Particle Theory B4 Seminor, Spring 2025

Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrammes

金導賢 [a] **(西岡辰磨)**[b]

[a]大阪大学 理学部 物理学科 大野木 G,
大阪府豊中市待兼山町 1-1
[b]大阪大学 理学研究科 物理学専攻,
大阪府豊中市待兼山町 1-1,

E-mail: u685087j@ecs.osaka-u.ac.jp

Abstract: 物理学特別研究/文献調査 (素粒子論 G) 前期ゼミの補足資料

[1]QFT ゼミ/監督教員

目 次

0.1　前書き

この資料は 2023 春夏 ∼2024 秋冬の間に私が勉強した，場の量子論の基礎となる数学 (Lorentz 群・表現論および場の古典論) をまとめた資料に基づいたものである．本ゼミで関わりのある部分のみを選んでいる (後半に成って，本格的な場の量子化に入ったときは必要に応じて https://github.com/Het0710/Het0710.github.io/blob/main/M57.pdf を参照)．指定の**テキストの流れを追うこと**を優先して語る予定である．本資料では，日本語基盤の用語の使用を優先するが，原則英語の併記をすることにする．誤植などは私まで．

0.2　単位系と計量の規約

本資料において特別な言及がない限り，**自然単位系 (Natural Unit)** を採用する:

$$c = \hbar = k_B = \cdots = 1. \tag{0.2.1}$$

計量についてはラ**ンダウ=リプシッツ計量 (Ladau-Lifshitz convention)** として[1],

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+, -, \cdots, -). \tag{0.2.2}$$

また，Einstein 縮約を採用して $a_\mu b^\mu = \sum_\mu a_\mu b^\mu, \cdots$ であり，更なる縮約として

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^{[\mu} A^{\nu]} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{0.2.3}$$

としてとる．

[1]時空が平坦 (flat) な場合

第1章　ローレンツ群

1.1　相対論と共変性，反変性

1.1.1　ミンコフスキー計量空間

自由空間で伝播される電磁波の波動方程式は**マクスウェル方程式 (Maxwell equation)** およびローレンツゲージ (Lorentz gauge) により決定される．

自由空間のマクスウェル方程式 (Maxwell's equation)

$$\left[\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\varphi(\mathbf{r})=0, \tag{1.1.1}$$

$$\left[\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{0}. \tag{1.1.2}$$

ここでそれぞれのポテンシャルに関する波動方程式 (1.1.1) および (1.1.2) では光速不変性を示すために SI 単位系として表した．また，この波動方程式から光速不変性

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{1.1.3}$$

が得られる．

世界間隔

式 (1.1.3) の光速不変性を認めれば，光経路 (light path) 上では慣性系の選択とは関係なく常に次の関係が成り立つことが分かる:

$$c^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}, \tag{1.1.4}$$

あるいは同じ表現：

$$c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=0. \tag{1.1.5}$$

一般の**ユクリッド内積空間 (Euclidean space)** では，光速不変性が成り立たない場合もあるため，4 元の時空での線素 ds が光速不変性を満たすように再定義する必要がある．

世界間隔 (World interval)

光速不変性を保つような時空の線素として，世界間隔[a]を次のように定義する．

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.1.6}$$

かつ，世界間隔 ds_i^2 は慣性系に依らずに不変である:

$$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2. \tag{1.1.7}$$

[a] このような時空の光速不変性を保つ空間を**ミンコフスキー空間 (Mincowski space)** とよぶ．

ここの世界間隔 (World interval) の定義から，線素 ds^2 に次のような 2 つの条件を要請することができる:

- **光速不変性 (Constancy of light velocity):**
  光速不変性をマクスウェル方程式 (Maxwell's equations) から確かめたので，線素 ds にもある慣性系 $\mathcal{S}_i$ での線素 $ds_i^2 = 0$(光経路) ならば:

  $$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2 = ds_i^2 = 0. \tag{1.1.8}$$

  を要請する．

- **速度等方性 (Isotropy of velocity):**
  世界間隔の定義から，線素 ds^2 の形式

  $$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2dt^2\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right] \tag{1.1.9}$$

  から線素 ds^2 の速度等方性を要請する．

以上の要請から，光経路でない一般的な経路の線素 ds^2 も慣性系の選び方に依らないことを証明できる．

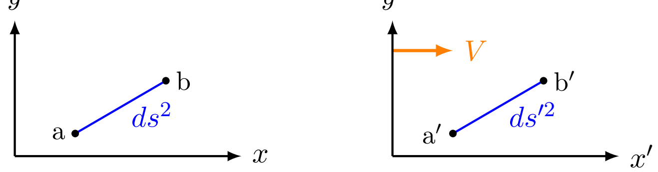

図 1.1. 異なる慣性系での世界間隔

上の図に示すように，線素 ds^2 は慣性系の取り方に依らないことを証明するため，異なる慣

性系 $\mathcal{S}(x,y;t)$ と $\mathcal{S}'(x',y';t')$ で観測した世界間隔 ds^2 と ds'^2 の関係を考える．上で要請した**光速不変性 (Constancy of light velocity)** と**速度等方性 (Isotropy of velocity)** から線素 ds^2 と ds'^2 の関係式は次のように書ける:

$$ds'^2 = \beta(V)ds^2, \tag{1.1.10}$$

かつ，ds^2 に関しても

$$ds^2 = \beta(-V)ds'^2. \tag{1.1.11}$$

式 (1.1.10) および (1.1.11) から，$\beta(V)$ と $\beta(-V)$ は

$$\beta(-V) = \frac{1}{\beta(V)} \tag{1.1.12}$$

の条件を満たす．速度等方性 (Isotropy of velocity) から線素の変換関数は $\beta(V) = \beta(-V)$ となり，さらに式 (1.1.12) から変換関数 $\beta(V)$ は定数になることが分かる．

$$\beta^2(V) = 1 \tag{1.1.13}$$

ここで，式 (1.1.6) のように線素 ds^2 を取ったら，ある適切な慣性系 $\mathcal{S}_\tau$ が存在して

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \beta(V_\tau)c^2d\tau^2 \tag{1.1.14}$$

を満たす．一方で，$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 > 0$ であることに注意すれば $\beta(V) > 0$ を得られ，変換関数は $\beta(V) = 1$ として決定される:

$$ds^2 = ds_1^2 = \cdots = ds_n^2 > 0. \tag{1.1.15}$$

故に，光速不変の原理の下では**世界間隔が不変量になる**という結果を得る．それゆえ，以下ではこの世界間隔の不変性に注目して理論を展開していく．

ミンコフスキー計量

前の節で，光速不変性 (Constancy of light) を認めれば線素 ds^2 は不変であることが分かった．

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{x}^2 > 0 \tag{1.1.16}$$

線素 ds^2 はテンソル表現を使えばより簡単に書ける:

計量テンソル (Metric tensor)

世界間隔 ds^2 は計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を用いて次のように書ける:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1.17}$$

ここの計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は次のように定義する:

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.18}$$

ここで式 (1.1.17) には同じ添え字が二回現れたときに和の記号を省略する**アインシュタインの縮約記法 (Einstein summation convention)** を使った．この記法を使用するとベクトル計算の表記が簡単になるので，特に混乱がない場合は以下でこの記法を使用する．

$$\sum_\mu a_\mu b_\mu \xrightarrow{\text{縮約}} a_\mu b_\mu \tag{1.1.19}$$

1.1.2　共変ベクトルと反変ベクトル

ここからは，ベクトルの変換の様子により**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** として区分して扱う．次の図のようにあるベクトル $\mathbf{A}$ を異なる基底の組 $\langle X_1, X_2 \rangle$[1]および $\langle Z_1, Z_2 \rangle$ の上で考える:

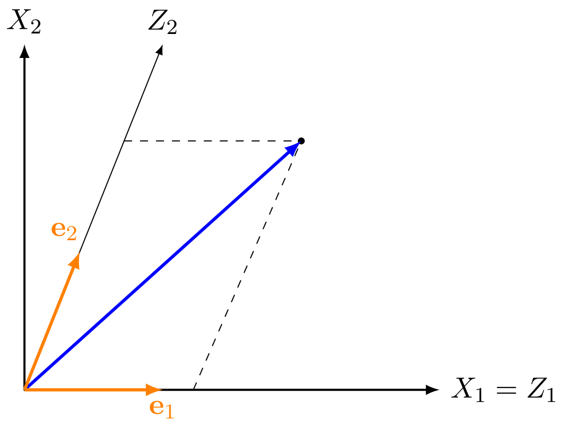

図 1.2. 共変ベクトル

任意のベクトル $\mathbf{A}$ はそれぞれの基底を用いて一般に次のように書ける．

$$\mathbf{A} = X_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = Z_j \mathbf{e}_j \tag{1.1.20}$$

式 (1.1.20) の両辺に X_i に関する偏微分を取ることにより**基底ベクトル (Basis vectors)** の変換式を得る．

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial X_j}{\partial Z_i} \boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad \leftarrow \quad X_i \delta_{ik} = Z_j (\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k) \tag{1.1.21}$$

このような変換則を従うベクトルを**反変ベクトル (Covariant vectors)** と呼ぶ:

共変ベクトル (Covariant vectors)

次のような変換則を満たすベクトルを共変ベクトルと定義する:

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial X^\nu}{\partial Z^\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\nu \tag{1.1.22}$$

また，共変ベクトルは下付き添え字として $\mathbf{e}_\mu$[a]などで書く．

[a] これは，可微分多様体 (C^∞ 級) の言葉で書き換えると，接空間 T_p の元 $\partial/\partial x^\mu$ に対応させる．

[1] 基底の組 $\langle X_1, X_2 \rangle$ は直交座標 (Cartesian coordinates) 上の正規直交基底として与えられる:

$$\mathbf{A} = X_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + X_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

一方で，式 (1.1.20) のそれぞれの成分 X_i, Z_j の変換はどのように行われるかを確かめる．

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} = X_i(\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i) = Z_j(\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i) = \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} Z_j \tag{1.1.23}$$

式 (1.1.23) から，それぞれの成分 X_i, Z_j は共変的でない:

$$X_i = \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} Z_j. \tag{1.1.24}$$

変換則 (1.1.24) を満たすベクトルは**反変ベクトル (Contravariant vectors)** と呼ぶ:

反変ベクトル (Contravariant vectors)

次のような変換則を満たすベクトルを反変ベクトルと定義する:

$$X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial Z^\nu} Z^\nu \tag{1.1.25}$$

また，反変ベクトルは上付き添え字として X^μ などで書く．

1.1.3 双対基底と双対空間

式 (1.1.22) および (1.1.25) の**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** の定義から，ベクトル $\mathbf{A}$ を共変と反変を区分して表すと:

$$\mathbf{A} = X^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu = Z^\nu \mathbf{e}_\nu. \tag{1.1.26}$$

ここでは反変的に変換される基底 $\mathbf{e}^\mu$ を見つけるため，別の基底 $\langle U_1, U_2 \rangle$ を加える．

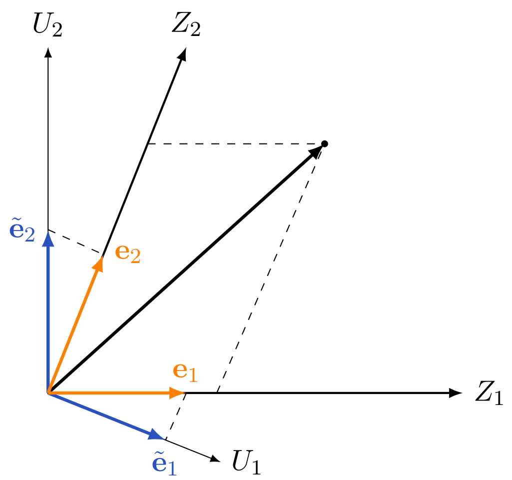

図 1.3. 双対基底

上の図で示すような取り方で定めた基底を**双対基底 (Dual basis)** と定義する:

双対基底 (Dual basis)

次の条件を満たすように双対基底を定義し，この双対基底からなる空間 $\mathcal{M} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_\mu \rangle$ を双対空間 (Dual space) と呼ぶ:

$$\mathbf{e}_\mu \quad \mapsto \quad \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{i\nu}. \tag{1.1.27}$$

ここで，双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の共変・反変を区分せずにただの添え字として表した．式 (1.1.27) で定義した双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ の変換が共変的か反変的か調べてみよう:

$$\mathbf{A} = X^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu = Z^\nu \mathbf{e}_\nu = A_i \tilde{\mathbf{e}}_i. \tag{1.1.28}$$

先ず，双対基底の定義と基底 $\mathbf{e}_\mu$ の共変性から次を得る．

$$Z^\nu(\mathbf{e}_\nu \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) = X^\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) = X_j(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \tag{1.1.29}$$

以上のことを踏まえると，次のような変換関係が導かれる:

$$1 = \frac{\partial X_j}{\partial Z_i}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i), \tag{1.1.30}$$

あるいは，互いの双対基底のノルムの評価として

$$\frac{\partial Z_i}{\partial X_j} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i. \tag{1.1.31}$$

ここから双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ も正規直交基底 $\boldsymbol{\varepsilon}_\nu$ で生成できることから双対基底の変換が反変的であることが分かる:

双対基底の反変性

基底 $\mathbf{e}_\mu$ 双対基底 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ は反変的に変換され，反変的基底 ($\mathbf{e}^\mu = \tilde{\mathbf{e}}_\mu$) として定義される:

$$\mathbf{e}^\mu = \frac{\partial Z_\nu}{\partial X_\mu}\boldsymbol{\varepsilon}^\nu. \tag{1.1.32}$$

ここで，正規直交基底に対しては**共変ベクトル (Covariant vectors)** と**反変ベクトル (Contravariant vectors)** が同じくなることに注意せよ．ならば，ベクトル $\mathbf{A}$ は共変基底と反変基底を用いて共変・反変の区分付きで:

$$\mathbf{A} = Z^\mu \mathbf{e}_\mu = Z_\nu \mathbf{e}^\nu = X^\rho \boldsymbol{\varepsilon}_\rho = X_\rho \boldsymbol{\varepsilon}^\rho. \tag{1.1.33}$$

故に，反変基底 $\mathbf{e}^\nu$ の成分を共変的に X_ν として書いた理由は式 (1.1.23) と同様な方法で確かめられる．つまり:

$$X_\rho = Z_\nu(\mathbf{e}^\nu \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\rho) = \frac{\partial Z_\rho}{\partial X_\nu} Z_\nu \tag{1.1.34}$$

ここから，双対空間の成分 X_ν は共変的に変換されることを分かる．

1.1.4 座標変換とローレンツ共変性

この節では，ミンコフスキー距離 (Minkowski distance) が不変になるような変換 $x \mapsto \tilde{x}$ について考察する．このような不変性を**ローレンツ不変性 (Lorentz Invariance)** かつ，その変換を**ローレンツ変換 (Lorentz transformation)** と呼ぶ．

これからローレンツ変換をより厳密に定義するため，ミンコフスキー空間上の**線素ベクトル (infinitesimal displacement)** を共変と反変を区分して次のように書ける:

$$d\mathbf{r} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = x_\nu \mathbf{e}^\nu. \tag{1.1.35}$$

共変・反変的に書けた線素ベクトル (1.1.35) により，ミンコフスキー空間上の世界間隔 ds^2 は次のように書き直せる．ミンコフスキー空間上の世界間隔 ds^2 は線素ベクトルの演算を用いて次式のようになる．

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) x^\mu x_\nu = \delta^\nu_\mu x^\mu x_\nu = x^\mu x_\mu \tag{1.1.36}$$

$$= (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \tag{1.1.37}$$

この結果を式 (1.1.18) と比べて計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を次のように定義できる．

計量テンソルの再定義

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathrm{diag}(+,-,-,-)\ , \qquad \eta^{\mu\nu} \equiv \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathrm{diag}(+,-,-,-). \tag{1.1.38}$$

ここからローレンツ変換を考えるため，**ミンコフスキー計量 (Minkowski Metric)** として成分 x^μ を次のように決める:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{自然単位系}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{1.1.39}$$

一方で，計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ の定義を考えると共変成分 x_μ は次のような方法で導かれる．

$$x_\mu = \delta^\nu_\mu x_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) x_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \tag{1.1.40}$$

式 (1.1.40) により，共変成分 x_μ は:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{自然単位系}} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{1.1.41}$$

また，式 (1.1.40) から共変ベクトル A_μ と反変ベクトル A^μ には次のような関係が成り立つことが分かる．

共変と反変の接続 (Covariant-contravariant connection)

共変ベクトル A_μ と反変ベクトル A^μ は計量テンソルにより接続される:

$$A^\mu = \delta^\mu_\nu A^\nu = (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\nu)A^\nu = (\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu)A_\nu = \eta^{\mu\nu}A_\nu, \tag{1.1.42}$$

$$A_\mu = \delta^\nu_\mu A_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu)A_\nu = (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu)A^\nu = \eta_{\mu\nu}A^\nu. \tag{1.1.43}$$

ここから，ローレンツ変換を考える．共変ベクトル x_μ および反変ベクトル x^μ の変換は式 (1.1.22) および式 (1.1.25) により，ローレンツ変換は単に次のように書ける:

$$x^\mu \quad \mapsto \quad \tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}x^\nu \ , \qquad x_\mu \quad \mapsto \quad \tilde{x}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}x_\nu. \tag{1.1.44}$$

2 次変換テンソルとして $\Lambda_\mu{}^\nu$ を導入すればローレンツ変換は次のように書き換える．

ローレンツ変換 (Lorentz transformation)

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ , \quad \tilde{x}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu. \tag{1.1.45}$$

ここで，2 次テンソル $\Lambda_\mu{}^\nu$ は次のように定義する:

$$\Lambda^\mu{}_\nu := \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \ , \qquad \Lambda_\mu{}^\nu := \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}. \tag{1.1.46}$$

ローレンツテンソル $\Lambda^\mu{}_\nu$ の添え字の順番に特に注意する必要がある．次のテンソルは互いに違うものである:

テンソルの表記規約 (Index convention of tensors)

座標 $\tilde{x}$ と x の共変・反変性を区別するため，テンソル $\Lambda_\mu{}^\nu$ を添え字は次のように規約することにする:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \ , \qquad \Lambda^\nu{}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}. \tag{1.1.47}$$

前の添え字は $\tilde{x}$ の共変・反変性，後ろの添え字は x の共変・反変性を表すことにする．

ローレンツ変換 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の共変性と反変性について論議してみよう．ローレンツ変換は連鎖律により，次式のように変換されることがことを分かる．

$$\Lambda'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \tilde{x}'^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\omega}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \Lambda^{\omega}{}_{\rho} \tag{1.1.48}$$

式 (??) の変換から座標 $\tilde{x}$ は反変的に変換され，座標 x は共変的に変換されるので式 (1.1.46) の添え字規約は正しい．

共変・反変性とテンソル解析

ローレンツ変換の詳しい性質に関しては節 1.2.1 で扱うこととして，この節ではその準備としてのテンソルの共変・反変性に基づいて様々な演算について考察する．

恒等変換 (Identity transformation)

$$I^{\nu}_{\mu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{1.1.49}$$

式 (1.1.25) の反変的変換で $Z^{\nu} \to X^{\nu}$ を考えることにより，恒等変換の成分表示[2]:

$$X^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\nu}} X^{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} X^{\nu} \tag{1.1.50}$$

と表せる．恒等変換の成分表示は今後よく使うので覚えてほしい．

テンソルの定義 (Definition of tensors)

次のように座標系に依らない演算 $T_{\mu\nu}$ などをテンソルという:

$$T'_{\mu\nu}\ dx'^{\mu} dx'^{\nu} = T_{\mu\nu}\ dx^{\mu} dx^{\nu}\ , \qquad T'^{\mu\nu}\ dx'_{\mu} dx'_{\nu} = T^{\mu\nu}\ dx_{\mu} dx_{\nu}. \tag{1.1.51}$$

式 (1.1.51) のように座標系に依らない演算 $T_{\mu\nu}$ を**テンソル量 (Tensor quantity)** と定義する．ここでそれぞれの基底 dx^{μ}, dx'^{μ} は反変的なのでテンソル $T_{\mu\nu}$ の変換式は次のように (反変ベクトルの変換を参照すれば) 書ける:

$$T'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\rho} dx^{\sigma} = T_{\mu\nu}\ dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{1.1.52}$$

かつ，共変的基底 dx_{μ}, dx'_{μ} の上では:

$$T'^{\mu\nu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\nu}} dx_{\rho} dx_{\sigma} = T^{\mu\nu}\ dx_{\mu} dx_{\nu}. \tag{1.1.53}$$

[2] 式 (1.1.49) は基底の取り方に依らないことに注意せよ．直交基底でない場合も成立．

ここの式 (1.1.52) および (1.1.53) により，テンソルのスカラー積 $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ が座標系の選び方に依らないことをすぐわかる:

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\omega}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}}T'_{\rho\sigma}T'^{\omega\lambda} = T'_{\rho\sigma}T'^{\rho\sigma}. \tag{1.1.54}$$

このように座標系の取り方に依存しない物理量を**スカラー (Scalar)** と呼ぶ．実際，ミンコフスキー空間を生成するときも ds^2 が慣性系に依らないことから式 (1.1.35) のようにスカラーになるように線素 $d\mathbf{r}$ を取ったものである．

計量テンソルの変換則

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\, g_{\rho\sigma}\ , \qquad g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}g^{\rho\sigma}. \tag{1.1.55}$$

これは式 (1.1.38) の計量テンソルの定義どおりの変換を考えればよい:

$$g'_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\,\mathbf{e}_{\rho}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\,\mathbf{e}_{\sigma}\right) = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\, g_{\rho\sigma}. \tag{1.1.56}$$

ここで基底 $\mathbf{e}'_{\mu}$ などは共変的に変換されることに注意せよ．反変的な計量 $g'^{\mu\nu}$ についても同様にできて，以上の結果を用いると変換を表すヤコビアンと計量の接続関係:

$$J = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}} \tag{1.1.57}$$

を得られて以下が座標系に依らない不変的な積分空間であることが分かる．

$$\int_{\mathcal{M}'}\sqrt{-g'}\ d^4x' = \int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\ d^4x \tag{1.1.58}$$

ミンコフスキー空間上ではその計量が $g<0$ となることに注意せよ．

共変と反変の転換 (Covariant-Contravariant transformation)

$$g_{\mu\nu}A^{\nu} = A_{\mu}\ , \qquad g^{\mu\nu}A_{\nu} = A^{\mu}, \tag{1.1.59}$$

$$g_{\mu\rho}T^{\rho\nu} = T_{\mu}{}^{\nu}\ , \qquad g^{\mu\rho}T_{\rho\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}. \tag{1.1.60}$$

先ずは式 (1.1.59) の 1 階テンソルに関する変換式から示す．計量テンソルの定義 (1.1.38) から:

$$g_{\mu\nu}A^{\nu} = (\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\nu})A^{\nu} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot(\mathbf{e}^{\nu}A_{\nu}) = A_{\mu}. \tag{1.1.61}$$

これは共変ベクトル A_{ν} に対しても同様にできる．このような変換 (1.1.61) を用いて 2 階テンソルまで拡張できる:

$$T^{\rho\nu}\ dx_{\rho}dx_{\nu} = g_{\rho\mu}T^{\rho\nu}\ dx^{\mu}dx_{\nu}. \tag{1.1.62}$$

テンソルの定義から式 (1.1.60) が成立することが分かる．

1.2 ローレンツ群の表現論

1.2.1 ローレンツ変換とローレンツ群

ローレンツ変換は式 (1.1.45) のローレンツテンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ を用いて:

$$x^{\mu} \quad \mapsto \quad \tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.2.1}$$

で書ける．かつ，反変ベクトル x_{μ} の変換は以下のように与えられる．

$$x_{\mu} \quad \mapsto \quad \tilde{x}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \tag{1.2.2}$$

ここで式 (1.2.1) および (1.2.2) により表現されたローレンツ変換で，2 つのローレンツテンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ を逆行列[3]を用いて次のように書ける:

ローレンツテンソル (Lorentz tensors)

テンソル $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ は 2 階テンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列 Λ^{-1} を用いて次のようにも書ける．

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}. \tag{1.2.3}$$

特に式 (1.2.3) の表記を採用する場合，式 (1.1.47) のテンソルの表記規約を無視して単に以下で規約しても構わない:

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \ , \qquad \tilde{x}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x_{\nu}. \tag{1.2.4}$$

ローレンツ群

ローレンツ変換は世界間隔 ds^2 を変えない変換であることに注意すればローレンツ変換は次のような変換則を満たすことを分かる:

$$\tilde{x}_{\mu}\tilde{x}^{\mu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\tilde{x}^{\mu}\tilde{x}^{\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} \tag{1.2.5}$$

ここでローレンツ変換 (慣性系の変換) は計量を変えないことと式 (1.2.4) の表記を採用すれば式 (1.2.5) の変換則は次のようにも書ける．

$$\Lambda^{\mu}_{\rho}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \tag{1.2.6}$$

---

[3] ローレンツテンソルの定義通りで計算すれば:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = \delta^{\nu'}_{\nu}.$$

より，逆行列の定義により行列 Λ を 2 階テンソル $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の表現行列として定めれば $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ をその逆行列 Λ^{-1} を用いて以下の書ける．

$$\Lambda^{-1} : \ \tilde{x} \quad \mapsto \quad x \ , \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\nu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}.$$

計量テンソルとローレンツテンソルは両方 2 階テンソルなので行列として演算を考えられる．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ およびローレンツテンソル Λ^{μ}_{ρ} の表現行列として:

$$[\eta]_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad [\Lambda]_{\rho\mu} := \Lambda^{\mu}_{\rho} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 & \Lambda^2_0 & \Lambda^3_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 & \Lambda^2_1 & \Lambda^3_1 \\ \Lambda^0_2 & \Lambda^1_2 & \Lambda^2_2 & \Lambda^3_2 \\ \Lambda^0_3 & \Lambda^1_3 & \Lambda^2_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2.7}$$

式 (1.2.7) として行列 g, Λ を定めると，ローレンツ変換の変換則 (1.2.6) は以下の行列関係式を満たし，群を生成する:

ローレンツ群 (Lorentz group)

ローレンツ群とは以下の演算に対して閉じた集合族で定義される．

$$\mathcal{O}(1,3) := \{\Lambda \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R}) \mid \Lambda^t \eta \Lambda = \eta\} \tag{1.2.8}$$

かつ，ここでは計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$ として取っている意味[a]で $\mathcal{O}(1,3)$ と書く．

[a]もし，計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ として取ったら $\mathcal{O}(3,1)$ と書けばよい．

ローレンツ変換の変換則 (1.2.6) を表現行列 g, Λ で書けば:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{1.2.9}$$

ここでローレンツ変換が群を生成することを示すためには以下の 3 点を確かめればよい:

- **演算の閉性 (Closure property):**
  集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ が演算 (1.2.9) に対して閉じていることを示せばよい．つまり，ある任意の $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{O}(1,3)$ に対して:

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^t \eta (\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^t (\Lambda_1^t \eta \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^t \eta \Lambda_2 = \eta. \tag{1.2.10}$$

  より，$\Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{O}(1,3)$ となり，集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ は演算に対して閉じている．

- **逆元の存在性 (Existance of inverse element):**
  逆元 (逆行列) が存在することを示すため，演算 (1.2.9) の両辺に行列式を取る:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \neq 0. \tag{1.2.11}$$

  より，逆元が存在することを簡単に分かる．

- **単位元と逆元の閉性 (Closure property of elements):**
  元 $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ を任意でとり，式 (1.2.9) の演算の両辺に右から Λ^{-1}，左から $(\Lambda^t)^{-1}$ を作用させれば良い:

$$\eta = (\Lambda^t)^{-1}(\Lambda^t \eta \Lambda)\Lambda^{-1} = (\Lambda^t)^{-1}\eta\Lambda^{-1} \;, \qquad I_4^{-1}\eta I_4 = \eta. \tag{1.2.12}$$

  逆元 Λ^{-1} と単位元 I_4 に対しても $\Lambda^{-1}, I_4 \in \mathcal{O}(1,3)$ となる．

以上により，集合族 $\mathcal{O}(1,3)$ が群構造を持つことが示された．このような群を**ローレンツ群 (Lorentz group)** と呼ぶ．ここで式 (1.2.8) により得られたローレンツ群は以下の 4 つの部分群[4]で分けられる:

本義ローレンツ群 (Proper orthochronous Lorentz groups)

ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ は以下の部分群で分類される:

- 固有・順時的部分群:

$$\mathcal{O}_+^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0_0 \geq 1\}, \tag{1.2.13}$$

- 非固有・順時的部分群:

$$\mathcal{O}_-^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0_0 \geq 1\}, \tag{1.2.14}$$

- 固有・反順時的部分群:

$$\mathcal{O}_+^\downarrow := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0_0 \leq -1\}, \tag{1.2.15}$$

- 非固有・反順時的部分群:

$$\mathcal{O}_-^\downarrow := \{\Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0_0 \leq -1\}. \tag{1.2.16}$$

特に，部分群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ を**本義ローレンツ群 (Proper orthochronous Lorentz groups)** と定義する．

ローレンツ群 (1.2.8) は次のような 2 つの性質を満たす (これをローレンツ群の分類の基準として使える)．先ず，ローレンツ群の元 $\Lambda \in \mathcal{O}(1,3)$ を任意で取れば式 (1.2.11) から:

$$\det\Lambda = \pm 1. \tag{1.2.17}$$

[4]後で詳しく述べるが，ここでは部分群という表現を採用しているけど実際の部分群の構造を持っているのは本義ローレンツ群のみであることに注意せよ．

ここで $\det\Lambda=1$ となるローレンツ変換を**固有ローレンツ変換 (Proper Lorentz transformation)**, $\det\Lambda=-1$ となるローレンツ変換を**非固有ローレンツ変換 (Improper Lorentz trnasformation)** と呼ぶ．一方で，ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の元 Λ は定義 (1.2.8) の定義から:

$$\eta_{00}=\Lambda^{\mu}_{0}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{0}=(\Lambda^{0}_{0})^{2}-\sum_{\mu}(\Lambda^{\mu}_{0})^{2}. \tag{1.2.18}$$

計量を $\eta_{00}=1$ として取っていることに注意すれば式 (1.2.18) から以下の結果を得る．

$$\Lambda^{0}_{0}\leq-1\ ,\qquad \text{あるいは,}\qquad \Lambda^{0}_{0}\geq 1 \tag{1.2.19}$$

このようにローレンツ群は行列式 $\det\Lambda$ の正負，成分 Λ^0_0 の正負により 4 つで分かれる．特に，$\Lambda^0_0\geq 1$ となるローレンツ変換を**順時的ローレンツ変換 (Orthochronous Lorentz transformation)**, $\Lambda^0_0\leq -1$ となるローレンツ変換を**反順時的ローレンツ変換 (Anti-orthochronous Lorentz transformation)** と呼ぶ.

部分群と無限小ローレンツ変換

このようにローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の分類が数学的に意味を持つためにはためには，それぞれがローレンツ群の**部分群 (Subgroup)** になる必要がある．先ず，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ がローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分群になることを示すためには以下の 1 点を確かめれば良い:

> ローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分集合 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 対して:
>
> $$\forall_{\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}}\qquad\Rightarrow\qquad \Lambda_1\Lambda_2^{-1}\in\mathcal{O}^{\uparrow}_{+} \tag{1.2.20}$$
>
> を満たすとき，部分集合 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ をローレンツ群 $\mathcal{O}(1,3)$ の部分群と定義する.

定義 (1.2.13) より，任意で取った元 $\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ が次の 2 点を満たせば本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 部分群になる.

- **固有性 (Proper set):**
  本義ローレンツ変換は $\det\Lambda=1$ を満たす．より:

$$\det(\Lambda_1\Lambda_2^{-1})=\frac{\det\Lambda_1}{\det\Lambda_2}=1. \tag{1.2.21}$$

- **順時性 (Orthochronous set):**
  本義ローレンツ変換は $\Lambda^0_0\geq 1$ を満たすので，積 $\Lambda_1\Lambda_2^{-1}$ の成分を以下のように計算してみる:

$$(\Lambda_1\Lambda_2^{-1})^0_0=(\Lambda_1)^{\mu}_{0}(\Lambda_2^{-1})^{0}_{\mu}. \tag{1.2.22}$$

ここで式 (1.2.6) の関係式を用いると $(\Lambda^{-1})^0_{\ \nu} = \eta_{\nu\mu}\Lambda^\mu_{\ 0}$ が成り立ち[5]，式 (1.2.22) の成分は以下のように計算できる．(Cauchy-Schwartz 不等式)

$$\begin{aligned}(\Lambda_1\Lambda_2^{-1})^0_{\ 0} &= \eta_{\mu\nu}(\Lambda_1)^\mu_{\ 0}(\Lambda_2)^\nu_{\ 0} = (\Lambda_1)^0_{\ 0}(\Lambda_2)^0_{\ 0} - \sum_{\mu=1}^{3}(\Lambda_1)^\mu_{\ 0}(\Lambda_2)^\mu_{\ 0} \\ &\underset{(1.2.18)}{=} \sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}[(\Lambda_1)^\mu_{\ 0}]^2}\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}[(\Lambda_2)^\mu_{\ 0}]^2} - \sum_{\mu=1}^{3}(\Lambda_1)^\mu_{\ 0}(\Lambda_2)^\mu_{\ 0} \geq 1.\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

式 (1.2.21) と (1.2.23) により本義ローレンツ群が部分群[6]になることが分かる．本義ローレンツ群が部分群の構造を持つことは，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上の演算は閉じていることを意味する．より，以下のように本義ローレンツ群上に明確に定義された[7]**無限小ローレンツ変換 (Infinitesimal Lorentz transformation)** が存在する:

無限小ローレンツ変換 (Infinitesimal Lorentz transformation)

本義ローレンツ群が部分群の構造を持つため，本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ が定義される:

$$(\delta\Lambda)^\mu_{\ \ \nu} := \delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_{\ \ \nu} \in \mathcal{O}_+^\uparrow, \tag{1.2.24}$$

かつ，無限小ローレンツ変換の逆変換は以下のように考えられる．

$$(\delta\Lambda^{-1})^\mu_{\ \ \nu} = \delta^\mu_\nu - \Delta\omega^\mu_{\ \ \nu} \in \mathcal{O}_+^\uparrow. \tag{1.2.25}$$

無限小ローレンツ変換が本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ の元になるように式 (1.2.24) および (1.2.25) により $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ を定めたので，以下を満たす:

$$(\delta\Lambda)^\mu_{\ \ \rho}\eta_{\mu\nu}(\delta\Lambda)^\nu_{\ \ \sigma} = \eta_{\rho\sigma}\ , \qquad \det(\delta\Lambda) = 1\ , \qquad (\delta\Lambda)^0_{\ 0} \geq 1. \tag{1.2.26}$$

[5] ローレンツ群の定義により，本義ローレンツ群から任意で取った $\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ に対して式 (1.2.6) が成り立つことを考えれば:

$$\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_{\ \rho}\eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\sigma_{\ \nu}.$$

ここで $\sigma = 0$ を取れば求まる関係式が導かれる．

[6] ここで部分群の構造を持つのは本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ のみであることに注意せよ．

[7] 英訳: Well-defined

より，式 (1.2.26) に無限小ローレンツ変換の定義 (1.2.24) を代入すれば次の関係式[8]が導かれる．

$$\begin{aligned}\delta^{\lambda}_{\rho} &= (\delta\Lambda)^{\mu}{}_{\rho}(\delta\Lambda)_{\mu}{}^{\lambda} = (\delta^{\mu}_{\rho} + \Delta\omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\lambda}_{\mu} + \Delta\omega_{\mu}{}^{\lambda}) \\ &= \delta^{\lambda}_{\rho} + (\Delta\omega^{\lambda}{}_{\rho} + \Delta\omega_{\rho}{}^{\lambda}) + O(\Delta\omega^2).\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

ここで無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda$ を考えているため，$O(\Delta\omega^2) \to 0$ を取れば以下の反対称関係を得る:

$$\Delta\omega^{\lambda}{}_{\rho} = -\Delta\omega_{\rho}{}^{\lambda}. \tag{1.2.28}$$

本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ は部分群の構造を持つため，反対称関係 (1.2.28) を用いて無限小ローレンツ変換の逆変換 $\delta\Lambda^{-1}$ も:

$$(\delta\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \underset{(1.2.3)}{=} (\delta\Lambda)_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega_{\nu}{}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \Delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.2.29}$$

のように明確に定義される．ここから式 (1.2.25) が導かれる．

ローレンツ群の連結成分

ここでは式 (1.2.13) から (1.2.16) までのように分かれたローレンツ群の 4 つの部分の構造について詳しく調べてみよう．部分群としての本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ 上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ が存在することは分かったが，それぞれの 4 つの部分群[9]がこのような無限小ローレンツ変換で結びつけるかの問題[10]が残っている．それを評価するため，**ローレンツ変換の連結 (Connection of Lorentz transformation)** を次のように定義する:

[8] ここで本義ローレンツ群の定義 (1.2.24) および共変と反変の反転関係式 (1.1.60) を用いてクロネッカーデルタを以下のように展開した:

$$\delta^{\lambda}_{\rho} = \eta_{\sigma\rho}\eta^{\sigma\lambda} = (\delta\Lambda)^{\mu}{}_{\rho}\eta_{\mu\nu}(\delta\Lambda)^{\nu}{}_{\sigma}\eta^{\sigma\lambda} = (\delta\Lambda)^{\mu}{}_{\rho}(\delta\Lambda)_{\mu}{}^{\lambda}.$$

[9] 部分群という表現を使っているが，先述した通り実際部分群の構造を持つのは本義ローレンツ群のみである．

[10] もし，無限小ローレンツ変換でローレンツ群上の 4 つの領域 $(\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}, \mathcal{O}^{\uparrow}_{-}, \mathcal{O}^{\downarrow}_{+}, \mathcal{O}^{\downarrow}_{-})$ を結びつけるのができなかったら，それぞれの領域は独立的なものになる．つまり，ローレンツ変換を通じては異なる領域に移ることはできない．

ローレンツ変換の連結 (Connection of Lorentz transformation)

ローレンツ群の部分 $\mathcal{M}$ 上で**連結**であることは，部分 $\mathcal{M}$ の任意の元 $\Lambda_m, \Lambda_n \in \mathcal{M}$ と無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ に対して:

$$(\Lambda_n)^\mu{}_\nu = (\delta\Lambda)^\mu{}_{\mu_1}(\delta\Lambda)^{\mu_1}{}_{\mu_2} \cdots (\delta\Lambda)^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_n}(\Lambda_m)^{\mu_n}{}_\nu \in \mathcal{M} \tag{1.2.30}$$

を意味する.

このような定義に基づいて以下の 4 つの部分群の連結性を確認してみよう:

- **固有・順時的部分群 (本義ローレンツ群):**
本義ローレンツ群の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは恒等変換である:

$$\Lambda_I = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.31}$$

本義ローレンツ群の定義より $(\delta\Lambda)\Lambda_I \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ となるため，どんな任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ に対しても Λ_I に無限小ローレンツ変換を反復作用させることで Λ' が得られる．このことから，本義ローレンツ群は Λ_I に連結な部分群になり，このときの Λ_I を本義ローレンツ群の**連結成分 (Connected component)** と呼ぶ.

- **非固有・順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは空間反転である:

$$\Lambda_S = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.32}$$

無限小ローレンツ変換は $\det(\delta\Lambda) = 1$ であることと，式 (1.2.23) により，部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ は空間反転 Λ_S と連結な部分になる．連結成分は Λ_S である.

- **非固有・反順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_-^\downarrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは時間反転である:

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.33}$$

無限小ローレンツ変換が本義ローレンツ群の元 ($\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$) であることに注意すれば[11], 式 (1.2.23)[12]から部分群 $\mathcal{O}_-^\downarrow$ は時間反転 Λ_T と連結な部分になる．連結成分は Λ_T である．

- **固有・反順時的部分群:**
部分群 $\mathcal{O}_+^\downarrow$ の定義を満たすローレンツ変換のうちに一番簡単なものは時・空間反転である:

$$\Lambda_S\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.34}$$

部分群 $\mathcal{O}_-^\uparrow$ と $\mathcal{O}_-^\downarrow$ がそれぞれ Λ_S と Λ_T に連結なので，任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}_+^\downarrow$ に対して

$$\begin{aligned}(\Lambda')^\mu{}_\nu &= (\Lambda_1)^\mu{}_\rho(\Lambda_2)^\rho{}_\nu \\ &= (\delta\Lambda)^\mu{}_{\mu_1}\cdots(\delta\Lambda)^{\mu_{n-1}}{}_{\mu_n}(\delta\Lambda)^\rho{}_{\rho_1}\cdots(\delta\Lambda)^{\rho_{n-1}}{}_{\rho_n}(\Lambda_S)^{\mu_n}{}_\rho(\Lambda_T)^{\rho_n}{}_\nu.\end{aligned} \tag{1.2.35}$$

が成り立つことが分かって，$\mathcal{O}_+^\downarrow$ は $\Lambda_S\Lambda_T$ に連結である．連結成分は $\Lambda_S\Lambda_T$ である．

[11]任意の $\Lambda' \in \mathcal{O}_-^\downarrow$ に対して，$\det(\delta\Lambda)\det\Lambda' = -1$ が成り立つ．
[12]成分 $(\delta\Lambda\cdot\Lambda')^0_0$ を計算すると:

$$(\delta\Lambda\cdot\Lambda')^0_0 = (\delta\Lambda)^0_0\Lambda'^0_0 - \sum_{\mu=1}^{3}(\delta\Lambda)^\mu_0\Lambda'^\mu_0 = -\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}[(\delta\Lambda)^\mu_0]^2}\sqrt{1+\sum_{\mu=1}^{3}(\Lambda'^\mu_0)^2} - \sum_{\mu=1}^{3}(\delta\Lambda)^\mu_0\Lambda'^\mu_0 \le -1.$$

以上により，それぞれの空間 $\mathcal{O}_+^\uparrow, \mathcal{O}_-^\uparrow, \mathcal{O}_+^\downarrow, \mathcal{O}_-^\downarrow$ は各々は連結な部分であるが，互いには連結でない[13]ことが分かる．かつ，それぞれの連結成分 $\Lambda_I, \Lambda_S, \Lambda_T, \Lambda_S\Lambda_T$ が及ぼす変換をミンコフスキー空間上で表すと以下のようになる:

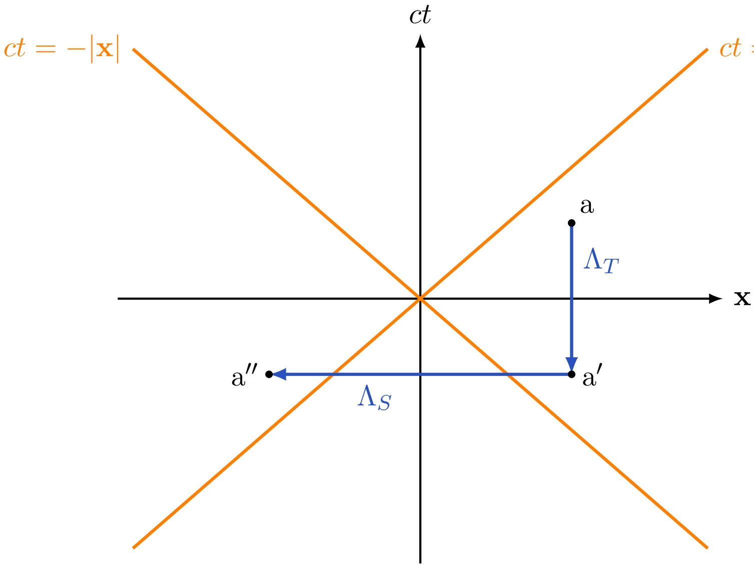

図 1.4. 連結成分

ここで事件 a から a′ への変換を及ぼす連結成分 Λ_T は**時間のパリティ変換 (Time parity transformation)** で，事件 a′ から a″ への変換を及ぼす連結成分 Λ_S は**空間のパリティ変換 (Space parity trnasformation)** となることが分かる:

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Lambda_T]{} \begin{pmatrix} -t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Lambda_S]{} \begin{pmatrix} t \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{1.2.36}$$

運動方程式は恒等変換 Λ_I に連結なローレンツ変換に対しては不変性を持つが，時・空間パリティ変換に対しても不変性を必ず持つとは限らない[14]．この観点で見ると，ローレンツ群の 4 つの部分 (それぞれ $\Lambda_I, \Lambda_S, \Lambda_T, \Lambda_S\Lambda_T$ に連結な部分) で互いに連結でないことは正しい結論である．

[13] 例えば，$\mathcal{O}_+^\uparrow$ は $\mathcal{O}_-^\uparrow$ に連結でない．
[14] このような要請により，今後は本義ローレンツ群の上で変換のみを考える．

1.2.2 ローレンツ群のリー代数

ローレンツ群の生成子

節 1.2.1 で本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ の上では無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ が存在することが分かった．無限小ローレンツ変換はさらに以下のように展開できる:

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu \underset{(1.2.28)}{=} \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}(\Delta\omega^\mu{}_\nu - \Delta\omega_\nu{}^\mu) = \delta^\mu_\nu + \frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}(\delta^\mu_\rho\eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma\eta_{\rho\nu}). \tag{1.2.37}$$

より，無限小ローレンツ変換は**生成子 (Generator)** 定義して次のように書ける:

ローレンツ群の生成子 (Generator of Lorentz group)

本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ は次のように生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を用いて生成できる．

$$(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - i\frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \left(\mathbf{1} - i\frac{\Delta\omega^{\rho\sigma}}{2}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu. \tag{1.2.38}$$

ここでローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は成分ごとで:

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_\rho\eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma\eta_{\rho\nu}). \tag{1.2.39}$$

無限小ローレンツ変換が式 (1.2.23) のように展開される理由は，無限小ローレンツ変換を本義ローレンツ群 $\mathcal{O}_+^\uparrow$ 上で定義したので連結成分 Λ_I と連結なものになったからである．2 階テンソル $\Delta\omega^{\rho\sigma}$ の物理的意味を調べるため，生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を定義 (1.2.39) に従って計算する:

- **ローレンツブースト (Lorentz boost):**

$$(\hat{\mathcal{F}}_{01})^\mu{}_\nu \underset{(1.2.39)}{=} i(\delta^\mu_0\eta_{1\nu} - \delta^\mu_1\eta_{0\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.40}$$

同様に $\hat{\mathcal{F}}_{02}, \hat{\mathcal{F}}_{03}$ についてもできる:

$$\hat{\mathcal{F}}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{F}}_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.41}$$

ここでローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は以下のような反対称性を持つ．

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\rho})^\mu{}_\nu = -i(\delta^\mu_\rho\eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma\eta_{\rho\nu}) = -(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \tag{1.2.42}$$

式 (1.2.42) の反対称性により，生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{10}, \hat{\mathcal{F}}_{20}, \hat{\mathcal{F}}_{30}$ も同様にできる．

- **空間回転 (Spatial rotation)**

$$(\hat{\mathcal{F}}_{12})^{\mu}{}_{\nu} = i(\delta^{\mu}_{1}\eta_{2\nu} - \delta^{\mu}_{2}\eta_{1\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.43}$$

同様に $\hat{\mathcal{F}}_{23}, \hat{\mathcal{F}}_{31}$ についてもできる:

$$\hat{\mathcal{F}}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathcal{F}}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.44}$$

以上の計算により，**ローレンツブースト**と**空間回転**に関するローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ が求まった．ローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は一般に以下のような性質を満たす:

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\dagger} = -\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\ , \qquad \hat{\mathcal{F}}_{\sigma\rho} = (\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\dagger}. \tag{1.2.45}$$

リー代数とローレンツ群の代数

ここからは，ローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ が満たす代数について考察する．一般的にローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は可換でないため，**交換子 (Communicator)**[15]:

$$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] = \hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} - \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} \tag{1.2.46}$$

のように定義し，この交換子の代数について考える必要がある．ここで一般的に演算子は可換でないため，実際交換子を計算する際は**試験関数**[16]を用いて計算すべきであることに注意せよ．例えば，ある演算子 $\hat{x} = x^{\mu}, \hat{D} = \partial_{\nu}$ どうしの交換子は試験関数 f を用いて以下のように計算する:

$$[\hat{x}, \hat{D}]f = x^{\mu}\partial_{\nu}f - \partial_{\nu}(x^{\mu}f) = \delta^{\mu}_{\nu}f\ , \qquad [\hat{x}, \hat{D}] = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{1.2.47}$$

先ずはローレンツ群の生成子が以下の**リー代数 (Lie Algebra)** を満たすか確かめてみよう．

[15]特に，代数構造がリー代数を満たすとき，交換子 $[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]$ を**リー括弧積**と呼ぶ．通常，**リーブラケット (Lie braket)** とも呼ばれるが，筆者は英語表現が嫌いなので今後はリー括弧積とする．

[16]英訳: Test function

リー代数 (Lie Algebra)

ベクトル空間 $\mathbf{G}$ 上の代数構造が以下の 3 点を満たする．このときの代数構造を**リー代数 (Lie algebra)** と定義する:

- **双線形性 (Bilinear map):**
  任意の元 $x, y, z \in \mathbf{G}$ と実数 $a, b \in \mathcal{R}$ 対して以下を満たす:

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \ , \qquad [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]. \tag{1.2.48}$$

- **交代性 (Alternative property):**
  任意の元 $x \in \mathbf{G}$ に対して以下を満たす:

$$[x, x] = 0. \tag{1.2.49}$$

- **ヤコビ恒等式 (Jacobi identity):**
  任意の元 $x, y, z \in \mathbf{G}$ に対して以下の恒等式が成り立つ:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{1.2.50}$$

ここから，ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ がリー代数を満たすかを評価してみよう．ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ は式 (1.2.39) のように線形的に定義されたので，双線形性と交代性が成り立つことは自明[17]に分かる．よって，以下のようにリー括弧積[18]$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]^{\mu}{}_{\nu}$ を成分ごとで評価することでヤコビ恒等式を満たすかを確かめればよい．

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\tau}(\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda})^{\tau}{}_{\nu} \underset{(1.2.39)}{=} \eta_{\rho\omega}(\delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\lambda\nu}) + \eta_{\sigma\lambda}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\omega\nu}) - \eta_{\sigma\omega}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\lambda\nu}) - \eta_{\rho\lambda}(\delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\omega\nu}), \tag{1.2.51}$$

同様に，

$$(\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda})^{\mu}{}_{\tau}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\tau}{}_{\nu} \underset{(1.2.39)}{=} \eta_{\rho\omega}(\delta^{\mu}_{\lambda}\eta_{\sigma\nu}) + \eta_{\sigma\lambda}(\delta^{\mu}_{\omega}\eta_{\rho\nu}) - \eta_{\sigma\omega}(\delta^{\mu}_{\lambda}\eta_{\rho\nu}) - \eta_{\rho\lambda}(\delta^{\mu}_{\omega}\eta_{\sigma\nu}). \tag{1.2.52}$$

式 (1.2.51) および (1.2.52) により，リー括弧積 $[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}]$ は次式のようにかける．

ローレンツ生成子のリー括弧積 (Lie braket relation of Lorentz operator)

$$[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] = i(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda} + \eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega} - \eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}). \tag{1.2.53}$$

[17]英訳: Trivial.
[18]以後の計算でこれがリー代数を満たすことが分かる．

ここで (1.2.53) により得られた生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ のリー括弧積を簡単に表すため，以下のような置換を与える:

$$K_\mu := \hat{\mathcal{F}}_{0\mu}\ , \qquad J_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} \qquad\qquad (\mu = 1,2,3) \tag{1.2.54}$$

このような置換により，ローレンツ生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ を**ローレンツブーストの生成子 (Generator of Lorentz boost)** と呼ばれる 1 階テンソル K_μ と**空間回転の生成子 (Generator of spatial rotaion)** と呼ばれる 1 階テンソル J_μ で表せる．式 (1.2.53) の結果により，それぞれの生成子 K_μ, J_μ の演算は以下のように定義される:

- **ローレンツブーストの演算:**

$$\begin{aligned}[K_\mu, K_\nu] &\underset{(1.2.53)}{=} i(\eta_{\mu 0}\hat{\mathcal{F}}_{0\nu} + \eta_{0\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu 0} - \eta_{00}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{00}) \\ &\underset{(1.2.39)}{=} -i\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \underset{(1.2.45)}{=} -i\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho.\end{aligned} \tag{1.2.55}$$

ここの計算[19]では，生成子 $\hat{x}_{\rho\sigma}$ の反対称性により $\hat{\mathcal{F}}_{00} = 0$ となることを用いた．かつ，空間回転の生成子 J_μ の定義により:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon_{\rho\omega\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{1.2.56}$$

が成立することに注意せよ．

- **空間回転の演算:**

$$\begin{aligned}[J_\mu, J_\nu] &\underset{(1.2.54)}{=} \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda}] \\ &\underset{(1.2.53)}{=} \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda} + \eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega} - \eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}) \\ &\underset{(1.1.18)}{=} i\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho.\end{aligned} \tag{1.2.57}$$

[19] 仮に $\mu = \nu = 0$ とすれば，$\hat{\mathcal{F}}_{00} = 0$ により:

$$\eta_{\mu 0}\hat{\mathcal{F}}_{0\nu} + \eta_{0\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu 0} = 0$$

を得られ，$\mu \neq 0, \nu \neq 0$ の場合は $\eta_{\mu 0} = \eta_{0\nu} = 0$ により同様である．

ここの計算ではミンコフスキー計量の定義[20]により，レヴィ＝チヴィタ記号と計量テンソルの間の演算を行った．例えば，第 1 項は:

$$\frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda}) = \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\nu\sigma}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\lambda}) = \frac{i}{4}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{1.2.58}$$

ここの演算 (1.2.58) ではローレンツ生成子の反対称性により $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\rho} = 0$ となることを用いた．同様な計算により:

$$\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\rho\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\omega}) = -\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\rho\omega}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\lambda}) = -\epsilon_{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\nu\omega\lambda}(\eta_{\sigma\lambda}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\omega}) = \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}. \tag{1.2.59}$$

が成立する．

- **ローレンツブーストと空間回転の演算:**

$$\begin{aligned}[J_\mu, K_\nu] &\underset{(1.2.54)}{=} \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}[\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \hat{\mathcal{F}}_{0\nu}] \\ &\underset{(1.2.53)}{=} \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma}(\eta_{\sigma 0}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\nu} + \eta_{\rho\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma 0} - \eta_{\rho 0}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\nu} - \eta_{\sigma\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\rho 0}) \\ &= i\epsilon_{\mu\nu\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{0\sigma} = i\epsilon_{\mu\nu\sigma}K_\sigma.\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

ここで計量テンソルの定義により $\eta_{\rho\nu}\eta_{\sigma\nu}$ となることとレヴィ＝チヴィタ記号の性質から得られる関係式[21]:

$$\epsilon_{\mu\rho\sigma}(\eta_{\sigma 0}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\nu} - \eta_{\rho 0}\hat{\mathcal{F}}_{\sigma\nu}) = 0 \tag{1.2.61}$$

を用いた．

以上の計算により，ローレンツブーストの生成子 K_μ と空間回転の生成子 J_μ は以下のような交換関係を持つ:

ローレンツブーストと空間回転のリー代数
(Lie algebra of Lorentz boost and spatial roations)

$$[J_\mu, J_\nu] = -[K_\mu, K_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho}J_\rho\ , \qquad [J_\mu, K_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\sigma}K_\sigma. \tag{1.2.62}$$

以上の計算により得られたローレンツブーストの生成子 K_μ および空間回転の生成子 J_μ の

[20]空間回転の生成子 J_μ の定義により $\mu, \nu = 1, 2, 3$ を取っているので:

$$\eta_{\sigma\omega} = \eta_{\rho\lambda} = \eta_{\rho\omega} = \eta_{\sigma\lambda} = -1.$$

[21]それぞれの添え字は $\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2, 3$ であることに注意せよ．

リー括弧積から，生成子 K_μ, J_μ が**ヤコビ恒等式 (Jacobi identity)** を満たす:

$$\begin{aligned} [J_1,[J_2,J_3]]+[J_2,[J_3,J_1]]+[J_3,[J_1,J_2]] &\underset{(1.2.62)}{=} 0, \\ [K_1,[K_2,K_3]]+[K_2,[K_3,K_1]]+[K_3,[K_1,K_2]] &\underset{(1.2.62)}{=} 0. \end{aligned} \tag{1.2.63}$$

このことから，ローレンツブーストと空間回転のそれぞれの生成子 K_μ, J_μ はリー代数を満たすことが分かる．

1.2.3　ローレンツ群の表現行列

今までは無限小変換 $\Delta\omega \to 0$ が与えられたときの本義ローレンツ群上の無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ の展開を考えた．無限小変換でない一般的な**本義ローレンツ変換 (Proper orthochronous Lorentz transformation)** は以下のように書ける．

$$x^\nu \xrightarrow[\Lambda\in\mathcal{O}_+^\uparrow]{} \tilde{x}^\mu; \qquad \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.2.64}$$

ここで無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda$ を用いるため，本義ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を**図 5** のように N 分割[22]して無限小ローレンツ変換が連鎖的に行われたものとして考える:

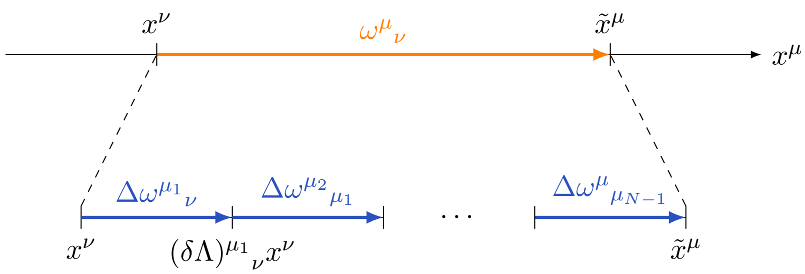

図 1.5. ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ の等分割

ならば変換 $x^\nu \to \tilde{x}^\mu$ は無限小ローレンツ変換 $\delta\Lambda \in \mathcal{O}_+^\uparrow$ を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\mu &\underset{(1.1.45)}{=} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta\Lambda)^\mu{}_{\mu_{N-1}} \cdots (\delta\Lambda)^{\mu_2}{}_{\mu_1} (\delta\Lambda)^{\mu_1}{}_\nu x^\nu \\ &\underset{(1.2.24)}{=} \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_{\mu_{N-1}} \cdots \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{\mu_2}{}_{\mu_1} \left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{\mu_1}{}_\nu x^\nu. \end{aligned} \tag{1.2.65}$$

任意の 2 階テンソル Λ, Λ' に対して $(\Lambda\Lambda')^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_{\mu_1}\Lambda'^{\mu_1}{}_\nu$ と書けるので，ローレンツ変換 (1.2.65) の表現行列は以下のように展開できる:

[22] 等分割する．

ローレンツ群の表現行列 (Matrices of Lorentz group)

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \lim_{N\to\infty}\left[\left(\mathbf{1} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{N}\right]^{\mu}{}_{\nu} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}. \tag{1.2.66}$$

ここでローレンツ群 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ の展開を成分ごとで書くと:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \underset{(1.2.23)}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\delta^{\mu}_{\nu} - i\frac{\omega^{\rho\sigma}}{2N}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}\right)^{N} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}\right) \tag{1.2.67}$$

のようなただの代数的演算として扱える．前の節で得られたように生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}$ がリー代数を満たすことを思い出せば交代性により:

$$[\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}, \omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}] = 0. \tag{1.2.68}$$

式 (1.2.67) の成分表示は，この交代性により式 (1.2.66) として一般に拡張できる．ここでローレンツ群の表現行列 (1.2.66) も前の節で導入したローレンツブーストの生成子 K_{μ} と空間回転の生成子 J_{μ} として 1 階テンソルの展開で表すため，$\omega^{\rho\sigma}$ を以下のように再定義する:

$$\eta^{\mu} = \omega^{0\mu}\ , \qquad \xi^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}. \tag{1.2.69}$$

ローレンツ群の表現行列は 1 階テンソル η^{μ}, ξ^{μ} の展開として以下のように書ける．

$$\Lambda = \exp(-iK_{\mu}\eta^{\mu} - iJ_{\mu}\xi^{\mu}). \tag{1.2.70}$$

ここで第 2 項 $J_{\mu}\xi^{\mu}$ の計算は以下のように行われた:

$$J_{\mu}\xi^{\mu} = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\omega\lambda}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \frac{1}{4}\delta^{\rho\sigma}_{\omega\lambda}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\omega\lambda} = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}. \tag{1.2.71}$$

節 1.2.2 で計算したリー括弧積 $[J_{\mu}, K_{\nu}] = i\epsilon_{\mu\nu\sigma}K_{\sigma}$ から，ローレンツ群 Λ ではローレンツブースト成分と空間回転の成分を**分離できない**ことに注意せよ．

1.2.4 ローレンツブーストと空間回転の表現

さて，この節では前節 1.2.2 により得られたローレンツ群のリー代数 (1.2.40)〜(1.2.44) を用いてそれぞれ**ローレンツブースト**および**空間回転**における変換式の具体形[23]を決定する．ま

[23] 今まで論議では 4 元ベクトルのローレンツ変換を群として解析していた．故に，ここで指す変換式とは 4 元ベクトルにおけるローレンツブーストと空間回転の変換式である．これを**ローレンツ群の表現**という．

ず，ローレンツブースト ($\omega^{12}=\omega^{23}=\omega^{31}=0$) のローレンツ変換式は式 (1.2.70) により:

$$\Lambda := \exp\left(-i\sum_{i=1}^{3}\hat{\mathcal{F}}_{0i}\omega^{0i}\right) \tag{1.2.72}$$

のように展開される．ここで式 (1.2.72) を計算すれば一般的なローレンツブーストのローレンツ変換式 (今後表現という) が導かれるが，簡単のため 1 次元の $\omega^{01}=\eta_0$(その他は全て 0) を先に考察[24]してみる:

ローレンツブーストの表現

計算のため，ローレンツ群において補助生成子を以下のようにおく:

$$\hat{\mathcal{M}}_{01} := -i\hat{\mathcal{F}}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.73}$$

すると，本義ローレンツ群の補助生成子 $\hat{\mathcal{M}}_{01}$ のべき乗の展開は一般に

$$(\hat{\mathcal{M}}_{01})^{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\hat{\mathcal{M}}_{01})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.74}$$

となる (数学的帰納法により確かめられる)．すると，x 向きのローレンツブーストによるローレンツ変換の表現は

$$\begin{aligned} \Lambda(\eta_0) = \exp\left(\hat{\mathcal{M}}_{01}\eta_0\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\hat{\mathcal{M}}_{01})^n\eta_0^n \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathcal{M}}_{01}\sinh\eta_0 + (\hat{\mathcal{M}}_{01})^2\cosh\eta_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\eta_0 & -\sinh\eta_0 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_0 & \cosh\eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2.75}$$

ここの式 (1.2.75) の展開では双曲線関数のテイラー展開:

$$\cosh\eta_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\eta_0^{2n}, \qquad \sinh\eta_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\eta_0^{2n-1} \tag{1.2.76}$$

[24]つまり，x 向きのローレンツブーストだけがあるときである．

を用いた．これが 4 元ベクトルに関するローレンツ変換の表現[25]になると予想できるのだが，実際これは変換の重ね合わせの原理を満たしていることがわかる:

$$\begin{aligned}\Lambda(\eta_0)\Lambda(\eta'_0) &= \begin{pmatrix}\cosh\eta_0 & -\sinh\eta_0 & 0 & 0\\ -\sinh\eta_0 & \cosh\eta_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\eta'_0 & -\sinh\eta'_0 & 0 & 0\\ -\sinh\eta'_0 & \cosh\eta'_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cosh(\eta_0+\eta'_0) & -\sinh(\eta_0+\eta'_0) & 0 & 0\\ -\sinh(\eta_0+\eta'_0) & \cosh(\eta_0+\eta'_0) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \Lambda(\eta_0+\eta'_0).\end{aligned} \tag{1.2.77}$$

もちろん，式 (1.2.77) と同様に $\Lambda(\eta'_0)\Lambda(\eta_0) = \Lambda(\eta_0+\eta'_0)$ も成立する．ここの計算では双曲線関数の合成公式:

$$\begin{cases}\cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta = \cosh(\alpha+\beta)\\ \\ \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta = \sinh(\alpha+\beta)\end{cases}, \qquad (\alpha,\beta\in\mathbf{R}) \tag{1.2.78}$$

を用いた．さて，ここまで式 (1.2.75) のようなローレンツブーストの表現を求めたのだが，まだ**ラピディティ (Rapidity)**[26]と呼ばれる量 η_0 がどのような物理的な意味を持つか調べる必要がある．本義ローレンツ群 $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+}$ (ページ 15 を参照) は世界間隔 $ds^2 = dt^2 - d\boldsymbol{x}^2$ を不変に保つような変換であるため，今扱っている空間 (ミンコフスキー空間) は非ユークリッド空間[27]なのでラピディティの幾何学的な解析が困難である．そのため，時間の軸に $t = -i\tau$ の変換[28]を与えることにより，空間をユークリッド化することができる:

$$ds^2: \quad -dt^2 + d\boldsymbol{x}^2 \underset{\tau=it}{\longrightarrow} d\tau^2 + d\boldsymbol{x}^2, \qquad \tilde{\eta}_0 = -i\eta_0. \tag{1.2.79}$$

ここで取っている**ウィック回転**は，ミンコフスキー空間上の 0 成分 (時間成分) を虚軸に $\pi/2$ ほど回転させる操作なので，ラピディティも同様に $\tilde{\eta}_0 = -i\eta_0$ とおいた．すると，**ウィック回転**に伴い，式 (1.2.72) の表現も変わる (空間をユークリッド化したのでローレンツ群が $\mathcal{O}^{\uparrow}_{+} \to SO(4)$ となると期待される．):

$$\Lambda_E(t\to\tau) \underset{(1.2.72)}{=} \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\hat{\mathcal{F}}_{0i}\tilde{\eta}_0\right) \tag{1.2.80}$$

[25]つまり，4 元ベクトルにおける本義ローレンツ群の表現．この論議は 4 元ベクトル上のローレンツ群の表現 (1.2.3) から出発したものであることを思い出すと，これは単なる 4 元ベクトルのみに成り立つものであることがすぐわかる．違うローレンツ共変量 (スカラー，スピノル) に対しては違う表現を持つがこれは次の章で論議する．

[26]式 (1.2.77) で登場した量 η_0 の物理的な意味を分からないままでは，変換 (1.2.77) の意味にも辿り着けない．

[27]ミンコフスキー空間の軽量は $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ となり，ユークリッド空間の軽量 $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,+,+)$ とは明らかに異なる．

[28]これは**ウィック回転 (Wick rotation)** と呼ばれる変換である．つまり，$t = e^{i\pi/2}\tau$．

これをさらに計算するため，式 (1.2.74) と同様にローレンツ群の生成子 $\hat{\mathcal{F}}_{0i}$ のべき乗を計算すると以下の一般式が得られる (数学的帰納法により簡単に確かめられる):

$$(\hat{\mathcal{F}}_{01})^{2n-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\hat{\mathcal{F}}_{01})^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.81}$$

故に，式 (1.2.80) で表したユークリッド化した空間 $(\tau, \boldsymbol{x})$ 上の 4 元ベクトルにおけるローレンツ群の表現は:

$$\begin{aligned} \Lambda_E(\tilde{\eta}_0) &= \exp\left(\hat{\mathcal{F}}_{01}\tilde{\eta}_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\hat{\mathcal{F}}_{01})^n \tilde{\eta}_0^n \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathcal{F}}_{01}\sin\tilde{\eta}_0 + (\hat{\mathcal{F}}_{01})^2\cos\tilde{\eta}_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & -i\sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ -i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.2.82}$$

このようにウィック回転により空間をユークリッド化すれば，ローレンツブーストの表現 (1.2.75) は予想した通りに[29]明らかに SO(4) 群の元になっていることがわかる:

直行性:

$$\begin{aligned} \Lambda_E(-\tilde{\eta}_0)\Lambda_E(\tilde{\eta}_0) &= \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & i\sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & -i\sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ -i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,1), \end{aligned} \tag{1.2.83}$$

行列式:

$$\det \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & -i\sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ -i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & -i\sin\tilde{\eta}_0 \\ -i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = 1. \tag{1.2.84}$$

ここで三角関数の関係式は以下のように複素数まで拡張できることに注意せよ:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^2 = 1 \qquad (\alpha \in \mathbf{C}). \tag{1.2.85}$$

[29] 式 (**??**) のローレンツブーストの表現をユークリッド化したものである (この節の表現では $\Lambda_E(\tilde{\eta}_0)$).

すると，この 4 次元ユークリッド空間 $(\tau, \boldsymbol{x})$ 上のベクトルの変換は以下のようにかける:

$$\begin{pmatrix} -iX^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & -i\sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ -i\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ic\tau \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.2.86}$$

今，空間のユークリッド化により，t ではなく τ を基底として取っていることに注意せよ．式 (1.2.80) を導出するときに加えた変換 (ウィック回転) は (1.2.79) なので，ここの表現 $\Lambda_E(\tilde{\eta}_0)$ が指している 4 次元ベクトル[30]の変換式は (1.2.86) である．ここでベクトルの 0 成分 (時間成分) の虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を変換 $\Lambda_E(\tilde{\eta}_0)$ に移せば:

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\eta}_0 & \sin\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ -\sin\tilde{\eta}_0 & \cos\tilde{\eta}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.2.87}$$

となり，ユークリッド化した空間上の 4 次元ベクトル $(\tau, \boldsymbol{x})$ の変換式の完璧な表現が求めることができた．予想した通りに式 (1.2.75) で求めた 4 元ベクトルにおけるローレンツブーストの表現は空間をユークリッド化することで回転変換に戻ること[31]が確かめれた．故に，このパラメータ $\tilde{\eta}_0$ は**空間をユークリッド化したときの変換の回転角** (時間軸を基準とした回転角) として解析できる:

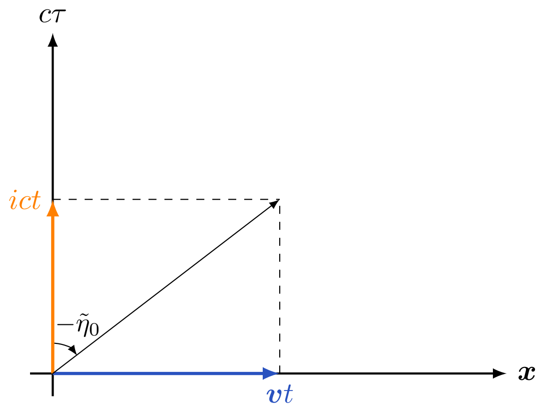

図 1.6. ミンコフスキー空間のユークリッド化とラピディティ η_0.

ここで式 (1.2.87) でも表しているように，時間軸を基準として **図 1.6** での角変位は $-\tilde{\eta}_0$ であることに注意が必要である (反時計回り向き)．すると，パラメータ $\tilde{\eta}_0$ は幾何学的に以下のように表すことができる:

$$\tan(-\tilde{\eta}_0) = \frac{vt}{ict} \quad \rightarrow \quad i\tan(i\eta_0) = \tanh\eta_0 = \beta \quad (\beta := v/c). \tag{1.2.88}$$

[30] Euclidean vector.

[31] 群の言葉で言えば，空間をユークリッド化することによって本義ローレンツ群の表現は $\mathcal{O}_+^\uparrow \rightarrow \mathrm{SO}(4)$ で変わる．

故に，ローレンツブーストの表現 (1.2.75) とラピディティの表現式 (1.2.88) を合わせることでローレンツブーストの表現 (1.2.75) を

$$\Lambda(\eta_0) = \begin{pmatrix} \cosh\eta_0 & -\sinh\eta_0 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_0 & \cosh\eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.89}$$

として知っている物理量 γ, β で書き換えることができる．ここで γ は相対論と同様に:

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.2.90}$$

と定義する．