1.6　アインシュタインの縮約規則とベクトル微積分学

電磁気学では，ベクトルとしての様々な物理量を使ってベクトルの微分，勾配，発散，回転などの演算を行うことが多い:

$$\mathbf{A}\ ,\quad \varphi \quad \mapsto \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt}\ ,\quad \boldsymbol{\nabla}\varphi\ ,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\ ,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\ ,\cdots \quad \text{など} \tag{1.6.1}$$

一般的に式 (1.6.1) に示すような演算を行うことはとっても計算が複雑なものである．この節では，「**アインシュタインの縮約規則**」および「**完全反対称テンソル**」を用いて，より簡単なベクトル演算の計算方法について学ぶ.

1.6.1　完全反対称テンソルの定義

3 階の完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\delta}$ は次のように置換を用いて定義される.

$$\epsilon_{\mu\nu\delta} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma), & \mu=\sigma(1), \nu=\sigma(2), \delta=\sigma(3) \\ \\ 0, & \text{else} \end{cases} \tag{1.6.2}$$

ここで，置換 $\sigma \in S_3$ は次のように定義される:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}, \qquad (\sigma \in S_3) \tag{1.6.3}$$

ここの辺りは，前期の線形対数で習ったものである (試験も受けてた!)．分からない方は，反省しながら，線形対数のテキストを見ながら復習しよう．

一方で，$\epsilon_{\mu\nu\delta} = 0$ となる場合は，置換として表せれない:

$$(\mu,\nu,\delta) = (1,1,2),\ (1,2,2),\ \cdots \tag{1.6.4}$$

などである．このように定義されたテンソル $\epsilon_{\mu\nu\delta}$ を**完全反対称テンソル**，あるいは，**レヴィ＝チヴィタ記号**と呼ぶ.

1.6.2　完全反対称テンソルと行列

このこと (完全反対称テンソルの定義) を分かったら，次のある 3 次正方行列 $A = [a_{\mu\nu}]_{3\times 3}$ の行列式が次のように書けることが分かる:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = \sum_{\mu,\nu,\delta} \epsilon_{\mu\nu\delta} a_{1\mu} a_{2\nu} a_{3\delta}. \tag{1.6.5}$$

このことから，ベクトルの外積も次のように簡単に書ける.

つまり，あるベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の間の外積:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1 & \hat{\mathbf{r}}_2 & \hat{\mathbf{r}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} = \left(\sum_{\mu,\nu,\delta} \epsilon_{\delta\mu\nu} A_\mu B_\nu \right) \hat{\mathbf{r}}_\delta. \tag{1.6.6}$$

あるいは，完全反対称テンソルの定義から，$\epsilon_{\delta\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\delta}$ が成り立つことを用いると，より簡単に外積の成分ごとで:

$$\boxed{\therefore (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\delta = \sum_{\mu,\nu} \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu.} \tag{1.6.7}$$

として書ける．これは，とっても重要な結果である．理解のため，$\delta = 1$ をとり，例として計算してみる．$\epsilon_{\mu\nu\delta} \neq 0$ となる組は:

$$(\mu, \nu, \delta) = (2, 3, 1)\ ,\quad (3, 2, 1)$$

しかない．より，

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = \underbrace{\epsilon_{231}}_{1} A_2 B_3 + \underbrace{\epsilon_{321}}_{-1} A_3 B_2 = A_y B_z - A_z B_y.$$

を分かる．これは，既知の外積の定義とも一致することが確かめられる．

1.6.3　完全反対称テンソルの特性

今まで，行列と完全反対称テンソルの関係について調べた．ならば，次のことを計算することで，素晴らしい結論に辿り着く．

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\mu,\nu,\delta} \epsilon_{\mu\nu\delta} (AB)_{1\mu} (AB)_{2\nu} (AB)_{3\delta} \\ &= \sum_{\mu,\nu,\delta} \sum_{l,m,k} \epsilon_{\mu\nu\delta} (a_{1l} b_{l\mu})(a_{2m} b_{m\nu})(a_{3k} b_{k\delta}) \\ &= \sum_{\mu,\nu,\delta} \sum_{l,m,k} \epsilon_{\mu\nu\delta} a_{1l} a_{2m} a_{3k} b_{l\mu} b_{m\nu} b_{k\delta} \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

一方で，行列式の積 $\det A \det B$ は:

$$\begin{aligned} \det A \det B &= \left(\sum_{\mu',\nu',\delta'} \epsilon_{\mu'\nu'\delta'} a_{1\mu'} a_{2\nu'} a_{3\delta'} \right) \underbrace{\left(\sum_{l',m',k'} \epsilon_{l'm'k'} b_{l'1} b_{m'2} b_{k'3} \right)}_{\det B^t} \\ &= \sum_{\mu',\nu',\delta'} \sum_{l',m',k'} \epsilon_{\mu'\nu'\delta'} \epsilon_{l'm'k'} a_{1\mu'} a_{2\nu'} a_{3\delta'} b_{l'1} b_{m'2} b_{k'3}. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

ここから，前期の線形対数で習った $\det(AB) = \det A \det B$ を用いて互いの項が一致されるように比べる (赤い添え字と青い添え字に注目して見てみよう).

$$\underbrace{\sum_{\mu,\nu,\delta}\sum_{l,m,k}\epsilon_{\mu\nu\delta}a_{1l}a_{2m}a_{3k}b_{l\mu}b_{m\nu}b_{k\delta}}_{L} = \sum_{\mu',\nu',\delta'}\sum_{l',m',k'}\epsilon_{\mu'\nu'\delta'}\epsilon_{l'm'k'}a_{1\mu'}a_{2\nu'}a_{3\delta'}b_{l'1}b_{m'2}b_{k'3}$$

ここから，次のような関係が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned}
L = &\sum_{l,m,k} a_{1l}a_{2m}a_{3k}(b_{l1}b_{m2} - b_{m1}b_{l2})b_{k3} \\
&+ \sum_{l,m,k} a_{1l}a_{2m}a_{3k}(b_{m1}b_{k2} - b_{k1}b_{m2})b_{l3} \\
&+ \sum_{l,m,k} a_{1l}a_{2m}a_{3k}(b_{k1}b_{l2} - b_{l1}b_{k2})b_{m3} \\
= &\sum_{\mu',\nu',\delta'}\sum_{l',m',k'}\underbrace{\left(\det\begin{bmatrix}\delta_{\mu'l'} & \delta_{\mu'm'} & \delta_{\mu'k'} \\ \delta_{\nu'l'} & \delta_{\nu'm'} & \delta_{\nu'k'} \\ \delta_{\delta'l'} & \delta_{\delta'm'} & \delta_{\delta'k'}\end{bmatrix}\right)}_{\epsilon_{\mu'\nu'\delta'}\epsilon_{l'm'k'}} a_{1\mu'}a_{2\nu'}a_{3\delta'}b_{l'1}b_{m'2}b_{k'3}
\end{aligned}$$

このことから，次の結論に辿り着く:

$$\boxed{\epsilon_{\mu'\nu'\delta'}\epsilon_{l'm'k'} = \det\begin{bmatrix}\delta_{\mu'l'} & \delta_{\mu'm'} & \delta_{\mu'k'} \\ \delta_{\nu'l'} & \delta_{\nu'm'} & \delta_{\nu'k'} \\ \delta_{\delta'l'} & \delta_{\delta'm'} & \delta_{\delta'k'}\end{bmatrix}.} \tag{1.6.10}$$

特に，$\delta' = k'$ の場合は:

$$\boxed{\epsilon_{\mu'\nu'k'}\epsilon_{l'm'k'} = \det\begin{bmatrix}\delta_{\mu'l'} & \delta_{\mu'm'} & 0 \\ \delta_{\nu'l'} & \delta_{\nu'm'} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \delta_{\mu'l'}\delta_{\nu'm'} - \delta_{\mu'm'}\delta_{\nu'l'}.} \tag{1.6.11}$$

これは，とっても重要な結果なので覚えてほしい.

1.6.4　アインシュタインの縮約規則

この縮約規則法則は，成分などの上下添え字を持つものからなる総和:

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu x_\mu \tag{1.6.12}$$

を次のように，より簡単に書くための記法である.

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu x_\mu \xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}} c_\mu x_\mu \tag{1.6.13}$$

これが，いわゆる**アインシュタインの縮約規則**と呼ばれる，略された表記法である．この場合は，総和の指数 μ で表したある一般項 $c_\mu x_\mu$ 書いといて，それ以外の総和記号 $\sum_{\mu=1}^{N}$ は略した．これは，総和の範囲 $1 \leq \mu \leq N$ だけを覚えておくと，総和記号は次のように**いつでも復活させる**ことができる:

$$c_\mu x_\mu \xrightarrow{\text{対数的記法}} \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu x_\mu \tag{1.6.14}$$

アインシュタインの縮約規則は，このようなこと[*1]に基づいて行われる．

練習のため，次のような色々な計算に対して縮約規則を適用してみる．総和の指数が 3 個ある場合は:

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\delta=1}^{N} a_\mu b_\nu c_\delta d_\mu e_\nu f_\delta \xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}} a_\mu d_\mu b_\nu e_\nu c_\delta f_\delta \tag{1.6.15}$$

のように略することができる．つまり，**同じ添え字が 2 回被るもの**を探して，縮約したり，復元すればよい．逆に，例として，アインシュタインの縮約規則からの復元の場合は:

$$\epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu \xrightarrow{\text{対数的記法}} \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_\delta \tag{1.6.16}$$

となり，外積を意味することが簡単にわかる．しかし，ここでは，とっても大事な**注意事項**が 1 つある:

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \overset{?}{\to} c_\mu \tag{1.6.17}$$

のよに，**1 個の添え字**からなる総和を上式のように**略することはない**！ その理由は，頭がいい人は次式を計算するときに自然に分かるだろう．

$$a_\mu b_\nu c_\mu \overset{?}{\to} \left(\sum_{\mu=1}^{N} a_\mu c_\mu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{N} b_\nu\right), \qquad a_\mu b_\nu c_\mu \overset{?}{\to} \left(\sum_{\mu=1}^{N} a_\mu c_\mu\right) b_\nu \tag{1.6.18}$$

式 (1.6.17) のようなものも略して書くことになると，総和記号 $\sum$ を復元するときに，上式で示す **2 つのケースのうち，どっちなのか分からなく**なってしまう．この理由により，1 つのみの添え字が現れる総和は略しないことにする．

(例)

$$\epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu \xrightarrow{\text{対数的記法}} \underbrace{\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}}_{\mu,\nu\text{ のみが 2 回現れる．}} \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu \tag{1.6.19}$$

[*1] いつでも，総和記号を復活させる．どうせ，演算の過程では最初に想定した総和記号 $\sum_{\mu=1}^{N}$ は変わることなく，ただ式が増えるだけなので，計算に邪魔になるだけだ．

例えば，式 (1.6.19) の例では，添え字が 2 回現れるのは μ, ν のみなのであることに注意せよ．総和記号を復元するとき，前に付くのは $\sum_{\mu,\nu}$ のみである．添え字 δ は 1 個しかないので，$\sum_{\delta}$ は付けない．

1.6.5　ベクトル解析への応用

今まで述べた，「アインシュタインの縮約規則」と「完全反対称テンソル」を用いると，次のベクトル解析における関係式を簡単に示される．1 つの例として，ベクトルの内積と外積は次のようにも書ける．

内積の表現[*2]

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}} A_\mu B_\mu \tag{1.6.20}$$

外積の表現

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \xrightarrow[\text{完全反対称テンソル}]{\text{アインシュタインの縮約規則}} \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu \tag{1.6.21}$$

このことに注意しながら，次の定理をみよう．ベクトル解析においてとっても重要な結果 (電磁気学や力学などでよく使われる) なので，必ず覚えてみましょう．

*縮約規則に関する注意

もっと専門的に言えば，クロネッカーデルタ δ_μ^ν を用いて，次のようにも書ける．

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}} A_\mu B_\mu = \delta_{\mu\nu} A_\nu B_\mu; \qquad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

特に，相対性理論でのミンコフスキー空間上の内積は，これを拡張して (クロネッカーデルタを計量テンソルで入れ替える)，次のように定義することもできる．

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \xrightarrow[\text{相対論}]{\text{アインシュタインの縮約規則}} A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu B_\mu; \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここのコメントは，難しいかったら，無視してもよい．式 (1.6.20) および (1.6.21) に示す内積，外積の定義に注意しながら，次のようなベクトル演算を考える．

1. BAC-CAB rule

ある 3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の外積について次式の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{1.6.22}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_\delta &= \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu \underbrace{(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_\nu}_{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\text{ の }\nu\text{ 成分}} = \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu (\epsilon_{\alpha\beta\nu} B_\alpha C_\beta) \\
&= (\epsilon_{\mu\nu\delta}\epsilon_{\alpha\beta\nu}) A_\mu B_\alpha C_\beta = (-\epsilon_{\mu\delta\nu}\epsilon_{\alpha\beta\nu}) A_\mu B_\alpha C_\beta \\
&= (\delta_{\mu\beta}\delta_{\delta\alpha} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\delta\beta}) A_\mu B_\alpha C_\beta \qquad \leftarrow (1.6.11) \\
&= (\delta_{\mu\beta} A_\mu C_\beta)(\delta_{\delta\alpha} B_\alpha) - (\delta_{\mu\alpha} A_\mu B_\alpha)(\delta_{\delta\beta} C_\beta) \\
&= B_\delta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_\delta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})
\end{aligned}$$

ここから，$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_\delta = [\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]_\delta$ が成り立つことが分かって，この定理も正しく成り立つことが分かる．■

2. スカラー三重積

ある 3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の三重積 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ は次の関係式を満たす:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \tag{1.6.23}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \underbrace{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\delta}_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}\text{ の }\delta\text{ 成分}} C_\delta = (\epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu) C_\delta \\
&= \epsilon_{\mu\nu\delta} A_\mu B_\nu C_\delta = \underbrace{\epsilon_{\delta\mu\nu}}_{\epsilon_{\mu\nu\delta} = -\epsilon_{\mu\delta\nu} = \epsilon_{\delta\mu\nu}} A_\mu B_\nu C_\delta \\
&= (\epsilon_{\delta\mu\nu} C_\delta A_\mu) B_\nu = (\mathbf{C} \times \mathbf{A})_\nu B_\nu \\
&= (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}
\end{aligned}$$

このことから，証明が終わる．■

1.6.6　ベクトル微積分学

このようなアインシュタインの縮約規則 (1.6.13) および完全反対称テンソル (1.6.2) を用いると，**ナブラ演算子 ∇** からなる，様々な演算の結果を簡単に示される．そのため，今まで述べたアインシュタインの縮約規則における**勾配，発散，回転**の表記しておけば，今までのようにそれらの演算んが簡単にできる．

勾配 (Gradient)[*3]

$$\boldsymbol{\nabla} f=\sum_{\mu=1}^{n}\hat{\mathbf{r}}_\mu\frac{\partial}{\partial r_\mu}f\xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}}\frac{\partial}{\partial r_\mu}f \tag{1.6.24}$$

発散 (Divergence)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\mu\xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}}\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\mu \tag{1.6.25}$$

あるいは，**圧縮記法**によるもっと簡単な表記:　$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\partial_\mu A_\mu$

回転 (Curl)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\sum_{\mu,\nu,\delta=1}^{n}\epsilon_{\mu\nu\delta}\hat{\mathbf{r}}_\delta\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\nu\xrightarrow{\text{アインシュタインの縮約規則}}\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\nu \tag{1.6.26}$$

あるいは，**圧縮記法**によるもっと簡単な表記:　$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu A_\nu$

*圧縮記法

ここで，もっと略して次の表記もできる．

$$\frac{\partial}{\partial r_\mu}\xrightarrow{\text{微分演算の縮約}}\partial_\mu$$

つまり，このときの勾配におけるアインシュタインの縮約規則は，もっと簡単に:

$$\boldsymbol{\nabla} f=\partial_\mu f \tag{1.6.27}$$

この文書では，このような書き方を「圧縮記法」と呼ぶことにする．

1. スカラー倍の発散

あるベクトル場 $\mathbf{A}$ のスカラー倍 $f\mathbf{A}$ の発散は次のように分離できる:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{1.6.28}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial r_\mu}(f\mathbf{A})_\mu = \frac{\partial}{\partial r_\mu}(fA_\mu) \\
&= A_\mu\frac{\partial f}{\partial r_\mu} + f\frac{\partial A_\mu}{\partial r_\mu}; \qquad \text{積の微分法} \\
&= A_\mu(\boldsymbol{\nabla}f)_\mu + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})_\mu \\
&= \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}f + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}$$

これで，証明は終わる．■

(証明-圧縮記法) 圧縮記法によると，このことをもっと簡単に表せる (参考).

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = \partial_\mu(fA_\mu) = A_\mu\partial_\mu f + f\partial_\mu A_\mu.$$

これは，アインシュタインの縮約規則が慣れた人は，チャレンジしてみよう!

この結果は，すべての分野の物理学でよく使われるので，必ず覚えておきましょう．理解のため，1 つ例を考えよう:

$$f = V\ , \qquad \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

として与えられた場合を考える．つまり，スカラー関数として**電場のポテンシャル**，ベクトルとして**電場**が与えられた場合は，上の定理によって次式のようになる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{E}) = V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) + \mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}V) = \frac{\rho V}{\epsilon_0} + \mathbf{E}\cdot(-\mathbf{E}) \tag{1.6.29}$$

のようになることが，電場に関するガウスの法則からすぐわかる．

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}\to\infty}\rho V\ d^3\mathbf{r} = \cancel{\frac{\epsilon_0}{2}\oint_{\mathcal{V}\to\infty}V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}} + \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}\to\infty}E^2\ d^3\mathbf{r} = \int_{\mathcal{V}\to\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}_{u_E}\ d^3\mathbf{r}$$

より，空間全体 $\mathcal{V}\to\infty$ に対して体積積分することで，上式のようにエネルギー密度の関係式

を得られる．　ここで，ガウスの定理から:[*4]

$$\int_{\mathcal{V}\to\infty} \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{E})\ d^3\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{V}\to\infty} V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \tag{1.6.30}$$

を分かる．さらに，ポテンシャル V は r^{-1} に比例し，電場は r^{-2} に比例することから，次のようなことが分かる．(無限電荷分布でない場合に限って)

$$\oint_{\mathcal{V}\to\infty} V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \lim_{R\to\infty}\frac{A}{r^3}\ (4\pi r^2) \to 0$$

このことから，次の電気エネルギー密度 u_E の関係式を得られる．

$$\boxed{\therefore u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.} \tag{1.6.31}$$

2. スカラー倍の回転

あるベクトル場 $\mathbf{A}$ のスカラー倍 $f\mathbf{A}$ の回転は次のように分離できる:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f) \tag{1.6.32}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A})]_\delta &= \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}(f\mathbf{A})_\nu = \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}(fA_\nu) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\delta}A_\nu\frac{\partial f}{\partial r_\mu} + \epsilon_{\mu\nu\delta}f\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\nu; \qquad \text{積の微分法} \\
&= -\epsilon_{\nu\mu\delta}A_\nu\frac{\partial f}{\partial r_\mu} + \epsilon_{\mu\nu\delta}f\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\nu \\
&= -\epsilon_{\nu\mu\delta}A_\nu(\boldsymbol{\nabla}f)_\mu + f\left(\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}A_\nu\right)_\delta \\
&= [-\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}f) + f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})]_\delta
\end{aligned}$$

これで，証明は終わる．■

[*4] 積分

$$\int d^3\mathbf{r}$$

は**体積積分**を意味する．

(証明-圧縮記法) 圧縮記法によると，このことをもっと簡単に表せる (参考).

$$[\nabla \times (f\mathbf{A})]_\delta = \epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu(fA_\nu) = \epsilon_{\mu\nu\delta}A_\nu\partial_\mu f + f(\epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu A_\mu)$$

$$= -\epsilon_{\nu\mu\delta}A_\nu\partial_\mu f + f(\epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu A_\nu).$$

これは，アインシュタインの縮約規則が慣れた人は，チャレンジしてみよう!

3. 回転の発散

あるベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転の発散を取るとゼロになる:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{1.6.33}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial r_\mu}(\nabla \times \mathbf{A})_\mu = \frac{\partial}{\partial r_\mu}\left(\epsilon_{\nu\delta\mu}\frac{\partial}{\partial r_\nu}A_\delta\right)$$

$$= \epsilon_{\nu\delta\mu}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}A_\delta = \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}A_\delta$$

$$= \left(\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}\right)A_\delta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + \epsilon_{\nu\mu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\nu \partial r_\mu}\right)A_\delta \quad \cdots(*)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu} - \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}\right)A_\delta$$

$$= 0.$$

これで，証明は終わる．■

(証明-圧縮記法) 圧縮記法によると，このことをもっと簡単に表せる (参考).

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_\mu(\epsilon_{\nu\delta\mu}\partial_\nu A_\delta) = \partial_\mu(\epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\nu A_\delta)$$

$$= \frac{1}{2}(\epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu\partial_\nu + \epsilon_{\nu\mu\delta}\partial_\nu\partial_\mu)A_\delta = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\delta}(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)A_\delta = 0.$$

これは，アインシュタインの縮約規則が慣れた人は，チャレンジしてみよう!

ここで，1 つ注意すべきことは，ここの式 $(*)$ で，次式が成り立つことである:

$$\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}A_\delta = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}A_\delta\epsilon_{\nu\mu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\nu \partial r_\mu}A_\delta \tag{1.6.34}$$

これは，ただ総和指標 μ,ν の**名前を変えただけ**なので，自明なものである．なので，これは次の一般の場合にも成り立つ:

$$\epsilon_{\mu\nu\delta}a_\mu b_\nu = \epsilon_{\nu\mu\delta}a_\nu b_\mu \quad \text{など}$$

ならば，式 $(*)$ で次のように書いても全く問題はない．

$$\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu}A_\delta = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\nu} + \epsilon_{\nu\mu\delta}\frac{\partial^2}{\partial r_\nu \partial r_\mu}\right)A_\delta \tag{1.6.35}$$

4. 重回転

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

(証明) アインシュタインの縮約規則と完全反対称テンソルの特性を使う:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})]_\delta &= \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_\nu = \epsilon_{\mu\nu\delta}\frac{\partial}{\partial r_\mu}\left(\epsilon_{\alpha\beta\nu}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}A_\beta\right) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\delta}\epsilon_{\alpha\beta\nu}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\alpha}A_\beta = \epsilon_{\delta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\nu}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\alpha}A_\beta \\
&= (\delta_{\delta\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\alpha})\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\alpha}A_\beta \\
&= \delta_{\delta\alpha}\delta_{\mu\beta}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\alpha}A_\beta - \delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\alpha}\frac{\partial^2}{\partial r_\mu \partial r_\alpha}A_\beta \\
&= \frac{\partial}{\partial r_\delta}\frac{\partial A_\mu}{\partial r_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial r_\mu^2}A_\delta = \frac{\partial}{\partial r_\delta}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2 A_\delta \\
&= [\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}]_\delta
\end{aligned}$$

これで，証明は終わる．■

(証明-圧縮記法) 圧縮記法によると，このことをもっと簡単に表せる (参考).

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})]_\delta &= \epsilon_{\mu\nu\delta}\partial_\mu(\epsilon_{\alpha\beta\nu}\partial_\alpha A_\beta) = \epsilon_{\mu\nu\delta}\epsilon_{\alpha\beta\nu}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta \\
&= \epsilon_{\delta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\nu}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta = (\delta_{\delta\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\alpha})\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta \\
&= \delta_{\delta\alpha}\delta_{\mu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta - \delta_{\delta\beta}\delta_{\mu\alpha}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta \\
&= \partial_\delta\partial_\beta A_\beta - (\partial_\alpha)^2 A_\delta.
\end{aligned}
$$

これは，アインシュタインの縮約規則が慣れた人は，チャレンジしてみよう!

ただし，ここでベクトルのラプラシアン $\nabla^2 \boldsymbol{A}$ は，次のように定義する:

$$
\text{成分表示:} \quad [\nabla^2 \mathbf{A}]_\delta = \nabla_\mu^2 A_\delta\ , \qquad \text{ベクトル表示:} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^{3} \hat{\mathbf{r}}_\mu \nabla_\mu^2 A_\mu.
$$