単極子場での粒子の量子電気力学とそのゲージ対称性に関して

About the QED of particles on Monopole fields and Gauge symmetry

KIM Dohyun

Onogi Group, Hep-th., Dept. of Phys., Osaka Univ.

September 21, 2023

大阪大学 OSAKA UNIVERSITY

目次

References for our study

- Ya. Shnir, "Magnetic Monopoles", Springer(2005)
- 西岡辰磨, "電磁気学 I"（大阪大学の講義ノート[1]: Topological Insulators）
- 西岡辰磨, "Quantum Field Theory"（大阪大学の講義ノート）
- 佐藤亮介, "相対論的量子力学/場の理論序説"（大阪大学の講義ノート）
- 川村嘉春,『相対論的量子力学』, 裳華房（2012）
- 坂本眞人,『場の量子論: 不変性と自由場を中心にして』, 裳華房（2014）

[1] 令和 5 年度春夏学期, 最終回特別講義.

Notations and Covention

この報告では別の指示がない限り，**自然単位系 (Natural Units)** を使う：

$$c = \mu_0 = \epsilon_0 = \hbar = k_B = 1. \tag{1}$$

また，Mincowski 計量の符号規約

$$\eta^{\mu\nu} := \mathrm{diag}(+, -, -, \cdots, -), \tag{2}$$

カイラル表示としての Dirac 行列 γ^μ, Dirac の slash 規約 $\not{p}$ および Dirac スピノル ψ は以下のように規約する:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \not{p} := \gamma^\mu p_\mu , \qquad \psi = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

ただし，$(\frac{1}{2}, 0)$ と $(0, \frac{1}{2})$ は Left-handed Weyl spinor と Right-handed Weyl spinor を示す．

The Former Maxwell Theory

体積電荷密度 ϱ_e と体積磁荷密度 ϱ_g が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \varrho_e\ , \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \varrho_g\ , \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\left(\mathbf{J}_g(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)\ , \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{J}_e(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{4}$$

Introductory

以前の Maxwell 理論理論は以下のような問題がある：

- Dirac による Monopole の説明は，Dyon や Monopole の電気動力学を説明できない．
- 既存の Maxwell 理論 (4) は，どんな粒子の運動に関する方程式か区分してない問題がる．しかし，電子-電子の相互作用と電子-Dyon の相互作用は明らかに様子が異なる．

このような問題を解決するため，我々は以下のような模型を提案する：

- 粒子ごとで分けて，それぞれの相互作用を説明する各模型を立てる．
- U(1) ゲージ模型：同種粒子の運動を説明する．
- SU(2) ゲージ模型：異なる粒子の間の相互作用を説明する．

Action integral of Monopole Fields

単極子場の作用積分を書くため，4 元電荷ポテンシャル A^μ および 4 元磁荷ポテンシャル B^μ：

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} \quad , \qquad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする.

QED on U(1) gauge fields

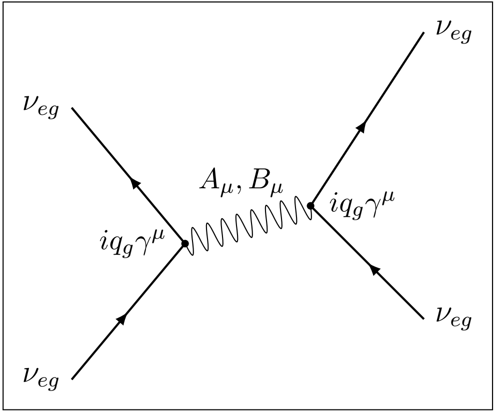

Figure: The Dyon-Dyon U(1) interaction

Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (5) の上に，**相対論的共変性**と**ゲージ不変性**を加えると，系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$S = -\int \frac{1}{4(q_e^2+q_g^2)}[D^\mu, D^\nu]^2 \, d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \, d^4x + \int (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - m^2(\Phi^*\Phi) \, d^4x \tag{6}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (6) のように書いた時の **4 元ポテンシャル** A^μ, B^μ および**スピノル** $\psi(x^\mu)$ のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto \quad A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) \ , \\ B_\mu & \mapsto \quad B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) \ , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto \quad e^{-iq_e \Lambda(x^\mu) - iq_g \Gamma(x^\mu)} \psi(x^\mu) \end{cases} \tag{7}$$

を想定すると，系の共変微分 D_μ を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_e A_\mu + iq_g B_\mu . \tag{8}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル $G_{\mu\nu}$ を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}(q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}). \tag{9}$$

ここでテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$, $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} B_{\nu]}$ とする.

The Maxwell equations of Dyons

それぞれの 4 元カレント J^μ, K^μ を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ , \tag{10}$$

$$K^\mu \equiv iq_g\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\} + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{11}$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2)J^\nu \ , \tag{12}$$

$$q_g^2\partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2)K^\nu. \tag{13}$$

The Noether currents

4 元ポテンシャル A_μ, B_μ があるパラメーター λ に沿って変分:

$$\delta A_\mu(\lambda) = \frac{\partial A_\mu(\lambda)}{\partial\lambda}\delta\lambda\ , \qquad \delta B_\mu(\lambda) = \frac{\partial B_\mu(\lambda)}{\partial\lambda}\delta\lambda \tag{14}$$

を与えるときの Noether current は以下のように決まる.

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial_\nu A_\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\mu B_\sigma)}\partial_\nu B_\sigma - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}_f, \tag{15}$$

Noether Currents(場の理論)

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\hat{q}}G^{\lambda\sigma}G^\mu{}_\sigma + \frac{1}{4}g^{\lambda\mu}G_{\rho\sigma}G^{\rho\sigma}. \tag{16}$$

Determination of EM Fields

電磁場の決定 (Determination of EM fields)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) \\ &\quad - \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(\nabla\times\mathbf{A}_g) - \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\nabla\times\mathbf{A}_e)\ , \\ \mathbf{B} &= \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) \\ &\quad + \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(\nabla\times\mathbf{A}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\nabla\times\mathbf{A}_g)\end{aligned} \tag{17}$$

QED of SU(2) Gauge theory

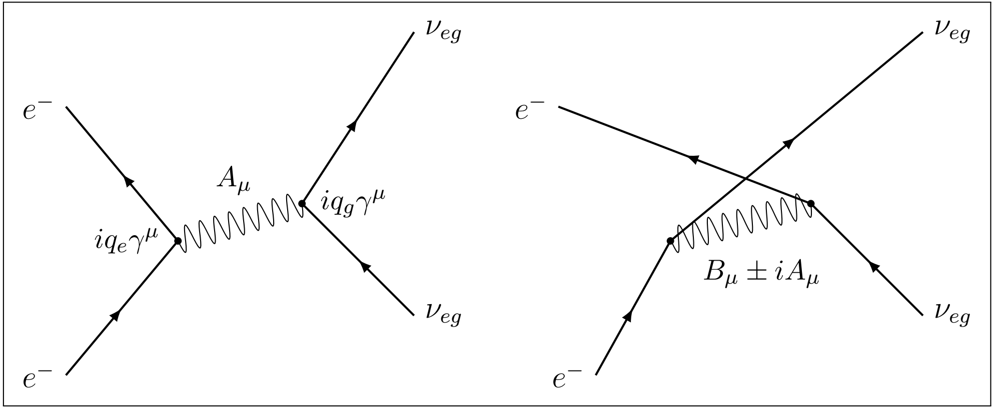

Figure: The SU(2) gauge fields on action-reaction breaking

Summary

我々は，U(1) ゲージ模型を通じて以下のような問題が説明できた：

- 同種粒子の一般的な模型として U(1) ゲージ模型で，電子-電子、Monopole-Monopole, Dyon-Dyon のような同種粒子の相互作用に関しては説明ができた.
- 電子-Dyon の相互作用の一般的な模型として SU(2) ゲージ模型で，電子と Dyon の間の相互作用は説明することができた.
- 両模型とも $q_g \to 0$ の Monopoleless 極限で，電子のみの U(1) 電磁場で戻ることが確認できた.

しかし，以下のような問題が残っている：

- SU(2) ゲージ模型で，電子と Dyon がなぜ双崩壊するかについての疑問が残っている．かつ，これにより電流密度 J_μ, K_μ が保存されない問題も残っている.

Construction of Dyon-electron system-SU(2) Gauge theory

電子 e^- とダイオン ν_{eg} が**相互作用するもの**として，系のスピノルをスピノル ψ_e と $\psi_{\nu_{eg}}$ の二重項として以下のように書く：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \tag{18}$$

ここで 3 元パラメーター $\boldsymbol{\alpha}$ を用意してゲージ群 SU(2) のスピノル変換を：

$$\Psi \quad \mapsto \quad \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \simeq \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \tag{19}$$

として設定する．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (19) により，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を用意すると系の共変微分 D_μ は：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu(x^\mu) \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{20}$$

として定義できる．パウリ行列が非可換で $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ となることに注意して，以下の Dirac 方程式：

$$\left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) - m\right] \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

が不変になるようにゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の変換則を決める．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (21) が不変になるための変換 $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$ は：

$$i\gamma^\mu \left[(\partial_\mu U) - \frac{ig}{2} U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2}(\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma})U \right] \Psi = 0 \tag{22}$$

の関係を満たすべきである．SU(2) 群の生成子 $U = \mathbf{1} - \frac{ig}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ とする．

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \mapsto \quad \mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1} + \frac{2i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{23}$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (23) にゲージ群の生成子 U を代入して具体的に計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} &= \left(\mathbf{1}-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &\quad+\frac{2i}{g}\left(-\frac{i}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &= \mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}-\frac{i}{2}\alpha^i W^j_\mu[\sigma^i,\sigma^j]+\frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned} \tag{24}$$

導入したゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は式 (24) の変換式を満たす.

Charge-conjugation and Positrons on SU(2) gauge Fields

磁荷のない極限 $(q_g, B_\mu \to 0)$ では，SU(2) 模型のゲージ場 (18) は：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e \left(i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_e + iq_e\bar{\psi}_e A\!\!\!/ \psi_{\nu_{eg}}$$
$$+ \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\partial\!\!\!/ + q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - iq_e\bar{\psi}_{\nu_{eg}} A\!\!\!/ \psi_e.$$

ここから，荷電共役変換 $\psi^c = (i\gamma^2\gamma^0)\bar{\psi}^T$ を考えると

$$i(q_e\bar{\psi}_e A\!\!\!/ \psi_e^c - q_e\bar{\psi}^c A\!\!\!/ \psi_e) = 0 \tag{25}$$

となるので，$\psi_{\nu_{eg}} = \psi_e^c$ が 1 つの解になることが分かる $(\psi_{\nu_{eg}} \to \psi_e^c)$.

Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (??) より，Dirac 場の Lagrangian は：

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}_e \left(i\not{\partial} - q_e \not{A} - m\right)\psi_e - \bar{\psi}_e(q_e \not{B} - i q_g \not{A})\psi_{\nu_{eg}}$$
$$+ \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\not{\partial} + q_e \not{A} - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - \bar{\psi}_{\nu_{eg}}(q_e \not{B} + i q_g \not{A})\psi_e.$$

ダイオンの部分極限 $q_g \to 0,\ B_\mu \to 0$ の下では **U(1) ゲージ場**に収束する：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e(i\not{\partial} - q_e \not{A} - m)\psi_e + \bar{\psi}^c_e(i\not{\partial} - q_e \not{A} - m)\psi^c_e. \tag{26}$$

Continuous condition to absence of Monoole charges

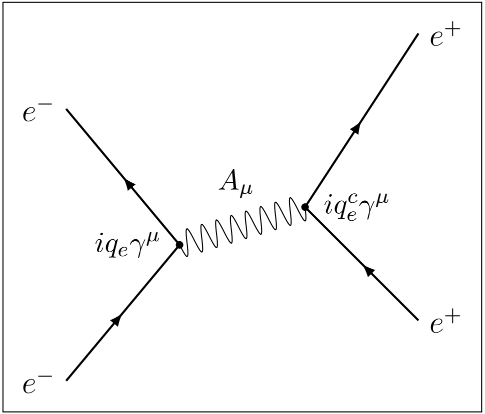

Figure: In case of absence of monopole charges($q_g, B_\mu \to 0$)

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

場の強さ $H^k_{\mu\nu}$ は以下のものとして切り替えても良い.

$$H^k_{\mu\nu} \mapsto \partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu \ , \qquad (k = 1, +, -) \tag{27}$$

場の強さ $H^k_{\mu\nu}(k = 1, 2, 3)$ を以下のように計算できる：

ゲージ場の曲率 (Curvature tensors of Gauge field)

$$H^1_{\mu\nu} = \frac{q_g}{\hat{q}} E_{\mu\nu} \ , \qquad H^\pm_{\mu\nu} = \frac{q_e}{\hat{q}} F_{\mu\nu} \pm 2\frac{q_e q_g}{\hat{q}^2} A_{[\mu} B_{\nu]}. \tag{28}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (28) の結果を踏まえると，系のゲージ場のみの Lagrangian 密度は以下になるのが一番正しい：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{SU}(2)}_{\mathrm{field}} = -\frac{q_g^2}{8\hat{q}^2}E_{\mu\nu}E^{\mu\nu} - \frac{q_e^2}{4\hat{q}^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \underbrace{\frac{q_e^2 q_g^2}{\hat{q}^4} f_{\mu\nu\rho\sigma}A^\mu B^\nu A^\rho B^\sigma}_{\text{ゲージ結合項}} . \tag{29}$$

ゲージ場の Lagrangian 密度から，系全体の SU(2) ゲージ対称性は壊れていないが**ゲージ結合項**が現れた．($f_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda}$)