力 学 I 演 義 答 案 作 成 要 領

連 成 振 動

2-Coupled Oscillator

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

担当：渡辺　純二（アドバンスト）

◇ M39 (424ー1)

(計　算　用　紙)

〔１〕この系では，N 個の粒子が互いにばね定数 k によるポテンシャルを受けながら連成振動する．

(A) より，この系のポテンシャル $U(x_1, \cdots, x_N)$ は次のように書ける．

$$\boxed{U(x_1, \cdots, x_N) = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{k}{2}(x_{n+1} - x_n).}$$

更に，この系の運動方程式は，アインシュタインの縮約規則を用いて次のテンソル $K_{\mu\nu}$ を定め，

$$K_{\mu\nu} = 2k\delta_{\mu\nu} - k\delta_{\mu\nu-1} - k\delta_{\mu\nu+1}$$

その運動方程式を次式のように書ける．

$$m\partial^2 x_\mu = -K_{\mu\nu}x_\nu$$

(B) ここで一般化座標 Q を次のように与える:

$$Q = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \tag{1}$$

ならば，このような一般化座標系 Q は次の一般化運動方程式を満たす．

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q$$

より，一般化座標 (1) を代入することにより:

$$-\omega^2 \sum_n c_n x_n = \sum_{n=1}^{N} c_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\frac{1}{m}\sum_{n,\nu} c_n K_{n\nu} x_\nu$$

$$= -\frac{k}{m}\sum_n c_n(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1})$$

$$= \gamma \sum_n (c_n - 1 + c_{n+1} - 2c_n)$$

を分かる．ここの計算では，$1 \leq n \leq N$, $1 \leq \nu \leq N$ で，$x_0 = x_N = 0$ を用いた．より，以下の式が成り立つ:

$$\boxed{\gamma(c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) = -\omega^2 c_n.}$$

(C) 問題 (B) で示したように，次式が成り立つことを用いる．

$$\omega^2 = \gamma\left(2 - \frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{c_n}\right)$$

ここで，次の複素解 $c_n = e^{iqn}$ およびオイラー公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，更に次の結果が得られる:

$$\omega^2 = \gamma(2 - e^{iq} - e^{-iq}) = 2\gamma(1 - \cos q).$$

(D) 先ず，境界条件 $c_0 = 0$ のことから，c_n を次のように書ける．

$$c_n = A(e^{iqn} - e^{-iqn}) = 2A\sin(qn)$$

また，$c_{N+1} = 0$ から:

$$q(N+1) = p\pi; \qquad c_n^p = 2A\sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right)$$

を分かる．更に，問題の規格化条件 $\sum_{n=1}^{N}(c_n^p)^2 = 1$ から定数 A を次路用に決めることもできる．

$$\frac{1}{4A^2} = \sum_{n=1}^{N}\sin^2\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right) \qquad \cdots(*)$$

ここで，$c_0 = c_N = 0$ から，式 (*) を計算するため，次の複素関数の演算を考える．

$$\sum_{n=0}^{N+1} e^{i\left(\frac{2p\pi}{N+1}n\right)} = \frac{1 - e^{i\left(2p\pi + \frac{2p\pi}{N+1}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{2p\pi}{N+1}\right)}} = 1$$

より，次の関係式を得られる.

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N+1} e^{i\left(\frac{2p\pi}{N+1}n\right)}\right) = \sum_{n=0}^{N+1} \cos\left(\frac{2p\pi}{N+1}n\right) = 1$$

上式の複素指数関数と三角関数の関係から，次のような関係式が成り立つことを分かる.

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sin^2\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right) = \sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{2p\pi}{N+1}\right)\right\} = \frac{N+1}{2}$$

上式の結果を式 $(*)$ として定めた規格化条件に代入することにより，定数 A を求めることができる.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2(N+1)}}$$

更に問題の系数列 c_n^p を求めることができる:

$$\boxed{c_n^p = \sqrt{\frac{2}{N+a}}\sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right).}$$

一方で，このように定まる変換 Q_p を x_n のフーリエ変換と呼ぶ.

$$\text{フーリエ変換:}\quad Q_p = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right)x_n$$

(E) 問題文での式 (5) および問題 (D) で得られたパラメータ q の関係式から，次の式が成り立つことが分かる.

$$\omega_p^2 = 2\gamma\left\{1-\cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)\right\}\ , \qquad (p=1,2,\cdots,N)$$

より，ω_p は次のように与えられる:

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{2\gamma\left\{1-\cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)\right\}}.}$$

(F) 次を計算することにより示せばよい:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^p c_n^{p'} = \sum_{n=0}^{N+1} \frac{2}{N+1}\sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right)\sin\left(\frac{p'\pi}{N+1}n\right)$$

ここで，$p' > p$ とおいても一般性を失わないことを式の対称性により分かる．より，$p' = p+\alpha$ $(\alpha = 1,\cdots,N-1)$ とおいても問題はない.

$$\begin{aligned}\frac{N+1}{2}\sum_{n=1}^{N} c_n^p c_n^{p'} &= \sum_{n=0}^{N+1}\sin\theta_n^p \sin\left(\theta_n^p+\theta_n^\alpha\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N+1}\sin^2\theta_n^p\cos\theta_n^\alpha + \sin\theta_n^p\cos\theta_n^p\sin\theta_n^\alpha \qquad (2)\end{aligned}$$

ここで，パラメータ $\theta_n^p, \theta_n^\alpha$ は次のように定義する.

$$\theta_n^p = \frac{p\pi}{N+1}n \qquad \theta_n^\alpha = \frac{\alpha\pi}{N+1}n$$

次の三角関数の加法定理を用いると:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ , \qquad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

次のように三角関数の加法定理に連鎖的に使うことにより，式 (2) の計算は下式のようにもできる.

$$\begin{aligned}\frac{N+1}{2}\sum_{n=0}^{N+1} c_n^p c_n^{p'} &= \sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{2}\cos\theta_n^\alpha + \frac{\sin 2\theta_n^p\sin\theta_n^\alpha - \cos 2\theta_n^p\cos\theta_n^\alpha}{2}\\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N+1}\frac{1}{2}\cos\theta_n^\alpha - \frac{1}{2}\cos\left(2\theta_n^p+\theta_n^\alpha\right)}_{(a)}\end{aligned}$$

この式 (a) を計算するため，問題 (D) と同じ様に次のような複素関数を計算する:

$$\sum_{n=0}^{N+1} e^{i\theta_n^p} = \frac{1-e^{i(N+2)\theta_n^p}}{1-e^{i\theta_n^p}} = \frac{1-e^{i\left(p\pi+\frac{p\pi}{N+1}\right)}}{1-e^{i\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)}}$$

より，その結果として次のように表せる．

$$\sum_{n=0}^{N+1} e^{i\theta_n^p} = \begin{cases} 1 & (\alpha\text{は偶数}) \\ i\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{p\pi}{N+1}\right)}{1-\cos\left(\dfrac{p\pi}{N+1}\right)}\right\} & (\alpha\text{は奇数}) \end{cases}$$

同様に，次式も成り立つことが分かる．

$$\sum_{n=0}^{N+1} e^{i(2\theta_n^p+\theta_n^\alpha)} = \begin{cases} 1 & (\alpha\text{は偶数}) \\ i\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{2p\pi+\alpha\pi}{N+1}\right)}{1-\cos\left(\dfrac{2p\pi+\alpha\pi}{N+1}\right)}\right\} & (\alpha\text{は奇数}) \end{cases}$$

上式の実数倍を取ることで下記のように式 (a) を求めることができる．

$$\sum_{n=0}^{N+1} \cos\theta_n^p = \sum_{n=0}^{N+1} \cos\left(2\theta_n^p+\theta_n^\alpha\right) = \begin{cases} 1 & (\alpha\text{は偶数}) \\ 0 & (\alpha\text{は奇数}) \end{cases}$$

このことから，係数 c_n^p と $c_n^{p'}$ は次のような直交性 (orthogonality) を持つことが分かる．

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N+1} c_n^p c_n^{p'} = \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{2}\cos\theta_n^\alpha - \frac{1}{2}\cos\left(2\theta_n^p+\theta_n^\alpha\right) = 0.}$$

(G) 先ず，係数 c_n^p は問題 (D) および (F) から次のような正規直交性を持つことが分かった.

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^p c_n^{p'} = \delta_{pp'}$$

より，式 (8) により定めた一般化座標 Q_p の両辺に係数 $c_n^{p'}$ をかけて，和 $\sum_{p=1}^{N}$ を与えると次のように計算される.

$$\sum_{p=1}^{N} c_{n'}^p Q_p = \sum_{p=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} c_{n'}^p c_n^p x_n = \sum_{n=1}^{N} x_n \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{N} c_p^{n'} c_p^n\right)}_{\delta_{nn'}}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} x_n \delta_{nn'} = x_n$$

ここで，$c_n^p = c_p^n$ を用いた (簡単に確認できる). より，書き直せば次のような結果を得られる:

$$\boxed{x_n = \sum_{p=1}^{N} c_n^p Q_p = \sum_{p=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{p\pi}{N+1} n\right) Q_p.}$$

このような方法を 'Fourier's Trick' と呼ぶ.

係数に関するコメント

次の段階に進行するまえに，先ず c_n^p の物理的意味を考える必要がある．そのため，次のようなテンソル $U_{n\nu}$ を考える．

$$
\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= c_\mu^\nu = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left(\frac{\nu\pi}{N+1}\mu\right) \\
U_{\mu\nu}^\dagger &= c_\nu^\mu = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\left(\frac{\mu\pi}{N+1}\nu\right)
\end{aligned}
$$

そのように $U_{n\nu}$ を定めれば，これは 2 次テンソル，つまり N 次正方行列になることも分かる．例えば，前回の演義であった $N=2, N=3$ の場合は:

$$
U_{n\nu}^{N=2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad U_{n\nu}^{N=3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}
$$

のようになることを簡単な計算により分かる．つまり，このテンソル $U_{n\nu}$ は N この場合のそれぞれの調和振動子で分離できる一般化座標 $Q_1, \cdots Q_N$ への変換を及ぼす行列であることを分かる．さらに，計算により，$K_{\mu\nu}$ も対角化できることを分かる:

$$
\begin{aligned}
U_{l\mu}^\dagger K_{\mu\nu} U_{\nu m} &= (2k\delta_{\mu\nu} - k\delta_{\mu\nu-1} - k\delta_{\mu\nu+1}) c_\mu^l c_\nu^m \\
&= 2k\delta_{lm} - k\delta_{\mu\nu-1} c_\mu^l c_\nu^m - k\delta_{\mu\nu+1} c_\mu^l c_\nu^m
\end{aligned}
$$

ここで，$c_\mu^l c_\nu^m$ は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mu\nu-1} c_\mu^l c_\nu^m = c_\mu^l c_{\mu+1}^m &= \frac{2}{N+2}\sum_\mu \sin\left(\frac{\mu l\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{\mu m\pi + m\pi}{N+1}\right) \\
&= \sum_\mu c_\mu^l c_\nu^m \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\right) + \frac{2}{N+1} c_\mu^l c_1^m \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\mu\right) \\
&= \sum_\mu \delta_{lm} \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\right) + \frac{2}{N+1} c_\mu^l c_1^m \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\mu\right)
\end{aligned}
$$

これは，$\delta_{\mu\nu+1} c_\mu^l c_\nu^m$ の項も同様である:

$$
\delta_{\mu\nu+1} c_\mu^l c_\nu^m = \sum_\mu \delta_{lm} \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\right) - \frac{2}{N+1} c_\mu^l c_1^m \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\mu\right).
$$

以上のことを合わせるとテンソル $K_{\mu\nu}$ は次のように，$U_{\mu\nu}$ により対角化できることを確かめられる．

$$\overline{K}_{lm} = \overline{U}^{\dagger}_{l\mu} K_{\mu\nu} U_{\nu m} = 2k \left\{ 1 - \cos\left(\frac{m\pi}{N+1} \right) \right\} \delta_{lm} \tag{3}$$

例えば，$N = 3$ の場合，その対角化行列 $\overline{K}_{lm}$ は次のように与えられる．

$$\overline{K}_{lm} = \begin{bmatrix} (2-\sqrt{2})k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & (2+\sqrt{2})k \end{bmatrix}$$

これは，前回の No.9 とも，問題文の式 (5) とも結果が一致する．

コメント終わり