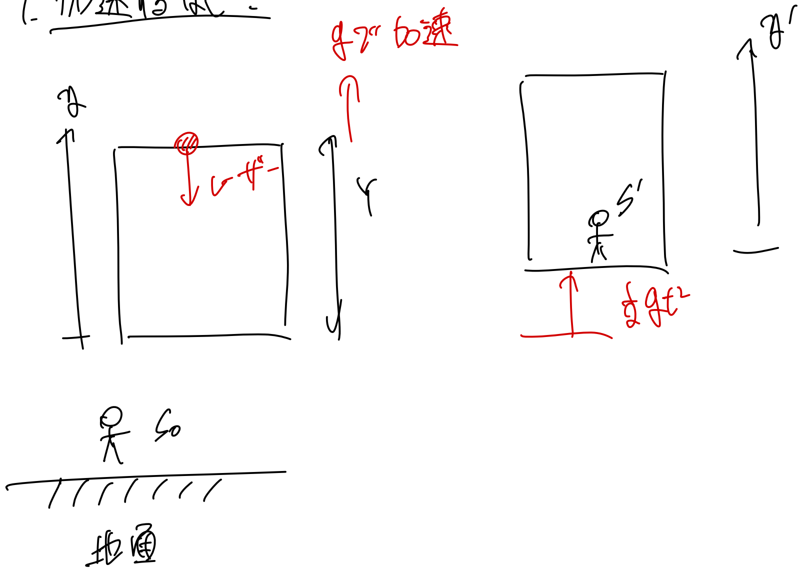
初歩的 Black-Hole の理論

(古典力学で Black-Hole を説明する。)

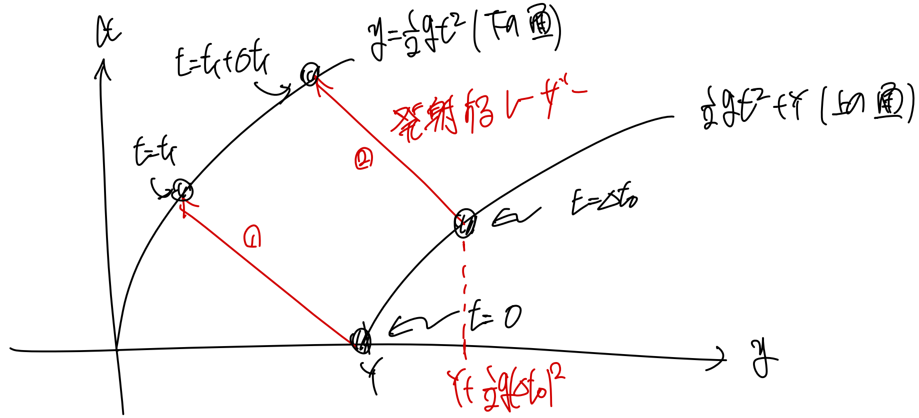
※本論議は、球対称の帯電されてない、回転しない Black-Hole のみに関して有効。

1. 加速すると。



t_0 と $t=\delta t_0$ にレーザーを当てる。

すると、　S' と S_0 では：



①
$$Y - \frac{1}{2}g t_1^2 = ct_1$$

②
$$Y + \frac{1}{2}g(\Delta t_0)^2 - \frac{1}{2}g(t_1+\Delta t_1)^2 = c(t_1+\Delta t_1-\Delta t_0)$$

の関係式をみたす。　t_1 は要らないので、消せば：

※
$$g t_1^2 + 2ct_1 - 2Y = 0 \rightsquigarrow t_1 = \frac{c}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gY}{c^2}}\right) \quad //$$

$$g t_1^2 + 2ct_1 - \left(2Y + g(\Delta t_0)^2 - c(\Delta t_1-\Delta t_0)\right) = 0$$

$$\rightsquigarrow t_1 = \frac{c}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{g}{c^2}\left(2Y+g(\Delta t_0)^2-c(\Delta t_1-\Delta t_0)\right)}\right) \quad //$$

である。

一方で、式①, ②をよく合わせると:

$$\rightsquigarrow \quad c(\Delta t_1 - \Delta t_0) = Y + \frac{1}{2}g(\Delta t_0)^2 - \frac{1}{2}g t_1^2 - g t_1 \Delta t_1 - \frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2 - c t_1$$

$$= \cancel{Y} + \frac{1}{2}g(\Delta t_0)^2 - \cancel{\frac{1}{2}g t_1^2} - g t_1 \Delta t_1 - \frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2 - \left(\cancel{Y} - \cancel{\frac{1}{2}g t_1^2}\right)$$

$$\therefore \quad c\cancel{(}\Delta t_1 - \Delta t_0) = \frac{1}{2}g(\Delta t_0)^2 - \cancel{g}\Delta t_1 \cdot \frac{c}{\cancel{g}}\left(\cancel{1+}\sqrt{1+\frac{2gY}{c^2}}\right) - \frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta t_0\left(\frac{1}{2}g\Delta t_0 + c\right) = \Delta t_1\left(\frac{1}{2}g\Delta t_1 + \sqrt{c^2+2gY}\right)$$

が導ける。　さらに、Yを $gY \ll c^2$ の十分小さいものにすると:

$$\therefore \quad \Delta t_0\left(\frac{1}{2}g\Delta t_0 + c\right) \simeq \Delta t_1\left(\frac{1}{2}g\Delta t_1 + c\left(1+\frac{gY}{c^2}\right)\right)$$

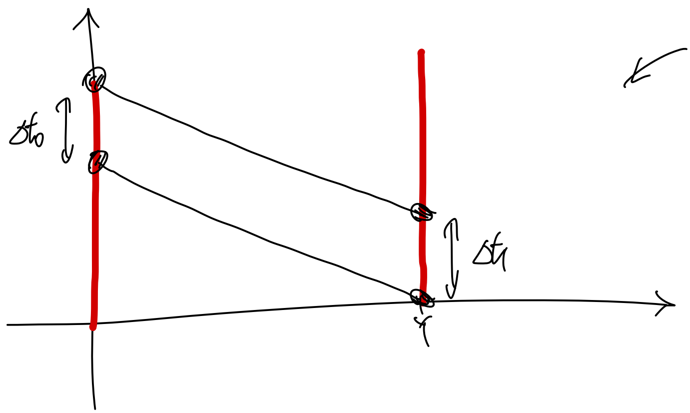
$\rightsquigarrow$ $\frac{g\Delta t_1}{c} \ll 1$

$$\therefore \quad c\Delta t_0 \simeq c\left(1+\frac{gY}{c^2}\right)\Delta t_1$$

つまり、

$$\therefore \Delta t_0 = \left(1 + \frac{gr}{c^2}\right)\Delta t_1$$ が分かる。

これを S_0 で見ると：



等価原理。

すなわち、**時間ちえん** が起こる。

2. 時間ちえんの一般化

一般の位置 y に対しては：

$$\therefore \underbrace{\Delta t_0}_{\text{y=0 まわりの時間のラベル.}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{gy}{nc^2}\right)^n \Delta t_y = \exp\left(\frac{gy}{c^2}\right)\underbrace{\Delta t_y}_{\text{y=y まわりの時間のラベル.}}$$

ここで、$g = \frac{GM}{r}$ とよみとると、加速度 g が r に依存する場合に対する論議もできる。つまり、

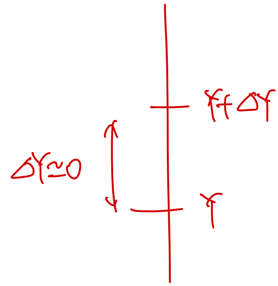
r=r での加速度

$$\Delta t_0 \simeq \left(1+\frac{g}{c^2}(r+\Delta r)\right)\Delta t_{r+\Delta r}$$

$$= \left(1+\frac{GM}{c^2 r^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{r}\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\right)\Delta t_{r+\Delta r}$$

$$\simeq \left(1+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{GM}{r+\Delta r}\right)\Delta t_{r+\Delta r}$$

$$\simeq \left(1-\frac{1}{c^2}\Phi(r+\Delta r)\right)\Delta t_{r+\Delta r} \qquad (\text{for } gr \ll c^2)$$



重力ポテンシャル $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$。

である。前と同様な議論で；

$$\rightsquigarrow \Delta t_y = \exp\left(\frac{1}{c^2}\{\Phi(y)-\Phi(z)\}\right)\Delta t_z \qquad \cdots (*)$$

が一般に成立する。

等価原理により、これは 重力場 $\Phi(x)$ の時間ちえん とも見れる。

(∵) 上式と、Δt_y の式を割ると：

$$\Delta t_0 = \exp\left(-\frac{1}{c^2}\Phi(y+\Delta y)\right)\Delta t_{y+\Delta y}$$

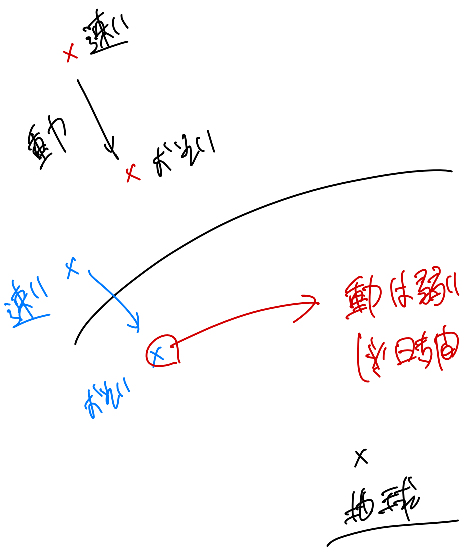
$$\Delta t_0 = \exp\left(-\frac{1}{c^2}\Phi(y)\right)\Delta t_y$$

$$\rightsquigarrow \Delta t_y = \exp\left(\frac{1}{c^2}\{\Phi(y)-\Phi(y+\Delta y)\}\right)\Delta t_{y+\Delta y}$$

※式(A)は何を意味するのか?

$$\rightarrow \quad \Delta t_y = \exp\left(\frac{1}{c^2}\{\Phi(y) - \Phi(z)\}\right)\Delta t_z$$

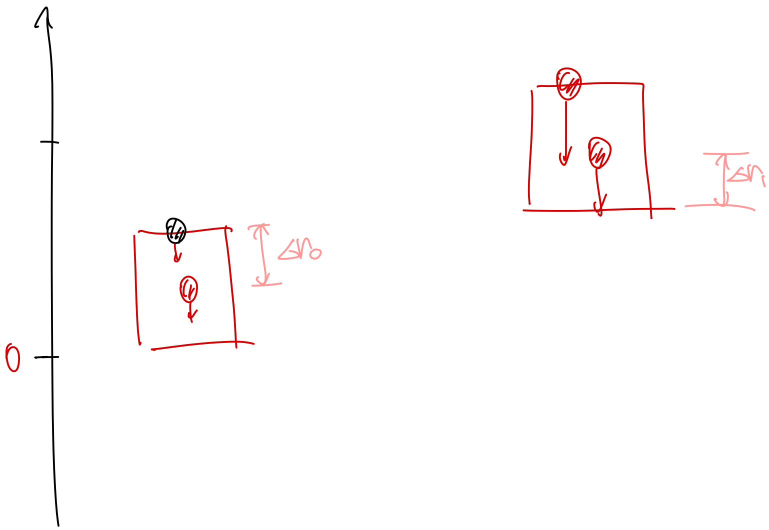
すると 重力は時間の流れが速いところからおそいところへ向う。



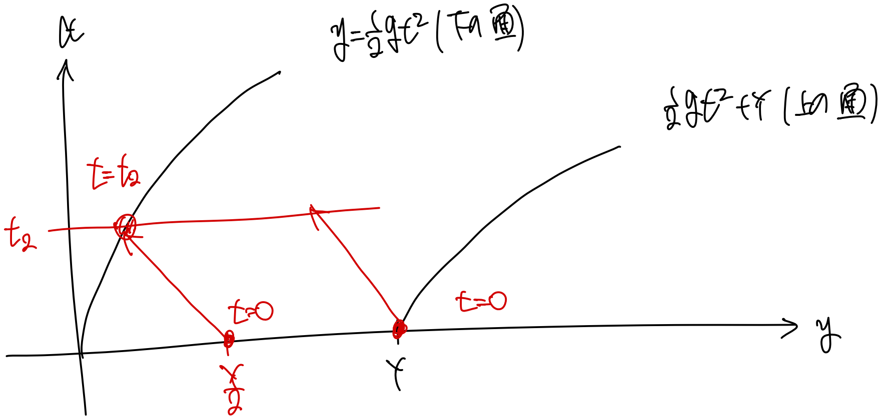
重力は弱いが、ポテンシャルが高いため、時間がおそい。

(※時間の流れを決定するのは、重力ではなく、ポテンシャルである。)

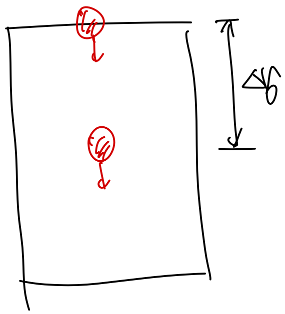
3. Lorentz 収縮.



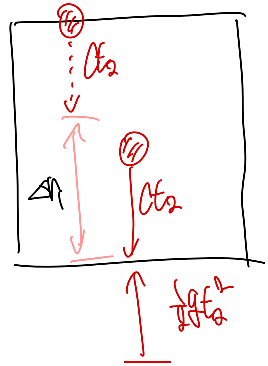
次に、重力があるとき、長さ収縮の話をする。時間ちぢみのときと、同様な方法で、加速系を考えれば良い。(等価原理)



仮定1



t=0



時間ちゃん。

$$\frac{Y}{2} - \frac{1}{2} g t_2^2 = c t_2$$

$$\therefore t_2 = \frac{c}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{Y}{c^2}}\right)$$

$$\therefore -\Delta r_1 = Y - c t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$= Y - \frac{c^2}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{gY}{c^2}}\right) + \frac{1}{2} g \cdot \frac{c^2}{g^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{gY}{c^2}}\right)^2 \left(1 - \frac{g\Delta r_0}{c^2}\right)$$

$$= \cancel{Y} - \frac{c^2}{g}\left(\cancel{1} + \sqrt{1 + \frac{gY}{c^2}}\right) + \frac{c^2}{2g}\left(\cancel{2} + \cancel{\frac{gY}{c^2}} + 2\sqrt{1 + \frac{gY}{c^2}}\right) \times \left(1 - \frac{g\Delta r_0}{c^2}\right)$$

$$\approx \frac{Y}{2} - \Delta r_0 \left(1 + \frac{gY}{2c^2} + 1 + \frac{gY}{2c^2}\right)$$

$$= -\Delta r_0 \left(1 + \frac{gY}{c^2}\right)$$

すると、時間ちょんと同様な議論で:

$$\rightsquigarrow \qquad \Delta\nu_0 = \frac{\Delta\nu_1}{\left(1 + \frac{gY}{c^2}\right)}$$

が導かれ、

同様な議論で:

$$\rightsquigarrow \qquad \therefore \Delta\nu(z) = \frac{\Delta\nu(Z)}{\exp\left(\frac{1}{c^2}\left\{\Phi(z) - \Phi(Z)\right\}\right)}$$

が一般に成立する。

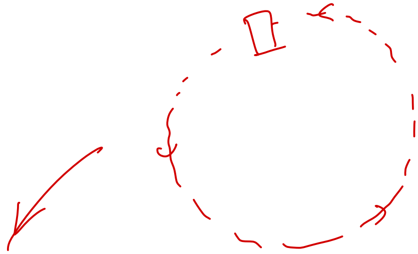
4. Schwarzschild metric (シュワルツシルト計量)

球対称の計量：

$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$

$$ds^2 = -g(r)c^2dt^2 + f(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

を用意する。



① $dr=0$ の座標系。

この場合：

$$\therefore\ ds^2 = -g(r)\,c^2dt_0^2 = -c^2dt^2$$ とする。

よって、時間の遅れによって、

$$dt_0^2 = \exp\left(-\frac{1}{c^2}\Phi(r)\right)^2 dt^2$$

近似的には：

$$\therefore\ g(r) = \exp\left(\frac{1}{c^2}\Phi(r)\right)^2 \simeq \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

また、同様に、

$$\therefore\ ds^2 = A(r)\, dr_0^2 = dr^2$$

$$\rightsquigarrow\ \exp\left(\frac{1}{c^2}\Phi(r)\right) dr = dr_0$$

故に、

$$\therefore\ A(r) = \frac{1}{\exp\left(\frac{2}{c^2}\Phi(r)\right)} \simeq \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} \quad \text{++}$$

まとめると、

$$\boxed{\rightsquigarrow\ ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\Omega^2 .}$$

これがシュワルツシルト計量である。

特に、 $r = r_S = \frac{2GM}{c^2}$ のとき、特異点を持つ。