General Relativity

KIM, Dohyun[*]

2025 年 5 月 24 日

1 レポート課題 / 3 週目

本レポートでは簡単のため，必要に応じて以下のような縮約記法を使うことがある:

- **Notation and Conventions**

$$A^{\nu}{}_{,\mu} = \partial_{\mu} A^{\nu}, \qquad A^{\nu}{}_{;\mu} = \nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} A^{\lambda},$$

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} A^{\rho} := [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A^{\lambda}, \qquad R := g^{\mu\nu} \left(R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}\right) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

以下で付与されたレポート問題を解説する:

Problem 1.1 (第一問・Transformation of Coefficients of Affine connection)
前回のレポートの**第四問**の結果より，項 $\partial_{\mu} A^{\nu}$ は微分の定義として稍不自然な所があった (テンソルとして変換されない)．この不自然さを解決するためは，4 元ベクトル量としての微分の定義を再考する必要がある．微分は一般に差分の極限として定義されるので，今まで (前回の**第四問**など) 使って来た微分の定義において:

$$\partial_{\mu} A^{\nu}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A^{\nu}(x+\Delta x) - A^{\nu}(x)}{\Delta x^{\mu}}, \tag{1}$$

分子の演算 $A^{\nu}(x+\Delta x) - A^{\nu}(x)$ は平行移動により行われることを思い出せば，原理的にこの 4 元ベクトル量としての微分の定義では点 x における場の成分 $A^{\nu}(x)$ が $x \to x + \Delta x$ への平行移動によるもの $A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)$ として切り替わる．そのことに立角し，微分の定義を

$$\nabla_{\mu} A^{\nu}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A^{\nu}(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x)}{\Delta x^{\mu}} \tag{2}$$

[*] B4, Hep-th., Dept. of Phys., University of Osaka(Onogi group).

として切り替えよう．このことを徐に**共変微分 (Covariant Derivative)** という． しかし，まだはこの平行移動 $A^{\parallel\nu}(x)$ の形か決まらず，故に共変微分の形も一意的に決めることはできない．取り敢えず一般性を失わず，平行移動 $A^{\parallel\nu}(x)$ は以下のように書き下すことができる:

$$A^{\parallel\nu}(x+\Delta x) = A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}. \tag{3}$$

これは $\Delta x \to 0$ のときは平行移動が恒等変換として $A^{\nu}(x) \to A^{\nu}(x)$ に戻る[*1]ことと，そもそも $A^{\nu}(x) \to 0$ に対しては平行移動の結果も $A^{\parallel\nu}(x)|_{A^{\nu}(x)=0} = 0$ となる要請から成るものである．また，平行移動しものの $A^{\parallel\nu}(x)$ においてもその変換則が**反変ベクトル**として，

$$A^{\parallel\nu}(x) \quad\to\quad A'^{\parallel\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}A^{\parallel\rho}(x) \tag{4}$$

のように変換するという要請[*2]を加える．無論，このことが一意的にアファイン係数 $\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}$(あるいは，接続係数とも呼ばれる) を決定してくれたりはしないが，以下のようにアファイン係数の変換式を導くことはできる:

$$\begin{aligned}
A'^{\parallel\nu}(x'+\Delta x') &= A'^{\nu}(x') - \Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho}A'^{\lambda}(x')\Delta x'^{\rho} \\
&= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}A^{\rho}(x) - \Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}A^{\sigma}(x)\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}}\Delta x^{\tau} \\
&= \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)_{x+\Delta x}\underbrace{\left(A^{\alpha}(x) - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}A^{\beta}(x)\Delta x^{\gamma}\right)}_{=A^{\parallel\alpha}(x+\Delta x)} \qquad \leftarrow (4) \\
&= \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\theta}\partial x^{\alpha}}\Delta x^{\theta}\right)\left(A^{\alpha}(x) - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}A^{\beta}(x)\Delta x^{\gamma}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

故に，上式の計算で第二行目と第四行目を比較すれば，

$$-\Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}A^{\sigma}(x)\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}}\Delta x^{\tau} = \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\theta}\partial x^{\alpha}}\Delta x^{\theta}A^{\alpha}(x) - \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}A^{\beta}(x)\Delta x^{\gamma}, \tag{6}$$

ここで $\Delta x \to 0$ とし，$(\Delta x)^2 \sim 0$ として落とす．あるいは，両辺を引いて $A^{\sigma}(x)\Delta x^{\tau}$ らに括ることでより簡単に書き換えると:

$$\left[\Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\tau}\right]A^{\sigma}(x)\Delta x^{\tau} = 0, \tag{7}$$

$$\Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}} = -\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\tau}. \tag{8}$$

最後に，両辺に $\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}$ と $\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}}$ をかけ，ラベル σ, τ の総和をとれば，

$$\Gamma'^{\nu}{}_{\mu\beta} = -\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\tau}. \tag{9}$$

Remark 1.1.a (平行移動の定式化) ここでは上で与えた平行移動の定式化 (3) について考える．先ず，無限小平行移動を考えると $(\delta x \to 0)$，確かに上で考察した通りに，

$$A^{\parallel\nu}(x+\delta x) \underset{\delta x\to 0}{\simeq} A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\delta x^{\rho}, \tag{10}$$

従って，一般の Δx(無限小に限らない) に対しては

$$A^{\parallel\nu}(x+\Delta x) = A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} - \underbrace{\Gamma^{\nu}{}_{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2}A^{\lambda_1}(x)A^{\lambda_2}(x)\Delta x^{\rho_1}\Delta x^{\rho_2}}_{2\text{ 次項}} + \cdots \tag{11}$$

として展開されるべきである．しかし，この平行移動という操作は**線形性**を持っていることも忘れてはいけない．つまり，平行移動は幾何学的に $(A+B)^{\parallel\nu} = A^{\parallel\nu} + B^{\parallel\nu}$ となって当然だ．このことを上で得られた平行移動の展開式に加えると，

$$\begin{aligned}(A+B)^{\parallel}(x+\Delta x) &= A^{\nu}(x) + B^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}(A+B)^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} \\ &\qquad - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2}(A+B)^{\lambda_1}(x)(A+B)^{\lambda_2}(x)\Delta x^{\rho_1}\Delta x^{\rho_2} + \cdots \\ &= A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2}A^{\lambda_1}(x)A^{\lambda_2}(x)\Delta x^{\rho_1}\Delta x^{\rho_2} \\ &\qquad + B^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}B^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2}B^{\lambda_1}(x)B^{\lambda_2}(x)\Delta x^{\rho_1}\Delta x^{\rho_2} + \cdots,\end{aligned} \tag{12}$$

となり，2 次以上の係数 $\Gamma^{\nu}{}_{\lambda_1\lambda_2\rho_1\rho_2} = \cdots = 0$ として落とさないといけない．故に，今のある任意のベクトルの任意の平行移動を表す演算 $A^{\parallel\nu}(x+\Delta)$ は一般性を失うことなく，常に:

$$A^{\parallel\nu}(x+\Delta x) = A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} \tag{13}$$

が成立する (もちろん，ここでも Δx を無限小に限らないものにする)．

[*2] これは敢えて加えた単なる要請だが，幾何学的な観点から見ればこの要請は当然なものとして納得できる．定義した平行移動 (3) が本当に正しい平行移動を与えるものならば，むしろ平行移動の後にこのベクトルの反変性が破れるのがおかしくないか?

Problem 1.2 (第二問・Levi-Civita Connection I)

前問にて接続係数 $\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}$ らの変換則は導けたが，まだ接続を決めた訳ではない．この問題では以下の要請を加えることで**レヴィ＝チビタ接続**を与える:

レヴィ＝チビタ接続の要請

- 平行移動は接続係数を用いて以下のように書き下す:

$$A^{\|\nu}(x+\Delta x) = A^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}. \tag{14}$$

  また，平行移動の定義に伴って共変微分も，

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}A^{\nu}(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{\nu}(x+\Delta x) - A^{\|\nu}(x+\Delta x)}{\Delta x^{\mu}} \\ &= \partial_{\mu}A^{\nu}(x) + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}A^{\lambda}(x).\end{aligned} \tag{15}$$

- 平行移動はリーマン計量 $g_{\mu\nu}(x)$ による内積を保つ:

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)A^{\|\mu}(x+\Delta x)B^{\|\nu}(x+\Delta x) = g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x). \tag{16}$$

- 任意のスカラー場 C に対しては，共変微分は普通の微分に戻る:

$$\nabla_{\mu}C = \partial_{\mu}C. \tag{17}$$

以上の 3 つの条件を満たすような接続条件を**レヴィ＝チビタ接続**と呼ぶ．さては，以下でレヴィ＝チビタ接続の下で具体的に接続係数 $\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}$ を決定してみよう．まず，レヴィ＝チビタ接続の定義式 (16)(内積不変性) に平行移動 (14) を加えると，

$$\begin{aligned}(g_{\mu\nu}A^{\|\mu}B^{\|\nu})(x+\Delta x) &= g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\left(A^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}\right)\left(B^{\nu}(x) - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}B^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}\right) \\ &= g_{\mu\nu}(x+\Delta x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}B^{\nu}(x) \\ &\qquad - g_{\mu\nu}(x+\Delta x)A^{\mu}(x)\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}B^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} \\ &\qquad + g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}A^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho}B^{\lambda}(x)\Delta x^{\rho} \\ &= g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x),\end{aligned} \tag{18}$$

いま，ベクトル場 $A^{\mu}(x), B^{\nu}(x)$ や平行移動のパラメーター Δx は任意で取っていることに特別に注意すると，この要請が支えられるためには，

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x) - g_{\lambda\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Delta x^{\rho} - g_{\mu\lambda}(x+\Delta x)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}\Delta x^{\rho} = g_{\mu\nu}(x), \tag{19}$$

および,

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\tau}A^{\lambda}(x)B^{\sigma}(x)\Delta x^{\rho}\Delta x^{\tau}=0 \tag{20}$$

を満たさなければならない．しかし，式 (20) のような条件式が残っている限り，非線形項の寄与を考えないといけないので問題が非常に扱い難くなる．このような複雑さを避けるため，今後 $\Delta x \to 0$ を処方する．すると，式 (18) の展開において両辺引いて Δx^{ρ} に割った量を考えることで,

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g_{\mu\nu}(x+\Delta x)-g_{\mu\nu}(x)-g_{\lambda\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Delta x^{\rho}-g_{\mu\lambda}(x+\Delta x)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}\Delta x^{\rho}}{\Delta x^{\rho}}\\ &\qquad + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\tau}A^{\lambda}(x)B^{\sigma}(x)\Delta x^{\rho}\Delta x^{\tau}}{\Delta x^{\rho}} \qquad (21)\end{aligned}$$

↩ 式 (20) による寄与 $\to 0$.

$$= \partial_{\rho}g_{\mu\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}(x)$$

を導く (これは確かに式 (20) の寄与を落としている)．また，単なる反変ベクトルの共変微分を式 (15) として定義していることに注意すれば，簡単な計算で計量テンソルのような 2 階共変テンソルの共変微分は以下のように拡張されることがわかる:

$$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}(x):=\partial_{\rho}g_{\mu\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}(x). \tag{22}$$

故に，驚くことにこの共変微分の展開 (22) は簡単な計算より得られる結果 (21) と一致し，最後に$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}(x)=0$を得る．この意味で，一般相対論の素材になる時空ごと (徐に**擬リーマン空間**と呼ばれる) は単に**計量接続空間**とも呼ばれる．

Remark 1.2.a (レヴィ＝チビタ接続) 上では，レヴィ＝チビタ接続 (リーマン＝レヴィ・チビタ接続とも呼ぶ) というものを単に $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}(x)=0$ を満たすような接続 ∇_{ρ} として定義した．しかし，これだけだとまだ接続 ∇_{ρ} が一意的に決まるという保障はなくて，それ故にこの後の議論も困難である．そのため，実は以下のように数学的に正しく導かれる接続の一意性に基づいてレヴィ＝チビタ接続の厳密な定義を考える必要がある:

Theorem 1.1 (接続の一意性)

擬リーマン空間上の接続 ∇_{μ} が以下の条件を満たすとする:

- (捩率テンソルが 0):

$$A^{\mu}{}_{\rho\nu}:=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}-\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\right)=0. \tag{23}$$

- (計量接続):

$$\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}(x):=\partial_{\rho}g_{\mu\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}(x)-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}(x)=0. \tag{24}$$

> このとき，接続 ∇_μ は一意的である．このとき一意的に決まる接続 ∇_ρ のことを**レヴィ＝チビタ接続 (Levi-Civita Connection)** という．

つまり，i) 接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}$ が添字の入れ替え $\rho \leftrightarrow \nu$ に対して対称であり，ii) ベクトルの平行移動における内積の不変性から得られる条件 $\nabla_\rho g_{\mu\nu}(x) = 0$ の 2 つの条件を足せば接続は一意的に決まり，それを厳密にレヴィ＝チビタ接続と呼ぶことにする (特に，そのときの接続係数をクリストフェル記号という)．ここで，本当にこの 2 つの条件を足すだけで**接続が一意的に決まるか** (あるいは，接続係数が一意的に決まるか) については次の問題で扱うことにして，ここでは簡単に以下の疑問について議論することにする:

なぜ，クリストフェル記号は完全対称に成らざるを得ないか？

以下にこの疑問に対する物理的な理由を与えよう．まず，式 (23) 上の捩率テンソルというものはテンソルであることに気づいておこう．それは，前問により得られた接続係数の変換性 (9) から簡単に確かめられる:

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma'^\mu{}_{\rho\nu} - \Gamma'^\mu{}_{\nu\rho}\right)}_{=A'^\mu{}_{\rho\nu}} &= \frac{1}{2}\left(\cancel{-\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma}} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\cancel{-\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma}} + \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau}\right)}_{\tau\leftrightarrow\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau} - \Gamma^\lambda{}_{\tau\sigma}\right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}A^\lambda{}_{\sigma\tau}.\end{aligned} \tag{25}$$

ここで，ある時空点 P の近傍のある**局所 Lorentz 系**を x-系とする (P を原点にする)[*3]．すると，この x-系においてのクリストフェル記号は $\Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau}(x)|_{x=P} = 0$ であることから，$A^\lambda{}_{\sigma\tau}(x)|_{x=P} = 0$ である．故に $A^\lambda{}_{\sigma\tau}$ がテンソル量であること (式 (25)) より，どの座標系 (x'-系) においても，

$$A'^\mu{}_{\rho\nu}(P) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}A^\lambda{}_{\sigma\tau}(P) = 0, \qquad \Gamma'^\mu{}_{\rho\nu}(P) = \Gamma'^\mu{}_{\nu\rho}(P). \tag{26}$$

ここで簡単に $A'^\mu{}_{\rho\nu}(x')|_{x'=P}$ などを $A'^\mu{}_{\rho\nu}(P)$ などに略した．この $x' = P$ のことは時空点 P に対応される x'-系上の座標を取ることを意味する．以上のことから，任意の座標系に対しても:

$$\Gamma'^\mu{}_{\rho\nu}(x') = \Gamma'^\mu{}_{\nu\rho}(x'). \tag{27}$$

故に，レヴィ＝チビタ接続にての条件 i) は物理的に正当化される (そうでなければ，物理的に局所 Lorentz 系が取れないことを意味する)．

[*3] これが取れるということは物理的に自明だ．例えば，適当な加速系を取ることで P の近傍を無重力地帯にすることができる，この主張は物理的にこのことに対応される．

Remark 1.2.b (テンソル量の共変微分) まず，この問題の結論より，我々は反変ベクトルの共変微分をその定義式から単に:

$$\nabla_\mu A^\nu(x) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x)}{\Delta x^\mu} = \partial_\mu A^\nu(x) + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}A^\lambda(x). \tag{28}$$

さて，すると<u>共変ベクトル場</u>$A_\nu(x)$ の共変微分はどのように決まるか? これに答えるために，上式にて得られた反変ベクトルの共変微分 (28) とスカラー場の共変微分に関する要請 (17)[*4]を考慮する．以下のように共変微分 $\nabla_\mu(A^\nu A_\nu)$ を考えると，その定義通りに:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu[A^\nu(x)A_\nu(x)] &:= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^\nu(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)A^{\parallel}_\nu(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^\nu(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu}\\
&\qquad + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)A_\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)A^{\parallel}_\nu(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A^\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu}A_\nu(x+\Delta x)\\
&\qquad + \lim_{\Delta x\to 0}A^{\parallel\nu}(x+\Delta x)\frac{A_\nu(x+\Delta x) - A^{\parallel}_\nu(x+\Delta x)}{\Delta x^\mu}\\
&\hookleftarrow \boxed{\lim_{\Delta x\to 0}A^{\parallel\nu}(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}A^\nu(x) + \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho}A^\lambda(x)\Delta x^\rho = A^\nu(x)}\\
&= \nabla_\mu[A^\nu(x)]A_\nu(x) + A^\nu(x)\nabla_\mu[A_\nu(x)].
\end{aligned} \tag{29}$$

故に，微分の定義を共変微分に切り替えても微分におけるライプニッツ則をそのまま保つ[*5]ことがわかる．一方，以上により導かれた**共変微分のライプニッツ則** (29) の上に**スカラー場の共変微分に関する要請** (17)(つまり，$\nabla_\mu(A^\nu A_\nu) = \partial_\mu(A^\nu A_\nu)$ のこと) を合わせば，このベクトル場からできているスカラー場 $A^\nu(x)A_\nu(x)$ の共変微分はしばしば:

$$\begin{aligned}
A_\nu(x)\nabla_\mu A^\nu(x) + A^\nu(x)\nabla_\mu A_\nu(x) &= \left(\cancel{\partial_\mu A^\nu(x)} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}A^\lambda(x)\right)A_\nu(x) + A^\nu(x)\nabla_\mu A_\nu(x)\\
&= \cancel{A_\nu(x)\partial_\mu A^\nu(x)} + A^\nu(x)\partial_\mu A_\nu(x),
\end{aligned} \tag{30}$$

故に，共変ベクトル場の共変微分:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu A_\nu(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}A_\lambda(x)\\
&\hookleftarrow \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}A^\lambda(x)A_\nu(x) = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}A^\nu(x)A_\lambda(x)
\end{aligned} \tag{31}$$

[*4] スカラー場は平行移動して不変なので，スカラー場に対しては共変微分が普通の微分として回復することを期待したい．

[*5] 接続 ∇_μ がこのようなライプニッツ則を満たすとき，この接続を**アファイン接続**と呼ぶ．アファイン接続の要請だけでは一意的に接続を決めることはできず，この上にされに物理的に自然な要請を幾つか加えて接続を一意的に決めたものがレヴィ＝チビタ接続である．

を導く．なお，テンソルの共変微分に関しても全く同様な議論ができる．例えば，テンソル $T^{\nu}{}_{\rho}$ を考えると，ある任意の共変ベクトル A_ν および反変ベクトル $B^\rho(x)$ を用いて作られる量 $T^{\mu}{}_{\nu}A_\mu B^\nu$ は自明にスカラーである．故に，その共変微分は以下のように展開できる:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu[T^{\nu}{}_{\rho}(x)A_\nu(x)B^\rho(x)] &= A_\nu(x)B^\rho(x)\nabla_\mu T^{\nu}{}_{\rho}(x) + T^{\nu}{}_{\rho}(x)B^\rho(x)\nabla_\mu A_\nu(x) \\
&\quad + T^{\nu}{}_{\rho}(x)A_\nu(x)\nabla_\mu B^\rho(x) \\
&= A_\nu(x)B^\rho(x)\nabla_\mu T^{\nu}{}_{\rho}(x) + T^{\nu}{}_{\rho}(x)B^\rho(x)\left(\cancel{\partial_\mu A_\nu(x)} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}A_\lambda(x)\right) \\
&\quad + T^{\nu}{}_{\rho}(x)A_\nu(x)\left(\cancel{\partial_\mu B^\rho(x)} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}B^\lambda(x)\right) \\
&= A_\nu(x)B^\rho(x)\partial_\mu T^{\nu}{}_{\rho}(x) + \cancel{T^{\nu}{}_{\rho}(x)B^\rho(x)\partial_\mu A_\nu(x)} \\
&\quad + \cancel{T^{\nu}{}_{\rho}(x)A_\nu(x)\partial_\mu B^\rho(x)},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

最後に，テンソル $T^{\nu}{}_{\rho}$ の正しい共変微分として，

$$
\nabla_\mu T^{\nu}{}_{\rho}(x) = \partial_\mu T^{\nu}{}_{\rho}(x) + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu}T^{\lambda}{}_{\rho}(x) - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}T^{\nu}{}_{\lambda}(x). \tag{33}
$$

このことを一般化することができ，一般のテンソル $T^{\nu_1\cdots\nu_j}{}_{\rho_1\cdots\rho_k}$ の共変微分は以下のように書き下すことできる:

Theorem 1.2 (テンソルの共変微分)

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_j}{}_{\rho_1\cdots\rho_k} = \partial_\mu T^{\nu_1\cdots\nu_j}{}_{\rho_1\cdots\rho_k} &+ \sum_{\alpha=1}^{j}\Gamma^{\nu_\alpha}{}_{\lambda\mu}T^{\nu_1\cdots\nu_{\alpha-1}\lambda\nu_{\alpha+1}\cdots\nu_j}{}_{\rho_1\cdots\rho_k}(x) \\
&- \sum_{\alpha=1}^{k}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho_\alpha\mu}T^{\nu_1\cdots\nu_j}{}_{\rho_1\cdots\rho_{\alpha-1}\lambda\rho_{\alpha+1}\cdots\rho_k}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

計量テンソルの共変微分 (22) の結果はこのような計算に基づいたものである．

Problem 1.3 (第三問・Levi-Civita Connection II)

前問の結果として得られた計量接続条件 $\nabla_\lambda g_{\mu\nu}(x) = 0$ から，以下のような評価を実行する:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\lambda g_{\mu\nu}(x) + \nabla_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \nabla_\mu g_{\nu\lambda}(x) \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda} g_{\tau\nu}(x) - \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda} g_{\mu\tau}(x) && \leftarrow \nabla_\lambda g_{\mu\nu}(x) \\ &\quad + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} g_{\tau\mu}(x) - \Gamma^\tau{}_{\mu\nu} g_{\lambda\tau}(x) && \leftarrow \nabla_\nu g_{\lambda\mu}(x) \\ &\quad - \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x) + \Gamma^\tau{}_{\nu\mu} g_{\tau\lambda}(x) + \Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} g_{\nu\tau}(x), && \leftarrow \nabla_\mu g_{\nu\lambda}(x) \end{aligned} \tag{35}$$

すると，一般に接続係数 $\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}$ らが添字の入れ替え $\mu \leftrightarrow \nu$ に対して対称でないと見做せば[*6]，式 (35) の結果はしばしば

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x) = -2g_{\tau\nu}(x)\left(\frac{\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda}}{2}\right) + 2g_{\mu\tau}(x)\left(\frac{\Gamma^\tau{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}}{2}\right) \\ + 2g_{\tau\lambda}(x)\left(\frac{\Gamma^\tau{}_{\mu\nu} - \Gamma^\tau{}_{\mu\nu}}{2}\right), \end{aligned} \tag{36}$$

あるいは，問題文上で定義した量 $A^\tau{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\Gamma^\tau{}_{[\mu,\nu]}$，$S^\tau{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\Gamma^\tau{}_{\{\mu,\nu\}}$ を用いて

$$S^\rho{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(x) \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x)\right) + A^\tau{}_{\lambda\mu} g^{\mu\rho}(x) g_{\tau\nu}(x) - A^\tau{}_{\mu\nu} g^{\mu\rho}(x) g_{\tau\lambda}(x). \tag{37}$$

以上の計算では計量テンソルが完全対称テンソルであることを用いた．また，**Problem** 1.1 の結果からも自明に分かるものだが，$A^\tau{}_{\mu\nu}$ はテンソルになるが $S^\tau{}_{\mu\nu}$ はテンソルでないことにも気をつけないといけない．実際，$S^\tau{}_{\mu\nu}$ の変換式は

$$S'^\tau{}_{\mu\nu}(x') = -\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} S^\lambda{}_{\rho\sigma}(x) \tag{38}$$

として与えられ，テンソルの変換則を満たさないことが分かる．

Remark 1.3.a この問題により導かる結果 (37) に，前問にての議論 **Remark 1.2.a** による結果 ($A^\tau{}_{\lambda\mu} = A^\tau{}_{\mu\nu} = 0$) を共に合わせると，式 (37) 上の第二項および第三項が落とせて，それゆえ:

$$S^\rho{}_{\nu\lambda}(x) \underset{(27)}{=} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(x) \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) + \partial_\nu g_{\lambda\mu}(x) - \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x)\right). \tag{39}$$

よって，先述した通りに，実際**レヴィ＝チビタ接続の要請が接続を一意的に決定**することが確かめれた．

Problem 1.4 (第四問・Curvature)

前問にて導いた共変微分 ∇_μ の表式を用いてリーマンの曲率テンソル $R^\lambda{}_{\tau\mu\nu}$ を評価する．そのため，まず $\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda$ を

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda &= \nabla_\mu \underbrace{\left[\partial_\nu A^\lambda(x) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} A^\tau(x)\right]}_{\text{テンソル } C^\lambda{}_\nu \text{ と見做す}} \\
&= \partial_\mu \left(\partial_\nu A^\lambda(x) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} A^\tau(x)\right) + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \left(\partial_\nu A^\rho(x) + \Gamma^\rho{}_{\tau\nu} A^\tau(x)\right) \\
&\qquad - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \left(\partial_\rho A^\lambda(x) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho} A^\tau(x)\right) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu A^\lambda(x) + (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}) A^\tau(x) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} \partial_\mu A^\tau(x) \\
&\qquad + \underbrace{\Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \partial_\nu A^\rho(x)}_{\rho \to \tau} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\tau\nu} A^\tau(x) - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \partial_\rho A^\lambda(x) - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho} A^\tau(x),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

同様な計算を通すことで

$$
\begin{aligned}
\nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda &= \partial_\nu \partial_\mu A^\lambda(x) + (\partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu}) A^\tau(x) + \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \partial_\nu A^\tau(x) \\
&\qquad + \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} \partial_\mu A^\tau(x) + \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\tau\mu} A^\tau(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \partial_\rho A^\lambda(x) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho} A^\tau(x)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

を得る．故に，**リーマン曲率** $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda(x)$ は以下のように評価できる．式 (40) から (41) を引くことで，

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda(x) &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu A^\lambda(x)} + (\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu}) A^\tau(x) + \cancel{\Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} \partial_\mu A^\tau(x)} \\
&\qquad + \cancel{\Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \partial_\nu A^\tau(x)} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\tau\nu} A^\tau(x) - \cancel{\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \partial_\rho A^\lambda(x)} - \xcancel{\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho} A^\tau(x)} \\
&\qquad - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu A^\lambda(x)} - (\partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu}) A^\tau(x) - \cancel{\Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} \partial_\nu A^\tau(x)} \\
&\qquad - \cancel{\Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} \partial_\mu A^\tau(x)} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\tau\mu} A^\tau(x) + \cancel{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \partial_\rho A^\lambda(x)} + \xcancel{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\tau\rho} A^\tau(x)} \\
&= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\tau\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\tau\mu}\right) A^\tau(x)
\end{aligned}
\tag{42}
$$

を導く．最後に，定義通りに $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda(x) = R^\lambda{}_{\tau\mu\nu} A^\tau(x)$ と書くと，求まる**リーマンの曲率テンソル**を以下のように得る:

$$
R^\lambda{}_{\tau\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\tau\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\tau\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\tau\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \Gamma^\rho{}_{\tau\mu}. \tag{43}
$$

Problem 1.5 (第五問・Scalar Curvature)

まずは，スカラー曲率を計算するためには**リーマンの曲率テンソル** $R^{\lambda}{}_{\tau\mu\nu}$ を最初に計算しなければいけない．まず，前問から得られたリーマンの曲率テンソルから，恒等的に:

$$R^{\lambda}{}_{\tau\mu\nu} = -R^{\lambda}{}_{\tau\nu\mu}; \qquad R^{\lambda}{}_{\tau\alpha\alpha} = 0. \tag{44}$$

次に，以下のような恒等式を与える:

Lemma 1.1 (リーマンの曲率テンソルの縮約)

$$R^{\lambda}{}_{\lambda\mu\nu} = 0. \tag{45}$$

Proof / Lem.1.1 上で主張した恒等式 (45) のことを示すために，まずはクリストフェル記号の縮約 $\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\nu}$ などを評価しよう:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\nu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(x)\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda}(x) + \partial_\lambda g_{\nu\mu}(x) - \underbrace{\partial_\mu g_{\lambda\nu}(x)}_{\mu\leftrightarrow\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(x)\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda}(x) + \cancel{\partial_\lambda g_{\nu\mu}(x)} - \cancel{\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(x)\partial_\nu g_{\mu\lambda}(x) = \partial_\nu\left(\log\sqrt{|g|}\right).
\end{aligned} \tag{46}$$

ここで最後の等号では，計量テンソルの余因数展開 $g = \sum_\nu g_{\mu\nu}(x)\tilde{g}^{\mu\nu}$*7(第 μ 行の余因数展開) を用いて得られる

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\rho}(x)} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}(x)}{\partial g_{\mu\rho}(x)}\left(\underbrace{gg^{\mu\sigma}(x)}_{=\tilde{g}^{\mu\sigma}}\right) = gg^{\mu\rho}, \qquad \underline{\partial_\nu g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\rho}(x)}g_{\mu\rho,\nu}(x) = gg^{\mu\rho}(x)\partial_\nu g_{\mu\rho(x)}} \tag{47}$$

を用いた．また，クリストフェル記号の積から成る量 $C_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}$ は各ラベルの入れ替え $\lambda \leftrightarrow \rho$ により，添字の入れ替え $\mu \leftrightarrow \nu$ 対称になる (テンソルではない) ことが簡単に分かる:

$$C_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} = \underbrace{\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}}_{=C_{\nu\mu}}. \tag{48}$$

最後に，以上により得られた結果 (46) および (48) からの自明な結果として以下の恒等式を得る:

$$\begin{aligned}
R^{\lambda}{}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu} + \cancel{\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}} - \cancel{\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}} \\
&= \cancel{\partial_\mu\partial_\nu\left(\log\sqrt{|g|}\right)} - \cancel{\partial_\nu\partial_\mu\left(\log\sqrt{|g|}\right)} = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

*7 このことから，余因数行列 $\tilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}(x)$ がわかる．