力学詳論1

令和5年3月21日 火曜日　　17:40

04B22078
ドド

問題1A 質量mの質点と支点Oがバネでつながれている。支点Oを原点とし質点の位置をxとすれば、質点に働くバネの力の大きさはkxで考えられる。なお、質点はx軸方向に運動するものとし、x軸の正の向きは鉛直下向きにとる。重力加速度はgとする。

ア　質点に関する運動方程式を書きなさい。
イ　一般解を求めなさい。

解答

ア 図表示すれば、図1のように成る:

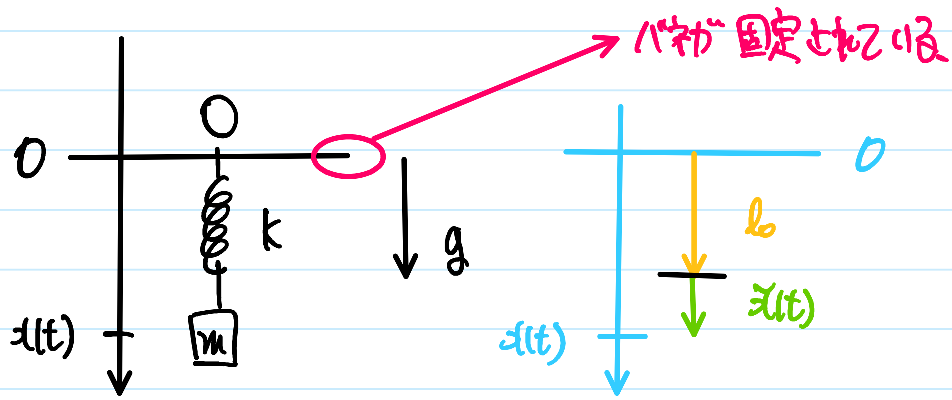


図1: 自由振動

よって、図のように、x(t)の座標を次のように分ける:

$$x(t) = \underbrace{l_0}_{\text{“自然長”}} + \xi(t) \quad \cdots (1)$$

(ここで、$\xi(t)$はバネの伸びとする。)

式(1)により、系の方程式は:

$$-k\,\xi(t) = m\,\ddot{x}(t)$$

となる。しかし、ここでは、相異なる、$x(t)$ と $\tilde{x}(t)$ があるので:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}(l_0 + \tilde{x}(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t)$$

の関係式を用いて、下記のようにかき替える。

$$\boxed{\therefore\ m\ddot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = 0}$$

1 問アで求めた方程式で、$\tilde{x}(t) = e^{\lambda t}$ とおく。

$$\Rightarrow \left(m\frac{d^2}{dt^2} + k\right)\tilde{x}(t) = \underbrace{(m\lambda^2 + k)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \overset{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = 0$$

より、可能な λ は次の2つのみ:

$$\lambda_+ = i\omega_0\ ,\quad \lambda_- = -i\omega_0\ ;\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

方程式を満たすものとして、$\tilde{x}_+(t) = e^{i\omega_0 t}$, $\tilde{x}_-(t) = e^{-i\omega_0 t}$ が可能。

より、一般解をその線形結合でかける:

の"一般解"

$$\boxed{\therefore\ \tilde{x}(t) = C_+ e^{i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t}}$$

問題1B バネの一端を支点Oに設定していたが、右図の様

に、この設定を外して、バネの一端の変位がAsin ωtとなる様にx軸方向に振動させた場合を考える。

ウ　質点に関する運動方程式を書きなさい。
エ　特殊解を求めなさい。また、特殊解で考えられる質点の振動の振幅(大きさ)を縦軸に、バネの一端を動かす振動数ωを横軸にしたグラフの概形を書きなさい。質点の振幅が最も大きくなる(無限大に発散する)ω'を求めなさい。
オ　バネの一端を動かす振動数ωがω'になると、質点の振幅はなぜ大きくなるのか。振動数ωがω'より小さい場合やω'より大きい場合に、質点の振幅はなぜ小さくなるのか、その理由を論じなさい。

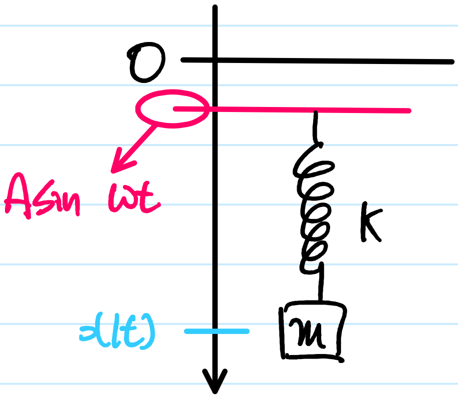


図2: 強制振動

解答

ウ　同様に、 $x(t)$ とバネの伸び $\tilde{x}(t)$ の間には、次の関係式が成り立つ:

$$\therefore x(t) = A\sin\omega t + l_0 + \tilde{x}(t) \qquad \cdots (2)$$

つまり、図2は、さらに次のように描ける。

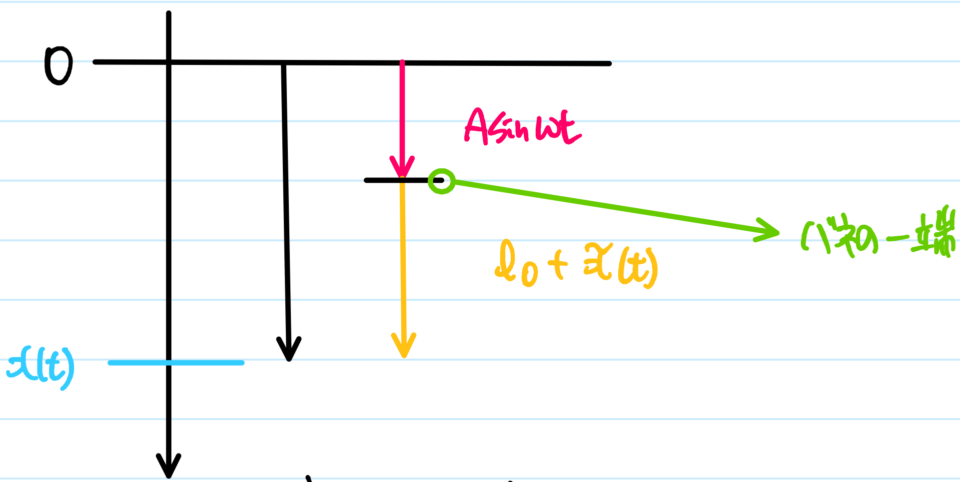


図3: 座標系の設定

よって、質点の方程式を、

$$-k\tilde{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

ここで、$\ddot{\tilde{x}}(t)$ と $x(t)$ が共有項をもつため、式(2)の関係を用いる：

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(A\sin\omega t + l_0 + \tilde{x}(t)\right)$$

$$= -A\omega^2\sin\omega t + \frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t)$$

次の方程式を得る：

$$\boxed{\therefore\ m\ddot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = mA\omega^2\sin\omega t}$$

I 特解を求めるため、次のように $\tilde{x}_h(t)$ をおく：

$$\Rightarrow \tilde{x}_h(t) = F(\omega)\sin\omega t \qquad \cdots (3)$$

（$\tilde{x}$ と $\ddot{\tilde{x}}$ の線形結合で成っているため、$\sin$ のみでもOK!）

式(3)を方程式に代入すれば：

$$\therefore (k - m\omega^2)F(\omega)\sin\omega t = mA\omega^2\sin\omega t$$

より、特解 $\tilde{x}_h(t)$ の振幅として $F(\omega)$ を：

$$\boxed{F(\omega) = \frac{A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

とかける。特解 $\tilde{x}_h(t)$ の振幅として、$|F(\omega)|$ を取れば、
次のようにグラフをかける:

よって、$\boxed{\omega' = \omega_0}$ のとき、振幅が最大に成る。ただし、

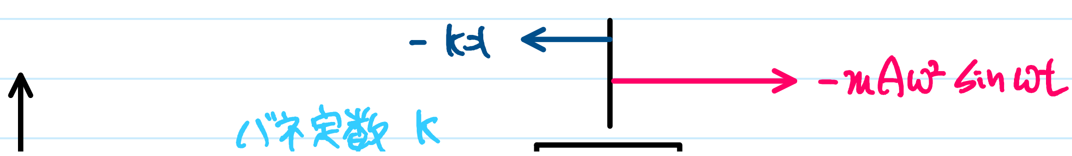
正解

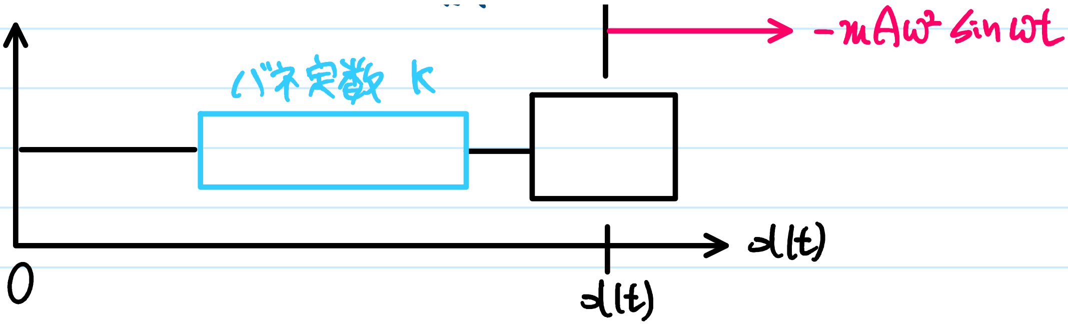
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であることを思い出せ。

よって、$t \to \infty$ の特解は、式 (2) により次のようにかける。

$$\boxed{\therefore\ x_h(t) = l_0 + A\sin\omega t - \left(\frac{A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\sin\omega t}$$

オ　慣性力を使って、次のようにも考えられる。





＊ 重ね合わせの原理により、弾性力 $f = -kx$ に、外力 $F(t) = -mA\omega^2 \sin \omega t$ が加えられると考えても良い。

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-kx}_{\text{弾性力}} - \underbrace{mA\omega^2 \sin \omega t}_{\text{慣性力}} = \underbrace{m\ddot{x}}_{\text{加速度}}$$

もし、$\omega \neq \omega_0$ ならば、$f = -kx$ と $F(t) = -mA\omega^2 \sin \omega t$ が一致しないため、振幅も最大にならない。∎

(問1解説 終わり)

問題2 惑星の運動を、2次元極座標系(r, θ)を用いて考える。

ア　$\overrightarrow{e_r}$と $\overrightarrow{e_\theta}$の時間微分を求めなさい。

イ　太陽(質量M)と惑星(質量m)の間に万有引力が働いているものとして、2次元極座標系を用いて運動方程式を書きなさい。なお、$M \gg m$として太陽と惑星に関する換算質量はmとして近似して良い。万有引力定数はGとする。

ウ　惑星の角運動量Lが保存する事を示しなさい。

エ　rやr'(rの時間微分)の変数、角運動量Lを用いてエネルギー保存則を書きなさい。

オ　最初、惑星が半径r_0の円軌道で等速円運動していた。惑星が、静止していた小惑星(質量m/2)と正面衝突して、惑星と小惑星が合体した。その結果合体した惑星は太陽の周りで楕円

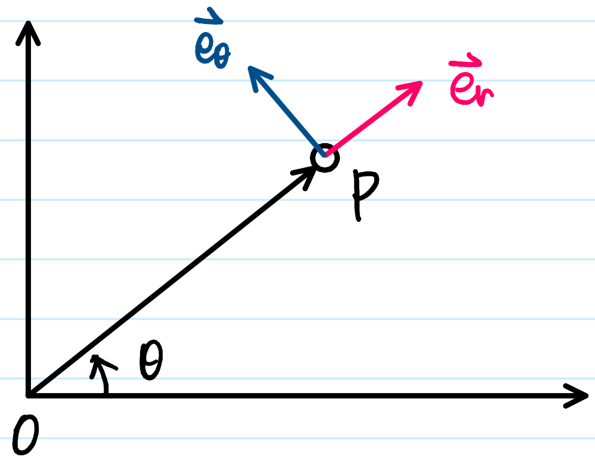
運動を描くようになった。惑星が太陽に最も近づいた時の、太陽と惑星の距離と、その時の惑星の速さを求めなさい。ただし、G,M,r_0のうち必要なものを用いて解答する事。

カ　楕円軌道を惑星が回る公転周期を求めなさい。ただし、G,M,r_0のうち必要なものを用いて解答する事。

キ　ニュートンが万有引力を提唱する以前に、惑星と太陽の間には何らかの引力が作用している事が知られていたが、その引力の特徴は分かっていなかった。ニュートンはケプラーの法則から万有引力の特徴を明らかにした。どのようににして万有引力の特徴を明らかにしたと考えられるか論じなさい。

解答

ア　極座標 (r, θ) は、次のように取れる



図のように、$|\vec{OP}| = r$ に成れるようにベクトル $\vec{OP}$ を取れば:

$$\therefore \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

x成分

y成分

より、$\vec{e}_r$ と $\vec{e}_\theta$ を次のようにかける:

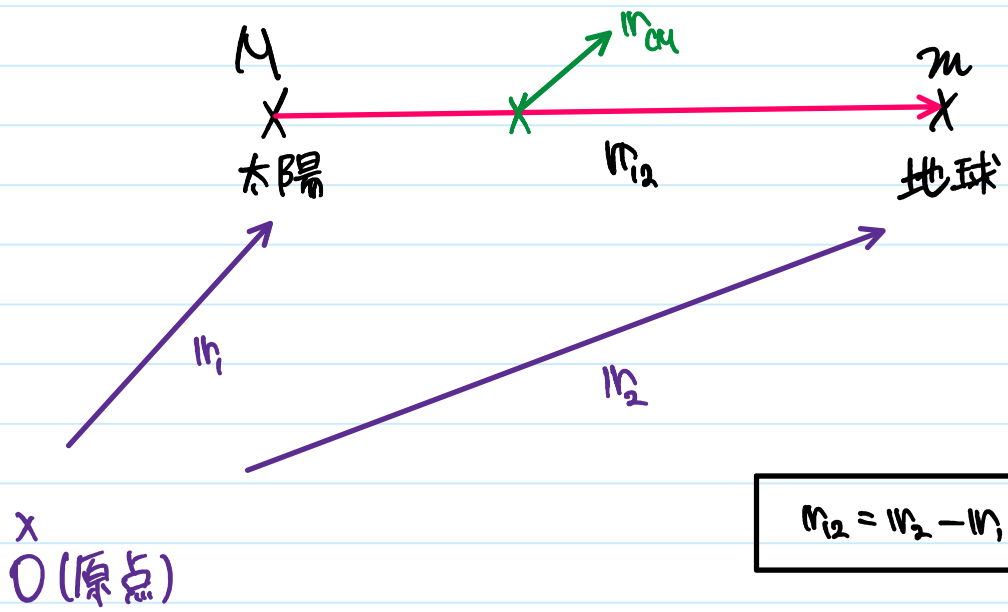
$$\boxed{\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}$$

かつ、それらの微分は、

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \dot{\theta} = \boxed{\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta} \\ \dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \dot{\theta} = \boxed{-\dot{\theta}\,\vec{e}_r} \end{cases}$$

← 正解

イ　図表する：



$$\boxed{\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}$$

方程式を次のように立てる。

$$\begin{cases} \text{太陽：} \quad G\dfrac{Mm}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\mathbf{r}_{12} = M\ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \text{地球：} \quad -G\dfrac{Mm}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\mathbf{r}_{12} = m\ddot{\mathbf{r}}_2 \end{cases} \quad \cdots (1)$$

質量中心座標系 $\mathbf{r}_{cm}$ を取れば、式(1)を一つの方程式として

質量中心座標系 $\mathbb{r}_{CM}$ を取れば、式(1)を一つの方程式として
かける:

$$\boxed{\mathbb{r}_{CM} = \frac{M\mathbb{r}_1 + m\mathbb{r}_2}{M+m}}$$

ならば、式(1)によって、

$$\therefore \ddot{\mathbb{r}}_{CM} = \frac{M\ddot{\mathbb{r}}_1 + m\ddot{\mathbb{r}}_2}{M+m} = \mathbb{0}.$$

を分かる。座標系 $(\mathbb{r}_{CM}, \mathbb{r}_{12})$ を用いて、

$$M\ddot{\mathbb{r}}_1 + m(\ddot{\mathbb{r}}_{12} + \ddot{\mathbb{r}}_1) = \mathbb{0},$$

座標変換
$(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) \longmapsto (\mathbb{r}_{CM}, \mathbb{r}_{12})$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \ddot{\mathbb{r}}_1 = -\left(\frac{m}{m+M}\right)\ddot{\mathbb{r}}_{12}}$$

を得る。より、式(1)を次の一つの方程式でまとめる:

$$\therefore -G\frac{Mm}{|\mathbb{r}_{12}|^3}\mathbb{r}_{12} = \underbrace{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)}_{m \ll M}\ddot{\mathbb{r}}_{12} \simeq M\ddot{\mathbb{r}}_{12}$$

また、"ア"の結果を用いて、

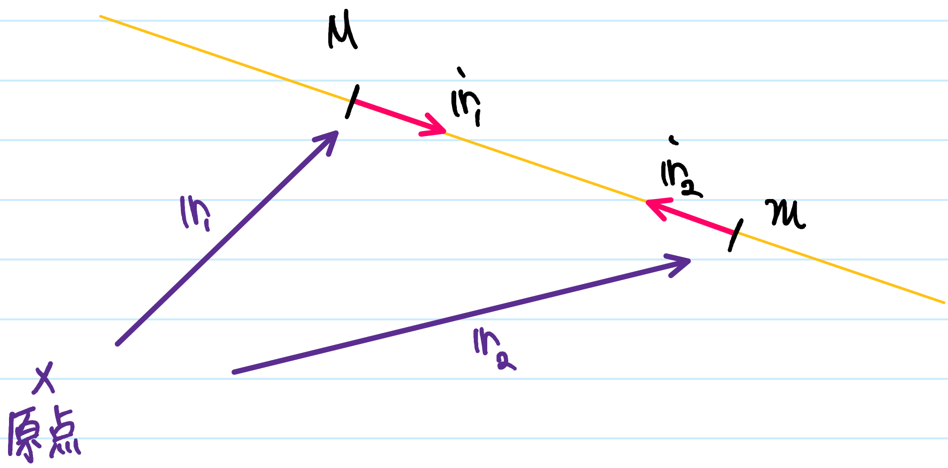
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \underline{\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta} \\[2ex] \dfrac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) \end{cases}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$$

を合わる。より、$r_{12} \longmapsto r$ として、系の方程式をかく。

$$\boxed{\therefore\ -G\frac{Mm}{r^2} = M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}$$ ← 正解

ウ　系の角運動量 $\mathbb{L}$ は、次のように考えられる:



より、　$\mathbb{L} = \sum_i (\mathbb{r}_i \times \mathbb{p}_i)$

$$\boxed{\mathbb{L} = M\mathbb{r}_1 \times \dot{\mathbb{r}}_1 + m\mathbb{r}_2 \times \dot{\mathbb{r}}_2}$$

と成る。保存性を示すためには、$\dot{\mathbb{L}} = 0$ を示せば良い。

$$\Rightarrow \dot{\mathbb{L}} = M\mathbb{r}_1 \times \ddot{\mathbb{r}}_1 + m\mathbb{r}_2 \times \ddot{\mathbb{r}}_2$$

$\left(M\dot{\mathbb{r}}_1 \times \dot{\mathbb{r}}_1 = 0 \text{ と成る!}\right)$

$$= G\frac{Mm}{|\mathbb{r}_{12}|^3}\mathbb{r}_{12} \times (\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2)$$

同じ方向

$|\mathbb{r}_2|$

同じ方向

$= 0$ ∎

より、角運動量が保存される.

エ　系のエネルギーは、次のようにかける.

「系の運動エネルギー」

$$\therefore E = \frac{1}{2}M(\dot{\mathbb{r}}_1 \cdot \dot{\mathbb{r}}_1) + \frac{1}{2}m(\dot{\mathbb{r}}_2 \cdot \dot{\mathbb{r}}_2) - G\frac{Mm}{|\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2|}$$

ポテンシャル E

より、このエネルギーの式を次のように、$\boxed{\text{座標系}\ (\mathbb{r}_{cm},\ \mathbb{r}_2)}$ でかけば、

*注

$$\dot{\mathbb{r}}_1 \ll \dot{\mathbb{r}}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\therefore \dot{\mathbb{r}}_1 \simeq 0}$$

より、エネルギー E は:

$$\therefore E \simeq \frac{1}{2}m(\dot{\mathbb{r}}_2 \cdot \dot{\mathbb{r}}_2) - G\frac{Mm}{|\mathbb{r}_2|} \quad \cdots (2)$$

かつ、その角運動量 $\mathbb{L}$ も同様に:

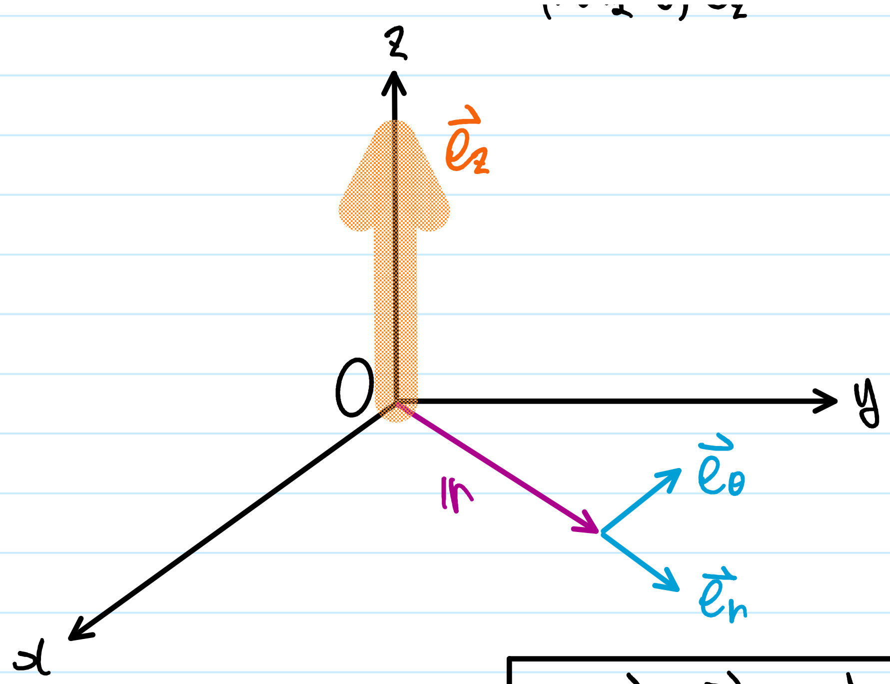
$$\mathbb{L} \simeq m(\mathbb{r}_2 \times \dot{\mathbb{r}}_2) = \boxed{m\, r_2\, \vec{e}_r} \times (\dot{r}_2 \vec{e}_r + r_2\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$\mathbb{r}_2$　$\dot{\mathbb{r}}_2$

$\dot{\mathbb{r}}_1 \ll \dot{\mathbb{r}}_2$

$$= (m r_2^2 \dot{\theta})\, \vec{e}_z$$

z



$$\boxed{\therefore\ \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z}$$

とかいても良い。さらに、

$$\therefore\ l^2 = \mathbb{L}\cdot\mathbb{L} = m^2 r^4 \dot{\theta}^2$$ と成る。

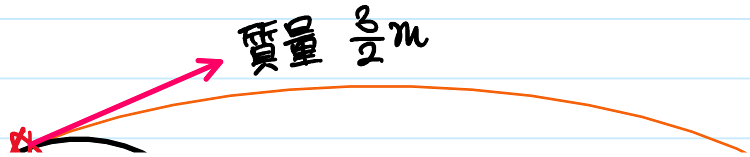
より、系のエネルギー E は改めて、次式のようにかける。

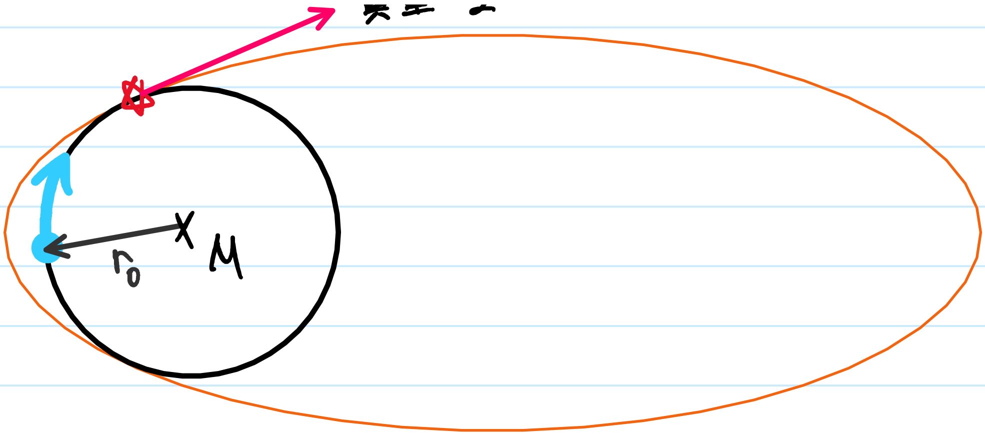
$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - G\frac{Mm}{r}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}}$$ ← 正解

有効ポテンシャル

オ　先ず、図表示すれば、次のように成る。





衝突前→等速円運動から,

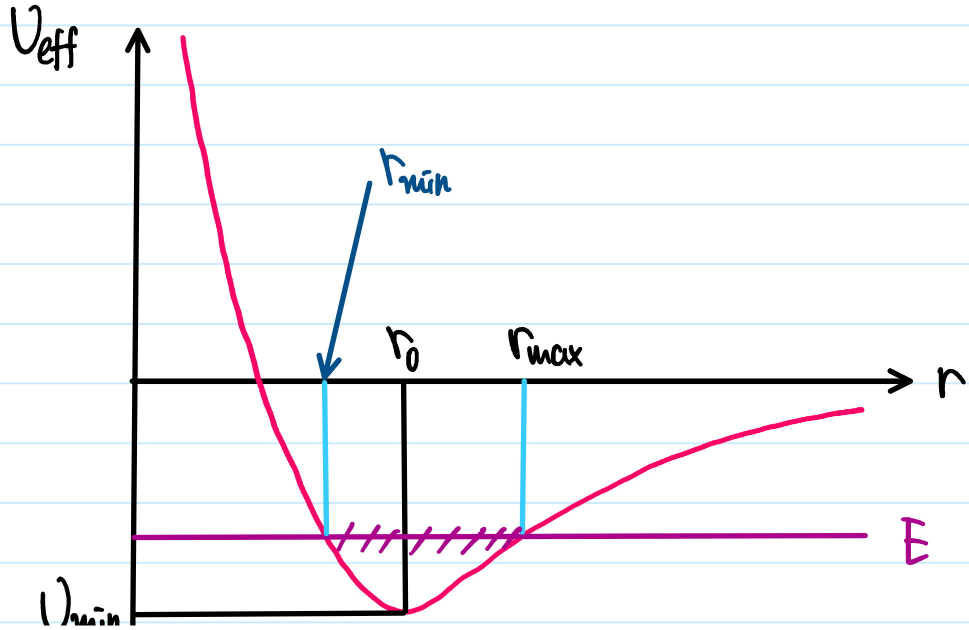
$$G\frac{M\cancel{m}}{r_0^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}v_0^{\cancel{2}}}{\cancel{r_0}} \Rightarrow \boxed{\therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$$

を得る.

衝突後 → 運動量保存

$$mv_0 = \left(m + \frac{1}{2}m\right)v' \Rightarrow \boxed{\therefore v' = \frac{2}{3}v_0}$$

ここで,有効ポテンシャルを用いる.



エネルギー式から、

いつも「正の実数」

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}$$

と成り、$E \geq U_{eff}$ が運動可能領域である。

#1. 円運動のとき

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + \frac{l_0^2}{2mr_0^2} - G\frac{Mm}{r_0}$$

$\parallel$
0

$$= -\frac{GM}{2r_0}$$

のように、Eが分かる。（Eは、定数である!?）

#2. だ円運動のとき

最も近いたときと、最もはなれたときは、$\dot{r} = 0$ となるため、

$$\therefore E_0 = 0 + \frac{l_1^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \quad \cdots (**)$$

の2次方程式の解がそれぞれ r_{min} と r_{max} に成る。

＊衝突後のエネルギー E_0'

(1) 衝突後の系の角運動量 l_1

$$\therefore l_1 = r_0 \times \frac{3}{2}m \times v' = r_0 m v_0 = \sqrt{GMm^2 r_0}$$

(2) 系のエネルギー E_0の計算

$$\therefore E_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m\right)\dot{r}^2 + \frac{l_1^2}{2\left(\frac{3}{2}m\right)r^2} - \frac{GM}{r}\left(\frac{3}{2}m\right)$$

(衝突直前には，円運動をしていたので，$\dot{r}=0$.)

$$= \frac{l_1^2}{3mr_0^2} - \frac{3GMm}{2r_0} = \boxed{-\frac{7GMm}{6r_0}}$$

より，式(**)は，次のようにかける．

$$\therefore -\frac{7\cancel{GMm}}{6r_0} = \frac{\cancel{GMm}\,r_0}{3r^2} - \frac{3\cancel{GMm}}{2r}$$

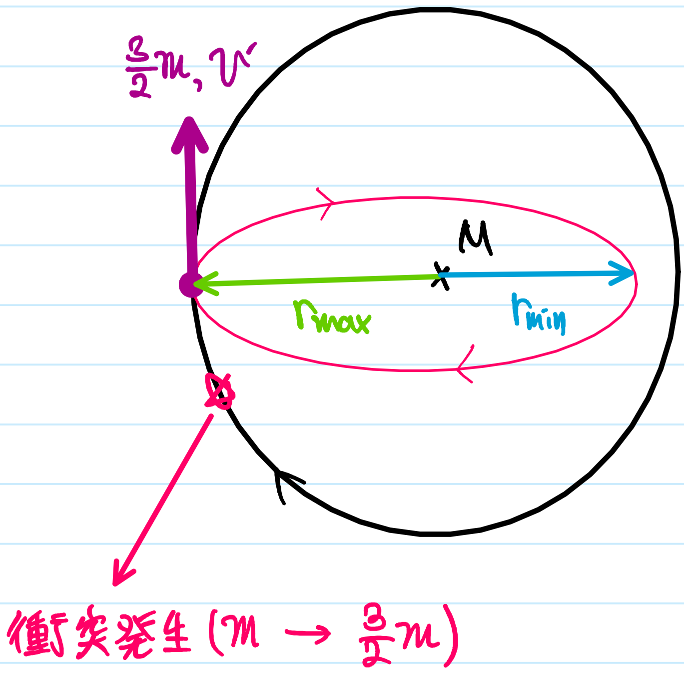
より、上の方程式を次のように解く：

$$\Rightarrow 2p^2 - 9p + 7 = 0, \quad \left(ただし，p = \frac{r_0}{r}\right)$$

この方程式を解くことにより，次のように成ることを分かる．

$$\boxed{\therefore r_{min} = \frac{2}{7}r_0, \quad r_{max} = r_0}$$

従って，正しい図表示は：



と成るはずだ。

カ　だ円軌道の周期は、次のようにケプラー法則を用いて:

$$\left(\frac{T'}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{9}{7}r_0 \Big/ 2r_0\right)^3$$

だ円運動の"長半径"

円運動の"長半径"

$$\boxed{\therefore \ \frac{T'}{T_0} = \frac{27}{14\sqrt{14}}}$$

を得る。一方で、円運動の周期 T_0 は、

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$$ と成る。

より、問題のだ円軌道の周期 T' は次のようにかける。

$$\therefore\ \boxed{T' = \frac{27\pi}{7\sqrt{14}}\sqrt{\frac{r_0^{\,3}}{GM}}}$$ ← 正解

キ 略.(別紙参考)

*質問があればどーぞ!?