\right) \\ \\ x_-(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{2k+\kappa}{m}}t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{2k+\kappa}{m}}t\right) \end{cases}$$

以上により，問題で定めた変数 x_1, x_2 に対する物体系の運動の一般解は次のように書ける．

$$\boxed{x_1(t) = \frac{x_+ + x_-}{\sqrt{2}} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t + \frac{B_1}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin\omega_1 t + \frac{B_2}{\sqrt{2}}\sin\omega_2 t}$$

および，

$$\boxed{x_2(t) = \frac{x_+ - x_-}{\sqrt{2}} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t - \frac{B_1}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin\omega_1 t - \frac{B_2}{\sqrt{2}}\sin\omega_2 t}$$

ここで，角振動数 ω_1, ω_2 は次のように定義する:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}\ , \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k+\kappa}{m}}$$

(d) 問題で与えられた初期条件を用いると，一般解は次のように書ける．

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right] \\ \\ x_2(t) = \dfrac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right] \end{cases}$$

終わり！！！ です！