単極子場での粒子の量子電気力学とそのゲージ対称性に関して

About the QED of particles on Monopole fields and Gauge symmetry

KIM Dohyun

Onogi Group, Hep-th., Dept. of Phys., Osaka Univ.

September 21, 2023

大阪大学
OSAKA UNIVERSITY

目次

References for our study

- Ya. Shnir, “Magnetic Monopoles”, Springer(2005)
- 西岡辰磨, “電磁気学 I”（大阪大学の講義ノート[1]: Topological Insulators）
- 西岡辰磨, “Quantum Field Theory”（大阪大学の講義ノート）
- 佐藤亮介, “相対論的量子力学/場の理論序説”（大阪大学の講義ノート）
- 川村嘉春,『相対論的量子力学』, 裳華房（2012）
- 坂本眞人,『場の量子論: 不変性と自由場を中心にして』, 裳華房（2014）

[1] 令和 5 年度春夏学期，最終回特別講義.

Notations and Covention

この報告では別の指示がない限り，**自然単位系 (Natural Units)** を使う：

$$c = \mu_0 = \epsilon_0 = \hbar = k_B = 1. \tag{1}$$

また，Mincowski 計量の符号規約

$$\eta^{\mu\nu} := \mathrm{diag}(+, -, -, \cdots, -), \tag{2}$$

カイラル表示としての Dirac 行列 γ^μ, Dirac の slash 規約 $\not{p}$ および Dirac スピノル ψ は以下のように規約する:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \not{p} := \gamma^\mu p_\mu , \qquad \psi = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

ただし，$(\frac{1}{2}, 0)$ と $(0, \frac{1}{2})$ は Left-handed Weyl spinor と Right-handed Weyl spinor を示す.

The Correction of Maxwell Fields

体積電荷密度 ϱ_e と体積磁荷密度 ϱ_g が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\varrho_e\ ,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\varrho_g\ ,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\left(\mathbf{J}_g(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)\ ,\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}_e(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t).$$

Action integral of Monopole Fields

単極子場の作用積分を書くため，4 元電荷ポテンシャル A^μ および 4 元磁荷ポテンシャル B^μ：

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} , \qquad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする．

QED on U(1) gauge fields

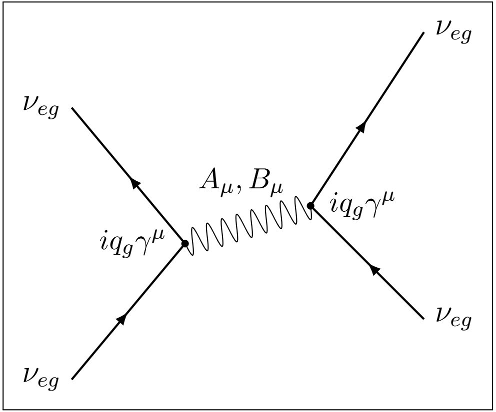

Figure: The Dyon-Dyon U(1) interaction

Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (5) の上に，**相対論的共変性**と**ゲージ不変性**を加えると，系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$S = -\int \frac{1}{4(q_e^2+q_g^2)}[D^\mu, D^\nu]^2 \, d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \, d^4x + \int (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - m^2(\Phi^*\Phi) \, d^4x \tag{6}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (6) のように書いた時の **4 元ポテンシャル** A^μ, B^μ および**スピノル** $\psi(x^\mu)$ のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto \quad A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) \ , \\ B_\mu & \mapsto \quad B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) \ , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto \quad e^{-iq_e\Lambda(x^\mu)-iq_g\Gamma(x^\mu)}\psi(x^\mu) \end{cases} \tag{7}$$

を想定すると，系の共変微分 D_μ を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_eA_\mu + iq_gB_\mu. \tag{8}$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル $G_{\mu\nu}$ を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2+q_g^2}}(q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}). \tag{9}$$

ここでテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$, $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} B_{\nu]}$ とする.

The Maxwell equations of Dyons

それぞれの 4 元カレント J^μ, K^μ を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi\} + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \ , \tag{10}$$

$$K^\mu \equiv iq_g\{\Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi\} + g\bar{\psi}\gamma^\mu \psi . \tag{11}$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) J^\nu \ , \tag{12}$$

$$q_g^2 \partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) K^\nu . \tag{13}$$

The Noether currents

4 元ポテンシャル A_μ, B_μ があるパラメーター λ に沿って変分:

$$\delta A_\mu(\lambda) = \frac{\partial A_\mu(\lambda)}{\partial \lambda}\delta\lambda\ , \qquad \delta B_\mu(\lambda) = \frac{\partial B_\mu(\lambda)}{\partial \lambda}\delta\lambda \tag{14}$$

を与えるときの Noether current は以下のように決まる.

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial_\nu A_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\mu B_\sigma)}\partial_\nu B_\sigma - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}_f, \tag{15}$$

Noether Currents(場の理論)

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\hat{q}}G^{\lambda\sigma}G^\mu{}_\sigma + \frac{1}{4}g^{\lambda\mu}G_{\rho\sigma}G^{\rho\sigma}. \tag{16}$$

Determination of EM Fields

電磁場の決定 (Determination of EM fields)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) \\
&\qquad - \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_g) - \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_e)\ , \\
\mathbf{B} &= \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\boldsymbol{\nabla}\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) \\
&\qquad + \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_g)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Construction of Dyon-electron system-SU(2) Gauge theory

電子 e^- とダイオン ν_{eg} が**相互作用するもの**として，系のスピノルをスピノル ψ_e と $\psi_{\nu_{eg}}$ の二重項として以下のように書く：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \tag{18}$$

ここで 3 元パラメーター $\boldsymbol{\alpha}$ を用意してゲージ群 SU(2) のスピノル変換を：

$$\Psi \quad \mapsto \quad \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \simeq \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Psi \tag{19}$$

として設定する．

QED on SU(2) gauge fields

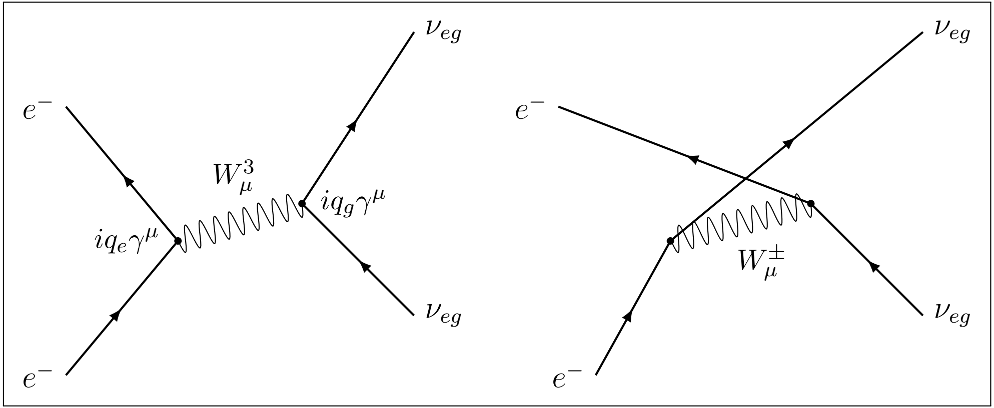

Figure: The Yang-Mills interaction

Determination of Gauge fields

以下の要請を加えると，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を決定できる：

Dirac 場の要請

電子は A_μ 場とは相互作用するが，B_μ 場は受け取ることしかできない．

ダイオンは A_μ と B_μ の両場と相互作用する．

以上の条件から，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は以下のみが許される：

$$W_\mu^1 = q_g B_\mu \ , \quad W_\mu^2 = q_e A_\mu \ , \quad W_\mu^3 = q_e A_\mu . \tag{20}$$

QED of SU(2) Gauge theory

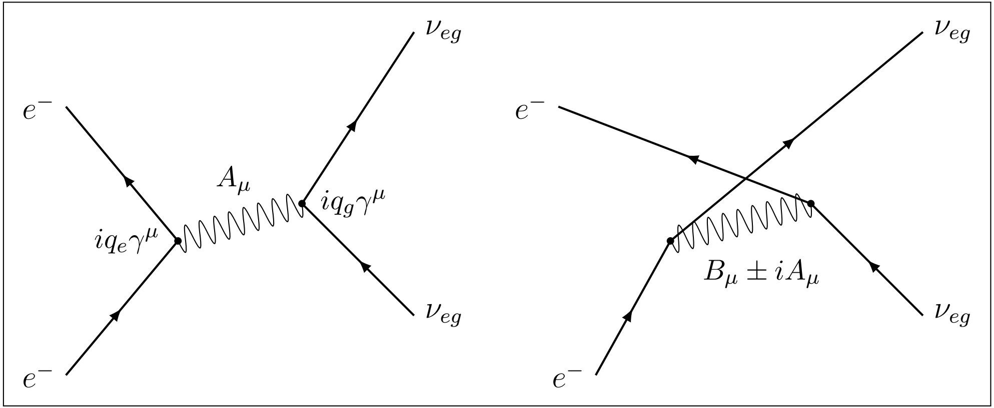

Figure: The SU(2) gauge fields on action-reaction breaking

Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (20) より，Dirac 場の Lagrangian は：

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}_e \left(i\not{\partial} - q_e \not{A} - m\right) \psi_e - \bar{\psi}_e (q_e \not{B} - i q_g \not{A}) \psi_{\nu_{eg}} \\ + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\not{\partial} + q_e \not{A} - m\right) \psi_{\nu_{eg}} - \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (q_e \not{B} + i q_g \not{A}) \psi_e .$$

ダイオンの部分極限 $q_g \to 0,\ B_\mu \to 0$ の下では **U(1) ゲージ場**に収束する：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e (i\not{\partial} - q_e \not{A} - m) \psi_e + \bar{\psi}_e^c (i\not{\partial} - q_e \not{A} - m) \psi_e^c . \tag{21}$$

Continuous condition to absence of Monoole charges

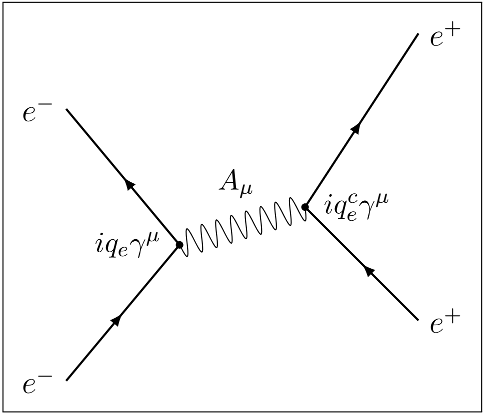

Figure: In case of absence of monopole charges($q_g, B_\mu \to 0$)

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

場の強さ $H^k_{\mu\nu}$ は以下のものとして切り替えても良い.

$$H^k_{\mu\nu} \quad \mapsto \quad \partial_{[\mu} W^k_{\nu]} - g\epsilon_{ijk} W^i_\mu W^j_\nu \ , \qquad (k = 1, +, -) \tag{22}$$

場の強さ $H^k_{\mu\nu}(k = 1, 2, 3)$ を以下のように計算できる：

ゲージ場の曲率 (Curvature tensors of Gauge field)

$$H^1_{\mu\nu} = \frac{q_g}{\hat{q}} E_{\mu\nu} \ , \qquad H^\pm_{\mu\nu} = \frac{q_e}{\hat{q}} F_{\mu\nu} \pm 2\frac{q_e q_g}{\hat{q}^2} A_{[\mu} B_{\nu]} . \tag{23}$$

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

式 (23) の結果を踏まえると，系のゲージ場のみの Lagrangian 密度は以下になるのが一番正しい：

$$\mathcal{L}_{\text{field}}^{\text{SU}(2)} = -\frac{q_g^2}{8\hat{q}^2} E_{\mu\nu} E^{\mu\nu} - \frac{q_e^2}{4\hat{q}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \underbrace{\frac{q_e^2 q_g^2}{\hat{q}^4} f_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu B^\nu A^\rho B^\sigma}_{\text{ゲージ結合項}} . \tag{24}$$

ゲージ場の Lagrangian 密度から，系全体の SU(2) ゲージ対称性は壊れていないが**ゲージ結合項**が現れた．$(f_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda})$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (19) により，ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ を用意すると系の共変微分 D_μ は：

$$\partial_\mu \quad \mapsto \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu(x^\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{25}$$

として定義できる．パウリ行列が非可換で $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ となることに注意して，以下の Dirac 方程式：

$$\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) - m\right]\begin{pmatrix}\psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}}\end{pmatrix} = 0 \tag{26}$$

が不変になるようにゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の変換則を決める．

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (26) が不変になるための変換 $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$ は：

$$i\gamma^\mu\left[(\partial_\mu U) - \frac{ig}{2}U(\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2}(\mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma})U\right]\Psi = 0 \qquad (27)$$

の関係を満たすべきである．SU(2) 群の生成子 $U = \mathbf{1} - \frac{ig}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ とする．

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad\mapsto\quad \mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma})U^{-1} + \frac{2i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \qquad (28)$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (28) にゲージ群の生成子 U を代入して具体的に計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} &= \left(\mathbf{1}-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &\quad+\frac{2i}{g}\left(-\frac{i}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\mathbf{1}+\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\\ &=\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}-\frac{i}{2}\alpha^i W^j_\mu[\sigma^i,\sigma^j]+\frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned} \tag{29}$$

導入したゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ は式 (29) の変換式を満たす.

Charge-conjugation and Positrons on SU(2) gauge Fields

磁荷のない極限 $(q_g, B_\mu \to 0)$ では，SU(2) 模型のゲージ場 (18) は：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \to 0} \bar{\psi}_e \left(i\partial\!\!\!/ - q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_e + iq_e\bar{\psi}_e A\!\!\!/ \psi_{\nu_{eg}} + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left(i\partial\!\!\!/ + q_e A\!\!\!/ - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - iq_e\bar{\psi}_{\nu_{eg}} A\!\!\!/ \psi_e .$$

ここから，荷電共役変換 $\psi^c = (i\gamma^2\gamma^0)\bar{\psi}^T$ を考えると

$$i(q_e\bar{\psi}_e A\!\!\!/ \psi_e^c - q_e\bar{\psi}^c A\!\!\!/ \psi_e) = 0 \tag{30}$$

となるので，$\psi_{\nu_{eg}} = \psi_e^c$ が 1 つの解になることが分かる $(\psi_{\nu_{eg}} \to \psi_e^c)$.