令 和 4 年 度 前 期 履 修 科 目

力 学 詳 論 I

ラザフォード散乱 (解説付き)

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

(計　算　用　紙)

〔１〕**(2021 大阪大学)**　質量 m の質点が，ポテンシャル U による中心力を受けて，2 次元平面内を運動する合を考える．位置ベクトルを $\mathbf{r}$, 速度ベクトルを $\dot{\mathbf{r}} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ とする．2 次元極座標表示 (r, θ) において，r 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$，θ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とすると，$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ であることを用いてよい．一般に $\dot{f}$ と $\ddot{f}$ は，関数 f の時間微分 $\dfrac{df}{dt}$ と，時間の 2 階微分 $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ をそれぞれ表すものとする．[*1]

I. ポテンシャルが $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$（α は正の定数）の場合を考える．

(1) このポテンシャル $U(r)$ による中心力の r および θ についての運動方程式を導け．

(2) 前問の θ についての運動方程式から，角運動量が保存していることが分かる．その大きさを L とする．以下の手順に従って，質点の軌道が

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) + \dfrac{m\alpha}{L^2}} \qquad \cdots(*)$$

で表されることを示せ．ここで，A と θ_0 は積分定数である．

【手順】 角運動量 L を用いて r のみで表した系の運動方程式を $u = \dfrac{1}{r}$ により置換して $E(u)$ で表す．そのあと，θ に関する u の微分方程式を解く．

必要であれば次の積分関係式を利用しても良い:

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \cos^{-1} x + C \qquad \cdots(**)$$

(次のページへ)

[*1] 令和 3 年度　大阪大学理学研究科　入学試験１問 (変形)

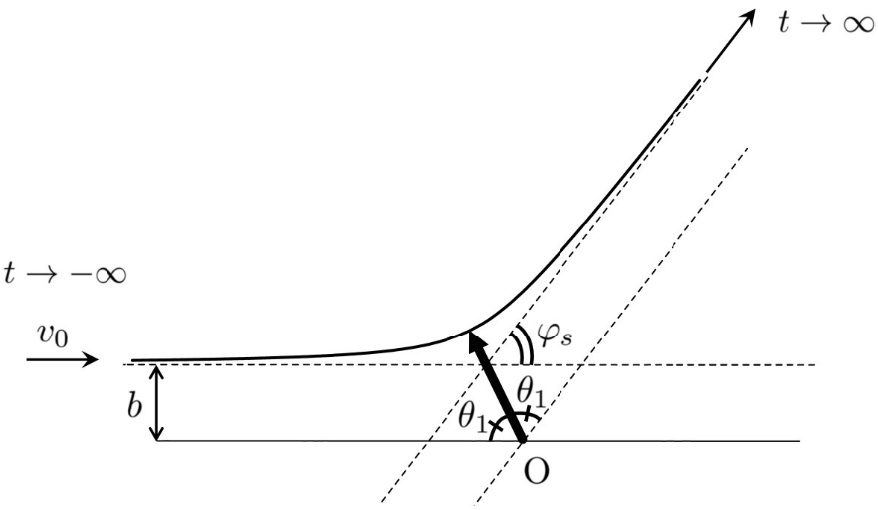

図 1

次に，図 1 に示すように，入射する速さ v_0，衝突パラメータ b で入射した質点について考える．ここで b は，入射側の軌道の漸近線と原点 O との距離で定義される．このときの散乱角 φ_s を以下の手順で導出することを考える．散乱角とは，$t \to -\infty$ のときの速度ベクトルと，$t \to \infty$ のときの速度ベクトルのなす角で，図 1 に示した φ_s である．なお以下の問いでは，前問で示した質点の軌道の式 $(*)$ を既知のものとして用いてよい.

(3) 保存している角運動量の大きさ L を m, α, v_0, b のうち必要なものを用いて求めよ.

(4) 式 $(*)$ において，質点が原点 O に最も近づくとき，$\theta = \theta_0$ であり，図 1 の太矢印に対応する．以後は $\theta_0 = 0$ となるように座標系を取る．太矢印と $t \to \pm\infty$ における質点の位置ベクトルとのなす角度を $\theta_1 (> 0)$ としたとき，$\cos\theta_1$ を m, α, L, A を用いて求めよ.

(5) $t \to -\infty$ における質点の速さが v_0 であることを利用して，$\sin\theta_1$ を m, L, A, v_0 を用いて求めよ.

【手順】 式 $(*)$ を時間で微分し，さらに $\dot{\theta}$ と L の関係を用いる.

(6) $\tan\left(\dfrac{\varphi_s}{2}\right)$ を m, α, v_0, b うち必要なものを用いて求めよ.

〔解説〕

問 1 極座標の下での r と θ の運動方程式は次のように示される:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \dfrac{\alpha}{r^2} & (r\text{ 成分}) \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 & (\theta\text{成分}) \end{cases}$$

力の θ 成分の偏向成分はない.

問 2 まず,〔問 1〕から,次のような角運動量保存則:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0; \qquad L = mr^2\dot{\theta} \quad \cdots(1)$$

を分かる.

ここの L は角運動量の大きさとして定義される.ならば,$\dot{\theta}$ は,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad \cdots(2)$$

と計算される.これを r 成分の運動方程式に代入することにより,r のみの運動方程式を得られる.

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = \frac{\alpha}{r^2} \qquad (r\text{ の運動方程式})$$

よって,問題の手順に従って $u = \dfrac{1}{r}$ を行い,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{dt^2}$$

であることから,さらに,式 (1) および (2) などの角運動量保存則から,*2

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{u^3}\left(\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\right) = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \cdots(3)$$

*2 ここでは,次のように連鎖律を利用した:

$$\frac{du^2}{dt^2} = \frac{du}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\right)$$

ここで,

$$\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\right) = \underline{\left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{d}{d\theta}\left(u^2\frac{du}{d\theta}\right)}.$$

従って，θ に関する $u = \dfrac{1}{r}$ としての運動方程式は次のように表せる:

$$-\left(\frac{L^2}{m}\right)u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m}u^3 = \alpha u^2; \qquad \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m\alpha}{L^2} \quad (u \neq 0).}$$

今からは，この u の方程式を解けば良い．これは，$U = u + \dfrac{m\alpha}{L^2}$ とおくと，次のような単振動の微分方程式のような形になる:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + U = 0$$

ならば，その一般解 $U(\theta)$ は次のように与えられる．

$$U(\theta) = A\cos\left(\theta - \theta_0\right) \quad \cdots (4)$$

ここで，A と θ_0 は定数である．さらに，これを r の関数で取り戻せば，次のような関数を得る．これが軌跡 r の関数である:

$$\boxed{r = \frac{1}{A\cos\left(\theta - \theta_0\right) - \dfrac{m\alpha}{L^2}}.}$$

問 3 系の角運動量は保存されるため，初期の角運動量から，

$$\boxed{L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = bmv_0.}$$

となる．

問 4 先ず $\theta_0 = 0$ の座標を取ったときの軌跡関数 r は,

$$r = \frac{1}{A\cos\theta - \dfrac{m\alpha}{L^2}} \quad \cdots (5)$$

となる．ここで，$r \neq 0$ となるため，$u = \dfrac{1}{r}$ を用いると $\theta \to \theta_1$ のときは $u \to 0$ になることを分かる．

$$\lim_{\theta \to \theta_1} u = \lim_{\theta \to \theta_1} \left(A \cos\theta - \frac{m\alpha}{L^2} \right) = 0 \quad \cdots (6)$$

となると予想できる．ならば，$\cos\theta_1$ は式 (6) から次のように与えられる:

$$\boxed{\therefore \cos\theta_1 = \frac{m\alpha}{AL^2}.}$$

問 5 質量 m の質点がポテンシャルから無限に遠いところで初期速度 v_0 および衝突パラメータ b で近づく瞬間を考える．ならば，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t \to -\infty} = \frac{A \sin\theta_1}{\left(A\cos\theta_1 - \dfrac{m\alpha}{L^2}\right)^2} \times \dot{\theta}_1 = \left(\frac{L}{m}\right) A \sin\theta_1 \simeq v_0 \quad \ldots (7)$$

となる．これは，十分遠い距離で軸と平衡に入射されるため，$t \to -\infty$ のときは，$\dot{\theta} \simeq 0$ となるからである．ここで，式 (2) の関係式を用いた．

ならば，$\sin\theta_1$ は次のように与えられる:

$$\boxed{\therefore \sin\theta_1 = \frac{mv_0}{AL}.}$$

問 6 先ず，図 1 での関係から，$\varphi_s = \pi - 2\theta_1$ なので，

$$\tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right) = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} \quad \cdots (8)$$

を分かる．式 (8) から，

$$\boxed{\tan\left(\frac{\varphi_s}{2}\right) = \frac{\alpha}{mbv_0^2}.}$$

を得られる．