

単極子場での粒子
の量子電気力学と
そのゲージ対称性
に関して

Authors

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: SU(2) 模型
とゲージ結合項

単極子場での粒子の量子電気力学と そのゲージ対称性に関して

About the QED of particles on Monopole fields and Gauge symmetry

KIM DOHYUN

ONOGI GROUP, HEP-TH., DEPT. OF PHYS., OSAKA UNIV.

September 24, 2023

目次

Authors

単極子場での粒子
の量子電気力学と
そのゲージ対称性
に関して

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: $SU(2)$ 模型
とゲージ結合項

- ① マクスウェル場の修正
- ② 同種粒子のゲージ理論
- ③ Dyon-電子相互作用のゲージ理論
- ④ 付録: Yang-Mills Fields
- ⑤ 付録: 荷電共役変換と Positron 極限
- ⑥ 付録: $SU(2)$ 模型とゲージ結合項

References for our study

- Ya. Shnir, “Magnetic Monopoles”, Springer(2005)
- 西岡辰磨, “電磁気学 I” (大阪大学の講義ノート ¹: Topological Insulators)
- 西岡辰磨, “Quantum Field Theory” (大阪大学の講義ノート)
- 佐藤亮介, “相対論的量子力学/場の理論序説” (大阪大学の講義ノート)
- 川村嘉春, 『相対論的量子力学』, 裳華房 (2012)
- 坂本真人, 『場の量子論: 不変性と自由場を中心にして』, 裳華房 (2014)

¹令和 5 年度春夏学期, 最終回特別講義.

Notations and Covention

この報告では別の指示がない限り, **自然単位系 (Natural Units)** を使う:

$$c = \mu_0 = \epsilon_0 = \hbar = k_B = 1. \quad (1)$$

また, Mincowski 計量の符号規約

$$\eta^{\mu\nu} := \text{diag}(+, -, -, \cdots, -), \quad (2)$$

カイラル表示としての Dirac 行列 γ^μ , Dirac の slash 規約 \not{p} および Dirac スピノル ψ は以下のように規約する:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \not{p} := \gamma^\mu p_\mu, \quad \psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ただし, $(\frac{1}{2}, 0)$ と $(0, \frac{1}{2})$ は Left-handed Weyl spinor と Right-handed Weyl spinor を示す.

The Former Maxwell Theory

体積電荷密度 ϱ_e と体積磁荷密度 ϱ_g が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varrho_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varrho_g,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \left(\mathbf{J}_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Introductory

以前の Maxwell 理論理論は以下のような問題がある：

- Dirac による Monopole の説明は，Dyon や Monopole の電気動力学を説明できない．
- 既存の Maxwell 理論 (4) は，どんな粒子の運動に関する方程式か区分してない問題がる．しかし，電子-電子の相互作用と電子-Dyon の相互作用は明らかに様子が異なる．

このような問題を解決するため，我々は以下のような模型を提案する：

- 粒子ごとで分けて，それぞれの相互作用を説明する各模型を立てる．
- $U(1)$ ゲージ模型：同種粒子の運動を説明する．
- $SU(2)$ ゲージ模型：異なる粒子の間の相互作用を説明する．

Action integral of Monopole Fields

Authors

単極子場での粒子
の量子電気力学と
そのゲージ対称性
に関して

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: SU(2) 模型
とゲージ結合項

単極子場の作用積分を書くため, 4 元電荷ポテンシャル A^μ および 4 元磁荷ポテンシャル B^μ :

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} \quad , \quad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \quad (5)$$

とする.

QED on U(1) gauge fields

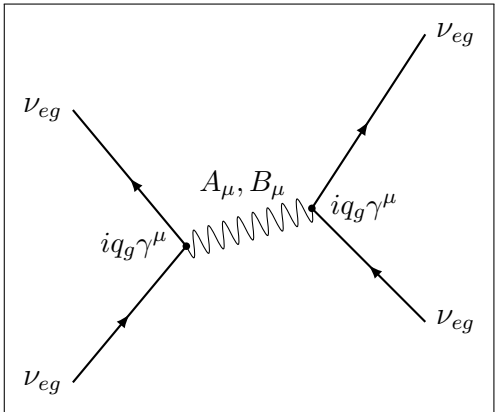


Figure: The Dyon-Dyon U(1) interaction

Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (5) の上に、相対論的共変性とゲージ不変性を加えると、系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$S = - \int \frac{1}{4(q_e^2 + q_g^2)} [D^\mu, D^\nu]^2 d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi d^4x \quad (6)$$
$$+ \int (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - m^2 (\Phi^* \Phi) d^4x$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (6) のように書いた時の 4 元ポテンシャル A^μ, B^μ およびスピノル $\psi(x^\mu)$ のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) , \\ B_\mu & \mapsto B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto e^{-iq_e \Lambda(x^\mu) - iq_g \Gamma(x^\mu)} \psi(x^\mu) \end{cases} \quad (7)$$

を想定すると，系の共変微分 D_μ を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_e A_\mu + iq_g B_\mu. \quad (8)$$

Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル $G_{\mu\nu}$ を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2 + q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2 + q_g^2}}(q_e F_{\mu\nu} + q_g E_{\mu\nu}). \quad (9)$$

ここでテンソル $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]}$, $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} B_{\nu]}$ とする.

The Maxwell equations of Dyons

Authors

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: SU(2) 模型
とゲージ結合項

それぞれの 4 元カレント J^μ, K^μ を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e \{ \Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi \} + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \quad (10)$$

$$K^\mu \equiv iq_g \{ \Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi \} + g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi . \quad (11)$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) J^\nu , \quad (12)$$

$$q_g^2 \partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) K^\nu . \quad (13)$$

The Noether currents

4 元ポテンシャル A_μ, B_μ があるパラメーター λ に沿って変分:

$$\delta A_\mu(\lambda) = \frac{\partial A_\mu(\lambda)}{\partial \lambda} \delta \lambda, \quad \delta B_\mu(\lambda) = \frac{\partial B_\mu(\lambda)}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad (14)$$

を与えるときの Noether current は以下のように決まる.

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \partial_\nu A_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu B_\sigma)} \partial_\nu B_\sigma - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_f, \quad (15)$$

Noether Currents(場の理論)

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\hat{q}} G^{\lambda\sigma} G^\mu{}_\sigma + \frac{1}{4} g^{\lambda\mu} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma}. \quad (16)$$

Determination of EM Fields

Authors

電磁場の決定 (Determination of EM fields)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) \\ &\quad - \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(\nabla \times \mathbf{A}_g) - \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\nabla \times \mathbf{A}_e) , \\ \mathbf{B} &= \frac{q_g^2}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_g - \dot{\mathbf{A}}_g) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(-\nabla\varphi_e - \dot{\mathbf{A}}_e) \\ &\quad + \frac{q_e^2}{\hat{q}^2}(\nabla \times \mathbf{A}_e) + \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2}(\nabla \times \mathbf{A}_g)\end{aligned}\tag{17}$$

単極子場での粒子
の量子電気力学と
そのゲージ対称性
に関して

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: SU(2) 模型
とゲージ結合項

QED of SU(2) Gauge theory

Authors

マクスウェル場の
修正

同種粒子のゲージ
理論

Dyon-電子相互作
用のゲージ理論

付録:
Yang-Mills
Fields

付録: 荷電共役変
換と Positron
極限

付録: SU(2) 模型
とゲージ結合項

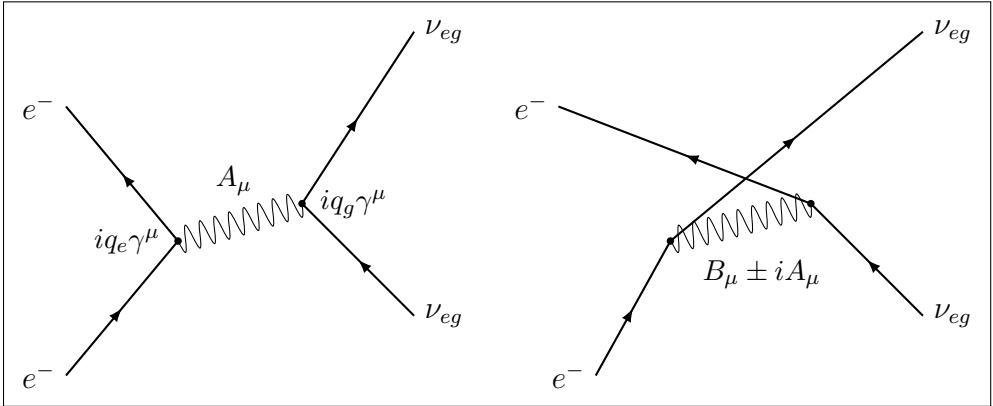


Figure: The SU(2) gauge fields on action-reaction breaking

Summary

我々は、U(1) ゲージ模型を通じて以下のような問題が説明できた：

- 同種粒子の一般的な模型として U(1) ゲージ模型で、電子-電子、Monopole-Monopole, Dyon-Dyon のような同種粒子の相互作用に関しては説明ができた.
- 電子-Dyon の相互作用の一般的な模型として SU(2) ゲージ模型で、電子と Dyon の間の相互作用は説明することができた.
- 両模型とも $q_g \rightarrow 0$ の Monopoleless 極限で、電子のみの U(1) 電磁場で戻ることが確認できた.

しかし、以下のような問題が残っている：

- SU(2) ゲージ模型で、電子と Dyon がなぜ双崩壊するかについての疑問が残っている．かつ、これにより電流密度 J_μ, K_μ が保存されない問題も残っている.

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (19) により, ゲージ場 \mathbf{W}_μ を用意すると系の共変微分 D_μ は:

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu(x^\mu) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (20)$$

として定義できる. パウリ行列が非可換で $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ となることに注意して, 以下の Dirac 方程式:

$$\left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) - m \right] \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} = 0 \quad (21)$$

が不変になるようにゲージ場 \mathbf{W}_μ の変換則を決める.

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (21) が不変になるための変換 $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$ は:

$$i\gamma^\mu \left[(\partial_\mu U) - \frac{ig}{2} U (\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2} (\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U \right] \Psi = 0 \quad (22)$$

の関係を満たすべきである. SU(2) 群の生成子 $U = 1 - \frac{ig}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ とする.

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \mapsto \mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = U (\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^{-1} + \frac{2i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (23)$$

SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (23) にゲージ群の生成子 U を代入して具体的に計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \mathbf{W}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{2i}{g} \left(-\frac{i}{2} \partial_{\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \quad (24) \\ &= \mathbf{W}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{2} \alpha^i W_{\mu}^j [\sigma^i, \sigma^j] + \frac{1}{g} \partial_{\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

導入したゲージ場 \mathbf{W}_{μ} は式 (24) の変換式を満たす.

Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (??) より, Dirac 場の Lagrangian は:

Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = & \bar{\psi}_e (i\partial - q_e \mathcal{A} - m) \psi_e - \bar{\psi}_e (q_e \mathcal{B} - iq_g \mathcal{A}) \psi_{\nu_{eg}} \\ & + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (i\partial + q_e \mathcal{A} - m) \psi_{\nu_{eg}} - \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (q_e \mathcal{B} + iq_g \mathcal{A}) \psi_e.\end{aligned}$$

ダイオンの部分極限 $q_g \rightarrow 0, B_\mu \rightarrow 0$ の下では **U(1) ゲージ場**に収束する:

$$p\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \rightarrow 0} \bar{\psi}_e (i\partial - q_e \mathcal{A} - m) \psi_e + \bar{\psi}_e^c (i\partial - q_e \mathcal{A} - m) \psi_e^c. \quad (25)$$

Charge-conjugation and Positrons on SU(2) gauge Fields

磁荷のない極限 ($q_g, B_\mu \rightarrow 0$) では, SU(2) 模型のゲージ場 (18) は:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, B_\mu \rightarrow 0} & \bar{\psi}_e (i\cancel{\partial} - q_e \cancel{A} - m) \psi_e + iq_e \bar{\psi}_e \cancel{A} \psi_{\nu_{eg}} \\ & + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (i\cancel{\partial} + q_e \cancel{A} - m) \psi_{\nu_{eg}} - iq_e \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \cancel{A} \psi_e. \end{aligned}$$

ここから, 荷電共役変換 $\psi^c = (i\gamma^2\gamma^0)\bar{\psi}^T$ を考えると

$$i(q_e \bar{\psi}_e \cancel{A} \psi_e^c - q_e \bar{\psi}^c \cancel{A} \psi_e) = 0 \quad (26)$$

となるので, $\psi_{\nu_{eg}} = \psi_e^c$ が 1 つの解になることが分かる ($\psi_{\nu_{eg}} \rightarrow \psi_e^c$).

Continuous condition to Monopoleless limit

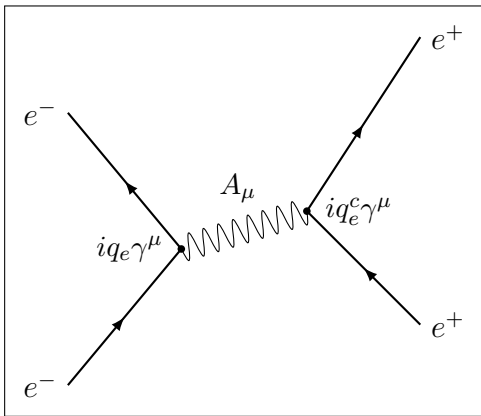


Figure: In case of absence of monopole charges($q_g, B_\mu \rightarrow 0$)

Lagrangian density of SU(2) Gauge fields

場の強さ $H_{\mu\nu}^k$ は以下のものとして切り替えても良い。

$$H_{\mu\nu}^k \mapsto \partial_{[\mu} W_{\nu]}^k - g\epsilon_{ijk} W_{\mu}^i W_{\nu}^j, \quad (k = 1, +, -) \quad (27)$$

場の強さ $H_{\mu\nu}^k (k = 1, 2, 3)$ を以下のように計算できる：

ゲージ場の曲率 (Curvature tensors of Gauge field)

$$H_{\mu\nu}^1 = \frac{q_g}{\hat{q}} E_{\mu\nu}, \quad H_{\mu\nu}^{\pm} = \frac{q_e}{\hat{q}} F_{\mu\nu} \pm 2 \frac{q_e q_g}{\hat{q}^2} A_{[\mu} B_{\nu]}. \quad (28)$$

