極座標系の発散

〔1〕次のような球面座標系上の微小体積領域 $\mathbb{V}_r$ を考える．ここの領域 $\mathbb{V}_r$ の各頂点 $A_1, A_2, \cdots, A_4$ は原点 O から距離 $d + dr$ の球面上の点，点 $B_1, B_2, \cdots, B_4$ は原点 O から距離 r の球面上の点とする．

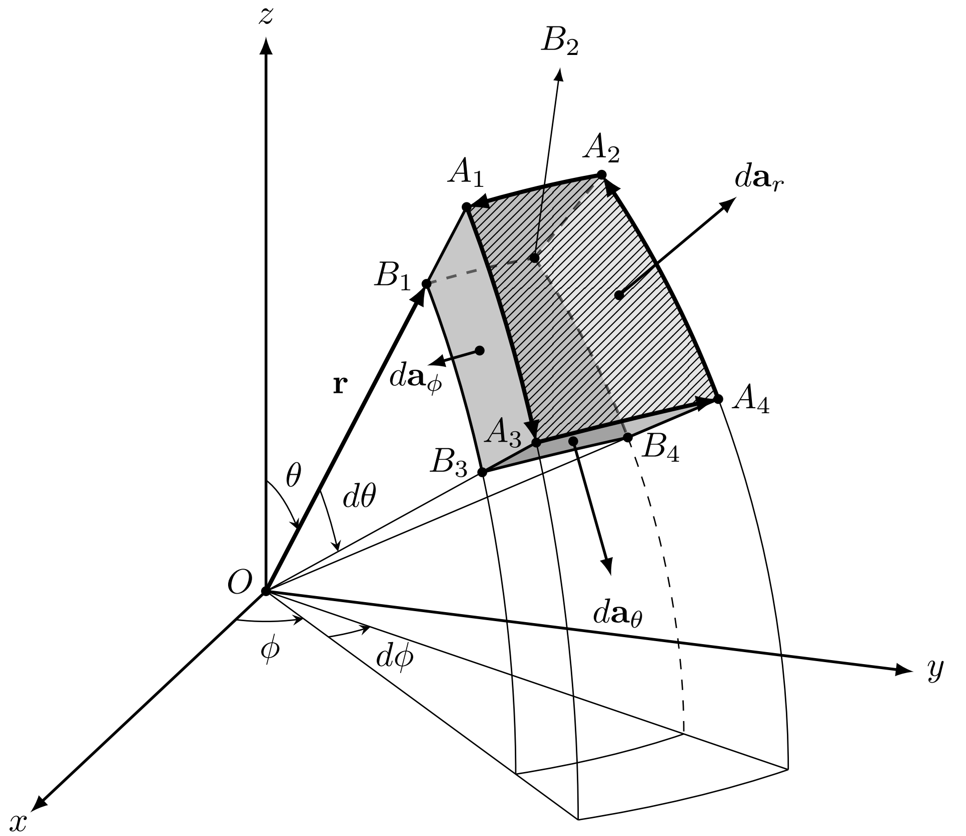

図 1

ならば，この領域 $\mathbb{V}_r$ の微小体積 $d^3\mathbf{r}$ および微小面積ベクトル $d\mathbf{a}$ は次のように定まる:

$$d^3\mathbf{r} = r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi \tag{1}$$

および

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{a}_r + d\mathbf{a}_\theta + d\mathbf{a}_\phi;$$

$$d\mathbf{a}_r = r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\phi \; \hat{r}, \quad d\mathbf{a}_\theta = r \sin\theta \; dr \; d\phi \; \hat{\theta}, \quad d\mathbf{a} = r \; dr \; d\theta \; \hat{\phi}.$$

ここから，Green's Theorem(ガウス定理) を使うと，極座標系におけるベクトル $\mathbf{v}$ の発散 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ を簡単に求められる．

Green's Thm.

ある任意のベクトル場 $\mathbf{v}$ および任意の閉曲面が作る空間 $\mathbb{V}$ に対して，恒等的に次の等式が成り立つ．

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \iiint_{\mathbb{V}} (\nabla\cdot\mathbf{v})\ d^3\mathbf{r} \qquad \cdots(*)$$

先ず，ある任意のベクトル場 $\mathbf{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}$ をとり，微小体積領域 $\mathbb{V}_r$ に対する，面積分から計算する:

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \iint v_r(r+dr)\ da_{r+dr} - v_r(r)\ da_r \\ + \iint v_\theta(\theta+d\theta)\ da_{\theta+d\theta} - v_\theta(\theta)\ da_\theta \qquad \cdots(**) \\ + \iint v_\phi(\phi+d\phi)\ da_{\phi+d\phi} - v_\phi(\phi)\ da_\phi\end{aligned}$$

十分小さい $dr \ll 1, d\theta \ll 1, d\phi \ll 1$ を仮定すると，微笑体積領域 $\mathbb{V}_r$ をほぼ長方体として近似できて，面積分を式 $(**)$ のように計算できる．[*1] Green's Thm.(ガウス定理) による式 $(*)$ の両辺を $dr\ d\theta\ d\phi$ を割ると，微分積分学の基本定理 (あるいは，積分における平均値定理) により:[*2]

$$\begin{aligned}\frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} &= \frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\iiint_{\mathbb{V}_r} (\nabla\cdot\mathbf{v})\ (r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi) \\ &= (\nabla\cdot\mathbf{v})_{r=r_c,\theta=\theta_c,\phi=\phi_c} \times (r_c^2\sin\theta_c) \quad \cdots(\alpha)\end{aligned}$$

のような関係式が成り立つ．ただし，

$$r < r_c < r+dr,\ \ \theta < \theta_c < \theta + d\theta,\ \ \phi < \phi_c < \phi + d\phi.$$

[*1] ここの微小面積 da_r は原点 O から距離が r となる，曲面 $\Box B_1B_2B_3B_4$ が作る微小面積で $da_r = r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi$ となる．さらに，d_{r+dr} は原点 O から距離 $r+dr$ の曲面 $\Box A_1A_2A_3A_4$ が作る微小面積として，$da_{r+dr} = (r+dr)^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi$ と定まる．同様に，

$$da_{\theta+d\theta} = r^2\sin(\theta+d\theta)\ dr\ d\phi, \qquad da_{\phi+d\phi} = r\ dr\ d\theta$$

[*2] 以下の式のうち，ベクトル $\mathbf{v}$ の発散の体積積分項を，積分範囲も含めてもっと詳しく書くと:

$$\int_\phi^{\phi+d\phi}\int_\theta^{\theta+d\theta}\int_r^{r+dr} (\nabla\cdot\mathbf{v})\ (r'^2\sin\theta\ dr'\ d\theta'\ d\phi')$$

のように，積分における平均値定理が成り立つことが明らかに分かる．

一方，このときの面積分項は次のようになる．(成分別に示す)

$$\frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_r\ da_r = \frac{(r+dr)^2 v_r(r+dr) - r^2 v_r(r)}{dr}\sin\theta_c, \tag{2}$$

$$\frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_\theta\ da_\theta = \frac{\sin(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta) - \sin\theta v_\theta(\theta)}{d\theta} r_c, \tag{3}$$

$$\frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_r\ da_r = \frac{v_\phi(\phi+d\phi) - v_\phi(\phi)}{d\phi} r_c. \tag{4}$$

ここで，式 (α) の両辺に極限 $dr\to 0, d\theta\to 0, d\phi\to 0$ を考える．

$$\lim_{\substack{dr\to 0\\ d\theta\to 0\\ d\phi\to 0}} \frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\iiint_{\mathbb{V}_r} (\nabla\cdot\mathbf{v})\ (r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi) = (\nabla\cdot\mathbf{v})\times(r^2\sin\theta) \tag{5}$$

および,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{dr\to 0\\ d\theta\to 0\\ d\phi\to 0}} \frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_r\ da_r &= \frac{(r+dr)^2 v_r(r+dr) - r^2 v_r(r)}{dr}\sin\theta_c \\ &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\ v_r\right),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{dr\to 0\\ d\theta\to 0\\ d\phi\to 0}} \frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_\theta\ da_\theta &= \frac{\sin(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta) - \sin\theta v_\theta(\theta)}{d\theta} r_c \\ &= r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ v_\theta\right),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{dr\to 0\\ d\theta\to 0\\ d\phi\to 0}} \frac{1}{dr\ d\theta\ d\phi}\oint v_r\ da_r = \frac{v_\phi(\phi+d\phi) - v_\phi(\phi)}{d\phi} r_c = r\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}. \tag{8}$$

のようになることを分かる．以上の関係式 (5)〜(8) を合わせると，次のような球面座標系上の一般的な発散の関係式を得られる．

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\ v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\ v_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}.}$$

さらに，あるスカラー関数 f に関する勾配 ∇f の定義を次の関係式が成り立つのは自明である．

Gradient Thm.

任意のスカラー関数 $f(x,y,z)$ およびその勾配に対して，次の関係式が成り立つ．(微分したものを積分するともとの関数に戻る)

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

先ず，簡単な計算のため，関数 f の球面座標系での勾配を次のように表す:

$$\nabla f = (\nabla f)_r\ \hat{r} + (\nabla f)_\theta\ \hat{\theta} + (\nabla f)_\phi\ \hat{\phi} \tag{9}$$

一方，図 1 により，一般的な任意の経路に対する，球面座標での微小変位 $d\mathbf{l}$ は次のように表せることを分かる．

$$d\mathbf{l} = \hat{r}\ dr + \hat{\theta}\ (r\ d\theta) + \hat{\phi}\ (r \sin\theta\ d\phi) \tag{10}$$

よって，式 (9)〜(10) および上記の '勾配の定理' にり，次のようにも書ける．

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \int_{(r_a,\theta_a,\phi_a)}^{(r_b,\theta_b,\phi_b)} (\nabla f)_r\ dr + (\nabla f)_\theta\ (r\ d\theta) + (\nabla f)_\phi\ (r \sin\theta\ d\phi)$$

ここで，$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{r}$ を与え，発散のときと同様に積分における平均値定理を使うと，次のような結論に辿り着く．(今回は，$dr, d\theta, d\phi$ をそれぞれ 1 つずつ両辺に割ったものの極限を考える)

$$\frac{\partial}{\partial r} f(\mathbf{r}) = (\nabla f)_r, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} f(\mathbf{r}) = r(\nabla f)_\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} f(\mathbf{r}) = r \sin\theta (\nabla f)_\phi \tag{11}$$

以上により，球面座標系での任意のスカラー関数 $f(x,y,z)$ の勾配は次のように書ける:

$$\boxed{\nabla f = \hat{r}\ \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi}\ \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}}$$

よって，球面座標系のラプラシアン ∇^2 は一般的に次のように書ける:

$$\boxed{\therefore \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.}$$

このようにすれば，ほぼ計算なしで球面座標系でのラプラシアンを導き出せる．

私は，単純計算と連鎖律がとっても嫌いので…(?)