単極子場の量子化とその対称性

The Quantization of Monopole fields and Symmetricity

KIM Dohyun, ONOGI Tetsuya

Onogi Group, Hep-th., Dept. of Phys., Osaka Univ.

August 29, 2023

OSAKA UNIVERSITY

目次

The Correction of Maxwell Fields

体積電荷密度 ϱ_e と体積磁荷密度 ϱ_g が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \varrho_e\ , \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \varrho_g\ , \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\left(\mathbf{J}_g(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)\ , \\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{J}_e(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Action integral of Monopole Fields

単極子場の作用積分を書くため，4 元電荷ポテンシャル A^μ および 4 元磁荷ポテンシャル B^μ：

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} , \qquad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする．

Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (2) の上に，**相対論的共変性**と**ゲージ不変性**を加えると，系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$
\begin{aligned}
S = &-\int \frac{1}{4(q_e^2+q_g^2)}[D^\mu, D^\nu]^2 \, d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \, d^4x \\
&+ \int (D_\mu \Phi)^*(D^\mu \Phi) - m^2(\Phi^*\Phi) \, d^4x
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (3) のように書いた時の **4 元ポテンシャル** A^μ, B^μ および**スピノル** $\psi(x^\mu)$ のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto \quad A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) \ , \\ B_\mu & \mapsto \quad B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) \ , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto \quad e^{-iq_e \Lambda(x^\mu) - iq_g \Gamma(x^\mu)} \psi(x^\mu) \end{cases} \tag{4}$$

を想定すると，系の共変微分 D_μ を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_e A_\mu + iq_g B_\mu . \tag{5}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル $G_{\mu\nu}$ を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}(q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}). \tag{6}$$

ここでテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$, $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} B_{\nu]}$ とする.

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

ここから**ハミルトンの最小作用の原理**を用いるため，作用積分 (3) の各項の変分を以下のように計算する：

$$
\begin{cases}
\delta_A(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = -\dfrac{4}{q_e^2+q_g^2}(q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu})\delta A_\nu + \partial_\mu \mathcal{O}^\mu \ , \\[2ex]
\delta_A\{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi\} = \bar{\psi}(i\delta\not{D})\psi = -(q_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\delta A_\mu \ , \\[2ex]
\delta_A\{(D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi)\} = \delta A_\mu[-iq_e\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\}].
\end{cases}
\tag{7}
$$

4 元ポテンシャル B^μ に関する変分も同様にできて，ここからマクスウェル方程式が導かれる．

The Maxwell equations of Dyons

それぞれの 4 元カレント J^μ, K^μ を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi\} + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \ , \tag{8}$$

$$K^\mu \equiv iq_g\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi\} + g\bar{\psi}\gamma^\mu \psi . \tag{9}$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) J^\nu \ , \tag{10}$$

$$q_g^2 \partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) K^\nu . \tag{11}$$

Construction of Dyon-electron system-SU(2) Gauge theory

電子 e^- とダイオン ν_{eg} が**相互作用するもの**として，系のスピノルをスピノル ψ_e と $\psi_{\nu_{eg}}$ の二重項として以下のように書く：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで 3 元パラメーター $\boldsymbol{\alpha}$ を用意してゲージ群 SU(2) のスピノル変換を：

$$\Psi \quad \mapsto \quad \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \simeq \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \tag{13}$$

として設定する．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (13) により，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を用意すると系の共変微分 D_μ は：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{14}$$

として定義できる．パウリ行列が非可換で $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ となることに注意して，以下の Dirac 方程式：

$$\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) - m\right]\begin{pmatrix}\psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}}\end{pmatrix} = 0 \tag{15}$$

が不変になるようにゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の変換則を決める．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (15) が不変になるための変換 $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$ は：

$$i\gamma^\mu \left[(\partial_\mu U) - \frac{ig}{2} U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2} (\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U \right] \Psi = 0 \tag{16}$$

の関係を満たすべきである．SU(2) 群の生成子 $U = \mathbf{1} - \frac{ig}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ とする．

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \mapsto \quad \mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^{-1} + \frac{2i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \tag{17}$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (17) にゲージ群の生成子 U を代入して具体的に計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} &= \left(\mathbf{1}-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &\quad+\frac{2i}{g}\left(-\frac{i}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \qquad (18)\\ &= \mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}-\frac{i}{2}\alpha^i W^j_\mu[\sigma^i,\sigma^j]+\frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

導入したゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は式 (18) の変換式を満たす.

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Dirac fields

Dyon-電子相互作用を示す Dirac 場の Lagrangian 密度は：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= (\bar{\psi}_e,\ \bar{\psi}_{\nu_{eg}}) \left(i\not{\partial} - \frac{g}{2}\not{\mathbf{W}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - m\right) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi}_e \left(i\not{\partial} - \frac{g}{2}\not{W}^3 - m\right) \psi_e - \frac{g}{2}\bar{\psi}_e(\not{W}^1 - i\not{W}^2)\psi_{\nu_{eg}} \\ &\quad + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\not{\partial} + \frac{g}{2}\not{W}^3 - m\right) \psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2}\bar{\psi}_{\nu_{eg}}(\not{W}^1 + i\not{W}^2)\psi_e .\end{aligned} \tag{19}$$

ここでゲージ場 $\mathbf{W}_\mu = (W^1_\mu,\ W^2_\mu,\ W^3_\mu)$ としておいた.

Construction of Dirac equations

それぞれのスピノルの **Dirac 共役**の変分 $\delta\bar{\psi}_e$, $\delta\bar{\psi}_{\nu_{eg}}$ に関する LAP は Dirac 方程式を示す：

$$\begin{aligned} e^-: &\quad \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{g}{2}W\!\!\!\!/^3 - m\right)\psi_e - \frac{g}{2}(W\!\!\!\!/^1 - iW\!\!\!\!/^2)\psi_{\nu_{eg}} = 0, \\ \nu_{eg}: &\quad \left(i\partial\!\!\!/ + \frac{g}{2}W\!\!\!\!/^3 - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2}(W\!\!\!\!/^1 + iW\!\!\!\!/^2)\psi_e = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

この模型では電子とダイオンの**異なる粒子間の相互作用**を想定しているため，片方が無い極限では Dirac 方程式 (20) は **U(1) 電磁場**に収束する：

$$\left(i\partial\!\!\!/ + q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_e = 0\ , \qquad \left(i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - q_g B\!\!\!/ - m\right)\psi_{\nu_{eg}} = 0 \tag{21}$$

Determination of Gauge fields

以下の要請を加えると，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を決定できる：

Dirac 場の要請

電荷からなるゲージ場 A^μ は**局所的相互作用**を媒介する．磁荷からなるゲージ場 B^μ は**大域的相互作用**を媒介する．

電子とダイオンを入れ替える変換 $(e^- \leftrightarrow \nu_{eg})$ に対して不変である．

以上の条件から，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は以下のみが許される：

$$W^1_\mu = q_e A_\mu + q_g B_\mu \ , \quad W^2_\mu = 0 \ , \quad W^3_\mu = q_e A_\mu + q_g B_\mu \tag{22}$$

Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (22) より，Dirac 場の Lagrangian は：

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}_e \left(i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - q_g B\!\!\!/ - m\right) \psi_e - \bar{\psi}_e (q_e A\!\!\!/ + q_g B\!\!\!/) \psi_{\nu_{eg}}$$

$$+ \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\partial\!\!\!/ + q_e A\!\!\!/ + q_g B\!\!\!/ - m\right) \psi_{\nu_{eg}} - \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (q_e A\!\!\!/ + q_g B\!\!\!/) \psi_e .$$

ダイオンの部分極限 $q_g \to 0$, $B_\mu \to 0$ の下では **U(1) ゲージ場**に収束する：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e (i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - m)\psi_e + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - m)\psi_{\nu_{eg}} . \qquad (23)$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Curvature Tensors

U(1) ゲージ理論と同様に，SU(2) ゲージ場の場の強さ $G^k_{\mu\nu}$ は**曲率テンソル**の拡張として：

$$G^k_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_{[\mu} W^k_{\nu]}\sigma^k + \frac{ig}{2} W^i_\mu W^j_\nu [\sigma^i, \sigma^j] \\ = \left(\partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu\right)\sigma^k. \tag{24}$$

ここでゲージ場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{\text{field}}$ を導出するため，式 (24) を用いて以下を計算する：

$$\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu\right)^2. \tag{25}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (25) の計算より，場の強さ $G^k_{\mu\nu}$ は以下のものとして切り替えても良い.

$$G^k_{\mu\nu} \quad \mapsto \quad \partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu \tag{26}$$

場の強さ $G^k_{\mu\nu}(k = 1, 2, 3)$ を以下のように計算できる：

ゲージ場の曲率 (Curvature tensors of Gauge field)

$$G^1_{\mu\nu} = q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}\ , \qquad G^2_{\mu\nu} = 0\ , \qquad G^3_{\mu\nu} = q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}. \tag{27}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (27) の結果を踏まえると，系のゲージ場のみの Lagrangian 密度は以下になるのが一番正しい：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{SU}(2)}_{\mathrm{field}} = -\frac{1}{8(q_e^2+q_g^2)}\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = \mathcal{L}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{field}}. \tag{28}$$

得られたゲージ場の Lagrangian 密度は **U(1) ゲージ場と同じくなる**正当な結果が得られた．同時に Dirac 場 (17) の $\not{A}$ に関する変分からなる 3 つの **4 元ベクトル**を定義する．

$$J^\mu_e = q_e\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e\ , \quad J^\mu_g = q_e\bar{\psi}_{\nu_{eg}}\gamma^\mu\psi_{\nu_{eg}}\ , \quad J^\mu_{eg} = q_e(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\nu_{eg}} + \bar{\psi}_{\nu_{eg}}\gamma^\mu\psi_e).$$

Maxwell equations of SU(2) Gauge groups

同様に $\not{B}$ に関する Dirac 場の変分についても $K_e^\mu, K_g^\mu, K_{eg}^\mu$ を定義できる．Hamilton 原理は次の Maxwell 方程式を示す：

SU(2) ゲージ群の Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} &= (q_e^2 + q_g^2)(J_e^\nu - J_g^\nu + J_{eg}^\nu), \\ q_g^2\partial_\mu E^{\mu\nu} + q_g q_e \partial_\mu F^{\mu\nu} &= (q_e^2 + q_g^2)(K_e^\nu - K_g^\nu + K_{eg}^\nu). \end{aligned} \tag{29}$$

これが磁荷のある系の**一般化された Maxwell 方程式**である．

Generalized Continuity equation

反対称テンソル $F^{\mu\nu}, E^{\mu\nu}$ は以下の恒等式を満たしている：

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu E^{\mu\nu} = 0. \tag{30}$$

この恒等式を一般化された Maxwell 方程式に代入することにより，以下の**連続方程式**が導かれる：

一般化された連続方程式

$$\partial_\nu (J_e^\nu - J_g^\nu + J_{eg}^\nu) = \partial_\nu (K_e^\nu - K_g^\nu + K_{eg}^\nu) = 0. \tag{31}$$

これは，**電荷**からなる $J_e^\nu = q_e \bar{\psi}_e \gamma^\nu \psi_e$ が保存されない可能性を示している．