令 和 4 年 度 前 期 履 修 科 目

力 学 詳 論 I

過去問　解説

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

(計　算　用　紙)

〔１〕(1) 以下の微分方程式を解け。

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\alpha N(t)$$

〔解説〕　変数分離法を利用する:

$$\int \frac{1}{N_t}\ dN_t = -\int \alpha\ dt; \qquad \ln N(t) = -\alpha t + C$$

よって，その一般解,

$$\boxed{\therefore N(t) = Ae^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0)}$$

を得る.

(2) 放射性同位体が崩壊して別の核種に変化するとき，もとの同位体の個数が半数になるまでの時間 T_H を半減期とよぶ。$t = 0$ での放射性同位体の個数 N_0 とすると時間 t における個数を N_0 とすると時間 t における個数 $N(t)$ は以下のように表される。

$$N(t) = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_H}}$$

このとき問題 (1) の α と T_H の関係を示せ。

〔解説〕　問題 (1) の一般解は，初期条件 $t = 0$ のときの $N(0) = N_0$ から，積分変数 A は一つで定まる.

$$N(0) = A = N_0; \qquad \boxed{N(t) = N_0 e^{-\alpha t}}$$

ここから，半減期 T_H を定数 α の式で表せる:

$$N(T_H) = N_0 e^{-\alpha T_H} = \frac{N_0}{2}; \qquad \therefore T_h(\alpha) = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

よって，半減期は個数 $N(t)$ に関わらず一定な値を持つ．よって，時間 t における個数 $N(t)$ を T_H に表すと,

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t} = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_h}} = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_H}}$$

よって，求める半減期 T_H と定数 α 関係式は,

$$\boxed{\alpha T_H = \ln 2}$$

である.

〔 2 〕(1) 関数 $f(x)$ に対する $x=a$ まわりのテイラー展開の一般式を記述せよ。

〔解説〕　もし，$f(x)$ が解析的な関数であれば，そのテイラー展開は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

として与えられる.

(2) $\sin x, \cos x, e^x$ を $x=0$ でテイラー展開 (マクローリン展開) せよ。

〔解説〕　問題 (1) と同じ方法を利用して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

によりテイラー展開する。それぞれに対して,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.
\end{aligned}
$$

として与えられる．

〔 3 〕略

〔 4 〕(1) 調和振動子の微分方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ の一般解を求めよ。

〔解説〕　ある特定の $x = e^{\lambda t}$ を代入して，この方程式を満たす定数 λ の可能な値を全部求める:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t}; \qquad \lambda = \pm i\omega \tag{1}$$

代入により，式 (1) の結果を取る．ここから，可能な関数解は $e^{-i\omega t}$ および $e^{i\omega t}$ であることを分かる．よって，その一般関数はこれらの線形結合により作られる:

$$x(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}$$

として一般解が与えられる．ここの A と B は定数である．

(2) 以下のそれぞれの運動方程式を記述し，ω を求めよ。

〔解説〕

問 1 (振り子の場合)　振り子の場合，与えられた座標 (x, y) に従って，運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} F_x = -T\sin\theta = m\ddot{x} \\ \\ F_y = mg - T\cos\theta = m\ddot{y} \end{cases} \tag{2}$$

ここで，方程式の次のような極座標変換を考える．振り子の場合は $r = l$ で固定されているため，この運動方程式を一変数方程式をで変換できる．

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ \\ y = l\cos\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta \\ \\ \ddot{y} = -l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$F_x = -T\sin\theta = -ml\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta \tag{3}$$

および,

$$F_y = mg - T\cos\theta = -ml\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\sin\theta \tag{4}$$

ならば，$F_y\sin\theta - F_x\cos\theta$[*1]を考えることにより，張力 T のない角変位のみ方程式で表せる:

$$F_y\sin\theta - F_x\cos\theta = mg\sin\theta = -l\ddot{\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta),$$

さらに,

$$mg\sin\theta = -ml\ddot{\theta}; \qquad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.} \tag{5}$$

これが振り子の場合の系の運動方程式である．また，問題〔2〕のテイラー展開により，$\sin\theta$ は非常に小さい $|\theta| \ll 1$ のもとで $\sin\theta \simeq \theta$ で近似できる:

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{l}\theta; \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

なので，このときの系の運動方程式は，近似的に $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$ の特性方程式を持つ線形微分方程式として取り扱われる．一般解は次のように与えられる:

$$\boxed{\theta(t) = C_+e^{i\omega t} + C_-e^{-i\omega t}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.}$$

これは，特性方程式の解 λ,

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{6}$$

から得られる．

[*1] 運動の接線方向の力を意味する．

問 2 (ばねの場合)　系の平衡点を原点として取った座標を考える．変位 x のとき，Hook's law から，物体に作用する外力 $F_{\mathrm{ref}} = -kx$ として表せる．

$$-kx = m\ddot{x}; \qquad \boxed{\therefore kx + m\ddot{x} = 0.}$$

これは，近似など必要ない線形微分方程式である！

$$k + m\lambda^2 = 0; \qquad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7}$$

なので，この運動方程式の特性方程式およびその解は上式のように与えられる．

以上によって，この場合の一般解:

$$\boxed{x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$