Special theory of Relativity

Part I: 特殊相対性理論

講義参考資料および練習問題セット

- 本冊子は、講義で学ぶ内容をまとめたものである．本資料の理解のためには，「線形代数学 I・同演議」，「力学詳論 I」の理解が要る．
- このノートでは次のような表記を使う:

  c: 光速　　τ: 注目する系の時間軸　　x^{τ}: 注目する形の系の空間座標

大阪大学　理学部・理学研究科

目次

第 1 章

なぜ光速は一定なのか

ここから，特殊相対論が始まる．Albert Einstein はこの理論に名前をつけるとき，最初には「絶対性理論」と命名した．相対論理論は,「光速度一定の法則」および「相対性原理」に基づいているかである．相対論では，この 2 つの法則は絶対に壊れる事がないからだ．この節では,「光速度一定の法則」および「相対性原理」がなぜ成り立つかについて学ぶ.

1.1　波動光学の復習： 相対論の観点

皆さんは既に光が**波動**であるあることを高校で習って知っているはずだ.「特殊相対論」では，**光を古典的に波動として働く**と仮定する．波動は，一般的に次のような波動関数を用いて表せる; 高校で習った通りで:

$$\psi(\mathbf{x},t) = A_m \sin(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x} - \omega_m t + \phi) \tag{1.1}$$

式 (1.1) の波動をグラフで表すと次のとおりである:

A. 変位に対するグラフ

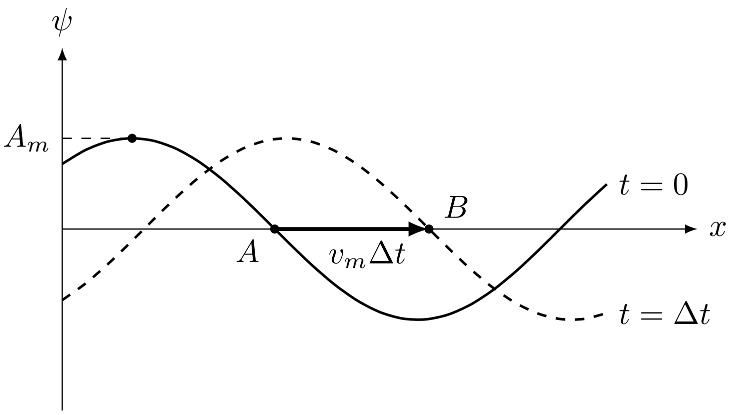

図 1.1　変位グラフ

このグラフは $t = 0$ および $t = \Delta t$ のある時点での波動の位置を表したグラフである．高校で習った通りで，

$$\text{振幅:}\quad A_m, \qquad \text{角振動数:}\quad \omega_m = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{波の位相:}\quad \varphi = \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x} - \omega_m t + \phi$$

と定義される．ここで，波動が時間の流れ Δt に**沿って右に進んでいる**ことを分かる．つまり，時刻 $t = 0$ のときの波動上の点 A が時刻 $t = \Delta t$ のときに点 B に移動したと言ってもおかしくない．

$$\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}_A - \omega_m t_A + \phi = \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}_B - \omega_m t_B + \phi \tag{1.2}$$

ならば，三角関数の性質により A と B での状態 $(\mathbf{x}_A, t_A)$ および $(\mathbf{x}_B, t_B)$ に対して，式 (1.2) を満たすべきである．よって，この波動の伝播速度は次のように定まる:

$$\boxed{v_m = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\omega_m}{k_m}.} \tag{1.3}$$

また，式 (1.1) でのパラメータベクトル $\mathbf{k}_m$ は**波数ベクトル**と定義されるもので，**波動の進行方向**を向かうベクトルとして，次の大きさを持つ:

$$|\mathbf{k}_m| = \frac{2\pi}{\lambda_m} \qquad \text{あるいは,} \qquad \mathbf{k}_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}\hat{\mathbf{x}}$$

この波数という物理量は，**長さ**を**波の位相**に変換するパラメータである: ある幅に当たる波動の位相差を示す．

$$\Delta\phi = \frac{\lambda_m}{2} \times k_m = \frac{\lambda_m}{2} \times \left(\frac{2\pi}{\lambda_m}\right) = \pi.$$

例えば，幅 $\lambda_m/2$ に入れる波動の位相差 $\Delta\phi$ は π ほどになる．これが一体どういう意味か? つまり，幅 $\lambda_m/2$ にあたる波動の部分は $0 \leq \Delta\theta \leq \pi$ の分の sin や cos 波であることだ．理解しきれない読者は下の図をご覧にせよ:

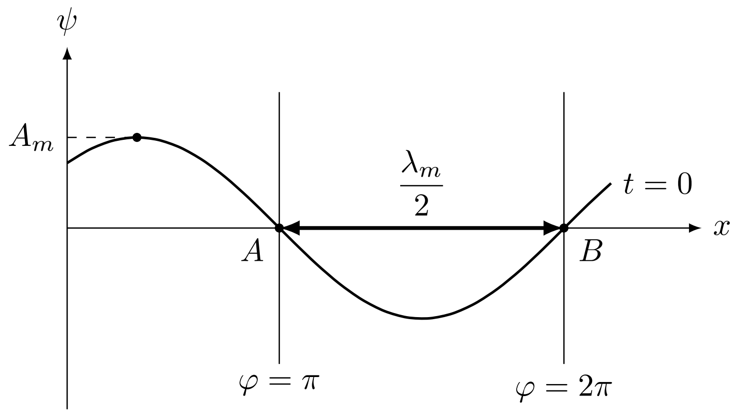

図 1.2　位相と波数の意味

よって，波動 (1.1) は上の結果を従って進む．

B. 時間に対するグラフ

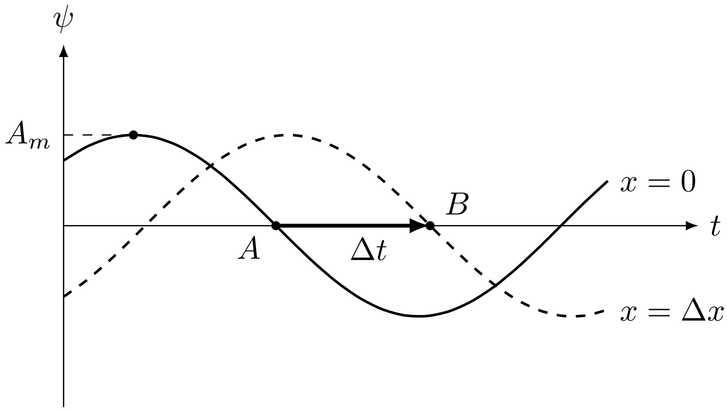

図 1.3　時間グラフ

時間軸に対する波動のグラフ図 1.3 は，時間に沿った波動の伝播方向を示す．

1.1.1　波動の媒質依存性

一般的に身の回りの大体の波動は**媒質**を必要とする: 媒質がないと波が伝播されない．このような媒質を必要とする波を**力学的波動** (Mechanical waves) と呼ぶ．例として，

音波 (**空気**)，**地震** (**マントル**)，**連成振動** (**ばねなど**)

などがある．ならば，これら力学的波動は媒質の振動により伝播されるものなので，伝播速度は**媒質の密度・媒質の速度**などに依存するはずだ．これがどういう意味か? 次のように定義された 2 つの座標系 $\mathcal{S}(\mathbf{x},t)$ および $\mathcal{S}'(\mathbf{x}',t')$ の慣性系で観察したある 1 次元波動を考える:

$$\text{Galilei 変換:}\qquad \begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathbf{x}-\mathbf{v}t \\ t &= t' \end{cases} \tag{1.4}$$

このような変換を Galilei 変換と呼ぶ: 慣性系 $\mathcal{S}'$ は慣性系 $\mathcal{S}$ に対して相対的に**正の向き**で相対速度 $\mathbf{v}$ で相対運動しているという意味だ．そして，慣性系 $\mathcal{S}',\mathcal{S}$ での**時刻は両方とも同じ**であるという意味である: 今の時点で，これは当たり前のように見える．ここで，停止した慣性系 $\mathcal{S}$ と停止した媒質によりで発生した波動 $\psi(\mathbf{x},t)=A_m\sin(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{x}-\omega_m t+\phi)$ を慣性系 $\mathcal{S}',\mathcal{S}$ で観察した場合どんな現象が起こるか観察する．

観察 A:　慣性系 $\mathcal{S}$

$$\psi(\mathbf{x},t)=A_m\sin(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{x}-\omega_m t+\phi)\qquad\Rightarrow\qquad \underline{\therefore v_m=\frac{\omega_m}{k_m}}. \tag{1.5}$$

観察 B:　慣性系 $\mathcal{S}$

$$\psi(\mathbf{x}', t') = A_m \sin(\mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{x}' + \mathbf{v}t') - \omega_m t' + \phi) \quad \Rightarrow \quad \underline{\therefore v'_m = \frac{\omega_m - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}}{k_m}.} \tag{1.6}$$

ここで，重要な結果を得られる: 式 (1.6) によると，波動の伝播速度に観測系 $\mathcal{S}'$ の相対速度 $\mathbf{v}$ を加えたものが慣性系 $\mathcal{S}'$ で見た伝播速度 v'_m である．読者の理解のため，音波の場合を考える．ならば，前に論議した状況は慣性系 $\mathcal{S}$ で停止している音源に対して，慣性系 $\mathcal{S}'$ の観測者が相対速度 $\mathbf{v}$ で運動している状況である．(図 1.4)

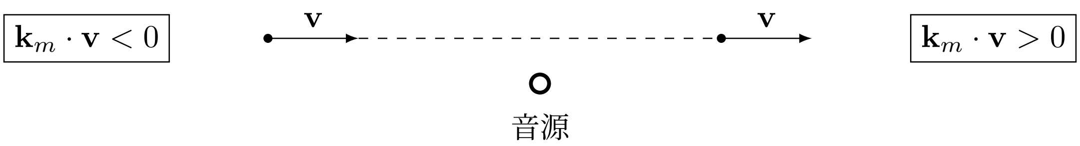

図 1.4　例:　音源のドップラー効果

ここで，注意すべきことは音は放射的に伝播されるので，波数ベクトル $\mathbf{k}$ も放射型であることだ．なので，観察者が音源に**近づく時**と**遠くなる時**の慣性系 $\mathcal{S}'$ の観察者が見た音波の伝播どはそれぞれ,

$$\text{近づく時:} \quad v'_m = \frac{\omega_m}{k_m} + v\cos\theta, \qquad \text{遠くなる時:} \quad v'_m = \frac{\omega_m}{k_m} - v\cos\theta \tag{1.7}$$

のようになることを分かる．今までやった過程は，ただ波動を観察する**慣性系を変えた**だけだ．つまり，読者の皆さんは今まで慣性系を変える方法を習得した．驚かせることは，このような作業だけで有名な**ドップラー効果**を導けるということだ．慣性系 $\mathcal{S}'$ の観察者が見た波動の等価角振動数 ω_{eq} は次のようになるはずだ:

$$v'_m = \frac{\omega_{\mathrm{eq}}}{k_m} = \frac{\omega_m - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}}{k_m} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\therefore \omega_{\mathrm{eq}} = \omega_m - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}.} \tag{1.8}$$

ならば，$k_m = \omega_m / v_m$ を代入することで次のドップラー効果を得られる:

ドップラー効果

動いている観察者が見た波動の角振動数は次のように定まる:

$$\text{近づく時:} \quad \omega_{\mathrm{eq}} = \frac{v_m + v\cos\theta}{v_m}\omega_m, \qquad \text{遠くなる時:} \quad \omega_{\mathrm{eq}} = \frac{v_m - v\cos\theta}{v_m}\omega_m$$

以上により，Galilei 変換でドップラー効果を導けることを分かった．

もっと明確な理解のため，**観測者が運動する場合**の $\mathbf{x}, t$ の図表を考える:　ここでは，このような図表を**非相対論的ミンコフスキー図表** (Nonrelativistic Minkowski Diagramme) と呼ぶことにする．

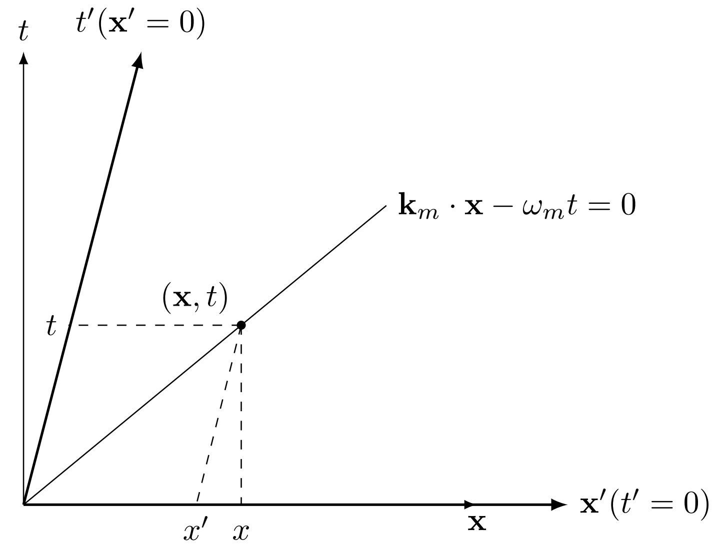

図 1.5　非相対論的ミンコフスキー図表

この図表は，慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ と $\mathcal{S}(\mathbf{x}', t')$ を一緒に表したものである．ここで，t' は慣性系 $\mathcal{S}'(\mathbf{x}', t')$ で $\mathbf{x}' = 0$ となる線なので，式 (1.4) の慣性系により慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ の下では，

$$\mathbf{x} - \mathbf{v}t = 0 \tag{1.9}$$

となる線になるはずだ．これを分かりやすいように慣性系 $\mathcal{S}$ での座標 x に関して表すと:

$$\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\therefore t = \frac{\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}} = \left(\frac{k_m}{\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}} \right) x.} \tag{1.10}$$

ここでは，計算の利便性のために $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{x} = k_m x$ になるように座標系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ を取った．ならば，図 1.5 で示すように，x と x' は次のような関係式を満たす．

$$x - x' = (t' \text{ 軸の傾きの逆数}) \times t = \left(\frac{\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}}{k_m} \right) t \tag{1.11}$$

慣性系 $\mathcal{S}$ で見た波動の伝播速度 $v_m = dx/dt$ および慣性系 $\mathcal{S}'$ で見た波動の伝播速度 $v'_m = dx'/dt'$ の間の関係式を次のように得られる．

$$\boxed{v_m - v'_m = \frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} = \frac{\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{v}}{k_m}.} \tag{1.12}$$

これは式 (1.6) の結果と完全に一致する．つまり，ここでやった作業は 4 ページのものと完全に同じである．このような方法は本格的に相対論が始まったら，**ミンコフスキー図表の方法**として相対論で重要に使われるので，読者には完全に理解して欲しい．

練習問題 1.1(動いてる波源)　波源が速度 $\mathbf{v}$ で運動している慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x},t)$ にいて，停止している慣性系 $\mathcal{S}'(\mathbf{x}',t')$ の上で観察者が波源から発生した波動を観察する状況を考える．このとき，ある慣性系の間の変換 $\mathbb{F}:\mathcal{S}(\mathbf{x},t)\mapsto\mathcal{S}'(\mathbf{x}',t')$ とることで，動いている波源のドップラー効果の一般型を得られる:

$$\omega_{\text{eq}}=\frac{k_m v_m}{k_m v_m+\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{v}}\omega_m$$

練習問題 1.2(ローレンツ変換)　次のような慣性系変換を考える:

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ t'=\gamma\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}, \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

この変換では光速度 c はどの慣性系によっても一定であることを示せ．

1.2　波動方程式： 相対論の出発

今まで，物理学的に波動をどう取り扱うかについて議論した．ならば，ここで最も根本的な疑問が一つある:

ニュートン方程式のように， 波動なら必ず満たす‘波動方程式’は存在するのか？

この質問に答えるためには，式 (1.11) の波動関数の一般系を考えればよい: 書き直す．

$$\psi(\mathbf{x},t)=A_m\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t+\phi) \tag{1.13}$$

ならば，これの時間微分および変位微分は次のように与えられるはずだ．

$$\text{変位微分:}\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(\mathbf{x},t)=-A_m k_x^2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t+\phi) \tag{1.14}$$

$$\text{時間微分:}\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},t)=-A_m\omega^2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t+\phi) \tag{1.15}$$

波動の方程式は次のように与えられる:

$$\boxed{\text{波動方程式:}\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{v_{x_i}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.} \tag{1.16}$$

つまり，波動はすべて式 (1.16) のような方程式を満たす．逆に，この方程式を満たすのはすべて波動になる．

波動方程式のより深い理解のため，いくつの例を考えてみよう．

1.2.1　波動方程式：音波

一般的に音波の波動方程式はある定数 κ_s および空気の密度 ρ を用いて次のように書ける:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_x}{\kappa_s}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.} \tag{1.17}$$

ならば，ここから音波の速度は次のように書けることを分かる．

$$v_s = \sqrt{\frac{\kappa_s}{\rho_x}} \tag{1.18}$$

以上により，音波の伝播速度は**空気の密度・温度**などに依存するということを分かる．これは当然な結果であるが，とっても重要なものだ:

波動の伝播速度は，波長などの波動自身の特徴ではなく，媒質の特殊のみに依存する．

なので，媒質により伝播される波動の伝播速度には，<u>媒質の物理的変数が入っているはず</u>だ．例えば，媒質の密度・温度・温度みたいなことだ:

$$\rho, T, p, \cdots \text{など}$$

媒質の振動により伝播される波動にとっては，その伝播速度が媒質の物理的性質に依存することは当然の結果だ．ここで音波は空気の振動により発生する波動であることを確かめることができた．

1.2.2　波動方程式：電磁波

電磁波は音波とは違う仕組みで伝播される; **媒質が要らない：**

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{1.19}$$

ここで，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ の定数である．(単位省略) ならば，ここから何人の読者は，既に電磁波は媒質なしで伝播できるということを気づいているかも知れない．波動方程式から得られる**媒質の特性によらない一定な定数**であるからだ．式 (1.16) による電磁波の伝播速度は:

$$\boxed{\therefore c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \simeq 3.0 \times 10^8 \quad [\mathrm{m/s}]} \tag{1.20}$$

なので，電磁波はその伝播速度が媒質の性質によらずに一定であることを分かる: 電磁波は媒質のない空間でも進める．電磁波は，媒質ではなく電場 $\mathbf{E}$ **自身が振動することにより**伝播される．

1.3　相対性原理と光速度一定の法則

　今までは，相対論を取り扱えるための基礎的な波動と光の理論について復習した．ここから，読者の皆さんが疑問を持つべきであることは，次のようなことだ:

ある慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ および $\mathcal{S}'(\mathbf{x}', t')$ を Galilei 変換として次のように定義する．

$$\text{Galilei 変換:} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ \\ t' &= t \end{cases} \tag{1.21}$$

相対性原理の核心的な内容はこれだ: どのような慣性系をとってもニュートン方程式は同じくできる．これが一体どういう意味か?

例えば，次のようなことを考えてみよう．前で定義した慣性系 $\mathcal{S}$ を停止している慣性とすれば，ニュートン方程式は明らかに成立する:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}. \tag{1.22}$$

つまり，式 (1.22) が成り立つのは当然のことだ．しかし，慣性系 $\mathcal{S}'$ ではどうなるんだろう? それは，慣性系 $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}'$ の Galilei 変換 (1.21) を式 (1.22) に代入してみると分かる．簡単に，慣性系 $\mathcal{S}'$ が慣性系 $\mathcal{S}$ に対して等速度 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ の相対運動するとする:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \mathbf{v}, \qquad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} + \mathbf{0}. \tag{1.23}$$

ならば，慣性系 $\mathcal{S}'$ での運動法則は:

$$\boxed{\therefore \mathbf{F}(\mathbf{x}', t') = m\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2}.} \tag{1.24}$$

ここで，皆さんはとっても重要な結論に達した！

どのような慣性系をとっても，ニュートン方程式は成立する．

読者の皆さんが互いに一定な相対速度 $\mathbf{v}$ を持つ慣性系 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots, \mathcal{S}_i, \cdots$ を取っても，それぞれの慣性系 $\mathcal{S}_i$ でそれなりの座標系 $(\mathbf{x}_i, t_i)$ に対してのニュートン方程式が成り立つ．

相対性原理

ある慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0, t_0)$ での運動法則を

$$\mathcal{S}: \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0) = m\frac{d^2\mathbf{x}_0}{dt_0} \tag{1.25}$$

とする．ならば，この慣性系 $\mathcal{S}$ と一定な相対速度 $\mathbf{v}_i$ を持つ $\mathcal{S}_i(\mathbf{x}_i, t_i)$ を任意をっとっても同じ運動法則が成り立つ:

$$\mathcal{S}_i: \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, t_i) = m\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt_i}$$

これは，相対論を支える重要な原理なので，読者の皆さんには熟知しておくことを希望する．しかし，ここでとっても重要な注意事項がある:

この原理は互いに等速度関係にある慣性系に限る．

なぜ，互いに相対加速度のある慣性系の間には相対性原理が成り立たないだろうか? 答えは慣性力にある: 互いに**相対加速度**を持つ慣性系の間には，**慣性系変換により慣性力が入れ込む**からだ．次の練習問題で確かめよ:

練習問題 1.3(相対加速度を持つ慣性系) ある慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ での運動方程式を

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

とする．この慣性系 $\mathcal{S}$ と一定な相対加速度 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ を持つある慣性系 $\mathcal{S}'(\mathbf{x}', t')$ とすれば，このときの Galilei 変換は:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' & = \mathbf{x} - \displaystyle\int^t \mathbf{v}\ dt' \\ t' & = t \end{cases}.$$

このとき，慣性系 $\mathcal{S}'$ に対して，次成り立つことを示せ:

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}', t') - m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2}.$$

(これは，**ダランベールの定理**と呼ばれるものである．)

1.3.1　光速度一定の法則

ここまで来たら，読者の皆さんのうち，深い洞察力を持つ方はこのような相対性原理が変な結果を呼び起こすかも知れないという可能性を気づいた方もあるはずだ: **光速度一定の法則**ということだ.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{1.26}$$

ここで，筆者が提示した電磁波の方程式 (1.19) を思い出してみよう．この電磁波の方程式は，ある慣性系 $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$ で観察した方程式であるはずだ．ならば，慣性系 $\mathcal{S}$ とある**一定な相対速度** $\mathbf{v_i}$ を持つある任意の慣性系 $\mathcal{S}_i(\mathbf{x}_i, t_i)$ を取ったとする:

$$\boxed{\text{相対性原理:} \quad \mathcal{S}_i \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) & \mapsto \mathbf{E}_i(\mathbf{x}_i, t_i) \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} & \mapsto \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_i^2} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t_i^2} \end{cases}.} \tag{1.27}$$

ここで，相対性原理により式 (1.27) が成り立つことに注意せよ．どんな相対速度 $\mathbf{v}_i$ を持つ慣性系 $\mathcal{S}_i$ をとっても**電磁波の波動方程式の形態**は変わらない: これが相対性原理の意味である.

$$\mathcal{S}_i(\mathbf{x}_i, t_i): \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_i^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t_i^2} \tag{1.28}$$

ここでの核心は，μ_0, ϵ_0 は基本物理定数なので**慣性系を変えても変わらない値**であることだ．つまり，慣性系 $\mathcal{S}$ に対して，どんな相対速度 $\mathbf{v}_i$ を持つ慣性系で見ても電磁波の伝播速度はいつも一定な値として測定される:

$$c(\mathcal{S}) = c(\mathcal{S}_1) = \cdots = c(\mathcal{S}_i) = \cdots = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \tag{1.29}$$

ここで，$c(\mathcal{S}), c(\mathcal{S}_1), \cdots, c(\mathcal{S}_i)$ はそれぞれの慣性系 $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \cdots, \mathcal{S}_i$ で観測した電磁波の速度とする．これがそんなにも有名な**光速度一定の法則**である:

光速度一定の法則

光速度 c はどの慣性系において測定してもいつも同じ値で観測される:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3.0 \times 10^8 \quad [\mathrm{m/s}]$$