General Relativity

KIM, Dohyun*

2025 年 5 月 14 日

1　レポート課題 / 2 週目

以下で付与されたレポート問題を解説する:

> **Problem 1.1 (第一問・Lorentz Scalar)**
>
> スカラー場 $\phi(x)$ は，その定義より自明に $\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x)$ である ($x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$)．このことに注意すると，スカラー場の 4 元微分 $\partial_{\mu}\phi(x)$ は以下の様に変換される:
>
> $$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(x) \;\to\; \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\phi'(x') = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\phi(x) = (\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\phi(x), \tag{1}$$
>
> それゆえ，スカラー場の 4 元微分は**共変的に変換**される．■

Remark 1.1.a　先ず，線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$(時空が平坦な場合) のローレンツ不変性から，以下のローレンツ変換に関わる関係式が得られる:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{\mu}{}^{\sigma} d\tilde{x}^{\rho} d\tilde{x}_{\sigma} = d\tilde{x}^{\rho} d\tilde{x}_{\rho}; \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho}. \tag{2}$$

すると，逆元の定義を思い出して以下のような演算を実行することができる．定義よりローレンツ変換とその逆の掛け算は $\Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}$ であり，式 (2) の両辺に $(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\lambda}$ を掛けてラベル ρ の和を取ることにより，

$$\Lambda_{\lambda}{}^{\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda} \tag{3}$$

が導かれる．それゆえ，式 (1.2) の結論は以下の様にも書き換えられる:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(x) \;\to\; \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\phi'(x') = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\phi(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\phi(x). \tag{4}$$

* B4, Hep-th., Dept. of Phys., University of Osaka(Onogi group).

Remark 1.1.b この問題において我々の変換 $x \to x'(x)$ は必ずしもローレンツ変換に限らない．より一般的な変換として設定された変換式を想定しており，故に式 (1.2) もローレンツ変換に限らず座標の一般的な変換の下での結果である．その時は，Λ はその一般の変換を媒介する変換式となる．

Problem 1.2 (第二問・Contravariance of Metric tensor I)

先ず，Einstein の縮約記法を作用してベクトル空間 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^4$ 上のベクトル $\omega \in \mathbb{V}$ を任意でとる．空間 $\mathbb{V}$ の正規規定を $\langle \mathbf{e}_\mu \rangle$ とすると[*1],

$$\omega = x^\mu \mathbf{e}_\mu(x). \tag{5}$$

また，同様に新しい基底の組 $\langle \mathbf{e}^\mu \rangle$ を用意し，条件 $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \delta^\nu_\mu$ を満たすように取る．このような新しい基底 $\langle \mathbf{e}^\mu \rangle$ を元の基底 $\langle \mathbf{e}_\mu \rangle$ の**双対基底 (Dual basis)** とよぶ．すると，今取っているベクトル ω は以下のようにも書き換えられる:

$$\omega = x_\mu \mathbf{e}^\mu(x). \tag{6}$$

このときの成分 ω_μ は展開 (5) に対して，尚更に式 (6) が成立するように設定された成分である．ここで $\mathbf{e}_\mu$ として命名した基底の組を共変ベクトルどうしの基底の組とすれば,

$$\mathbf{e}_\mu(x) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}'_\nu(x'). \tag{7}$$

ここで注釈[1.2]に注意しながら以下のように計量テンソル:

Definition 1.1 (Metric tensor)

$$g_{\mu\nu}(x) := \mathbf{e}_\mu(x) \cdot \mathbf{e}_\nu(x), \qquad g_{\mu\nu}(x) g^{\mu\rho}(x) = \delta^\rho_\nu \tag{8}$$

を導入する．すると，式 (7) として定義した通りに，計量テンソルは自明に以下のように変換される．これは定義した $g_{\mu\nu}(x)$ が**共変的**であることを意味する:

$$g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu(x) \cdot \mathbf{e}_\nu(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \mathbf{e}'_\rho(x') \cdot \mathbf{e}'_\sigma(x') = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'). \tag{9}$$

ここで，この問題で**我々が示すべきもの**が何かについて考察してみよう．今までの論議で定義として我々が指定したのは基底 $\mathbf{e}_\mu$ が**共変的に変換される基底**であることと，**基底の双対性**と呼ばれる $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \delta^\nu_\mu$ である．最終的には $g^{\mu\nu}$ が反変テンソルであることを示せばいいので，テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の共変性から出発して $g^{\mu\nu}(x)$ が $g_{\mu\nu}(x)$ の逆行列であることを用いてその共変性を導くことがこの証明の核である．

Problem 1.3 (第二問・Contravariance of Metric tensor I)

ここから本格的に証明に着手する．定義した計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変性と逆行列関係式 ((8) の第二式) から出発すると，

$$g'_{\mu\nu}(x')g'^{\mu\rho}(x') = g_{\mu\nu}(x)g^{\mu\rho}(x) = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}g'_{\sigma\lambda}(x')g^{\mu\rho}(x) = \delta^{\rho}_{\nu}. \tag{10}$$

ここで簡単のため，座標変換を

$$\Lambda_{\nu}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (\Lambda^{-1})_{\nu}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \tag{11}$$

とおくと式 (10) は更に以下のような形で書き換えることができる:

$$\Lambda_{\mu}{}^{\sigma}\Lambda_{\nu}{}^{\lambda}g'_{\sigma\lambda}(x')g^{\mu\rho}(x) = \delta^{\rho}_{\nu}. \tag{12}$$

式 (10) の等号で繋がれている部分の第 3 項と第 4 項のみを取っていることに十分注意せよ．すると，上式の両辺に $(\Lambda^{-1})_{\alpha}{}^{\nu}$ をかけてラベル ν の総和を取ると

$$\Lambda_{\mu}{}^{\sigma}g'_{\sigma\alpha}(x')g^{\mu\rho}(x) = (\Lambda^{-1})_{\alpha}{}^{\rho}. \tag{13}$$

同様に，更に $g'^{\beta\alpha}$ をかけてラベル α の総和を取れば

$$\Lambda_{\mu}{}^{\beta}g^{\mu\rho}(x) = (\Lambda^{-1})_{\alpha}{}^{\rho}g'^{\beta\alpha}(x'), \tag{14}$$

最終的に，上式の両辺に $(\Lambda^{-1})_{\beta}{}^{\gamma}$ をかけてラベル β の総和をとることで，式 (12) が以下のような形式で収まる:

$$g^{\gamma\rho}(x) = (\Lambda^{-1})_{\beta}{}^{\gamma}(\Lambda^{-1})_{\alpha}{}^{\rho}g'^{\beta\alpha}(x') = \Lambda^{\gamma}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}g'^{\beta\alpha}(x') = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}}g'^{\beta\alpha}(x'). \tag{15}$$

それゆえ，共変的な計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ は**反変的に変換**される．■

Remark 1.3.a (計量に関する注意) 多くの学生がよく世界間隔の不変性から得られる次の関係式 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu} = g'_{\mu\nu}(x')dx'^{\mu}dx'^{\nu}$ の両辺の座標を微分することで，

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\rho\sigma}(x')\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \tag{16}$$

を得てよく使ったりするが，これは厳密に言えば正しくない．これは結果そのものとしては正しいが，その過程の論理に正しくない所々が稍存在する．まず，時空が非平坦の場合に，両辺を微分するときに残る $\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}g_{\mu\nu}(x) \neq 0$ の処理について明快な説明してくれない問題がある．もし，平坦な時空を仮定することでこのような問題を避けれるような方針を採用すれば，計量が空間の座標に依存しないので ($\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$)，ただのローレンツ変換が受ける制限 (ローレンツ代数と呼ばれるもの) を与

[*1] 一般に直交基底とは限らない．つまり，$\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$.

えるだけで本質的に計量テンソルの変換性については何も言ってくれない (平坦な時空に対しては，計量が慣性系によらない):

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}. \tag{17}$$

このような問題もあり，式 (16) を正しく導出するためには計量に関してのより数学的に厳密な論議が必要である．厳密には世界間隔の表現 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}$ は以下の厳密定義を略した版であることに注意[*2]しとこう:

> **Definition 1.2 (世界間隔の厳密な定義 I)**
>
> まず，最も一般的に接ベクトル (一般に $T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ として表す) はその基底の組 $\langle \partial/\partial x^{\mu}\rangle$ を用いて $d\mathbf{s} = dx_s^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ で書くことができる．すると，この 4 元ベクトルのノルム (norm) は厳密に以下のように定義される:
>
> $$\bigotimes : \ T_p\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times T_p\mathcal{M}(\mathbb{R}) \ \mapsto \ \mathbb{R}, \qquad ds^2 := \left(dx_s^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\otimes\left(dx_s^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right). \tag{18}$$
>
> このとき取っている基底の組を特に接空間の基底とよぶ．ここで更に**計量 (Metric)** を以下のように定義すれば，
>
> $$g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)dx_s^{\mu}dx_s^{\nu}. \tag{19}$$

以上が計量テンソルおよび世界間隔に関する厳密に正しい定義である．このような厳密な定義を受け入れれば，基底の変換性 (共変か反変か) が重要に関わっていることをより実感するはずだ (後述するが，その基底が共変的か反変的かによって計量の変換性も変わるからだ)．例えば，上の定義での基底 (接空間 $T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ の基底) は確かに共変的に変換していることに気づいておこう:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ \to \ \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}. \tag{20}$$

この観点から見ると，計量 $g_{\mu\nu}$ が共変的に変換されるのはその定義 (19) から物凄く自明である．それは式 (20) を式 (19) に加えることで直ちに以下の関係式

$$g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right) := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}}\otimes\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\right) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}g_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\rho}}, \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\right). \tag{21}$$

が得られるからである (これは式 (16) 他ならない)．ただし，このような計量の変換性 (21) は完全に今取っている基底 $\langle \partial/\partial x^{\mu}\rangle$ に依るもの (この基底が共変的であるため) であることに注意しよう．

[*2] 実は数学屋さんの観点から見ると，これはテンソル場としての**計量テンソル**の定義と少し外れている．しかし，ここでは少し緩い定義としてこれも計量テンソルと呼ぶことにしよう (雰囲気だけ感じてみよう)．

以下，簡単のため計量の表記を略する (この略した表現が解説本文 **1.3** で使っている表記である):

$$g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu},\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \to g_{\mu\nu}(x), \qquad g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu},\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right) \to g'_{\mu\nu}(x'). \tag{22}$$

ここで dx^μ_s は，ベクトル $d\mathbf{s}$ の基底 $\langle\frac{\partial}{\partial x^\mu}\rangle$ に**相応する成分**であることを意味する (例えば，変分ではなくある特定のベクトルに対しては $\mathbf{s} = x^\mu_s\frac{\partial}{\partial x^\mu}$)．しかし，軽く先述した通り，必ずしも今のように共変的な基底 $\langle\partial/\partial x^\mu\rangle$ に拘る必要はなくて，以下のように導入された $\langle\partial/\partial x^\mu\rangle$ の**双対基底 (Dual basis)** を基底として取ってもいいだろう:

Definition 1.3 (余接空間と双対基底)

先ず，括弧演算 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を以下のような双線形写像演算として導入する:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: \quad T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})\times T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R}) \quad\mapsto\quad \mathbb{R}, \tag{23}$$

ここで空間 $T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R})$ は**余接空間 (Cotangent space)** と呼ばれるもので，以下の関係式を満たすような基底 $\mathrm{d}x^\mu \in T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R})$ を取る空間として定義される:

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^\mu},\mathrm{d}x^\nu\right\rangle = \delta^\nu_\mu. \tag{24}$$

さては，この双対基底 (余接ベクトル) の調べてみよう．双対基底の定義式 (24) に座標変換 $(x\to x')$ を加えることで，$\mathrm{d}x^\nu = \beta^\nu{}_\sigma \mathrm{d}x'^\sigma$ とおくと $\mathrm{d}x^\nu$ の変換が以下の関係式を満たすことがわかる:

$$\delta^\nu_\mu = \left\langle\frac{\partial}{\partial x^\mu},\mathrm{d}x^\nu\right\rangle = \left\langle\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\rho},\beta^\nu{}_\sigma\mathrm{d}x'^\sigma\right\rangle \underset{\text{線形性}}{=} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\beta^\nu{}_\sigma\left\langle\frac{\partial}{\partial x'^\rho},\mathrm{d}x'^\sigma\right\rangle = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\beta^\nu{}_\sigma\delta^\sigma_\rho, \tag{25}$$

あるいは，上式の結果から直ちに，

$$\beta^\nu{}_\sigma = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \qquad\to\qquad \mathrm{d}x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\mathrm{d}x'^\sigma. \tag{26}$$

故にこの双対基底は**反変的に変換**されることがわかる．実は大分先回りであったが，このことより得られる双対基底の反変性を表すためにその添字を上付きのものにした．ならば，この余接ベクトルを用いて世界間隔を再定義することもできる:

Definition 1.4 (世界間隔の厳密な定義 II)

まず，最も一般的に余接ベクトル (一般に $T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R})$ として表す) はその基底の組 $\langle\partial/\partial x^\mu\rangle$ を用いて $d\mathbf{s} = dx_{s\mu}\mathrm{d}x^\mu \in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ で書くことができる．すると，この 4 元ベクトルのノルム (norm) は厳密に以下のように定義される:

$$\tilde{\bigotimes}: \quad T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R})\times T_p^*\mathcal{M}(\mathbb{R}) \quad\mapsto\quad \mathbb{R}, \qquad ds^2 := (dx_{s\mu}\mathrm{d}x^\mu)\,\tilde{\otimes}\,(dx_{s\nu}\mathrm{d}x^\nu)\,. \tag{27}$$

> このとき取っている基底の組を特に接空間の基底とよぶ．ここで更に**計量 (Metric)** を以下のように定義すれば，
>
> $$g^{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu}\right):=\mathrm{d}x^{\mu}\tilde{\otimes}\mathrm{d}x^{\nu},\qquad ds^2=g^{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu}\right)dx_{s\mu}dx_{s\nu}. \tag{28}$$
>
> ここで我々の表記法として余接空間の基底を $\mathrm{d}x^{\mu}$ などで書いたせいで，その成分 $dx_{s\mu}$ と混乱する恐れがある．余接ベクトルの変分でなく，ある特定の余接ベクトルの展開 $\mathbf{s}=x_{s\mu}\mathrm{d}x^{\mu}$ を考えればより明らかに区別がつくかもしれない（？）

接空間における基底 $\langle\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\rangle$ における計量の論議 **1.2** と同様な論議を通せば，上の双対基底 $\langle \mathrm{d}x^{\mu}\rangle$ において予め定義した計量 $g^{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu})$ は式 (26) の反変性により，計量テンソル $g^{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu})$[*3] も**反変的に変換**[*4] されることがわかる:

$$g^{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu}\right)=\mathrm{d}x^{\mu}\tilde{\otimes}\mathrm{d}x^{\nu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}\left(\mathrm{d}x'^{\rho}\tilde{\otimes}\mathrm{d}x'^{\sigma}\right)=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}}g'^{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x'^{\rho},\mathrm{d}x'^{\sigma}\right). \tag{29}$$

以上の論議のように，計量の厳密な定義に注目すれば直接に $g^{\mu\nu}$ の反変性を示すこともできる (レポート問題としては，$g^{\mu\nu}$ を**逆行列**として導入することで間接的に同様な結果を導いた)．もちろん，$g_{\mu\nu}$ の逆行列が $g^{\mu\nu}$ となることをこのアプローチからも導くこともできる．双線形写像演算と計量の演算を同一視して:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\otimes\left(\omega^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)}_{=g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)\omega^{\nu}}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\omega_{\nu}\mathrm{d}x^{\nu}\right\rangle=\omega_{\nu}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\mathrm{d}x^{\nu}\right\rangle=\omega_{\mu}, \tag{30}$$

として $\omega_{\mu}=g_{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},\frac{\partial}{\partial x^{\nu}})\omega^{\nu}$ を得る．これは任意の $\omega\in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ および $V_{\omega}\in T_p^{*}\mathcal{M}(\mathbb{R})$ に対して，$g(\cdot,\omega):T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})\mapsto\mathbb{R}$ と $\langle\cdot,V_{\omega}\rangle:T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})\mapsto\mathbb{R}$ として ω と V_{ω} を同一視できるからである．故に同様な論議を通せば，$\omega^{\mu}=g^{\mu\nu}(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu})\omega_{\nu}$ となり，

$$\omega_{\mu}=g_{\mu\nu}\omega^{\nu}=g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}\omega_{\sigma};\qquad g_{\nu\mu}g^{\nu\sigma}=\delta_{\mu}^{\sigma} \tag{31}$$

を導く．

Remark 1.3.b (計量テンソルの具体例)

さては，ここでは実際いくつかの計量を決定してみよう．まず，直交座標における接空間上の基底 $\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\rangle\in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ を取ると，定義より自明に

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j}}=\delta_{ij},\qquad (i,j=x,y,z) \tag{32}$$

[*3] もちろん，以下のように略して書くこともある:

$$g^{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^{\mu},\mathrm{d}x^{\nu}\right)\ \rightarrow\ g^{\mu\nu}(x).$$

[*4] 実は，これがわざとこの計量テンソルの添字を上付きで表した理由である．

であり，それゆえ，その計量テンソルを以下のように決定する:

$$g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\mathrm{diag}(1,1,1). \tag{33}$$

直交座標 $\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\rangle\in T_p\mathcal{M}$ における以上の結果 (32) と (33) に基づいて，極座標への変換を考えることで極座標における計量テンソルを導いてみよう．直交座標から極座標への変換は以下のように与えられる (基底 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ の共変性により):

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\qquad\in T_p\mathcal{M}(\mathbb{R}). \tag{34}$$

すると，式 (32) および (34) を用いて極座標における具体的な計量テンソルの各成分を計算してみよう．まず，g_{rr} を定義 **1.2** 通りに，

$$\begin{aligned}g_{rr}(x):=\frac{\partial}{\partial r}\otimes\frac{\partial}{\partial r}&\underset{(32)}{=}(\sin\theta\cos\varphi)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x}\right)+(\sin\theta\sin\varphi)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\right)+\cos^2\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\otimes\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &=\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta=1\end{aligned} \tag{35}$$

として計算できる．ならば，他のすべての対角成分も同様に計算ができて，

$$g_{\theta\theta}=r^2,\qquad g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta. \tag{36}$$

また，非対角成分の $g_{r\theta},g_{\theta\varphi},\cdots$ に対しても同様な計算ができる．例えば，成分 $g_{r\theta}$ は (35) と同様な計算を通して:

$$\begin{aligned}g_{r\theta}:=\frac{\partial}{\partial r}\otimes\frac{\partial}{\partial\theta}&\underset{(32)}{=}r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &\qquad+r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\right)-r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\otimes\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &=r\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-r\sin\theta\cos\theta=0\end{aligned} \tag{37}$$

を導く．ならば，計量テンソルの残りの成分らも同様な計算を通すことで (計量は対称[*5]テンソルで

[*5] 今までは敢えて言及はしてなかったのだが，演算 $\tilde{\otimes}$ の定義:

$$\bigotimes:\ \underbrace{T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})\times T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})}_{\text{入れ替え}}\ \mapsto\ \mathbb{R} \tag{38}$$

から分かるように，各 $T_p\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 同士の元を切り替えても演算の構造は変わらないので，この演算は**完全対称**として取っても一般性を失うことはない．正確には，これもこの演算 $\otimes$ の定義として受け入れる．でも，我々の厳密さはこれぐらいでも十分足りてるのではないか (?)

あることに注意すれば),

$$g_{r\theta} = g_{\theta\varphi} = g_{r\varphi} = 0, \qquad g_{\theta r} = g_{\varphi\theta} = g_{\varphi r} = 0. \tag{39}$$

最後に，この計量の定義通りの計算 (36) と (39) をまとめて，今の極座標の計量を行列の行列で書けば計量テンソルを以下のような形として得る (ラベル r は極座標を意味する):

$$g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_r^i}, \frac{\partial}{\partial x_r^i}\right) = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta) \tag{40}$$

確かにこれは，極座標の下での線素 $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ を考えて上で定義した計量テンソルの厳密な定義 **1.2** と一致させると十分納得できるはずだろう:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) dx_r^\mu dx_r^\nu. \tag{41}$$

故に，我々は**微分幾何学的な方法**を経由して正しく極座標の計量 (40) に辿り着くことができた．しかし，まだこのような結果について，以下のような多少の疑問が残っている人がいるかも知れない:

極座標の基底も，正規かつ直交なものとして取っているのになぜ違う計量を与えるのか？

これは一見正しく見えるが，実は ‘正規な基底を取っている’ という主張に少し問題がある．実際，極座標においては空間上の位置によってその基底が異なり，極座標の基底は空間上のある点において $\|\frac{\partial}{\partial r}\| = \|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\| = \|\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\| = 1$ になるように設計されている．すると，基底 $\frac{\partial}{\partial r}$ は放射向きの変分成分に関わっている基底であり，$\frac{\partial}{\partial\theta}$ および $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ はそれぞれ方位角 (長さ r の回転) と極角 (長さ $r\sin\theta$ の回転) による変分成分に関わっている基底であることに注意すると，幾何学的・直感的に

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial}{\partial\theta} = r^2, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} \otimes \frac{\partial}{\partial\varphi} = r^2\sin^2\theta \tag{42}$$

を理解できる．基底のノルムに関する以上の寄与を考慮すれば直感的にも (40) を正当化することができる．

Problem 1.4 (第三問・Lorentz invariant Volume element)

この問題においては Lorentz 不変な体積要素を議論する．まず，D 次元多様体上の適当な座標系 $\mathcal{S}(x)$ を取ると，その座標系 (一般の計量を与える一般の座標系) においての体積要素は一般に

$$d^D x = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^D = \frac{1}{D!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D}. \tag{43}$$

その上に，体積要素 (43) の座標変換 ($x \to x'$) を考える．基底 dx^μ の反変性により，この量は

$$d^D x \quad \to \quad d^D x' = \frac{1}{D!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\mu_D}}{\partial x^{\nu_D}}\right) dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_D} \tag{44}$$

のように変換される．ここで各項 $\frac{\partial x'^{\mu_i}}{\partial x^{\nu}_j}$ $(1 \leq i, j \leq D)$ を行列の成分として読み取ると，行列式の定義から得られる以下の関係式:

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\mu_D}}{\partial x^{\nu_D}}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_D} \tag{45}$$

を加えると，体積要素の変換 (44) は

$$d^D x \quad \to \quad d^D x' = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\left(\frac{1}{D!}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_D} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_D}\right) = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) d^D x. \tag{46}$$

次に，上式の体積要素の変換式 (46) にて現れる行列式 $\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$ を計量テンソルを用いて表してみよう．そのため，前問で導けた計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の変換式 (15) の両辺に行列式を取れば，以下のように行列式 $\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$ と計量テンソルの行列式を関係づけることができる:

$$g = g'\left[\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\right]^2. \tag{47}$$

ここで簡単のため，計量テンソルの行列を $g := \det(g_{\mu\nu})$ などで表すことにする．それゆえ，

$$d^D x \quad \to \quad d^D x' = \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g'|}}\, d^D x, \qquad \sqrt{|g'|}\, d^D x' = \sqrt{|g|}\, d^D x. \tag{48}$$

故に，以上の論議により，座標変換に不変な体積要素 $\sqrt{|g|}d^D x$ を得る．特に，このような体積要素 $\sqrt{|g|}d^D x$ を指して**不変体積要素**と呼ぶ.

Remark 1.4.a (行列式) 行列式の定義から式 (45) の関係式を導いてみよう．行列 $\{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\}$ の行列式はその定義通りにレヴィ＝チビタ記号を用いて[*6]以下のように書ける:

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) := \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\mu_D}}{\partial x^{D}}\right). \tag{49}$$

ここで，置換を以下のものとして，

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_D \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_1 & \tilde{\mu}_2 & \cdots & \tilde{\mu}_D \\ 1 & 2 & \cdots & D \end{pmatrix}. \tag{50}$$

ここで $\tilde{\mu}_{\nu_i} = \mu_i$ $(1 \leq i \leq D)$ として指定する．すると，以下のような展開が導かれる:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}\left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\mu_D}}{\partial x^{\nu_D}}\right) &= \epsilon_{\tilde{\mu}_{\nu_1}\cdots\tilde{\mu}_{\nu_D}}\left(\frac{\partial x'^{\tilde{\mu}_1}}{\partial x^{1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\tilde{\mu}_D}}{\partial x^{D}}\right) \\ &\hookleftarrow \ \epsilon_{\tilde{\mu}_{\nu_1}\cdots\tilde{\mu}_{\nu_D}} = \epsilon_{\tilde{\mu}_1\cdots\tilde{\mu}_D}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_D} \\ &= \epsilon_{\nu_1\cdots\nu_D} \times \underbrace{\left(\epsilon_{\tilde{\mu}_1\cdots\tilde{\mu}_D}\left(\frac{\partial x'^{\tilde{\mu}_1}}{\partial x^{1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\tilde{\mu}_D}}{\partial x^{D}}\right)\right)}_{=\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)}. \end{aligned} \tag{51}$$

■

[*6]相対論の要請は一般に ‘任意の座標変換に対して共変な形式で書き表される’ ということである．故に，相対論の下ではこの特定のレヴィ＝チビタが完全反対称テンソルに切り替わる:

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_N} \quad \to \quad E_{\mu_1\cdots\mu_N} = \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_N}\sqrt{|g|}.$$

Problem 1.5 (第四問・Preparation for Levi-Civita connection)

先ず，ベクトル場 $A^\mu(x)$ は明らかにテンソルとして変換されていて，共変性によってその座標変換 $(x \to x')$ は $A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu(x')$ として与えることを認識しておこう．すると，その微分 $\partial_\rho A^\mu(x)$ は以下のように変換される:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\rho} A^\mu(x) &= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu(x') \right) = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu(x') \right) \\
&= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial A'^\nu(x')}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\sigma \partial x'^\nu} A'^\nu(x').
\end{aligned}
\tag{52}
$$

故に，第 2 項の存在のせいでこの量はテンソルには成らない．

Remark 1.5.a もちろん，同様な理由で $\partial^\rho A^\mu(x)$ もテンソルに成らない．