令 和 4 年 度 前 期 履 修 科 目

力　学　詳　論　I

中心力による運動 (解説)

大阪大学　理学部・物理学科　金　導賢

◇ M39 (424−1)

(計　算　用　紙)

〔１〕二次元の直交座標系 (x, y) で指定される平面内で働く力について次の問いに答えよ．

問 1 k を正の定数とし，力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$

$$\begin{cases} F_x = kx^2y \\ \\ F_y = kxy^2 \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

を考える．力 $\mathbf{F}$ について，原点 $(0, 0)$ から x 軸にそって点 $(a, 0)$ まで移動し点 $(a, 0)$ から y 軸に平衡に点 (a, b) に移動する経路に沿った仕事を求めよ．

問 2 この力 $\mathbf{F}$ は保存力か，または保存力でないか，根拠とともに述べよ．

問 3 h を正の定数とし，力 $\mathbf{T}$

$$\begin{cases} T_x = -hy \\ \\ T_y = -hx \end{cases} \qquad \cdots (**)$$

を考える．力 $\mathbf{T}$ について，原点を基準とするポテンシャルエネルギーを求めよ．

問 4 保存量が存在すると，運動方程式を完全に解かなくても運動の様子がわかる．この力 $\mathbf{T}$ のもと，質量 m の質点が時刻 $t = 0$ で $(x, y) = (a, a)$ から初速 0 で運動を始めたところ，ある時刻で原点を通過した．原点を通過したときの質点の速度の大きさを求めよ．

〔解説〕

問 1 仕事の定義によって，次のように計算される:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a kx^2 y \, dx \bigg|_{y=0} + \int_0^b kxy^2 \, dy \bigg|_{x=a} = \underline{\frac{1}{3}kab^3} \quad \cdots (1)$$

これがこの経路に沿った仕事である．

問 2 今回は，問 1 と同じ様に $(0,0)$ から (a,b) までの経路のうち，問 1 と異なるものを選んで仕事を計算する．

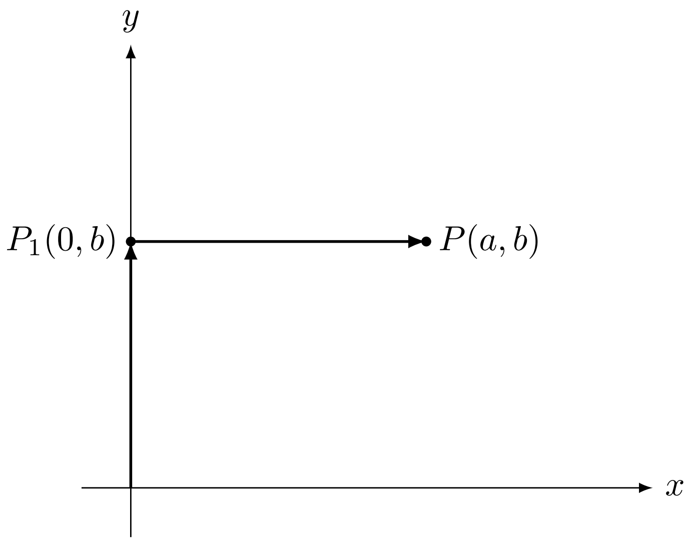

図 1

よって，図 1 の経路に沿った仕事 W' は，

$$W' = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^b kxy^2 \, dy \bigg|_{x=0} + \int_0^a kx^2 y \, dx \bigg|_{y=b} = \underline{\frac{1}{3}ka^3 b} \quad \cdots (2)$$

ここで，式 (1) と (2) を比べると $W \neq W'$ となり，結局仕事がその経路に依ることを分かる．なので，力 $\mathbf{F}$ は<u>保存力ではない</u>．

問 3 前の問１と問２と同じ様な経路を沿ったそれぞれの仕事 W および W' を計算して見ると,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} = -hab \quad \cdots (3)$$

$$W' = \int_{C_2} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} = -hab \quad \cdots (4)$$

なので，式 (3) および (4) によって，力 $\mathbf{T}$ は経路に依らないので**保存力**であることを分かる．ならば，その**ポテンシャル**を次のように定まることもできる:

ゆえに，ある任意の変位 (x, y) でのポテンシャル $V(x, y)$ を求めるため，原点 $\mathbb{O}$ から変位 (x, y) までの任意の経路[*1]に沿ったポテンシャル変化 $\Delta V = V(x, y) - V(\mathbb{O})$ を考える:

$$V(x,y) - V(\mathbb{O}) = -\left(\int_0^x -hy'\ dx' \bigg|_{y'=0} + \int_0^y -hx'\ dy' \bigg|_{x'=x} \right) = \underline{hxy.}$$

問題の仮定により，$V(\mathbb{O}) = 0$ としたので，ある任意の変位 (x, y) でのポテンシャルは次のようになる．

$$\boxed{\therefore V(x, y) = hxy.}$$

問 4 この力 $\mathbf{T}$ は保存力なので**力学的エネルギー**が**保存**される:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}mv^2 + hxy = (\text{一定}) \quad \cdots (5)$$

つまり，式 (5) が成り立つ．問題の仮定により，ある変位 (a, b) のとき，初速 $v_0 = 0$ となるので式 (5) から，次の式も成り立つ．

$$\frac{1}{2}mv^2 + hxy = hab \quad \cdots (6)$$

[*1] どの経路を選んでもポテンシャル変化は同じ

ならば，式 (6) をある変位 (x, y) での速度 v に対して まとめると，

$$\boxed{\therefore v = \sqrt{\frac{2(ab - xy)}{m}} \quad (xy \leq ab).}$$

のようになる．

(計　算　用　紙)

〔２〕**(万有引力の導出)** 質量 M_s の太陽の周りを質量 $M_p(\ll M_s)$ の惑星が公転している．ケプラーの法則から，万有引力の法則

$$F = -G\frac{M_s M_p}{r^2} \quad \cdots (*)$$

を導いてみよう．

太陽は不動であると近似し，公転面内で太陽を原点とする極座標 (r, θ) を用いると，惑星に働く加速度は，一般にその運動状態から，

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \quad \cdots (**)$$

となる．ケプラーの第 2 法則によれば惑星の面積速度（惑星と太陽を結ぶ直線が単位時間に掃く面積 $= \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$）は一定である．したがって，$a_\theta = 0$ であり，惑星にはたらく力の θ 成分はゼロになる．惑星にはたらく力は r 方向のみと考えられる．ケプラーの第 1 法則によれば，この惑星公転軌道は楕円である．その面積は，楕円の長さ a，離心率 ε を使って，$\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ と表せる．

問 1 惑星の公転周期 T と楕円の面積から面積速度を求め，$\dfrac{d\theta}{dt}$ を T を含んだ式で表せ．

問 2 r の実感に関する 1 階微分と 2 階微分は，

$$\frac{dr}{dt} = \boxed{\text{ア}}\ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \boxed{\text{イ}}\ \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

と表せる．$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を T を含んだ形で求めよ．

問 3 楕円の r と θ の関係 $r = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ を用いると，$a_r = \dfrac{k_{sp}}{r^2}$ となる．k_{sp} を a，T を用いて表せ．

以上を踏まえて，ニュートンが行ったであろうアプローチを考えてみよう．惑星は太陽によって $F_p = a_r M_p = \dfrac{k_{sp} M_p}{r^2}$ の大きさ力で引かれている．ケプラーの第 3 法則によれば，k_{sp} は惑星によらず一定である．一方，太陽と惑星の役割を入れかえても同様に力の表式が成り立つと仮定すると，太陽が惑星から受ける力 F_s は，$F_s = \dfrac{k_{ps} M_s}{r^2}$ であり，k_{ps} は太陽の性質によらないと推論される． $\boxed{\text{ウ}}$ このように考えると，$k_{sp} = -GM_s$，$k_{ps} = -GM_p$ となることを示すことができ，万有引力の法則が導かれる．

問 4 $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる適切な説明を簡潔に書け．

(以　下　余　白)

〔解説〕

問 1 先ずは，面積速度が $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ で一定であることから，

$$\frac{dS}{dt}=\frac{S_0}{T}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt};\qquad \underline{\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r^2T}}\quad\cdots(1)$$

のような関係式が導かれる．

問 2 r の時間に関する 1 階微分 $\dot{r}$ および 2 階微分 $\ddot{r}$ は，連鎖律により，次のような置換関数 $u=\dfrac{1}{r}$ に関する微分で変えられる:

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt},\qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\right)\quad\cdots(2)$$

さらに，問１で求めた $\dot{\theta}$ と T の関係式を用いると，式 (2) を θ に関数る微分で表せる．

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}\frac{du}{d\theta}\quad\cdots(3)$$

および，

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-\left(\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}\right)^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\quad\cdots(4)$$

となる．これを r の関係式で取り戻せば，

$$\therefore\ \frac{dr}{dt}=-\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}\times\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{4\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)}{r^2T^2}\times\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

となり，それぞれの $\boxed{\text{ア}}$ および $\boxed{\text{イ}}$ にあてはまるものは，

$$\boxed{\text{ア}}=\underline{-\frac{2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}},\qquad \boxed{\text{イ}}=\underline{-\frac{4\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)}{r^2T^2}}.$$

である．

問 3 極座標系の r 方向加速度 a_r は,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{r^2T^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{r^3T^2} \qquad \cdots (5)$$

となる．これは，問 2 の結果を代入したものである．ここで，問題で与えられた通り，

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}; \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varepsilon\cos\theta}{a(1-\varepsilon^2)}$$

を式 (5) に代入することにより，次の関係式を得られる．

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{r^2T^2}\left[-\frac{\varepsilon\cos\theta}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{a(1-\varepsilon^2)}\right] = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\right).$$

ここで，楕円軌道運動の場合は $0 < \varepsilon < 1$ であることに注意せよ．

以上によって，k_{sp} は次ように定まる:

$$\boxed{k_{sp} = -\frac{4\pi^2a^3}{T^2}.}$$

問 4 問題の仮定によって，惑星が太陽から受ける力 F_p および太陽が惑星から受ける力 F_s は次のように定まる:

$$F_p = \frac{k_{sp}M_p}{r^2}, \qquad F_s = \frac{k_{ps}M_s}{r^2} \qquad \cdots (6)$$

したがって，$\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる適切な説明は:

なので，互いに働く力 F_p と F_s は相互作用力であるため，その力の大きさは互いに同じである．

とすれば良い．

ならば，次のような関係式が成り立つ:

$$\frac{k_{sp}M_p}{r^2} = \frac{k_{ps}M_s}{r^2}; \qquad \frac{k_{sp}}{k_{ps}} = \frac{M_s}{M_p} \quad \cdots (7)$$

つまり，k_{sp} と k_{ps} はそれぞれ質量 M_s と M_p に比例する関係を持つことをわかる．k_{sp}，$k_{ps} < 0$ であることに注意しながら，その比例定数を $-G(G > 0)$ とおくと，

$$\boxed{\therefore k_{sp} = -GM_s, \qquad k_{ps} = -GM_p.}$$

となる．以上によって，万有引力の法則 $F = -\dfrac{GM_sM_p}{r^2}$ が導かれる．