力 学 I 演 義 答 案 作 成 要 領

連 成 振 動

2-Coupled Oscillator

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

担当：渡辺　純二（アドバンスト）

LaTeX

◇ M39 (424ー1)

(計　算　用　紙)

〔１〕**(長波長極限と連続方程式)** 前回の演義 No.10 によると，ポテンシャルが:

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{1}{2}kx_1^2 + kx_N^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2}k(x_{n+1} - x_n)^2$$

となることが分かる．参考として，ダイヤグラムを描けば: のようになるこ

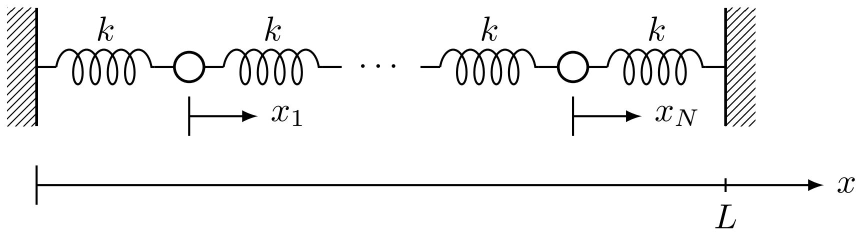

図 1. N 個の粒子における連成振動

とも分かる．以上により，このときの運動方程式は次のように与えられる．

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \tag{1}$$

ただし，全開で定めたように $x_0 = x_{N+1} = 0$ とする．ならば，前回の演義の結果により，次のようなものが分かった:

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right) Q_p(t) \tag{2}$$

さらに，ここからは $N \to \infty$ の無数に多い数の粒子系を考える．そのため，次のような新しい座標系 z_n を定まる:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \quad z_{N+1} = L \\ z_n = an \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \cdots, N+1)$$

その対応をダイヤグラムで示したら下記の通りである．

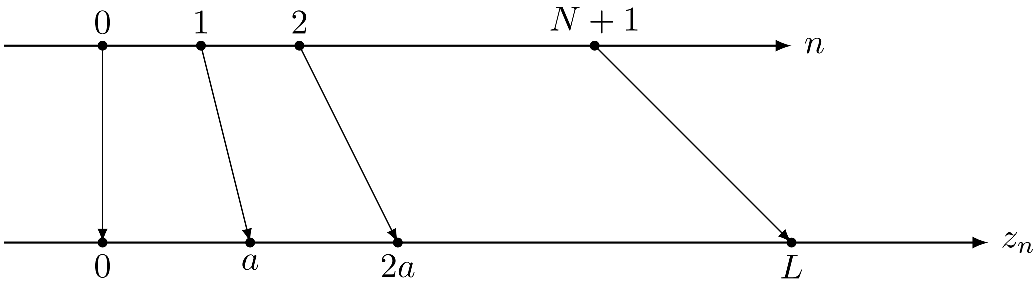

図 2. 座標系の対応

以上の定義により，ここのパラメータ a は，$z_{N+1} = a(N+1) = L$ のことから:

$$\therefore a = \frac{L}{N+1}$$

を分かる．つまり，定めた座標系 z_n は次のようにも書ける．

$$z_n = \left(\frac{L}{N+1}\right) n \qquad (n = 0, 1, \cdots, N+1) \tag{3}$$

このことを式 (2) に代入することにより，次のように考えることができる．

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{p\pi}{L} z_n\right) Q_p(t) \qquad \cdots (*)$$

ただし，ここでの間隔 Δz_n は:

$$\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \frac{L}{N+1}.$$

ここまで，$N \to \infty$ の極限を与えるすべての準備ができている．さらに，極限 $N \to \infty$ のとき:

$$dz = \lim_{N \to \infty} \Delta z_n = \lim_{N \to \infty} \frac{L}{N+1} \to 0$$

となり，このときには z_n は連続的な関数になることも分かる ($z_n \to z$).

よって，ここから $N \to \infty$ の極限を考えれば, [*1]

$$x(z,t) = \lim_{N\to\infty} x_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) Q_p$$

のようになることが分かる．ならば，ここまで，十分多い数の N に対しては変数 z 関数として $x(z,t)$ で書けることが分かった．なので，このような N の範囲では近似的に次のような式が成り立つ:

$$x_{n\pm1}(t) \simeq x(z\pm a,t) = x(z,t) \pm \frac{1}{1!}\frac{\partial x}{\partial z}a + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}a^2 \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 x}{\partial z^3}a^3 + \mathcal{O}(a^4)$$

ここで，$x_n \simeq x(z,t)$ として近似される．これが理解できない場合は:

$$z_{n\pm1} = a(n\pm1) = z_n \pm a \simeq z \pm a$$

を参考にすればよい．ここで，皆さんが注意すべきことは，$x_n(t)$ は**ばねに繋がれている個々の物体のそれぞれの運動を示す**が，$x(z,t)$ は**ある連続的な**

[*1] 前回の演義によると:

$$Q_p = \sum_{n=1}^{N} c_n^p x_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right) x_n$$

であった．ここで，$z_p = pa$ を入れて次の計算をしてみると:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^p)^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{N+1} \sin^2\left(\frac{p\pi}{N+1}n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{p\pi}{L}z_n\right)\,\Delta z_n$$

なので，これは定積分の定義により次のようになることが分かる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^p)^2 = \int_0^L \sin^2\left(\frac{p\pi}{L}z\right)\,dz$$

なので，$N \to \infty$ で考えるときは:

$$(c_n^p)_{N\to\infty} \mapsto \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right)$$

として入れ替えて考えても問題がない．もちろん，$c_n^p = c_p^n$ なので，$\sum_{p=1}^{\infty}(c_n^p)^2$ のときも同様である．つまり，$N \to \infty$ では:

$$x_n = \sum_{p=1}^{\infty} c_n^p Q_p = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) Q_p.$$

流体 (連続系) の一連の運動[*2]を示すことである．以上のことをまとめれば，最初の運動方程式 (1) から，次のような新たな方程式が導かれる．

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = k(x_{n+1} - x_n + x_{n-1} - x_n)$$

$$\simeq k\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}a + 2\mathcal{O}(a^4)\right)$$

一方で，$N \to \infty$ の非常に多い数の物体系の連続近似を使っているので，このときのパラメータ a は:

$$\lim_{N\to\infty} a = \lim_{N\to\infty} \frac{L}{N+1} \to 0$$

のほど小さい．より，このことから $\mathcal{O}(a^4) \to 0$ として無視することもできる．ならば，近似的に:

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{ka}{m}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}$$

が成り立つ．このようなことを**波動方程式**と呼ぶ．さらに，ここの伝播速度として:

$$v_w = \sqrt{\frac{ka}{m}}$$

とすれば，波動方程式はもっと一般に次のような式で表せる．

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v_w^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{4}$$

逆に言えば，**式 (4) の形の方程式を満たすものはすべて波動**である!!

[*2] ばねに繋がれている個々の物体の運動の場合は，$0 \leq x \leq L$ の間に，物体がない穴が存在する．そういう**離散的な運動を示す**のが $x_n(t)$ である．しかし，このような物体がどんどん増えて数えれないほどに増えれば，**物体はほぼ空間を埋めるコンパクト** (Compact) な状態になる．これは，いわゆる媒質の運動を示すことになる．例えば，音波の空気の振動など…

波長の話 (?)

一方で，得られた波動方程式の一般解として:

$$x(z,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right)$$

の関係式で，講義ノートの式 (2.4.30) のように書けることを認めれば，ここの位相 (sin の中にあるもの) を次のようにも書ける:

$$\frac{p\pi}{L} z = k_p z \qquad (p = 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

もちろん，ここの k_p は波数と呼ばれるもので次のように定義される．(授業で出た)

$$k_p = \frac{2\pi}{\lambda_p} \tag{6}$$

なお，ここの式 (5) と (6) を合わせると素晴らしい結果が得られる！！

$$\boxed{\therefore \lambda_p = \frac{2L}{p} \qquad (p = 1, 2, \cdots)}$$

これは，高校で習った，「**両端が固定されている弦における定常波条件**」と全く同じである．これは，ここでも $x_0 = x_{n+1}$ として両端が固定されているからである！！

〔 2 〕問題 1 で求めた伝播速度 v_w の波動方程式:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v_w^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

の一般解を考える．ここで，この波動方程式の一般解は講義ノートの式 (2.4.50) で与えられたように:

$$x(z,t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left[A_\mu \frac{e^{i(k_\mu z + \omega_\mu t)}}{\sqrt{L}} + B_\mu \frac{e^{i(k_\mu z - \omega_\mu t)}}{\sqrt{L}} \right] \tag{7}$$

で書ける．ここで，パラメータ (波数)k_μ は次のように定義される:

$$k_\mu = \frac{2\pi\mu}{L}\ , \qquad\qquad \Delta k_\mu = k_{\mu+1} - k_\mu = \frac{2\pi}{L}$$

今から，考えることは，空間全体 ($L \to \infty$) に伝播される波動の運動を考える．より，極限 $L \to \infty$ を考えてみる．そのため，注意 (*1) と同じ方法を採用し，ある変換関数 $f(k_\mu)$:

$$f(z) = \frac{e^{ik_\mu z}}{\sqrt{L}}\ , \qquad f^\dagger(z) = \frac{e^{-ik_\mu z}}{\sqrt{L}} \qquad\qquad (\mu = 1, \cdots, N)$$

で定め，$L \to \infty$ を取り，次の計算を行う．

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f(z) f^\dagger(z') = \lim_{L\to\infty} \frac{e^{ik_\mu(z-z')}}{2\pi} \underbrace{\left(\frac{2\pi}{L}\right)}_{\Delta k_\mu}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ik(z-z')} = \delta(z - z')$$

ここで，これが積分に変わった理由は，極限 $L \to \infty$ を取ることにより:

$$dk = \lim_{L\to\infty} \Delta k_\mu \to 0; \qquad\qquad k_\mu \to k$$

となり，数列 k_μ も連続的な k の関数になったからである．この結果によって，極限 $L \to \infty$ では**演算子**として，次のように書ける:

$$(\text{演算子}): \qquad \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f(k_\mu)\ \to\ \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikz} \tag{8}$$

ここの式 (8) の意味が分からなかった方は，次のように理解しても良い:

ある任意の関数 $Q(k_\mu)$ に対して，極限 $L \to \infty$ では，次のようになる．

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f(k_\mu) Q(k_\mu) \ \to \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ e^{ikz} Q(k)$$

ここで，$Q(k_\mu) = f^\dagger(k_\mu)$ と置くと，上で求めた当然な結果になる．より，式 (8) の結果を式 (7) に代入すると，$L \to \infty$ では:

$$k_\mu \to k \ , \qquad \omega_\mu \to \omega(k) \ , \qquad A_\mu \to A(k) \ , \qquad B_\mu \to B(k)$$

となり，式 (7) は次のようになる．

$$x(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ \left[A(k) e^{i(kz+\omega(k)t)} + B(k) e^{i(kz-\omega(k)t)} \right]$$

より，ここで問題で与えられた初期条件を入れたら，求める $t = 0$ 以後での波動の伝播を分かる．

$$\xi(z) = x(z,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ \left[A(k) + B(k) \right] e^{ikz}$$

$$\eta(z) = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ i\omega(k) \left[A(k) - B(k) \right] e^{ikz}$$

(B) ここで，$\eta(z) = 0$ であることから，次のように $\xi(z)$ も簡単に決められる．

$$\eta(z) = 0; \qquad \therefore A(k) = B(k)$$

より，関数 $\xi(z)$ は:

$$\xi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ 2A(k) e^{ikz}$$

となり，ここから Fourier's Trick を用いると，逆に $A(k)$ が求められる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z) e^{-ik'z} \ dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ 2A(k) \ \underbrace{2\pi\delta(k-k')}_{\int_{-\infty}^{\infty} dz \ e^{i(k-k')z}} = 2A(k')$$

以上により，$A(k)$ は次のように書ける:

$$A(k) = B(k) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z) e^{-ikz}\ dz. \tag{9}$$

ここで，式 (9) を波動関数 $x(z,t)$ の式に代入して，散関係式 $kv = \omega(k)$ 用いると，次のように $t > 0$ での波動の伝播式を得られる．

$$\begin{aligned} x(z,t) &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z')e^{ik(z+vt-z')} + \xi(z')e^{ik(z-vt-z')}\ dk\ dz'\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z')\delta(z+vt-z') + \xi(z')\delta(z-vt-z')\ dz'\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\xi(z+vt) + \xi(z-vt)\right\}. \end{aligned}$$

より，$t > 0$ での波動の伝播は次のように与えられる．

$$\boxed{x(z,t) = \frac{1}{2}\left\{\xi(z+vt) + \xi(z-vt)\right\}.}$$

(A) このことを拡張すれば，次のようなこともできる:

$$A(k) + B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(z)e^{-ikz}\ dz$$

$$A(k) - B(k) = \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i}{k}\eta(z)e^{-ikz}\ dz$$

この連立方程式を解けば:

$$A(k) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z)e^{-ikz}\ dz + \frac{1}{2v}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{ik}\ dz$$

$$B(k) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(z)e^{-ikz}\ dz - \frac{1}{2v}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{ik}\ dz$$

を得られる．

これを $x(z,t)$ の式に代入すれば，その一般解を得られる:

$$\frac{1}{2}\iint \xi(z')e^{ik(z\pm vt-z')}\ dk\ dz' = \frac{\xi(z\pm vt)}{2} \tag{10}$$

であることが問題 (B) で分かった．続いて下記のものも計算する．

$$\frac{1}{2v}\iint \frac{e^{ik(z\pm vt-z')}}{ik}\eta(z')\ dk\ dz' = \frac{1}{2v}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(z\pm vt-z')\eta(z')\ dz' \tag{11}$$

ここで，次の関係式を利用した:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(z\pm vt-z')}}{ik}\ dk &= \int_{z'}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(z\pm vt-z'')}\ dk\ dz'' \\ &= \int_{z'}^{\infty}\delta(z\pm vt-z'')\ dz'' = \theta(z\pm vt-z').\end{aligned}$$

とすれば，この $\theta(z\pm vt-z')$ は階段関数と呼ばれるものとして，次のように定義されれば良い．

$$\theta(z\pm vt-z') = \begin{cases} 1 & (z' < z\pm vt) \\ 0 & (z' \geq z\pm vt)\end{cases} \tag{12}$$

以上のことにより，式 (10) はある定数 $\alpha(\alpha < z\pm vt)$ に対して次のようにも書けることが分かる．

$$\frac{1}{2v}\iint \frac{e^{ik(z\pm vt-z')}}{ik}\eta(z')\ dk\ dz' = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{z\pm vt}\eta(z')\ dz' \tag{13}$$

より，式 (10) と (13) の結果を合わせると次のものを得られる．

$$\begin{aligned}x(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}dk\ \left[A(k)e^{i(kz+\omega(k)t)} + B(k)e^{i(kz-\omega(k)t)}\right] \\ &= \frac{\xi(z+vt)+\xi(z-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\lim_{\alpha\to-\infty}\left(\int_{\alpha}^{z+vt}\eta(z')\ dz' + \int_{z-vt}^{\alpha}\eta(z')\ dz'\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\xi(z+vt)+\xi(z-vt)\right\} + \frac{1}{2v}\int_{z-vt}^{z+vt}\eta(z')\ dz'\end{aligned}$$

以上のことにより，次のこと得られる:

$$\boxed{x(z,t) = \frac{1}{2}\left\{\xi(z+vt) + \xi(z-vt)\right\} + \frac{1}{2v}\int_{z-vt}^{z+vt} \eta(z')\ dz'.}$$