

# Dirac string のゲージ理論と電荷量子化条件

ABSTRACT: Dirac が 1931 年にモノポールの理論に string を導入した以来, string の理論は飛躍的に発展してきた. この string に関する U(1) ゲージ理論は 1965 年に Goldhaber により, string のベクトルポテンシャルを string の沿う線積分表示が導かれ, string の回転変換の表す U(1) ゲージ変換が string の回転に対する立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  の勾配項と Dirac delta 関数の面積分項の表現を持つことが導かれた. Dirac の以後, モノポールの存在の下で現れる電荷量子化 (Dirac quantization)  $eg = l/2$  を与える理論的な方法論として経路積分などの様々の方法が開発されたがこれらはすべて正準量子化 (canonical) の条件  $[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i\delta_{ij}$  を要請した上の結論であった. 本研究では, 正準量子化を要請せず電磁場の U(1) ゲージ対称性のみを要請するときにある特定の経路を持つ '2 段階ゲージ変換' を想定することで導出されるゲージ方程式を導き, 幾何学的に要請により電荷量子化を導く新しいアプローチを提案する.

---

## 目 次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>2</b>
1.1	記号と記法	2
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Dirac string の <math>U(1)</math> ゲージ理論</b>	<b>5</b>
3.1	$U(1)$ ゲージ変換の表現	5
3.2	String の特異点と場の非発散成分	6
3.3	Dirac string の回転	8
3.4	ゲージ変換 (3.25) の再現	12
<b>4</b>	<b><math>U(1)</math> ゲージ不変性と正準量子化条件</b>	<b>14</b>
4.1	ゲージ不変性と string の幾何学	14
4.2	ゲージ消滅経路とゲージの連続性	19
4.3	電荷量子化のゲージ不変的方法	20

---

## 1 はじめに

### 1.1 記号と記法

本研究では別の指示がない限り、**自然単位系 (Natural Unit)** を使う:

$$c = \mu_0 = \epsilon_0 = \hbar = k_B = 1. \quad (1.1)$$

また、ミンコフスキー空間 (Minkowski space) の符号規約

$$\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(+, -, -, \dots, -), \quad (1.2)$$

およびユークリッド空間では

$$g_{\mu\nu} := \text{diag}(+, +, +, \dots, +). \quad (1.3)$$

その他の記号規約は次の通りである.

記号 (Symbol)	物理量 (Physical quantity)
$\beta = \frac{v}{c}$	比速度
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	ローレンツ因子 (Lorentz factor)
$\Lambda^\mu{}_\nu$	ローレンツ変換 (慣性系の変換)
$g = \det\{g_{\mu\nu}\}$	計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式
$\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$	ローレンツ群の生成子
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	パウリ行列
$\mathbf{n}(0, 0, 1), \mathbf{n}'(0, 0, -1)$	string の向き (単位ベクトル)
$\sigma$	string の変換領域
$\Gamma(r'_p, r'_q)$	有限 string 変換領域

表 1: 様々な記号の規約

## 2 Introduction

軸  $+z$  を沿う Dirac string のベクトルポテンシャルの正式化を論議する．先ず，string にない位置  $\mathbf{r}$  上ではベクトルポテンシャルの定義により

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

を原理的に満たす．古典電磁気学の Maxwell 方程式の満たすポアソン方程式  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}_e$  から，ベクトルポテンシャルの向きは電流源の向きを沿うことが分かる：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}_e(\mathbf{r}') D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.2)$$

ここで  $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  はポアソン方程式の 3 次元 Green 関数である．式 (2.2) から一般にベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\theta) \mathbf{p}(r, \varphi)$  の形式<sup>1</sup>を持ち，string にない位置  $\mathbf{r}$  に対しては string の生み出す磁場は：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla A(\theta) \times \mathbf{p}(r, \varphi) + A(\theta) \nabla \times \mathbf{p}(r, \varphi) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.3)$$

式 (2.3) の右辺の磁場は  $\theta$  に依存しないため，ポアンカレの補題<sup>2</sup>により  $\mathbf{p}(r, \varphi) = \nabla G(\varphi)$  が得られる．ここで式 (2.3) の具体的な計算を行うため，3 次元ユクリッド多様体  $\mathcal{M}^3$  上の Stoke's 定理を以下のように使えば：

2-form の積分に関する Stoke's 定理は

$$\int_{\partial\Omega} \omega \stackrel{\text{Hodge dual}}{=} \int_{\partial\Omega} \bar{\omega}_\sigma \sqrt{g} \epsilon^\sigma{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} \wedge dx^{\bar{\nu}} \stackrel{\text{Stoke's Thm.}}{=} \int_{\Omega} \partial_{\bar{\sigma}} (\bar{\omega}_\sigma \sqrt{g}) \epsilon^\sigma{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} d^3 x. \quad (2.4)$$

ここで 2-form 上で  $\omega = \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ ， $\star\omega = 2! \bar{\omega}_\sigma dx^\sigma$  とおく．

以上の論議から，一般的な座標系<sup>3</sup>に対する発散公式

$$\nabla \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \omega_\nu \sqrt{g}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \omega_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \omega_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} \quad (2.5)$$

が導かれる (球面座標系)．ここで  $\omega = f \mathbf{e}_i (i = r, \theta, \varphi)$  を与えることで以下の関係式：

$$\mathbf{e}_i \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f \mathbf{e}_i) - f (\nabla \cdot \mathbf{e}_i) \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>ただし，ベクトル  $\mathbf{p}(r, \varphi)$  は基底ベクトル  $\mathbf{e}_\varphi$  の向きを持つ．

<sup>2</sup> $\nabla \times \mathbf{p}(r, \varphi) = \mathbf{0}$  が要請されるが，ポアンカレの補題により  $\mathbf{p}(r, \varphi) = \nabla G(r, \varphi)$  となる．さらに， $\mathbf{p}$  が  $\mathbf{e}_\varphi$  の向きを持つことから  $G(r, \varphi) = G(\varphi)$ ．

<sup>3</sup>基底ベクトル  $dx^\mu$  上の 1-form は  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  として書けるので，基底ベクトル  $dx^\mu$  上のベクトル成分は反変的である．

が導かれ、球面座標系における発散公式 (2.7) が得られる:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.7)$$

ゆえに、Dirac string の生み出す磁場 (2.3) はさらに以下のように計算できる.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial G(\varphi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.8)$$

ここで得られた磁場 (2.8) は変数  $\theta$  と  $\varphi$  が変数分離されているため、式 (2.8) が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} = g \sin \theta, \quad \frac{\partial G(\varphi)}{\partial \varphi} = 1, \quad (2.9)$$

あるいは、その一般解

$$A(\theta) = g(\alpha - \cos \theta), \quad G(\varphi) = \varphi + \beta \quad (2.10)$$

として書ける. それゆえ、式 (2.10) の結果を用いて Dirac string<sup>4</sup> のベクトルポテンシャル (2.1) を最も一般的な形式として

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = g(\alpha - \cos \theta) \nabla \varphi = g \frac{\alpha - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.11)$$

で書ける. つまり、 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  と  $\mathbf{n}' = (0, 0, -1)$  の2つの string の表現ができて、それぞれのベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  および  $\mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  は連続条件

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) < \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) < \infty \quad (2.12)$$

を満たさなければいけない. このことから、それぞれの string に対して  $\alpha$  が決められて、それぞれのベクトルポテンシャルを以下のように決定できる:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.13)$$

ゆえに、以上のことから Dirac string[1] のベクトルポテンシャル (2.13) が決められた.

<sup>4</sup>ただし、この論議では式 (2.3) で言及したように  $\mathbf{p}(r, \varphi)$  が  $\mathbf{e}_\varphi$  の向きを持つため、式 (2.11) は  $z$  軸に平行な string のみを示すことに注意せよ.

### 3 Dirac string の U(1) ゲージ理論

#### 3.1 U(1) ゲージ変換の表現

この節では Schrödinger 場における波動関数およびベクトルポテンシャル (2.13) のゲージ変換  $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'_n(\mathbf{r})$  を決定する. 自由 Schrödinger 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}[\psi, \dot{\psi}] = i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi \quad (3.1)$$

として与えられる. 古典電磁気学から得られる古典正準運動量 (canonical momentum) から, 電磁場のある空間の共変微分が

$$\vec{D} = \nabla - ie\mathbf{A} \quad (3.2)$$

となるようにゲージ変換を要請する. 式 (3.2) のように共変微分をとれば, 電磁場の下での Schrödinger 場の Lagrangian 密度は式 (3.2) から以下のように<sup>5</sup>書ける:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}}[\psi, \dot{\psi}] = i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} (\vec{D}\psi)^* \vec{D}\psi. \quad (3.3)$$

ここで U(1) ゲージ変換を  $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = U\psi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r})$  とおく. U(1) ゲージ変換は Schrödinger 場に不変なので, 式 (3.3) を以下のように

$$\mathcal{L}_{\text{EM}}[\psi, \dot{\psi}] = i\psi' \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \frac{1}{2m} (U\vec{D}U^{-1}\psi')^* (U\vec{D}U^{-1}\psi') \quad (3.4)$$

として変形すれば, 場を変えないような変換式  $\vec{D}'\psi' = U\vec{D}U^{-1}\psi'$  が得られ,

$$\vec{D}\psi - U^{-1}\vec{D}'U\psi = -[U\nabla U^{-1} + ie(\mathbf{A} - \mathbf{A}')] \psi' = 0 \quad (3.5)$$

が導かれる. それゆえ, 電磁場の下でのゲージ変換式を以下のように得られる:

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = U\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A} - \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U. \quad (3.6)$$

これは, 磁場のベクトルポテンシャルのゲージ変換の再現である. ゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A'_\mu + \partial_\mu \lambda$  上のゲージ不変性とローレンツ共変性の下で Maxwell 方程式が得られ, そこから得られる共変微分 (3.2) の下で進められた論議からこのベクトルポテンシャルのゲージ変換が一般的にゲージ変換  $U$  を用いて式 (3.6) のように与えられることが確かめられた.

<sup>5</sup>場の Lagrangian 密度はゲージ不変性を持つからである.

さらに、式 (3.6) は  $U(1)$  のゲージ変換だけでなく、 $U(n)$ ,  $SU(2)$  などの一般的なゲージ群の種類<sup>6</sup>に依らない一般的な表現である。ゆえに、非可換ゲージ変換  $U$  に対しても磁場を変えないことも確かめれる:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{e}(\nabla U^{-1} \times \nabla U) = -\frac{i}{e}(U^{-1} \nabla U U^{-1} \times \nabla U) = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

ここで第2項の計算は共変形式を用いて

$$\epsilon_{ijk} U^{-1} (\partial_j U) U^{-1} (\partial_k U) = -\epsilon_{ijk} U^{-1} (\partial_j U) U^{-1} (\partial_k U) = 0 \quad (3.8)$$

より示される。

### 3.2 String の特異点と場の非発散成分

前の論議により、Dirac string を設定することでモノポールの磁場  $\mathbf{B}_g = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  を生み出すような磁場のベクトルポテンシャルを式 (2.13) のように求めた。しかし、この表現では発散成分が Bianchi 恒等式から

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_n(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_n(\mathbf{r})) = 0, \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{n'}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_{n'}(\mathbf{r})) = 0$$

となることとベクトルポテンシャルが string 上で特異点:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} \mathbf{A}_{n'}(\mathbf{r}) = \infty \quad (3.10)$$

持つという問題がある。そのため、特異点の回避のために以下のように正規化ポテンシャル<sup>7</sup>の導入が要求される:

$$\mathbf{A}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{g}{R} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}, \quad R = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}. \quad (3.11)$$

ここから規格化ポテンシャル (3.11) の生成する規格化磁場 (regularized magnetic field) は回転演算より

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) &= g \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} + \frac{g}{R} \nabla \times \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} \\ &= \frac{g}{R^3} \frac{\mathbf{n} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} + \frac{g}{R} \frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{r} - \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{r})}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} - \frac{g}{R^2} \frac{(\mathbf{r} - R\mathbf{n}) \times [\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{[R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})]^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

<sup>6</sup>例えば、可換ゲージ群だけでなく、非可換ゲージ群に対しても成立するゲージ変換の一般的な表現である。

<sup>7</sup>英訳: regularized vector potential.

として計算され、 $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{n}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ であることを用いると、式 (3.12) の規格化磁場の展開は以下のように書ける:

$$\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = g \frac{\mathbf{r}}{R^3} - g\varepsilon^2 \left( \frac{\mathbf{n}}{R^3[R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})]} + \frac{\mathbf{n}}{R^2[R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})]^2} \right). \quad (3.13)$$

極限  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  を与えれば、 $z < 0$  上で第2項は明らかに0となることに注意すると、規格化磁場の展開 (3.13) は  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  の近傍で近似的 [5] に

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) &= g \frac{\mathbf{r}}{R^3} - g\varepsilon^2 \mathbf{n} \left( \frac{R+z}{R^3(x^2+y^2+\varepsilon^2)} + \frac{(R+z)^2}{R^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} \right) \\ &\stackrel{\varepsilon^2 \rightarrow 0}{\simeq} g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 2g\varepsilon^2 \mathbf{n} \theta(z) \left( \frac{1}{r^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

のように展開できる. ここで2行目では  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \neq r$  の沿う経路の極限  $x^2 + y^2 \neq 0$ ,  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  においては式 (3.14) の第2項および第3項が

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \varepsilon^2 \frac{R+z}{R^3(x^2+y^2+\varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \varepsilon^2 \frac{(R+z)^2}{R^3(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} = 0 \quad (3.15)$$

として落とせるため、極限  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  の近傍での近似式

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{R+z}{R^3(x^2+y^2+\varepsilon^2)} &\stackrel{\varepsilon^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2\varepsilon^2}{R^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)}, \\ \varepsilon^2 \frac{(R+z)^2}{R^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} &\stackrel{\varepsilon^2 \rightarrow 0}{\simeq} \frac{4\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

を用いた. 式 (3.14) の第2項および第3項は  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r$  の沿う経路上 ( $x = y = 0$ ) では式 (3.15) のように0として落とせない<sup>8</sup>ため、以下のように積分による評価<sup>9</sup>を行う:

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2}{r^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)} dx dy = 0, \quad (3.17)$$

および

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} dx dy = \pi. \quad (3.18)$$

<sup>8</sup> $x = y = 0$  上では、式 (3.14) の第2項および第3項は0でない極限值 (第3項は発散) を取る.

<sup>9</sup>式 (3.17) と (3.18) では以下のような計算が行われた:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2}{r^2(x^2+y^2+\varepsilon^2)} = 2\pi \int_{V \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2}{(\varrho^2+z^2)(\varrho^2+\varepsilon^2)} \varrho d\varrho \Big| = \frac{2\pi\varepsilon^2}{z^2-\varepsilon^2} \log \frac{z^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon^2 \rightarrow 0} 0,$$

および

$$\lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} dx dy = \lim_{\varepsilon^2 \rightarrow 0} \int_{V \rightarrow \infty} \frac{2\pi\varepsilon^2}{(\varrho^2+\varepsilon^2)^2} \varrho d\varrho = \pi.$$



ゆえに、式 (3.17) および式 (3.18) の積分の評価より、式 (3.14) の規格化磁場の近似に極限  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  を与えることで式 (2.13) の Dirac string のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r})$  の生み出す全磁場の表現を

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{r}) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4g\pi \mathbf{n} \theta(z) \delta(x) \delta(y) \quad (3.19)$$

として得られる。同様の計算を行うことで式 (2.13) の向き  $\mathbf{n}'$  の string に対してもその磁場

$$\mathbf{B}_{n'}(\mathbf{r}) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4g\pi \mathbf{n}' \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \quad (3.20)$$

が得られる。以上の式 (3.19) および (3.20) 結果により、式 (2.13) の向き  $\mathbf{n}$  および  $\mathbf{n}'$  のベクトルポテンシャルが生み出す磁場には単極子の発散成分  $\mathbf{B}_g$  だけでなく、string の非発散成分  $\mathbf{B}_{\text{str}}$  も持つことが分かる。それゆえ、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_n = -g \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) - 4\pi g \delta(x) \delta(y) (\mathbf{n} \cdot \nabla) \theta(z) = 0 \quad (3.21)$$

としてベクトルポテンシャルの定理からなる Bianchi 恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_n) = 0$  が正しく支えられる。一方、式 (3.19) の磁場展開に回転を取ることで発散成分  $\mathbf{B}_g$  が落とし、Cloumb ゲージの下でベクトルポテンシャルに関する Laplace 方程式:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = -\nabla \times \left[ -g \nabla \left( \frac{1}{r} \right) + \mathbf{B}_{\text{str}} \right] = -\nabla \times \mathbf{B}_{\text{str}} \quad (3.22)$$

が得られる。ゆえに、Laplace 方程式の Green 関数および部分積分法を用いて

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = - \int \frac{\nabla \times \mathbf{B}_{\text{str}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \stackrel{\text{部分積分}}{=} \int \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{B}_{\text{str}} d^3\mathbf{r}' = g \int_{C(\mathbf{n})} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.23)$$

としての string 上の線積分で書き換える。ただし、 $C(\mathbf{n})$  は string の沿う経路とする。

### 3.3 Dirac string の回転

向き  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  の Dirac string のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_n(\mathbf{r})$  の  $U(1)$  ゲージ変換 (3.6) を次のように行う:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \xrightarrow{\text{ゲージ変換}} \mathbf{A}'_n(\mathbf{r}) = -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi - \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U. \quad (3.24)$$

今、 $U(1)$  ゲージ変換を  $U = e^{2ieg\varphi}$  とすると、式 (3.24) のゲージ変換は

$$\mathbf{A}'_n(\mathbf{r}) = -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi + 2g \nabla \varphi \stackrel{(2.7)}{=} g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{A}_{n'}(\mathbf{r}) \quad (3.25)$$

となり,  $U(1)$  ゲージ変換により  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'$  としての string の回転が伴う. この節では, 一般の立体角 (solid angle) を string に与える一般ゲージ理論を構築する.

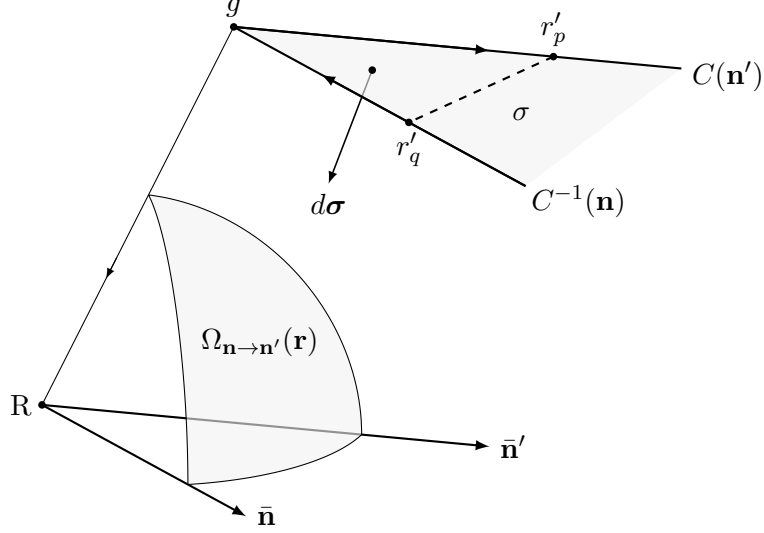


図 1: String( $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{n}'$ ) における視点  $\mathbf{r}$  での立体角.

そのため, 向き  $\mathbf{n}$  の string を向き  $\mathbf{n}'$  に回転させるとき作られる面積  $\sigma$  (図 1 を参照) を視点  $\mathbf{r}$  から見た立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  を想定すると以下のように正式化できる:

$$\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = \int_{\sigma} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\boldsymbol{\sigma}'. \quad (3.26)$$

ここで  $\mathbf{r}' \in \sigma$  とする. 以下でこの立体角 (3.26) と  $U(1)$  ゲージ変換 (3.24) を関係づけるため, 式 (3.23) のベクトルポテンシャルの積分表現<sup>10</sup>を用いて

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \stackrel{(3.23)}{=} g \int_{C(\mathbf{n}') + C^{-1}(\mathbf{n})} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \lambda \quad (3.27)$$

とも書ける. ここから式 (3.27) と立体角 (3.26) を関係づけるため, Stoke's 定理が使えるように経路の変形を行う. まず, 図 1 で示すように単極子の極  $g$ , 経路  $C(\mathbf{n}')$  上の点  $r'_p$ , 経路  $C^{-1}(\mathbf{n})$  上の点  $r'_q$  からなる三角形経路  $\partial\Gamma$  を想定する. ここで式 (3.26) の面ベクトル  $d\boldsymbol{\sigma}$  の向は想定した三角形経路  $\partial\Gamma$  の右ねじの向きとする.

<sup>10</sup>ここで, 式 (3.24) のゲージ変換の一般式に  $U(1)$  ゲージ変換としての表現  $U = e^{ie\lambda(\mathbf{r})}$  与えると,

$$\mathbf{A}'_{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_{\mathbf{n}} - \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U = \mathbf{A}_{\mathbf{n}} + \nabla \lambda$$

が得られる.  $U(1)$  の可換ゲージ理論 (Abelian gauge theory) ではゲージ変換がこのような表現で与えられる.

このように立体角 (3.26) とゲージ変換 (3.27) の向きを定めると、Stoke's の定理<sup>11</sup>からこの2つの式を関係づけることができる。そのため、3次元ユクリッド多様体  $\mathcal{M}^3$  上の Stoke's 定理を以下のように使う:

2-form の積分に関する Stoke's 定理は

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} (\omega_\mu f) dx^\mu \stackrel{\text{Stoke's Thm.}}{=} \int_{\Omega} \omega_\mu \partial_\nu f dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (3.28)$$

ここで  $\omega_\mu$  は定数ベクトルとする。

この式 (3.28) をベクトル微積分学の表現で書くと、定ベクトル  $\mathbf{n}$  とスカラー関数  $f$  の線積分を用いて以下のスカラー関数における Stoke's 定理

$$\mathbf{n} \cdot \left( \int_{\partial\Omega} f d\mathbf{r} - \int_{\Omega} \nabla f \times d\boldsymbol{\sigma} \right) = 0, \quad \int_{\partial\Omega} f d\mathbf{r} = \int_{\Omega} \nabla f \times d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.29)$$

が導かれる。ゆえに、string の回転 (3.27) は三角形経路  $\partial\Gamma$  および Stoke's 定理 (3.29) を用いて以下のように展開できる:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) &= \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} g \int_{\partial\Gamma(r'_p, r'_q)} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} -g \nabla \times \int_{\Gamma(r'_p, r'_q)} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times d\boldsymbol{\sigma}' \\ &= \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} g \left[ \nabla \left( -\nabla \cdot \int_{\Gamma(r'_p, r'_q)} \frac{d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \nabla^2 \int_{\Gamma(r'_p, r'_q)} \frac{d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここで第1行では、経路  $\partial\Gamma$  上の経路  $[r'_p, r'_q]$  が以下のように

$$0 \leq \left| \int_{[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right| \leq \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^2} \sqrt{r_p'^2 + r_q'^2 - 2\mathbf{r}'_p \cdot \mathbf{r}'_q} \xrightarrow{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} 0 \quad (3.31)$$

として<sup>12</sup>落とせることを用いた。また、第2行目では Stoke's 定理 (3.29) を、第3行目ではベクトル恒等式  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  を用いた。ここでベクトル  $\mathbf{r}'_0$  を被積分関数  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  が積分路  $[r'_p, r'_q]$  上で最大になる  $\mathbf{r}'$  とし、各  $\mathbf{r}'_p, \mathbf{r}'_q$  を単極子の極  $g$  を原点とする点  $r'_p, r'_q$  の位置ベクトルとする。

<sup>11</sup>Stoke's の定理が使えるようにそれらの向きを決めた。

<sup>12</sup>この詳しい展開は ML 不等式を用いて

$$\left| \int_{[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right| \leq \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^2} \left| \int_{[r'_p, r'_q]} d\mathbf{r}' \right| = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^2} \sqrt{r_p'^2 + r_q'^2 - 2\mathbf{r}'_p \cdot \mathbf{r}'_q}$$

の手順を従う。

ゆえに, string の回転 (3.30) の論議および U(1) ゲージ変換 (3.27) により, string の回転と立体角に関する以下の関係式が導かれる:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \stackrel{(3.30)}{=} g \nabla \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - 4\pi g \int_{\sigma} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\boldsymbol{\sigma} \stackrel{(3.27)}{=} \nabla \lambda(\mathbf{r}). \quad (3.32)$$

式 (3.26) より定義された立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  は以下のような異なる経路の極限に対しては

$$\lim_{r \rightarrow r_{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}} \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = 2\pi, \quad \lim_{r \rightarrow r_{\sigma} - d\boldsymbol{\sigma}} \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = -2\pi \quad (3.33)$$

として異なる極値を持つ<sup>13</sup>ため,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\sigma}$  の近傍で  $4\pi$  飛び越し (jumping) が起こる. ここで極限表記  $r \rightarrow r_{\sigma} \pm d\boldsymbol{\sigma}$  は領域  $\sigma$  上の点  $r_{\sigma}$  に対してそれぞれ  $\pm d\boldsymbol{\sigma}$  の向きで離れた点から  $r_{\sigma}$  への極限を示す (図 1). ここから得られた string 回転の関係式 (3.32) を空間上の経路  $r$  の沿う線積分として以下のように評価すると

$$\delta \lambda(\mathbf{r}) = g \delta \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - 4\pi g \int_{\sigma \times \gamma} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.34)$$

となり, ゲージ  $\lambda(\mathbf{r})$  は連続な一価関数<sup>14</sup>になることが分かる. これは以下のような 2 通りの経路  $\gamma_1, \gamma_2$  想定すれば明らかである:

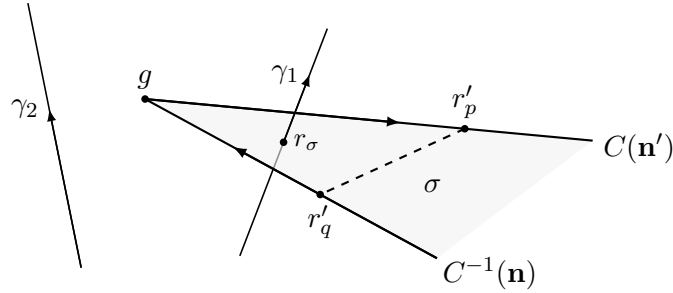


図 2: 式 (3.32) の積分路  $r_{\sigma} \in \gamma_1$  および  $\gamma_2 \subset \mathbf{R}^3 - \sigma$ .

上記の図 2 で示すように, 領域  $\sigma$  を通るような積分路  $\gamma_1$  上のゲージの変分  $\delta \lambda(\mathbf{r})$  は経路  $\gamma_1$  の長さ  $\delta r_1$  の無限小極限に伴い

$$\lim_{\delta r_1 \rightarrow 0} \delta \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = 4\pi, \quad \lim_{\delta r_1 \rightarrow 0} \delta \lambda(\mathbf{r}) = 4\pi g - 4\pi g = 0 \quad (3.35)$$

となり, 立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  は点  $r_{\sigma} \in \sigma$  の近傍で不連続であるが, ゲージ  $\lambda(\mathbf{r})$  はその連続性が Dirac-delta 関数の積分項により支えられる.

<sup>13</sup>領域  $\sigma$  上にない位置  $\mathbf{r}$  の近傍に対しては, 立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  は連続である.

<sup>14</sup>英訳: single-valued.

経路  $\gamma_2$  およびその長さ  $\delta r_2$  に対しては

$$\lim_{\delta r_2 \rightarrow 0} \delta \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = 0, \quad \lim_{\delta r_2 \rightarrow 0} \delta \lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.36)$$

となるため、同様に示せる．以上の論議より、U(1) ゲージ<sup>10</sup>は空間  $\mathbf{R}^3$  全体で正則となる．一方、string の回転に関わる領域  $\sigma$  を除いた領域  $\mathbf{R}^3 - \sigma$  上での式 (3.32) は

$$\nabla \lambda(\mathbf{r}) = g \nabla \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) \quad (3.37)$$

となり、ゲージ変換<sup>10</sup>は以下のように

$$U = \exp(ieg \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})) , \quad \mathbf{r} \notin \sigma \quad (3.38)$$

として string の回転と U(1) ゲージ変換を関係付けることができる．例えば、領域  $\sigma$  の外部点  $\mathbf{r}$  から見た string 回転の立体角が  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  となるようなゲージ変換は式 (3.38) として与えられる (図 1 参照)．

### 3.4 ゲージ変換 (3.25) の再現

節 3.3 の論議より、string の回転と U(1) ゲージ変換を式 (3.38) として関係づけることができた．今までは string の回転  $\mathbf{n}(0, 0, 1) \rightarrow \mathbf{n}'(0, 0, -1)$  を与える U(1) ゲージ変換として式 (3.25) のゲージ  $U = e^{2ieg\varphi}$  をただ導入して使っていたが、この節では式 (3.38) のゲージ表現の下でこのゲージを正しく導く．そのため、以下のような座標を与える：

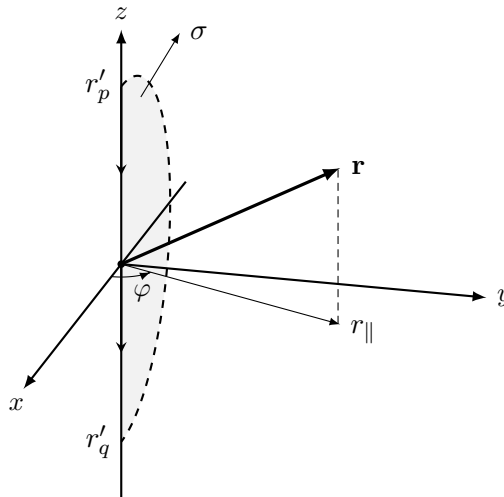


図 3: String 変換領域  $\sigma$  と位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の極座標設定．

この節で扱う string 回転  $\mathbf{n}(0,0,1) \rightarrow \mathbf{n}'(0,0,-1)$  に対して, 図 1 を描き直せば 図 3 のように表せる. ここでのゲージ変換は string 変換領域<sup>15</sup>  $\sigma$  が  $xz$  平面上に来るように設定し, 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を上記のように与えた. これから 図 3 における立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  を定義 (3.26) に基づいて計算するため,  $\hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  として変数変換すると:

$$\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = \int_{\sigma} \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{z^2} = \int_{-\pi}^{-\pi+\varphi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi' = 2\varphi \quad (3.39)$$

として立体角 (3.39) が得られる. ここで以下の 図 3 のように  $\varphi = \pi$  の半平面がブランチカット (Branch cut) され<sup>16</sup>, 方位角  $\varphi$  の定義域は  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  として与えられる:

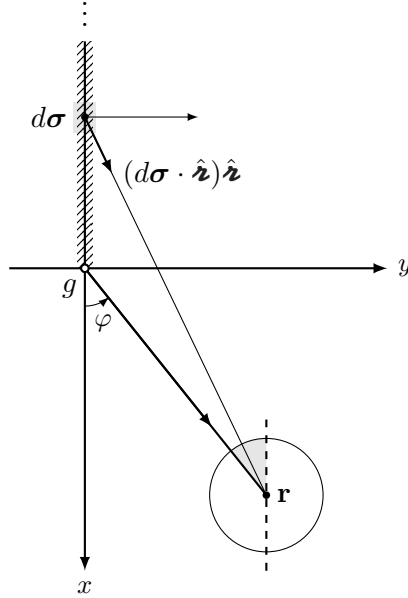


図 4:  $z$  軸の正面から見た string 変換領域  $\sigma$  とベクトル  $\hat{\mathbf{z}}$ .

上記の 図 7 で示すように, 立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$  は幾何学的に位置  $\mathbf{r}$  を中心とする半径 1 の単位球に string 変換領域  $\sigma$  を射影した面積と解析できる. ゆえに, 式 (3.39) より得られる立体角から string の回転  $\mathbf{n}(0,0,1) \rightarrow \mathbf{n}'(0,0,-1)$  を与える  $\mathbf{r} \notin \sigma$  上のゲージ変換は

$$U_{(3.38)} = \exp(ieg\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})) \stackrel{(3.39)}{=} e^{2ieg\varphi}, \quad (\mathbf{r} \notin \sigma) \quad (3.40)$$

として式 (3.25) の示すゲージ変換が再現される. 以上の string の関する節 3.3 と節 3.4 の幾何学的解析は次の節の論議で重要な役割を果たす.

<sup>15</sup>節 3.3 で定めた通りに  $r'_p, r'_q \rightarrow \infty$ .

<sup>16</sup>節 3.3 の式 (3.32) を参照.

## 4 U(1) ゲージ不変性と正準量子化条件

### 4.1 ゲージ不変性と string の幾何学

今までの論議によって string の回転と U(1) ゲージ変換 (3.6) を関係づけることができたので、この節ではこのような幾何学的解析に基づいてそのゲージ不変性について議論する。その準備として 図 7 と類似な以下の string について考察する：

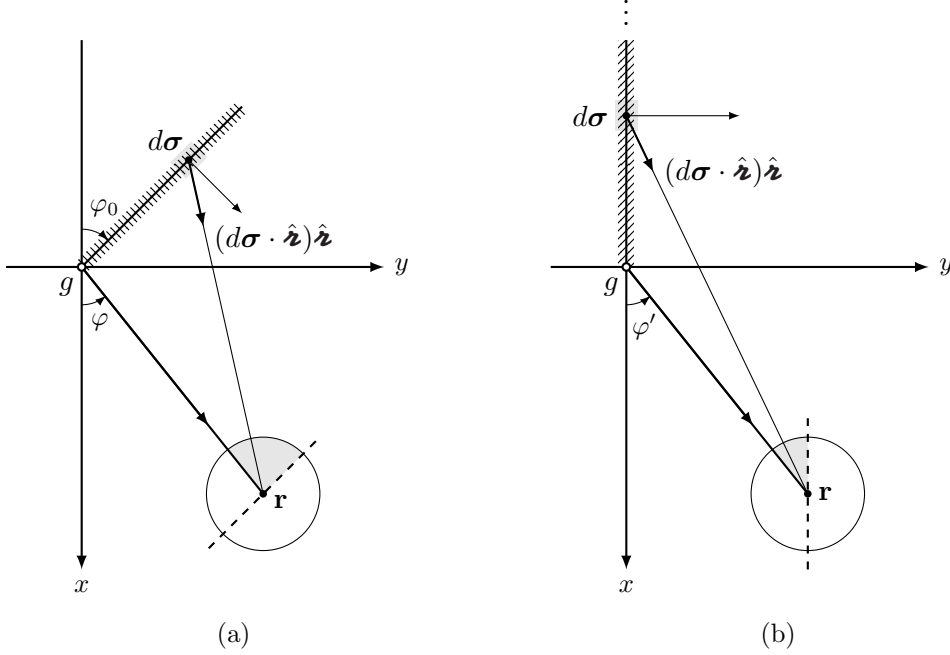


図 5: String の回転における座標系の循環性。

これから上記の 図 5a で示すように string の変換領域  $\sigma$  が 図 7 の  $xz$  半平面から  $\varphi_0$  ほど回転された string の回転を系に与えるゲージ変換を導く。そのため、図 5a を座標系を  $\varphi_0$  ほど回転させることで 図 5b への変換を行うと変換後の新しい方位角が

$$\varphi' = \varphi + \varphi_0 \quad (4.1)$$

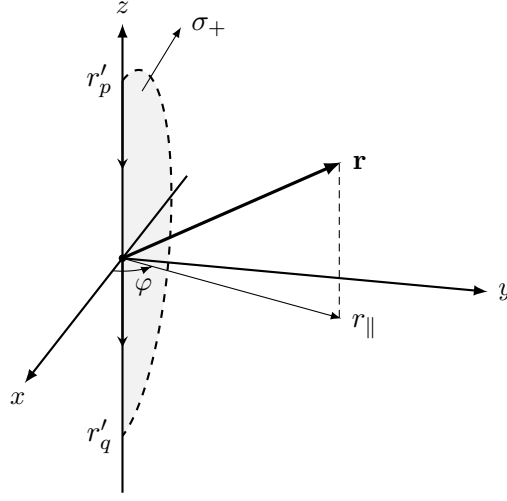
として与えられる。ここの座標系の変換は物理系に影響を与えない<sup>17</sup>等価変換なので、図 5a でのゲージ変換は 図 5b のゲージ変換と等しいことが要請される。ゆえに、求まる 図 5a でのゲージ変換を  $U(\varphi_0)$  と書く<sup>18</sup>と、節 3.3 から得られたゲージ変換 (3.40) から

$$U(\varphi_0) \stackrel{(3.40)}{=} e^{2ieg\varphi'} = e^{2ieg(\varphi+\varphi_0)}. \quad (4.2)$$

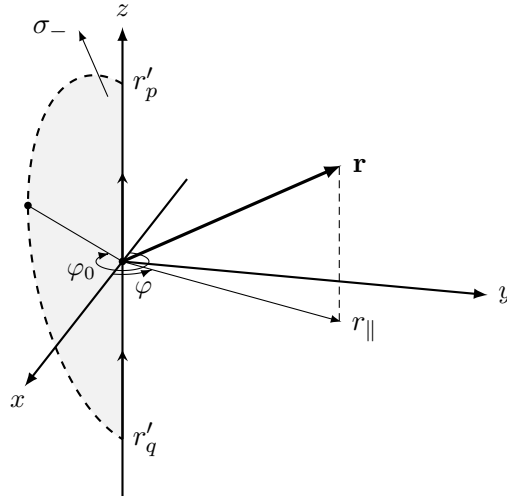
<sup>17</sup>系の Lagrangian を変えない変換である。数学では‘等角変換’と呼ばれる変換である。

<sup>18</sup>ここで記法  $U(\cdot)$  の中身  $\cdot$  は string の変換領域と  $xz$  の間の二面角 (dihedral angle) を示す。以後、必要に応じてこの記法を使う。

さて、これから電荷の量子化についての本格的な論議を展開する。以下のように2段階のゲージ変換を通じて元の string に戻すような変換を考える：



(a) 第一ゲージ変換  $U_+(0)$ .



(b) 第二ゲージ変換  $U_-(\varphi_0)$ .

図 6: 2 段階のゲージ変換 (a) string 変換領域  $\sigma_+$  上のゲージ変換  $\mathbf{n}(0, 0, 1) \rightarrow \mathbf{n}'(0, 0, -1)$  と (b) string 変換領域  $\sigma_-$  上のゲージ変換  $\mathbf{n}'(0, 0, -1) \rightarrow \mathbf{n}(0, 0, 1)$  による変換  $u$ .

系に与えるゲージ変換  $u$  を 図 6 で示すように、 $xz$  半平面上の string 変換領域  $\sigma_+$  を持ち、string の順回転  $\mathbf{n}(0, 0, 1) \rightarrow \mathbf{n}'(0, 0, -1)$  を起こすゲージ変換  $U_+(0)$  と  $\sigma_+$  を  $\varphi_0$  ほど回転させた  $\sigma_-$  を string 変換領域として持ち、string の逆回転  $\mathbf{n}'(0, 0, -1) \rightarrow \mathbf{n}(0, 0, 1)$  を起こすゲージ変換  $U_-(\varphi_0)$  より以下のように生成する：

$$u : \quad \mathbf{n}(0, 0, 0) \xrightarrow{U_+(0)} \mathbf{n}'(0, 0, -1) \xrightarrow{U_-(\varphi_0)} \mathbf{n}(0, 0, 1). \quad (4.3)$$



ここで式 (4.3) では string の順回転  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'$  を起こすゲージ変換を  $U_+$  で, string の逆回転  $\mathbf{n}'(0, 0, -1) \rightarrow \mathbf{n}(0, 0, 1)$  を起こすゲージ変換を  $U_-$  と規約<sup>19</sup>する. 以上, 図 6 の示す全体のゲージ変換を  $xy$  平面上の射影図で表すと簡単に:

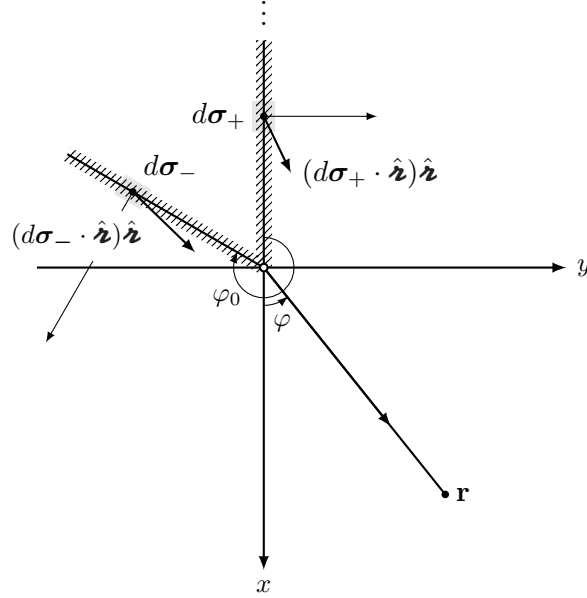


図 7:  $z$  軸の正面から見た string 変換領域  $\sigma$  とベクトル  $\mathbf{n}$ .

のように示せる. ここで式 (3.40) および式 (4.2) から得られるゲージ変換より, 図 6 の示す各段階の第一ゲージ変換 (a) および第二ゲージ変換 (b) の表現は

$$U_+(0) = e^{2ieg\varphi}, \quad U_-(\varphi_0) = e^{-2ieg(\varphi+\varphi_0)} \quad (4.4)$$

として<sup>20</sup>与えられる. ゆえに, 全体のゲージ変換  $u$  は以下のように正式化できる:

$$u: \quad U_-(\varphi_0)U_+(0) = e^{-2ieg\varphi_0}. \quad (4.5)$$

以上のことから 図 6 の示す全体のゲージ変換  $u$  の表現ができ, このゲージ変換  $u$  がベクトル  $\mathbf{r}$  に依らないことが分かる. 例えば, 最初に節 3.1 で導入した Schrödinger 場  $\psi(\mathbf{r})$  とベクトルポテンシャル<sup>21</sup>  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  のゲージ変換は

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{u} \psi'(\mathbf{r}) = e^{-2ieg\varphi_0}\psi(\mathbf{r}), \quad (4.6)$$

<sup>19</sup>このような記法を採用した上で, さらに式 (4.2)<sup>18</sup>のような記法を被すと 図 6a のゲージ変換を  $U_+(0)$ , 図 6b のゲージ変換を  $U_-(\varphi_0)$  で書ける. 以後, 必要に応じてこの記法を使う.

<sup>20</sup>ここでそれぞれ string の順回転と逆回転を起こすゲージ変換  $U_+(0)$ ,  $U_-(\varphi_0)$  での各  $d\sigma_+$ ,  $d\sigma_-$  の向きに注意が必要である.

<sup>21</sup>Dirac string のベクトルポテンシャル (2.13) を指す.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \xrightarrow[u]{(3.6)} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \frac{i}{e} e^{2ieg\varphi_0} \nabla e^{-2ieg\varphi_0} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

として与えられる．ここでゲージ変換の線積分表現 (3.30) についての見直しを行う．今，論議しているゲージ変換  $u$  について式 (3.30) のような線積分表示を経路  $C_a[r'_q, r'_p]$ ,  $C_b[r'_p, r'_q]$  まで<sup>22</sup>入れて書けば:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} g \sum_{i=1}^2 \int_{\partial \Gamma_i(r'_p, r'_q)} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - g \int_{C_a[r'_q, r'_p] + C_b[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= g \nabla \left( \Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) + \Omega_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}(\mathbf{r}) - \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

と書ける．ただし，領域  $\mathcal{C}[r'_p, r'_q]$  はそれぞれ経路  $C_a[r'_q, r'_p]$ ,  $C_b[r'_p, r'_q]$  で囲まれた内部とする．さらに  $\mathbf{r} \notin \sigma_{\pm}$  であること<sup>23</sup>に注意すると，以下のスカラー関数は

$$\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) + \Omega_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}(\mathbf{r}) - \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = C \quad (4.9)$$

として位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に依らない定数になる．ここで以上の線積分表示では以下のような経路を取っている:

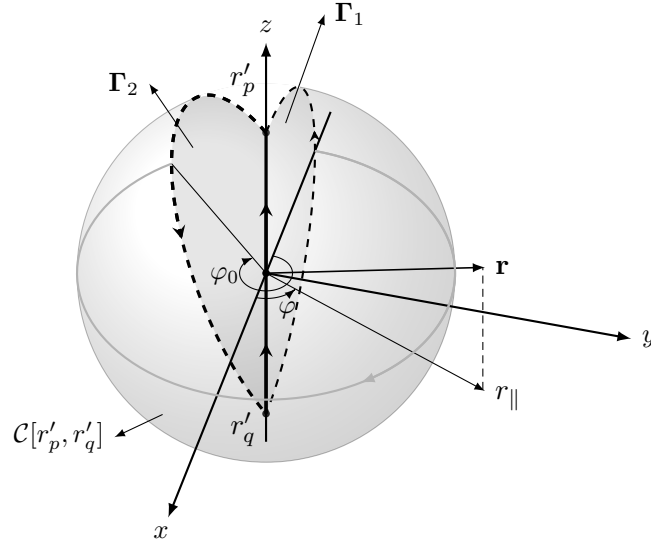


図 8: 式 (4.8) および式 (4.9) の積分経路.

<sup>22</sup> 図 6 の点線経路.

<sup>23</sup> 今までの定義と同様に

$$\sigma_+ = \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} \Gamma_1(r'_p, r'_q), \quad \sigma_- = \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} \Gamma_2(r'_p, r'_q).$$

ゆえに、式 (4.9) の左辺はそれぞれの立体角  $\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r})$ ,  $\Omega_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}(\mathbf{r})$  が

$$\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) = \int_{\sigma_+} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \Omega_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_{\sigma_-} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.10)$$

として与えられるので、図 8 で示した閉曲面上の面積分となる。以上の結果より、式 (4.9) の左辺にガウス定理<sup>24</sup>を使えば  $\mathbf{r} \notin \sigma_+, \sigma_-$  に対して:

$$\Omega_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'}(\mathbf{r}) + \Omega_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}(\mathbf{r}) - \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\theta_\pi(\varphi_0 - \varphi) \quad (4.11)$$

の恒等式が得られる。ここから式 (4.11) と式 (4.9) のゲージ変換  $u$  (図 6 参照) の表現式を合わせることで、ゲージ変換  $u$  に関する以下の関係式が導かれる:

$$u: \quad U_-(\varphi_0)U_+(0) = \exp \left( 4\pi i e g \theta_\pi(\varphi_0 - \varphi) + \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} i e g \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (4.12)$$

ここで関数  $\theta_\pi(\varphi_0 - \varphi)$  はヘヴィサイド階段関数として

$$\theta_\pi(\varphi_0 - \varphi) = \begin{cases} 1 & (\varphi_0 + \varphi > \pi) \\ \frac{1}{2} & (\varphi_0 + \varphi = \pi) \\ 0 & (\varphi_0 + \varphi < \pi) \end{cases} \quad (4.13)$$

として定義される。また、式 (4.12) および式 (4.13) の領域  $C[r'_p, r'_q]$  上の表面項は取りうる領域  $C[r'_p, r'_q]$  により異なる値を取る。例えば:

$$\begin{aligned} \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} i e g \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &\xrightarrow{\varphi_0 \rightarrow 0+} 0, \\ \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} i e g \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &\xrightarrow{\varphi_0 \rightarrow 2\pi-} -4\pi. \end{aligned} \quad (4.14)$$

つまり、式 (4.12) として表現される 図 8 に表したゲージ変換  $u(\varphi_0)$  はその取りうる string の変換経路<sup>25</sup>によって相異なる表現を持つことが分かる。言い換えれば、string の回転  $\mathbf{n} \rightarrow \tilde{\mathbf{n}}$  上の変換経路を指定することでその変換のゲージも固定される。

<sup>24</sup>つまり、式 (4.9) の左辺はその閉曲面に対して:

$$\oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2 - C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = - \int_{\tau \rightarrow \infty} \nabla'^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Sigma.$$

<sup>25</sup>String の回転変換において、その向きの単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の終点の軌跡を string の変換経路として定義する。これが決められれば、その変換のゲージも一個で固定される。

## 4.2 ゲージ消滅経路とゲージの連続性

節 4.1 の論議で,  $u(\varphi_0)$  型ゲージ変換<sup>26</sup>によるゲージ変換が

$$\psi'(\mathbf{r}) \xrightarrow{u} \psi'(\mathbf{r}) = e^{-2ieg\varphi_0}\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \xrightarrow{u} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

として得られた. このゲージ変換 (4.15) を見ると, Dirac monopole のベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$  として明らかにゲージ変換  $u$  に対して不変になっているが<sup>27</sup>, 波動関数は位相がずれていることが分かる. この節より, 波動関数の位相を変えない  $u(\varphi_0)$  型ゲージ変換  $\psi$  を生成するゲージ消滅経路<sup>28</sup>が取れるかについて論議するため, 以下のように 図 8 における string の変換経路を変形した 2 通りの経路  $\partial\mathbf{D}_+$ ,  $\partial\mathbf{D}_-$  を想定する:

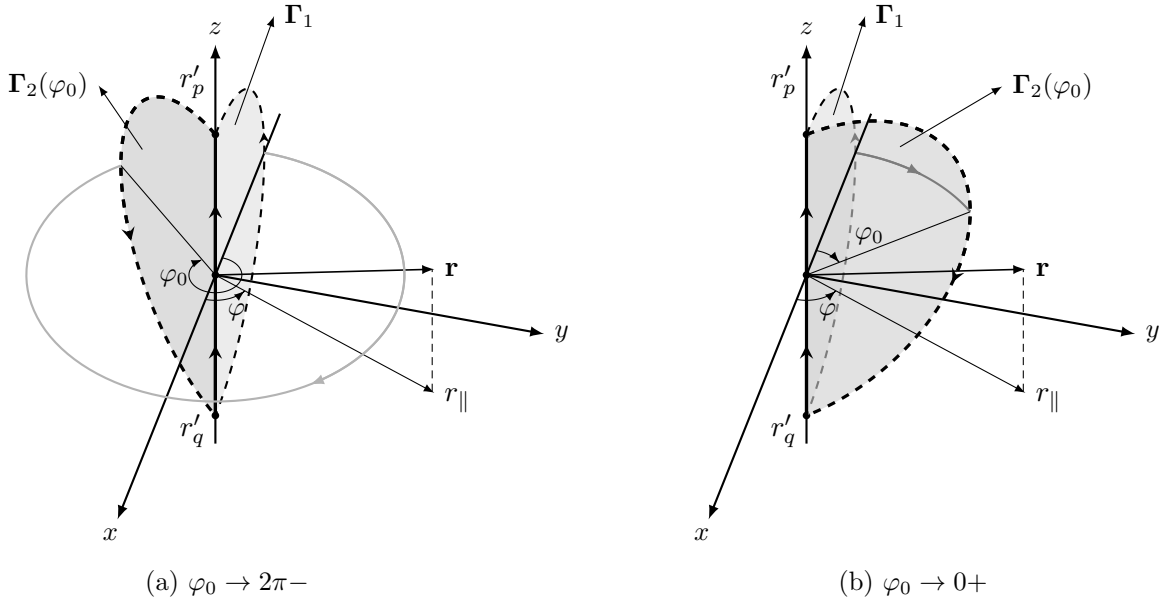


図 9:  $u(\varphi_0)$  型ゲージ変換における String の変換経路 (a)  $\partial\mathbf{D}_- = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 2\pi-} \partial\Gamma_1 + \partial\Gamma_2(\varphi_0)$  と (b)  $\partial\mathbf{D}_+ = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0+} \partial\Gamma_1 + \partial\Gamma_2(\varphi_0)$  の設定.

このような string の変換経路  $\partial\mathbf{D}_\pm$  により生成されるゲージ変換  $u_{D\pm}$  を想定すると,  $u(\varphi_0)$  型ゲージ変換の線積分表現 (4.12) から経路  $\partial\mathbf{D}_-$ ,  $\partial\mathbf{D}_+$  上のゲージ変換  $u_{D-}$ ,  $u_{D+}$  は

$$u_{D-} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 2\pi-} \exp \left( 4\piieg\theta_\pi(\varphi_0 - \varphi) + \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} ieg \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 1, \quad (4.16)$$

<sup>26</sup>string の向きを変えないような 2 段階ゲージ変換:  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}$ .

<sup>27</sup>このゲージ変換  $u$  は節 3.3 のゲージ理論により, string の向きを変えないように設定されたゲージ変換なので物理的には当然な結果である.

<sup>28</sup>この全体ゲージ変換  $\psi$  とは各段階のゲージ変換  $U_+(0)$  と  $U_-(\varphi_0)$  が互いに打ち消し合う作用 (ゲージの消滅) を起こすゲージ変換である.

$$u_{D+} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0+} \exp \left( 4\pi i e g \theta_\pi (\varphi_0 - \varphi) + \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} i e g \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 1 \quad (4.17)$$

として与えられる．ここで  $u_{D+}$  と  $u_{D-}$  のゲージの表現 (4.16) および (4.17) での表面項はそれぞれガウスの定理<sup>24</sup>より

$$i e g \int_{C_\infty} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0+} 0, \quad i e g \int_{C_\infty} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0+} -4\pi i e g \quad (4.18)$$

として計算<sup>29</sup>される．以上の計算より，全体ゲージ変換  $u(\varphi_0)$  のゲージ:

$$\lambda(\varphi_0) = g \left( 4\pi \theta_\pi (\varphi_0 - \varphi) + \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} i e g \int_{C[r'_p, r'_q]} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (4.19)$$

が  $\varphi_0$  に対して連続な一価関数になっていることが分かる．ゆえに，ここで想定したゲージ変換  $u_{D-}$ ,  $u_{D+}$  は変換の前後に波動関数<sup>30</sup>の位相を変えない  $u(\varphi_0)$  型ゲージ変換  $\psi$  となり，このゲージ変換を生成するゲージ消滅経路はそれぞれ  $\partial \mathbf{D}_-$ ,  $\partial \mathbf{D}_+$  として与えられる．

### 4.3 電荷量子化のゲージ不変的方法

以上の結論から電荷量子化 (Dirac quantization) が導かれる．領域  $0 < \varphi_0 < 2\pi$  上で 図 6 の string 変換経路を持つゲージ変換  $u(\varphi_0)$  の表現は式 (4.5) のように与えられるため，式 (4.5) と式 (4.12) を以下のように関係づけても一般性を失うことはない:

$$\lim_{\varphi_0 \rightarrow 2\pi-} e^{-2i e g \varphi_0} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 2\pi-} \exp \left( 4\pi i e g \theta_\pi (\varphi_0 - \varphi) + i e g \int_{C_\infty} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 1. \quad (4.20)$$

ゆえに，関係式 (4.20) と節 4.2 から  $e^{-4\pi i e g} = 1$  が得られ，電荷量子化が

$$e g = \frac{l}{2}, \quad (l = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.21)$$

として導かれる．今までの論議により，量子化に関する追加的な要請<sup>31</sup>なく，2 種類の場  $\psi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  の U(1) ゲージ不変性だけを要請することで電荷量子化条件が得られた．

<sup>29</sup>今後，簡単に  $C_\infty := \lim_{r'_p, r'_q \rightarrow \infty} C[r'_p, r'_q]$  と書くことにする．

<sup>30</sup>spinor まで拡張できる．

<sup>31</sup>正準量子化条件  $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$  など…

## 参考文献

- [1] Dirac, P. A. M., *Quantised singularities in the electromagnetic field*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **133** (1931) 60-72.
- [2] Feynman, R. P., *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, *Phys. Rev.* **76** (1949) 769-789.
- [3] Yang, C. N. and Mills, R. L., *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191–195.
- [4] Yakov M. Shnir, *Magnetic Monopoles*, Springer (2010).
- [5] Boulware, D. G., Brown, L. S., Cahn, R. N., Ellis, S. D., Lee, C., *Scattering on magnetic charge*, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 2708-2727.
- [6] Mansuripur, M., *Comment on Jackson’s analysis of electric charge quantization due to interaction with Dirac’s magnetic monopole*, [arXiv:1701.00592](#) (2016).
- [7] Xiao-Yin, P., Yin, C., Yu-Qi, L., Aaron G., Juhao, W., *On the gauge transformation for the rotation of the singular string in the Dirac monopole theory*, [arXiv:2010.07020](#) (2020).