基礎解析学　解説

04B22078
大阪大学　理学部　物理学科

2022 年 7 月 19 日

目次

第 1 章

極限の定義

1.1　1 週目

1. 次のように定義された数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ の発散速度が高い順で並べ。

$$\{a_n\} = n^2, \qquad \{b_n\} = 2^n, \qquad \{c_n\} = n! \tag{1.1}$$

(証明)　次のよう, 比較判定法を利用する:

(1) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の発散速度

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

(2) $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ の発散速度

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \cdots \times \frac{2}{n}\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{4}\right)^4 \times \cdots \times \left(\frac{2}{2^{m-1}}\right)^{2^{m-1}} \times \left(\frac{2}{2^m}\right)^{n-2^m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \times 2^{-1\times 4-2\times 8-\cdots-(m-2)\times 2^{m-1}} \times \left(\frac{2}{2^m}\right)^{n-2^m+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{1-(m-1)(n-2^m+1)} \times 2^{-\alpha_m}
\end{aligned}$$

となる。ここで，定数 m および α_m は次のように定義される。

$$m = \max\{p | 2^p < n, p \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

$$\alpha_m = \sum_{k=1}^{m-2} k \times 2^{k+1} = 4(2^{m-2} - 1) \tag{1.3}$$

従って，次のような不等式が成り立つ。

$$0 < \frac{2^n}{n!} < 2^{1-(m-1)(n-2^m+1)} \times 2^{-\alpha_m}$$

さらに，はさみうちの原理によって，

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} 2^{1-(m-1)(n-2^m+1)} \times 2^{-\alpha_m} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

2. $a_1 > -2, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき収束することを示し， $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(証明)　次のようにはさみうちの原理により導ける:

(1) $\forall_{n>1}$，$a_n > 0$

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a_2 > 0,$$
$$a_k > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} > \sqrt{2} > 0.$$

従って，$n > 1$ のすべての自然数に対して $a_n > 0$ が成り立つ。

(2) $|a_n - 2| < \dfrac{1}{2}|a_{n-1} - 2|$

与えられた漸化式を利用する。

$$|a_n - 2| = \left|\sqrt{2 + a_{n-1}} - 2\right| = \frac{|a_{n-1} - 2|}{\sqrt{2 + a_{n-1}} + 2} < \frac{1}{2}|a_{n-1} - 2|.$$

従って，とある $n > 2$ に対して次のような関係式が成り立つ:

$$0 < |a_n - 2| < \frac{1}{2}|a_{n-1} - 2| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} |a_2 - 2|$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} |a_2 - 2| = 0$$

となるため，はさみうちの原理によって次の結論を取る。

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} |a_n - 2| \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} |a_2 - 2|, \quad \therefore \lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0.$$

Q.E.D.

〔付録A〕

極限に関する定理 I　次は必要十分条件である:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

(証明)　エプシロン－デルタ論法を利用する:

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0}, \ ||a_n - \alpha| - 0| < \epsilon \tag{1.4}$$

一方，次の関係式が成り立つことによって，

$$||a_n - \alpha| - 0| = |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

以下の極限関係も成り立つ。

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0}, \ |a_n - \alpha| < \epsilon,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

Q.E.D.

3. 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，次の関係を満たすことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

(証明)　エプシロン－デルタ論法を利用する:

極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ から,

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0}, \ |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.5}$$

が成り立つ。ここから，次の関係式を取る。

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| \\ &< \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - \alpha|\right).\end{aligned}$$

一方，定数 M を次のように定義する:

$$M = \max\{|a_1 - \alpha|, |a_2 - \alpha|, \cdots, |a_N - \alpha|\}$$

そうすると，極限の定義によって,

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k - \alpha| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - \alpha| < NM + \frac{(n-M)\epsilon}{2}$$

となり，ここで適当に大きな自然数 $n > \dfrac{2NM}{\epsilon}$ 選ぶと,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha\right| &< \frac{NM}{n} + \left(\frac{n-M}{2n}\right)\epsilon \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{n-M}{2n}\right)\epsilon < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Q.E.D.

4. とある収束する数列 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ に対して，その部分列 a_{n_k} も同じ極限値で収束することを示せ。

(証明)　先ず，極限の定義によって，数列 a_n は次を満たす。

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_n - \alpha| < \epsilon. \tag{1.6}$$

一方，部分列 a_{n_k} についても，とある自然数 K が存在し，次を満たす。

$$\exists_{K<k}, \quad N \leq n_K < n_k$$

従って，極限 (6) の定義によって，次が成り立つ。

$$\exists_{K<k}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_{n_k} - \alpha| < \epsilon \quad (\because n_k > N)$$

これを示すことにより，部分列 a_{n_k} も同じ極限値 α で収束することを証明できる。

Q.E.D.

5. $0 < a_1 < b_1$ とする。

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とし，一般に，

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

として，二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を定める。このとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

を示せ。

(証明)　次の順序によって証明する:

〔 I. $\forall_{n\in\mathbb{N}}, \quad 0 < a_n < b_n$ 〕

数学的帰納法により，

$$0 < a_1 < b_1,$$

$$0 < a_n < b_n \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1} > 0.$$

従って，すべての自然数 n に対して，$a_n < b_n$ が成り立つ。

〔 II. $n \to \infty \;\Rightarrow\; b_n - a_n \to 0$ 〕

下記の不等式により，

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \qquad (n \geq 2)$$

はさみうちの原理を利用することができる。

$$0 < b_n - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - a_1).$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - a_1) = 0, \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0. \tag{1.7}$$

それぞれの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束すれば，問題と同じ結論に達する。

与えられた数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束することを証明する:

$$0 < \cdots < a_{n+1} < b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < b_n < \cdots < b_1 = M$$

数列 $\{b_n\}$ は，単調減少数列で下の有界を持つ。

$$M > \cdots > b_{n+1} > a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > a_n > \cdots > a_1 = L$$

数列 $\{a_n\}$ は，単調増加数列で上の有界を持つ。

従って，単調有界収束定理よって，極限値を持つ。極限関係式 (7) により，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

を分かる。

Q.E.D.

〔付録B〕

極限に関する定理 II　単調増加で，上の有界を持つ数列は収束する:

$$a_n < a_{n+1} \ \ (n \geq 1), \quad a_n < M \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \leq M.$$

(証明)　エプシロン－デルタ論法を利用する:

上の有界を持つため，次を満たす実定数 α が存在する。

$$\alpha = \sup\{a_n | n \geq 1\}$$

上の有界の定義によって，次の条件を満たす自然数が存在する。

$$\exists_{N\in\mathbb{N}}, \quad \forall_{\epsilon>0}, \ a_N \geq \alpha - \epsilon$$

単調増加するため，$a_N < a_n$ $(N < n)$ を満たす自然数 n に対して,

$$\alpha - \epsilon \leq a_N < a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \therefore 0 < \alpha - a_n < \epsilon.$$

となり，極限が存在することを分かる。

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0}, \ |a_n - \alpha| < \epsilon \ \ (\alpha \leq M)$$

Q.E.D.

6. 次は，数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件であることを示せ。

$$\exists_{N<n,m}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_n - a_m| < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

(証明)　必要条件と十分条件で分けて証明する。

I. 必要条件:　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \;\;\Rightarrow\;\; |a_n - a_m| < \epsilon\ (n, m > N)$

極限の定義によって，

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。ここで，三角不等式により次が成り立つ:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) - (a_m - \alpha)| < |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ここで，$m > N$ であることに注意せよ。[*1]従って，次の結論を取る:

$$\exists_{N<n,m}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Q.E.D.

II. 十分条件:　$|a_n - a_m| < \epsilon\ (n, m > N) \;\;\Rightarrow\;\; \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

先ず，$\epsilon = 1$ 取る。そのときの自然数 N を N_0 とし，$m = N_0 + 1$ を取ると次の関係式が成り立つ:

$$|a_n - a_{N_0+1}| < |a_n| + |a_{N_0+1}| < \epsilon = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < 1 + |a_{N_0+1}|.$$

従って，定数 M を次のように定義すると，

$$M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{N_0}, a_{N_0} + 1\}$$

この数列は有界になることを分かる:

$$|a_n| \le M \quad (n \ge 1)$$

これは，上の有界にも，下の有界にもなることを意味する。

数列 $\{a_n\}$ が有界であるため，次が成り立つ。

$$|a_m| \le |a_n| \le M.$$

従って，$\alpha = M - \epsilon$ を満たすとある定数 α により，

$$\begin{aligned} &|a_n - \alpha| - |a_m - \alpha| \le |a_n - a_m| < \epsilon \\ \Longleftrightarrow\ &|a_n - \alpha| < \epsilon + |a_m - \alpha| \le \epsilon + |M - \alpha| = 2\epsilon \end{aligned} \tag{1.8}$$

つまり，式 (8) は次と同値である:

$$\exists_{N<n}, \quad \forall_{\epsilon>0},\ |a_n - \alpha| < 2\epsilon, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

[*1] ここの m は，条件 $m > N$ を満たす任意の自然数として設定した。

1.2　2 週目

1. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ が連続であるか調べよ。

(1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(証明)　背理法を利用する。

$$0 \leq \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$$

であるため，関数 $f(x,y)$ の $(x,y) \to (0,0)$ への極限が存在すると仮定し，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = L \quad (|L| \leq 1)$$

とする。従って，極限の定義によって次が成り立つ。

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon>0}, \ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - L\right| < \epsilon.$$

つまり，$x^2+y^2 < \delta^2$ を満たすとある $\delta > 0$ が存在し，

$$\epsilon > \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - L\right| = \left|\frac{2y^2}{x^2+y^2} - (1-L)\right|$$

となる。[*2]次の 2 つの場合で分けて証明する:

I. $|L| = 1$ のとき
ここで，$x = y$ の場合を考えると，

$$\left|\frac{2y^2}{x^2+y^2} - (1-L)\right| = 1 < \epsilon$$

となり，$2\epsilon = 1$ になる ϵ に対しては，$x^2+y^2 < \delta^2$ の範囲の下で，

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right| < \epsilon$$

を満たす $\delta > 0$ が存在しない。

II. $|L| < 1$ のとき
ここで，$x = 0$ の場合を考えると，

$$\left|\frac{2y^2}{x^2+y^2} - (1-L)\right| = |1+L| < \epsilon$$

となり，$\epsilon - L < 1$ になる ϵ に対しては，$x^2+y^2 < \delta^2$ の範囲の下で，

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - L\right| < \epsilon$$

[*2] 定数 L は $|1-L| \leq 2$ を満たす。

を満たす $\delta > 0$ が存在しない。

以上によって，この関数の $(x, y) \to (0, 0)$ への極限は存在しない。

Q.E.D.

(2)

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(証明)　エプシロン − デルタ論法を利用する:

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon},\ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon. \tag{1.9}$$

となることを証明することを示せば，点 $(0,0)$ で連続であることを示すことと同じである。

ここで，次のような式変形を行っても一般性を失わない:

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2}{x^2+y^2} = (x^2+y^2) - \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

従って，ここで $\delta = \sqrt{\epsilon}$ のように δ を定義すると，

$$x^2+y^2 < \delta^2 = \epsilon \quad \Rightarrow \quad (x^2+y^2) - \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} < x^2+y^2 < \epsilon.$$

となり，$\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \sqrt{\epsilon}$ を満たす $\delta > 0$ が存在し，次を満たす:

$$\left| \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon.$$

つまり，関数 $g(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} = g(0,0) = 0.$$

Q.E.D.

2. 次の命題が成り立つことを示せ:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x,b) = \lim_{y\to b} f(a,y) = f(a,b)$$

(証明)　エプシロン − デルタ論法を利用する:

極限の定義によって，とある $k \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon>0},$$
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)-f(a,b)| < \frac{\epsilon}{k+1}$$

が成り立つ。

このとき，$(x-a)^2 > 0$ および $(y-b)^2$ であるため，次が成り立つ:

$$|x-a| < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \tag{1.10}$$

一方，三角不等式によって次のような関係式を導ける。

$$\begin{aligned} |f(x,b)-f(a,b)| &= |f(x,b)-f(x,y)+f(x,y)-f(a,b)| \\ &\leq |f(x,y)-f(a,b)| + |f(x,y)-f(x,b)| \\ &< \frac{\epsilon}{k+1} + |f(x,y)-f(x,b)|. \end{aligned}$$

関数 $f(x,y)$ の (a,b) 以外の連続性に問わず，$(x-a)^2+(y-b)^2 < \delta^2$ を満たす $\delta > 0$ に対して $k \in \mathbb{R}$ が存在し，次を満たす:

$$m \leq f(x,y) \leq M, \quad m \leq m_1 \leq f(x,b) \leq M_1 \leq M,$$
$$|M_1 - m_1| \leq |M-m| \leq \frac{k}{k+1}\epsilon.$$

従って，次の結論を得る。

$$\begin{aligned} |f(x,b)-f(a,b)| &< \frac{\epsilon}{k+1} + |f(x,y)-f(x,b)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{k+1} + |M-m| \\ &\leq \frac{\epsilon}{k+1} + \frac{k}{k+1}\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

以上の結果と式 (10) の関係を合わせると，

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t} \quad \forall_{\epsilon>0},\ |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,b)-f(a,b)| < \epsilon$$

となり，関数 $f(x,b)$ は $x=a$ で連続である。

$$\lim_{x\to a} f(x,b) = f(a,b)$$

また，関数 $f(a,y)$ についても同じ様にできる。

Q.E.D.

3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

はどの点 (a,b) においても，x の関数 $f(x,y)$ は $x=a$ で連続であり，y の関数 $f(a,y)$ は $y=b$ で連続であるが，2 変数関数としては，$(0,0)$ において連続ではないことを示せ。

(証明)　一変数関数と二変数関数で分けて証明する;

I. 一変数関数

与えられた関数は，$f(x,y) = f(y,x)$ を満たす交代式であるため，x の関数と y の関数どちらの一方が連続であることを示せば，両方連続であることが証明される。

x の関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で連続であることを示す。

$$|f(x,b) - f(a,b)| = \left| \frac{bx}{x^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} \right| = \frac{|b|}{x^2+b^2}|x-a| \tag{1.11}$$

連続の定義によって，次が成り立つことを示せば良い:

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon>0},\ |x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)-f(a,b)|<\epsilon$$

ここで，$\delta = |b|\epsilon$ を選ぶと関係式 (11) によって，次の不等式が成り立つ。

$$|f(x,b)-f(a,b)| = \frac{|b|}{x^2+b^2}|x-a| < \frac{|x-a|}{|b|} < \epsilon.$$

以上によって，次が成り立つ:

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon>0},\ |x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{xb}{x^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} \right| < \epsilon.$$

または,

$$\lim_{x\to a} \frac{xb}{x^2+b^2} = \lim_{y\to b} \frac{ay}{a^2+y^2} = \frac{ab}{a^2+b^2}.$$

II. 二変数関数

連続の定義によって，次を示せば良い:

$$\exists_{\delta>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon>0},\ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{xy}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon.$$

背理法を利用し，次の極限が存在すると仮定する:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = L$$

この中で，連続であるための必要十分条件 $L=0$ を選ぶと，$x^2+y^2<\delta^2$ を満たす $\delta>0$ が存在し，次を満たす。

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon \tag{1.12}$$

ここで，$x=y$ の場合を考える:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{1}{2} < \epsilon.$$

従って，$4\epsilon=1$ を選ぶと $x^2+y^2<\delta^2$ の範囲の下で，式 (12) を満たす適当な $\delta>0$ が存在しない。**不連続**である。

Q.E.D.

4. $f(x,y)$ を連続な二変数関数とし，$g(t)$ を連続な関数とすると，合成関数 $g(f(x,y))$ は連続なに二変数関数となることを示せ。

(証明)　連続の定義を利用する:

$$\exists_{\delta_1>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon_1>0},$$
$$\sqrt{h_x^2+h_y^2}<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x',y')-f(x,y)|<\epsilon_1 \tag{1.13}$$

二変数関数 $f(x,y)$ が連続[*3]である，ため式 (13) が成り立つ。

また,

$$\exists_{\delta_2>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon_2>0},\ |h|<\delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(t+h)-g(t)|<\epsilon_2 \tag{1.14}$$

関数 $g(t)$ が連続であるため，式 (14) が成り立つ。

ここで，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ および $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であるため，関数 $g(t)$ 連続であることから次が成り立つ。

$$\exists_{\delta_2>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon_2>0},$$
$$|f(x',y')-f(x,y)|<\delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(f(x',y'))-g(f(x,y))|<\epsilon_2.$$

従って，ここで $\delta_2=\epsilon_1$ を選ぶと，$h_x^2+h_y^2<\delta_1^2$ の範囲の下で，$\delta_1>0$ が存在し，次を満たす。

$$|f(x',y')-f(x,y)|<\epsilon_1=\delta_2;$$
$$\therefore \exists_{\delta_1>0} \quad \text{s.t.} \quad \forall_{\epsilon_2>0},\ \sqrt{h_x^2+h_y^2}<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(f(x',y'))-g(f(x,y))|<\epsilon_2.$$

合成関数 $g(f(x))$ も**連続**である。

[*3] ここで，$x'=x+h_x$ および $y'=y+h_y$ と定義する。

第 2 章

テイラー展開

2.1　3 週目

1. 次の関数の原点でのテイラー展開を与えよ．剰余項も求めること．

(1) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

〔解説〕　先ず，関数 e^x がテイラー展開可能な関数か判別する:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} = e^x.$$

ここで，自然定数 e の定義を利用した:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad x\in\mathbb{R}$$

指数関数はすべての点で微分可能であり，同時に n 回微分可能である．つまり，すべての点でのテイラー展開が可能である: 原点を取る

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(0)}}{k!}x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x)$$

ここで，剰余項 $R_n(x)$ に対しては，とある実定数 $c\in(0,x)$ が存在し，次のように表せる:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{e^c + (-1)^n e^c}{2n!}x^n.}$$

ここで，次の計算を利用した．

$$\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x \qquad かつ, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{e^x + (-1)^n e^x}{2}$$

*ただし，$[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす自然数 n に対して，$[x] = n$ と定義する．

(2) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

〔解説〕　問題 (1) と同じ方法を利用すると，とある実定数 $c \in (0, x)$ に対して，次のようにテイラー展開できる:

$$\boxed{g(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}-2]} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \frac{e^c + (-1)^{n+1}e^c}{2n!} x^n.}$$

*ただし，$[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす自然数 n に対して，$[x] = n$ と定義する.

(3) $h(x) = \cos^2 x$

〔解説〕　この問題は，次の関数のテイラー展開可能性について議するものと同じである:

$$h(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

つまり，$y = \cos x$ がテイラー展開可能であれば，関数 $h(x)$ もテイラー展開可能である.

微分可能性を調べると，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \sin x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

となり，n 回微分可能である.

次を証明すれば良い．($k \geq 1$)

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \begin{cases}(-1)^k \sin x & (n = 2k-1) \\ (-1)^k \cos x & (n = 2k)\end{cases}$$

先ず，$k = 1$ の場合は，

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x$$

となり，一般式を満たす.

$$\begin{aligned}&\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}\cos x = (-1)^k \sin x, \quad \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\cos x = (-1)^k \cos x, \\ \Rightarrow \quad &\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\cos x = (-1)^{k+1}\sin x, \quad \frac{d^{2k+2}}{dx^{2k+2}}\cos x = (-1)^{k+1}\cos x.\end{aligned}$$

よって，数学的帰納法により，すべての自然数 k に対して成り立つ.

以上によって，関数 $h(x)$ はテイラー展開可能できる:

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right) + R_n(x)}$$

ここで，剰余項 $R_n(x)$ は，実定数 $c \in (0, x)$ に対して，

$$\boxed{R_n(x) = \begin{cases}\dfrac{(-1)^n \sin c}{2n!}x^n & (n = 2l-1) \\[2ex] \dfrac{(-1)^n \cos c}{2n!}x^n & (n = 2l)\end{cases}}$$

のように表せる．($l = 1, 2, 3, \cdots$)

*ただし，$[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす自然数 n に対して，$[x] = n$ と定義する.

2. 次の関数の原点でのテイラー展開を与えよ．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

〔証明〕　先ず，微分可能性を示す:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h}$$

点 $x = 0$ での微分係数は，上式のように定義される．これを，$x \to 0+$ と $x \to 0-$ で分けて極限の存在性を調べる．

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{t \to \infty} te^{-t^2} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{t \to -\infty} te^{-t^2} = 0.$$

よって，$x = 0$ での微分係数は $f'(0) = 0$ で定義されるため，関数 $f(x)$ の 1 次導関数は次のように定義される．

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

この 1 次導関数も連続である．従って，$x \neq 0$ のときのこのあとは n 回微分可能性を調べる．

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{8}{x^9} - \frac{36}{x^7} + \frac{24}{x^5} \right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

とおく．ここで，$f^{(n+1)(x)}$ を考えることで関数 $P_n(x)$ の漸化関係を求めることができる:

$$P_{n+1}(x) e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{2}{x^3} P_n(x) + P'_n(x) \right] e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

つまり，次の様な漸化式が成り立つ．

$$P_{n+1}(x) = \frac{2}{x^3} P_n(x) + P'_n(x) \tag{2.1}$$

ここで，次の変換を考える．

$$y = \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \qquad \frac{d}{dx} P_n \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} P'_n \left(\frac{1}{x} \right);$$

そうすると，式 (1) の漸化式は次の形で変えることができる．

$$P_{n+1}(y) = 2y^3 P_n(y) - y^2 P'_n(y) \qquad \left(y = \frac{1}{x} \right)$$

よって，関数 $Q_n(y)$ は変数 y に関する多項式の関数であることを分かる．なお，その最高次項を調べるため，最高次項の係数を a_n とおくと，

$$y^{a_{n+1}} = y^{a_n + 3}; \qquad a_1 = 3, \ \ a_{n+1} = a_n + 3$$

関数 $Q_n(y)$ の最高次項は $a_n = 3n$ $(n \geq 1)$ の次数を持つ.

また，最低次項は,

$$y^{b_{n+1}} = y^{(b_n-1)+2}; \qquad b_1 = 3,\ \ b_{n+1} = b_n + 1$$

のように与える．よって，最低次項は $b_n = n + 2$ の次数を持つ:

$$P_n(y) = \alpha_{n+3}y^{n+3} + \alpha_{n+4}y^{n+4} + \cdots + \alpha_{3n}y^{3n}.$$

以上により，求める関数 $f(x)$ の n 次導関数一般に,

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\alpha_{n+3}}{x^{n+3}} + \frac{\alpha_{n+4}}{x^{n+4}} + \cdots + \frac{\alpha_{3n}}{x^{3n}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

と書ける．また，以下の極限関係式

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{t\to\infty} t^n e^{-t^2} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{t\to-\infty} t^n e^{-t^2} = 0 \qquad (n \geq 1)$$

が成り立つため，結論的にそれらの線形結合からなる $f^{(n)}(x)$ の $x \to 0$ への極限も 0 となる:

$$\lim_{x\to 0} f^n(x) = \lim_{x\to 0}\sum_{k=n+3}^{3n}\frac{\alpha_k}{x^k}e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=n+3}^{3n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_k}{x^k}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

次により定義された n 次導関数も,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

も連続である．つまり，関数 $f(x)$ は n 回微分可能である.

よって，関数 $f(x)$ は次のようにテイラー展開できる．(証明は終わり)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(0)}}{k!}x^k + R_n(x) = R_n(x) \tag{2.2}$$

ここで，前の証明の結論である $f^{(0)}(0)$ を利用した．また，剰余項 (Reminder) は,

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = \frac{P_n(c)e^{-\frac{1}{c^2}}}{n!}x^n}$$

を満たす実定数 $c \in (0, x)$ によって表せる.

Q.E.D.

3. 関数 $\dfrac{x}{e^x-1}$ は原点において次のように級数に展開される:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$$

このとき，b_n は漸化式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0$$

を満たすことを示せ．また $b_0=1, b_1=-\frac{1}{2}, b_{2n+1}=0 \quad (n\geq 1)$ を示せ.

この問題は，テイラー展開可能であることが問題で示されているため，これを証明する必要はない.

〔証明〕　テイラー展開を利用する:

$$e^x-1=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{2.3}$$

テイラー定理によって，式 (3) のようなテイラー展開が可能である．よって，$x\neq 0$ の場合を考え，両辺の次のような式変形をとる.

$$\begin{aligned} x&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\\ &=b_0x+\left(\frac{b_0}{2!}+b_1\right)x^2+(\frac{b_0}{3!}+\frac{b_1}{1!2!}+\frac{b_2}{2!1!})x^3+\cdots \\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\frac{b_k}{k!(j-k!)}\right)x^j \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで，両辺の係数を比べる:

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}a_nx^j=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

ここで，係数 a_n を次のように定義すると，式 (4) と完全に一致する.

$$a_j=\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j}{k}\frac{b_k}{j!}$$

従って，次の条件を満たす:

$$a_1=1,\ a_2=a_3=a_4=\cdots=a_n=\cdots=0.$$

よって，式 (4) の右辺の 1 次項と 2 次項に対して，

$$\boxed{a_1=b_0=1,\quad a_2=\frac{b_0}{2}+b_1=0;\ b_1=-\frac{1}{2}.}$$

一方，x^n の係数を考えると，a_{n-1} も 0 になるべきなので，

$$a_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0.}$$

のようになる.

一方，与えられた関数を $f(x)$ とおいて，

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

次の演算を行う:

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} = \frac{xe^x}{e^x-1} = x + f(x) \qquad \Rightarrow \qquad f(-x) = x + f(x).$$

関数 $f(x)$ および $f(-x)$ をテイラー展開すると，

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + b_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + b_n \frac{x^n}{n!} + \cdots ,$$

$$f(-x) = b_0 - b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} - b_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + b_n \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

となる．関係式 $f(-x) = x + f(x)$ に代入し，奇数次数項の係数を比べると，

$$-b_1 = 1 + b_1 \ (1\text{ 次項}), \qquad b_{2n+1} = 0 \ (n \geq 1)$$

となる．つまり，次の結果を取る:

$$b_{2n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (n = 0) \\ 0 & (n \geq 1) \end{cases}$$

Q.E.D.

第 3 章

二変数関数の偏微分と全微分

3.1　4 週目

1. a, b を定数とする．次の関数 $f(x,y)$ 偏微分 f_x, f_y を求めよ．また，$f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^3y + bxy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.1}$$

〔解説〕　先ず，関数 $f(x,y)$ を次のように簡単に整理する:

$$f(x,y) = xy\frac{ax^2+by^2}{x^2+y^2} = xy\left(a + \frac{b-a}{x^2+y^2}y^2\right), \tag{3.2}$$

かつ,

$$f(x,y) = xy\frac{ax^2+by^2}{x^2+y^2} = xy\left(b + \frac{a-b}{x^2+y^2}x^2\right). \tag{3.3}$$

よって，式 (2) および式（3）での関数

$$g(x,y) = xy, \quad h(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

はそれぞれの変数 x と y に対して偏微分できるため，関数 $f(x,y)$ も偏微分可能である。計算すると,

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y\left(a + \frac{b-a}{x^2+y^2}y^2\right) + xy\left[\frac{b-a}{(x^2+y^2)^2}(2xy^2)\right]$$

簡単な計算のため，式 (2) を偏微分する。

同様に，式 (3) を偏微分すると f_y を計算できる:

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x\left(b + \frac{a-b}{x^2+y^2}x^2\right) + xy\left[\frac{a-b}{(x^2+y^2)^2}(2yx^2)\right]$$

以上により，$f_x(0,0)$ および $f_y(0,0)$ は次の値を持つ:

$$\boxed{f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0}$$

同じ方法で，2 階偏微分 f_{yx} と f_{yx} も計算できる:

$$
\begin{aligned}
f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \left(a + \frac{b-a}{x^2+y^2}y^2\right) + y(b-a)\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + x\left[\frac{b-a}{(x^2+y^2)^2}(2xy^2)\right] \\
+ 2x^3y(b-a)\frac{(x^2+y^2)^2 - 4y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \left(b + \frac{a-b}{x^2+y^2}x^2\right) + x(a-b)\frac{2y^2x}{(x^2+y^2)^2} + y\left[\frac{a-b}{(x^2+y^2)^2}(2yx^2)\right] \\
+ 2y^3x(a-b)\frac{(x^2+y^2)^2 - 4x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}.
\end{aligned}
$$

ここで，面白い式の特徴を見つける:

偏微分 f_x から，a と b を交換して，x と y を交換すれば f_y になる。

なので，f_{yx} も偏微分 f_{xy} から a と b を交換し，x と y を交換すれば得られると予想できる。

よって，$f_{xy}(0,0)$ および $f_{yx}(0,0)$ は，

$$\boxed{f_{xy}(0,0) = a, \quad f_{yx}(0,0) = b}$$

となる。

2. 次の関数の各変数に関する偏微分を求めよ.

(1)

$$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \mathbb{D} = \left\{(x,y)\middle| x \neq 0,\quad -\frac{\pi}{2} < \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right\}$$

〔解説〕　この関数を偏微分を計算するため，逆三角関数 $y = \tan^{-1} x$ の微分を考える:

$$y = \tan^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan y = x$$

逆関数の定義によって，逆三角関数 $y = \tan^{-1} x$ は tan を用いて上式にように表せる。

よって，この tan の逆関数を $g(x)$ とおいて，合成関数の微分を考える:

$$g(x) = \tan^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan g(x) = x \tag{3.4}$$

ここから，式（4）の両辺を微分する:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\tan g(x) = \sec^2 g(x) \times g'(x)}_{\text{式 (4) の左辺}} = \underbrace{\frac{d}{dx} = 1}_{\text{式 (4) の右辺}},$$

よって，$g'(x)$ は次のように計算される:

$$g'(x) = \frac{1}{\sec^2 g(x)}$$

上式を変数 x に関する関数で表すため，次の三角関数関係式を利用する。

$$\sin^2 g(x) + \cos^2 g(x) = 1; \qquad \sec^2 g(x) = 1 + \tan^2 g(x) = 1 + x^2$$

ここで，逆関数 $g(x)$ の定義によって，$\tan g(x) = \tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ になる。以上によって，逆関数の微分 $g'(x)$ は,

$$g'(x) = \frac{1}{\sec^2 g(x)} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{3.5}$$

よって，式 (5) により与えられた関数 $f(x,y)$ を簡単に偏微分できる:

$$\boxed{f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g'(x,y) \times \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = g'(x,y) \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}}$$

ただし，$(x,y) \in \mathbb{D}$ のもとで定義される。三角関数 $y = \tan x$ の逆関数 $g(x)$ を導けることに使用した x と y は与えられた関数 $f(x,y)$ の変数と別のものに注意せよ。

ここで，偏導関数 $g'(x,y)$ は,

$$g(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

(2)

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+y^2}, \qquad \mathbb{D} = \{(x,y)|xy>0\}$$

関数 $g(z)=\sqrt{z}$ が微分可能であるため，与えられた関数 $f(x,y)$ も変数 x と y に対して偏微分可能である:

$$\boxed{f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y+x}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}}$$

ただし，$(x,y)\in\mathbb{D}$ の上で定義される。

(3)

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \mathbb{D} = \{(x,y,z)|(0,0,0)\notin\mathbb{D}\}$$

関数 $g(z)=1/\sqrt{z}$ は，$z\neq 0$ で微分可能であるため，与えられた二変数関数 $f(x,y)$ もある点 $(x,y)\neq(0,0)$ で各変数 x,y,z に対して偏微分可能である:

$$\boxed{f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \tag{3.6}$$

$$\boxed{f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \tag{3.7}$$

$$\boxed{f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \tag{3.8}$$

ただし，各成分 x,y,z に対しての偏微分 (6)〜(7) は $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ の原点ではないときのみ成り立つ。

ちなみに，$(x,y,z)=(0,0,0)$ の原点での偏微分は定義されない。

3. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を二変数関数に作用するラプラシアンという.

$$\Delta \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

を求めよ.

〔解説〕　次の順序に従って計算する:

$$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \mathbb{D} = \left\{(x,y)\middle| x \neq 0,\quad -\frac{\pi}{2} < \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right\}$$

先ず，与えられた関数 $f(x,y)$ 上式の上に定義される。

1 階偏微分

$$f_x = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

問〔2〕の (1) により，偏微分 f_x および f_y は上式のように定まる。

2 階偏微分

これらは，また，原点ではない $(x,y) \neq (0,0)$ のとき，もう一回偏微分できる:

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

ラプラシアン

よって，求める $\Delta \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ は,

$$\boxed{\Delta \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0}$$

となる。ただし，$(x,y) \in \mathbb{D}$ の上で定義される。

4. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を三変数関数に作用するラプラシアンという.

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

を求めよ.

〔解説〕　次の順序に従って計算する:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \mathbb{D} = \{(x,y,z)|(0,0,0) \notin \mathbb{D}\}$$

先ず，与えられた関数 $f(x,y,z)$ は上式の上に定義される。

1 階偏微分

$$f_x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$f_y = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$f_z = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

問〔2〕の (3) により，偏微分 f_x, f_y, f_z は上式のように定まる。

2 階偏微分
これらは，また，原点ではない $(x,y,z) \notin (0,0,0)$ のとき，もう一回偏微分できる:

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$
$$f_{zz} = \frac{\partial f_z}{\partial z} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

ラプラシアン
よって，求める $\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ は,

$$\boxed{\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0}$$

となる。ただし，$(x,y,z) \in \mathbb{D}$ の上で定義される。

5. $f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$ は全微分可能であるが，C^1 級関数ではないことを示せ。

〔証明〕　次の順序に従って，証明を行う:

全微分可能性

全微分可能の必要十分条件をりようする:

$$f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+\gamma C(x,y) \tag{3.9}$$

を満たすある定数 A,B とある連続関数 $C(x,y)$ が存在すればこの関数 $f(x,y)$ はある点 (a,b) で全微分可能である。ここで，

$$\gamma=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \qquad C(a,b)=0$$

と定義する。

一方，定義式 (9) での関数 $C(x,y)$ を連続関数で限らないと，式 (9) はすべての関数に対して成り立つ。

$$C(x,y)=\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}-(ab)^{\frac{2}{3}}-A(x-a)-B(y-b)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

とおいたら，与えられた関数 $C(x,y)$ が連続であろうか，連続でないか問わず式 (9) が成り立つ。つまり，すべての関数は**全微分可能性に問わず**，ある関数 $C(x,y)$ に対して式 (9) のように書ける。

よって，与えられた関数 $f(x,y)$ は原点 $(x,y)=(0,0)$ に対して，

$$(xy)^{\frac{2}{3}}=0+Ax+By+\sqrt{x^2+y^2}C(x,y) \tag{3.10}$$

と書ける。関係式 (10) の定義によって，ある関数 $C(x,y)$ は次のようになる。(まだ，連続性については何も言えない)

$$C(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^{\frac{2}{3}}-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

一方，定数 A と B は次のように定まる:

$$A=f_x(0,0)=0, \qquad B=f_y(0,0)=0.$$

よって，関数 $C(x,y)$ はより簡単に，

$$C(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3.11}$$

で表せる。式 (11) の関数 $C(x,y)$ がもし**連続であれば**，この関数 $(xy)^{\frac{2}{3}}$ は**全微分可能**になる。

算術平均により，

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}=|xy| \qquad (\text{等号は } x^2=y^2 \text{ で成立})$$

となり，次の不等式が成り立つ:

$$\left|\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leq\left|\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}}$$

よって，とある $\forall_{\epsilon>0}$ に対して，

$$\delta = 4\epsilon^3 > 0$$

と取ると，次が成り立つ:

$$\exists_{\delta>0} \qquad \text{s.t.} \qquad \forall_{\epsilon>0},\ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |C(x,y) - 0| < \epsilon$$

つまり，次の極限関係式が成り立つ。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} C(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = C(0,0) = 0$$

つまり，関数 $C(x,y)$ は**連続**になり，$(xy)^{\frac{2}{3}}$ は**全微分可能**である。

偏導関数の連続性

関数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ が微分可能であるため，それぞれの変数 x, y に対して偏微分可能である:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}.$$

関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y) \to (0,0)$ への極限が存在すると仮定する:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{2}{3} y^{\frac{1}{3}}}_{x=y} \neq \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{2}{3} \left(y^2\right)^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}}_{x=y^2}$$

これは矛盾なので，背理法により，極限は存在しない。同様に，$f_y(x,y)$ も同じである。

以上によって，関数 $f(x,y)$ は，C^1 級関数ではない。

Q.E.D.

6. $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ は偏微分可能であるが，全微分可能ではないことを示せ。

〔証明〕　背理法を利用する:

この関数 $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ が全微分可能であると仮定する:

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + \gamma C(x,y)$$

全微分可能であれば，とある任意の点 (a,b) に対して上式が成り立つ。ここで,

$$\gamma = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} C(x,y) = C(a,b) = 0$$

と定義する。この関数 $f(x,y)$ が全微分不可能だと**予想**される点は $(0,0)$ の原点のみである。もし，この点で**全微分可能だと判明**されたら，この関数は**定義域全体**で全微分可能である。よって，$a=b=0$ の原点を考えよう:

$$F(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} - Ax - By - \sqrt{x^2+y^2}\,C(x,y) \tag{3.12}$$

先ず，ある二変数関数 $F(x,y)$ を式 (12) のように定義する。関数 $f(x,y)$ は全微分可能であるという過程により，$F(x,y) = 0$ の定数関数にならなければいけない。よって,

$$0 = F(x,0) = 0 - Ax - |x|C(x,0) \tag{3.13}$$
$$= F(0,y) = 0 - By - |y|C(0,y) \tag{3.14}$$

ここで，関数 $C(x,y)$ が連続であることを思い出せ。この連続性を利用する。$C(0,0)=0$ で定義されいるため，ここでは，$x \neq 0$ および $y \neq 0$ のみを考えても一般性を失わない:

$$\begin{cases} C(x,0) = -\dfrac{x}{|x|}A \\[2ex] C(0,y) = -\dfrac{y}{|y|}B \end{cases}$$

定数 A を値を求めるため，$C(x,0)$ に対して $x=0$ での連続性を利用する:

$$\lim_{x\to 0} C(x,0) = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{|x|}A = 0; \qquad \therefore A = 0. \tag{3.15}$$

同様に，$B=0$ になる。よって，母関数 $F(x,y)$ は,

$$F(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} - \sqrt{x^2+y^2}\,C(x,y)$$

のようになる。よって，関数 $C(x,y)$ は次のように定義される:

$$C(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ここで，関数 $C(x,y)$ の $(x,y) \to (0,0)$ への極限を考える:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} C(x,y) = \lim_{x\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} \times 0}{\sqrt{x^2+0}}$$

矛盾である； 連続だと仮定したのに，連続ではない結論をえる。

これは，仮定が間違っていることを意味する: そもそもこの関数は全微分可能でない。

Q.E.D.

3.2　5 週目

1. 次の極限を求めよ.

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$$

〔解説〕　ロピタルの定理を利用する:

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0 \quad (n \geq 1), \qquad \lim_{x\to 0} x - \sin x = \lim_{x\to 0} 1 - \cos x = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

であるため，ロピタルの定理を利用できる。よって，ロピタルの定義を連鎖的に利用する:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$$

〔解法 1〕　ロピタルの定理を利用する:

$$\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} a^x - b^x = 0$$

であるため，ロピタルの定理を利用できる。よって，

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}.$$

〔解法 2〕　式変形を利用する。

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln a - \ln b.$$

2. 次式でパラメーター表示される曲線の概形を描け．また曲線の接線の方程式を求めよ．

(1)

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{t^2-1}, \frac{t}{t^2-1}\right), \quad (\text{where,} \ \ t \neq \pm 1)$$

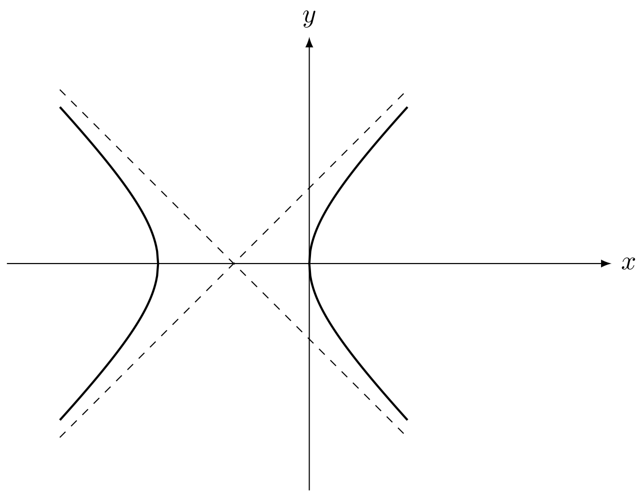
〔解法〕　パラメータ t を消去する:

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{t}{t^2-1}\right) \Bigg/ \left(\frac{1}{t^2-1}\right) = t \quad (t \neq \pm 1)$$

ここから，変数 x, y は次の関係式を満たす:

$$x = \frac{x^2}{y^2 - x^2}; \qquad 4y^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1$$

つまり，これは**双曲線**の関数である。



それぞれのパラメータ t に関する微分は,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2+1}{2t} \quad (t \neq \pm 1)$$

となる．$x(t)$ および $y(t)$ での接線の方程式の次のように計算される:

$$\boxed{l : y = \frac{t^2+1}{2t}\left(x - \frac{1}{t^2-1}\right) + \frac{t}{t^2-1}}$$

（以　下　省　略）

3. 複素数 $z = x + \sqrt{-1}y$ を変数とする複素数値関数 $f(z)$ は x, y に関する複素数に値を持つ二変数関数のことである．以下，複素関数ということにする．複素関数 $f(z)$ が微分可能であるとは，複素数にたいして極限

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

が $f(z)$ の定義域全ての z で存在することとする．h を実数 s とすれば，$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$ であり，h を純虚数 $\sqrt{-1}t$ とすれば，$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial f}{\partial y}$ となり，

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3.16}$$

が成立する．$f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$ とすると，(1) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.17}$$

となる．これらの関係式をコーシーリーマン方程式という．

(1) $f(z)$ が微分可能であるとき, $f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$ の実物 $u(z)$ と $v(z)$ は方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

をみたすことを示せ.

(2) $u(x, y) = x^2 - y^2$ はある微分可能な複素関数の実部であることを示せ.

〔解説〕　(1) 複素関数 $f(z)$ は，次のように定義される:

$$f(z) = f(x + \sqrt{-1}y) = f(x, y)$$

よって，このときの微分 $f'(z)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{f\left(x + h_x + \sqrt{-1}(y + h_y)\right) - f(x + \sqrt{-1}y)}{h_x + \sqrt{-1}h_y} \\ &= \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} \frac{f(x + h_x, y + h_y) - f(x, y)}{h_x + \sqrt{-1}h_y}. \end{aligned}$$

ここで，複素数 h はある実数 h_x, h_y により $h = h_x + \sqrt{-1}h_y$ で表せる．また，関数 $F(h_x, h_y)$ を次のように定義すると，

$$F(h_x, h_y) = \frac{f(x + h_x, y + h_y) - f(x, y)}{h_x + \sqrt{-1}h_y}$$

微分 $f'(z)$ が存在することから，式 (3) の極限関係式も成り立つ.

$$f'(z) = \lim_{(h_x, h_y) \to (0,0)} F(h_x, h_y) = \lim_{h_x \to 0} F(h_x, 0) = \lim_{h_y \to 0} F(0, h_y) \tag{3.18}$$

よって，次の関係式でまとめる:

$$\begin{cases} f'(z) = \lim\limits_{h_x \to 0} F(h_x, 0) = \lim\limits_{h_x \to 0} \dfrac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ f'(z) = \lim\limits_{h_y \to 0} F(0, h_y) = \lim\limits_{h_y \to 0} \dfrac{f(x, y + h_y) - f(x, y)}{\sqrt{-1}h_y} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

つまり，すべての複素関数 $f(z)$ は次の微分関係式を満たす．

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

さらに，複数関数 $f(z)$ はある実関数 $u(z), v(z)$ に対して $f(z) = u(z) + \sqrt{-1}v(z)$ と表せるので，上式により，

$$f'(z) = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial v}{\partial x}}_{\partial f/\partial x} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{1}{\sqrt{-1}}\partial f/\partial y};$$

よって，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.19}$$

この方程式 (4)，問題の方程式 (2) で与えられたコーシーリーマン方程式である．また，ここの $u(z)$ を複素関数の実部，$v(z)$ を複素関数の虚部とよぶ．

以上によって，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

となり，$u(z)$ および $v(z)$ は C^2 級関数なので，$u_{xy} = u_{yx}$ および $v_{xy} = v_{yx}$ なので，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つ．同様に，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

ゆえに，

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

(2) 先ず，$u(z) = x^2 - y^2$ とおくと，コーシーリーマン方程式により，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となるので，この $u(z)$ がある複素関数の実部になることを分かる．$f(z) = z^2$ と定義すると，

$$f(z) = (x + \sqrt{-1}y)^2 = (x^2 - y^2) + \sqrt{-1}(2xy); \qquad u(z) = x^2 - y^2, \quad v(z) = 2xy.$$

を確かめる．

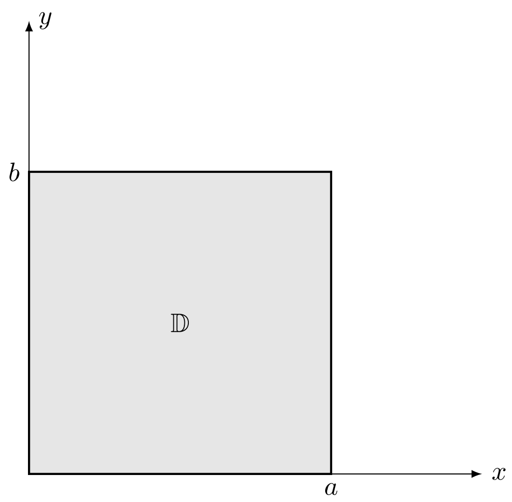
Q.E.D

3.3　6 週目

1. D を長方形の領域とし, $f(x,y)$ を D 上の C^2 級関数で $f_{xy}=0$ をみたすとする．このとき, C^2 級関数 $g(x), h(x)$ があって, $f(x,y)=g(x)+h(y)$ となることを示せ.

〔解説〕　関数 $f(x,y)$ が定義された領域を一般に,

$$\mathbb{D} = \begin{cases} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b \end{cases}$$



ならば，次の様な重積分を考えることができる: 領域 $\mathbb{D}$ の下で定義される．

$$I = \iint_{\mathbb{D}} f(x,y)\ dx\ dy;$$

長方形の領域の下で定義されたため，次のような関係式も成り立つ．(ここで，I は定数)

$$I = \int_0^b \left(\int_0^a f(x,y)\ dx \right)\ dy = \int_0^a \left(\int_0^b f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

ここから，任意の変数 $x', y' \in \mathbb{D}$ を取って，これによって定義されたある領域 $\mathbb{D}_{x'y'} = \{(x,y) | 0 \le x \le x', 0 \le y \le y'\}$ での重積分を考えると I は，二変数関数 $I(x',y')$ になる:

$$I(x',y') = \int_0^{y'} \left(\int_0^{x'} f(x,y)\ dx \right)\ dy = \int_0^{x'} \left(\int_0^{y'} f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

関数 $f(x,y)$ が，C^2 級関数として長方形の下で定義されたため，x と y は独立変数であり，$I(x',y')$ も C^2 級関数である．

$$\frac{dI}{dy'} = \frac{d}{dy'} \left[\int_0^{x'} \left(\int_0^{y'} f(x,y)\ dy \right)\ dx \right] = \int_0^{x'} f(x,y') - f(x,0)\ dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx'} \left[\frac{d}{dy'} I(x',y') \right] &= \frac{d}{dx'} \left(\int_0^{x'} f(x,y') - f(x,0)\ dx \right) \\ &= f(x',y') - f(x',0) - (0,y') + f(0,0). \end{aligned}$$

長方形の下で定義された関数なので，その逆も成り立つ:

$$\frac{d}{dx'}\left[\frac{d}{dy'}I(x',y')\right]=\frac{d}{dy'}\left[\frac{d}{dx'}I(x',y')\right]=f(x',y')-f(x',0)-f(0,y')+f(0,0)$$

一方，次の関係式も成り立つ:

$$\frac{d}{dy'}I(x',y')=\int_0^{y'}\left(\int_0^{x'}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\ dx\right)\ dy,$$

$$\frac{d}{dx'}\left[\frac{d}{dy'}I(x',y')\right]=\int_0^{y'}\left(\int_0^{x'}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\ dx\right)\ dy=0.$$

ここで，問題の条件によって，

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=0$$

であることを思い出せ.

以上によって，

$$\frac{d}{dx'}\left[\frac{d}{dy'}I(x',y')\right]=f(x',y')-f(x',0)-f(0,y')+f(0,0)=0;$$

$$\boxed{f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)-f(0,0)}$$

が成り立つ。$g(x)=f(x,0)-f(0,0)$ および $h(y)=f(0,y)$ とおく。

（注）　今の段階ではただの積分により計算しても構わない．これは，積分可能性を証明するためである．

2. $f(x,y)$, $x=\phi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ がいずれかも C^2 級関数,

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{\partial y}{\partial s}$$

をみたすならば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right)$$

が成り立つことを示せ.

〔解説〕　ヤコビ行列変換を利用する:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{cases}$$

行列で表すと,

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial y}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}\tag{3.20}$$

となる．問題で与えられた条件により，このときのヤコビ行列は,

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial y}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&-\dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}$$

として与えられる．よって，変数 s,t に関する 2 階偏微分を次のように表せる:

$$\begin{bmatrix}f_{ss}&f_{ts}\\f_{st}&f_{tt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&-\dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{sx}&f_{tx}\\f_{sy}&f_{ty}\end{bmatrix}$$

ここで，関数 $f(x,y)$ は C^2 級関数であるため，$f_{sx}=f_{xs},\cdots,f_{ty}=f_{yt}$ が成り立つ．以上により,

$$\begin{bmatrix}f_{sx}&f_{tx}\\f_{sy}&f_{ty}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{xs}&f_{xt}\\f_{ys}&f_{yt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2ex]-\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}$$

となることを分かる．よって,

$$\begin{bmatrix}f_{ss}&f_{ts}\\f_{st}&f_{tt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&-\dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2ex]-\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}$$

が成り立つ．これを，それぞれの f_{ss} および f_{tt} に対して定理すると，次の結果を取る:

$$f_{ss}=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 f_{xx}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}f_{xy}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}f_{yx}+\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 f_{yy}\tag{3.21}$$

$$f_{tt}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 f_{xx}+\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}f_{xy}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}f_{yx}+\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 f_{yy}\tag{3.22}$$

以上によって，問題の命題を示すことができる:

$$\boxed{f_{ss} + f_{tt} = (f_{xx} + f_{yy})\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right)}$$

Q.E.D

3. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, f(x,y) = f(r\sin\theta, r\cos\theta) = g(r,\theta)$ とすれば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

となることを示せ.

〔証明〕　ヤコビ行列を利用する:

$$x = r\cos\theta; \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,$$

$$y = r\sin\theta; \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

直交座標系 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換は上式のように与えられる．よって，このときの直交座標での偏微分 $\partial f/\partial x$ および $\partial f/\partial y$ は次のように書ける:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

行列で表すと,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

と表せる．上の変換関係式を利用すると，直交座標から極座標への変換でのヤコビ行列は次のように定まる:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

一方，ある行列 $\mathbb{A}$ に対して $ad - bc \neq 0$ を満たせば，逆行列を持ち,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \qquad \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

として与えられる.

よって，このヤコビ行列も逆行列 $\mathbb{P}^{-1}$ を持つ:

$$\mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

この逆変換によって,

$$\begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \end{bmatrix} = \mathbb{P} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \mathbb{P}^{-1} \times \begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \end{bmatrix}$$

のように計算できる．偏微分 f_x, f_y は次のように与えられる:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \end{bmatrix}$$

従って，二階偏微分 f_{xx} および f_{yy} はこの行列関係を拡張して問題〔3〕のような関係式を得る.

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xr} & f_{yr} \\ f_{x\theta} & f_{y\theta} \end{bmatrix}$$

ゆえに,

$$f_{xx} = \frac{1}{r}\left(r\cos\theta f_{xr} - \sin\theta f_{x\theta}\right), \tag{3.24}$$

$$f_{yy} = \frac{1}{r}\left(r\sin\theta f_{yr} + \cos\theta f_{y\theta}\right) \tag{3.25}$$

が成り立つ．ここで，次の関係式を満たす:

$$\begin{cases} f_{xr} = \dfrac{\partial f_x}{\partial r} = \cos\theta g_{rr} + \dfrac{\sin\theta}{r^2} g_\theta \\ f_{x\theta} = \dfrac{\partial f_x}{\partial \theta} = -\sin\theta g_r - \dfrac{\cos\theta}{r} g_\theta - \dfrac{\sin\theta}{r} g_{\theta\theta} \\ f_{yr} = \dfrac{\partial f_y}{\partial r} = \sin\theta g_{rr} - \dfrac{\cos\theta}{r^2} g_\theta \\ f_{y\theta} = \dfrac{\partial f_y}{\partial \theta} = \cos\theta g_r - \dfrac{\sin\theta}{r} g_\theta + \dfrac{\cos\theta}{r} g_{\theta\theta} \end{cases} \tag{3.26}$$

関係式 (11) を式 (9) および (10) に代入すると，f_{xx}, f_{yy} を $g(r,\theta)$ に関する偏微分で変換できる:

$$f_{xx} = \cos^2\theta g_{rr} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} g_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r} g_r + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} g_\theta + \frac{\sin^2\theta}{r^2} g_{\theta\theta},$$

および,

$$f_{yy} = \sin^2\theta g_{rr} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} g_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r} g_r - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} g_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r^2} g_{\theta\theta}$$

よって，この問題を示すことができる:

$$\boxed{f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}}$$

Q.E.D

3.4　8 週目

1. 空間上に n 個の点 $Q_1 = (a_1, b_1, c_1), \cdots, Q_n(a_n, b_n, c_n)$ が与えられている．空間上の動点 $P(x, y)$ に対し

$$\sum_{1 \le i \le n} \overline{PQ}^2$$

の最小値を求めよ．

〔解説〕　ヘッセ行列を利用する:

先ず，関数 $f(x, y, z)$ を次のように定義する．

$$f(x, y, z) = \sum_{1 \le i \le n} \overline{PQ}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2$$

次を満たすある点 P を考える:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(P) = \frac{\partial}{\partial y} f(P) = \frac{\partial}{\partial z} f(P) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} 2(x_p - a_i) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_p - b_i) = \sum_{i=1}^{n} 2(z_p - c_i) = 0$$

従って，この点 P は次のように表せる:

$$P(x_p, y_p, z_p); \quad x_p = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},\ y_p = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n},\ x_p = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}.$$

ならば，この関数 $f(x, y, z)$ のヘッセ行列 $\mathbb{H}$ は点 P において次のように与えられる．

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 \\ 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{bmatrix}$$

関数 $f(x, y, z)$ は 3 つの独立変数を持つため，このヘッセ行列 $\mathbb{H}$ は 3 次正方行列になる．この行列の固有値を考えるため，$\det(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{E})$ を計算する．ここで，λ が固有行列，$\mathbb{E}$ が 3 次単位行列になる:

$$\det(\mathbb{H} - \lambda\mathbb{E}) = \det \begin{bmatrix} 2n - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2n - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2n - \lambda \end{bmatrix} = (2n - \lambda)^3 = 0$$

従って，このヘッセ行列の固有値 λ は，

$$\lambda = 2n > 0 \quad (\text{三重解})$$

となる．つまり，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2n$ で，すべての固有値が正の実数になるのでテキスト p.161 の**定理４．１７**により，この点 P で関数 $f(x, y, z)$ は極小値を持つ．しかし，関数 $f(x, y, z)$ は実数全体の範囲で微分可能で，P 以外の極点を持たないため，この点 P で最小値を持つ:

$$f(x, y, z) \ge f(x_p, y_p, z_p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a_i \right)^2 + \left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} - b_i \right)^2 + \left(\frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} - c_i \right)^2.$$

Q.E.D

〔コメント〕　**変数が３つ以上ある**場合は，ヘッセ行列を利用して極点を判断するのが利便的である．

2. 鋭角三角形 $\triangle ABC$ のある平面上で, 三つの頂点 A, B, C からの距離の和が最小となる点を求めよ．また鋭角ではない三角形ではどうか?

〔解説〕　楕円は 2 つの焦点からの距離の和が一定な点の集合であることを利用する:

先ず，最小になる点 P_s は必ず三角形の内部 (境界を含む) に存在することを証明する．以下のような一般的な三角形およびある点 P_0 を取り，

I.　点 P_s が三角形の外部のある場合 ($P_s = P_0$)

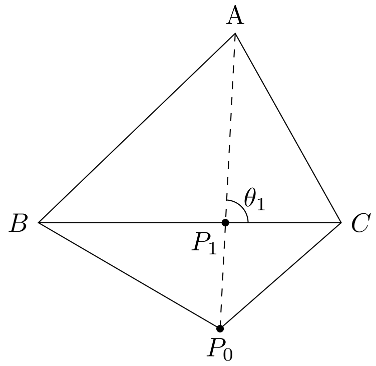


図 3.1　Case I: 点 P_s が三角形の外部にある時 (辺側)

この場合は，P_0 の場合と P_1 の場合を比べると，その長さ差:

$$\begin{aligned} f(P_0 - P_1) &= \overline{AP_0} + \overline{BP_0} + \overline{BP_0} - (\overline{AP_1} + \overline{BP_1} + \overline{BP_1}) \\ &= \overline{P_0P_1} + (\overline{BP_0} - \overline{BP_1}) + (\overline{CP_0} - \overline{CP_1}) \\ &= \overline{P_0P_1} + (\overline{BP_0} + \overline{CP_0}) - \overline{BC} > \overline{P_0P_1}. \end{aligned}$$

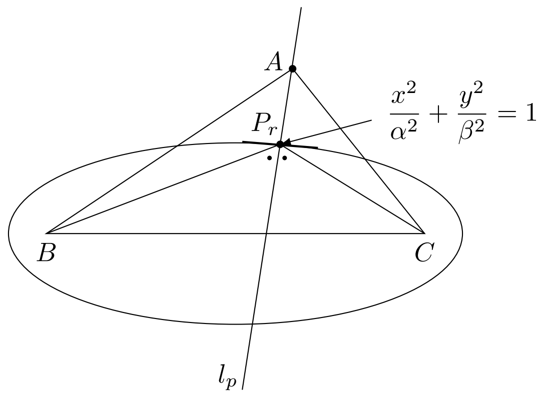
よって，ある点 P から各点 A, B, C への距離の和を $l(P)$ 定義すると，

$$\therefore l(P_0) > l(P_1); \qquad P_s \neq P_0$$

となり, 求める点 P_0 は P_s としては合っていない．ここで, 三角形 ΔP_0CB に対しての三角不等式 $\overline{BP_0}+\overline{CP_0} > \overline{BC}$ を利用した．($\angle B < \theta_1 < \pi - \angle C$)

(次のページへ)

II.　点 P_s が三角形の内部にある場合 $(P_s = P_r)$



求める点 P_s が三角形 $\triangle ABC$ の内部 (境界を含まない) にある場合，この点 P_s は三角形の二つの頂点 B と C を焦点とするある適当な楕円上の点のうち，点 A に最も近い点 P_r として決められる．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}; \qquad l_p:\ y = \frac{\alpha^2 y_r}{\beta^2 x_r}(x - x_r) + y_r \tag{3.27}$$

よって，点 Q は,

$$0 = \frac{\alpha^2 y_r}{\beta^2 x_r}(x_0 - x_r) + y_r \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) x_r = \frac{p^2}{\alpha^2} x_r.$$

として定まる．線分 $\overline{BQ}$ および $\overline{CQ}$ の長さは,

$$\overline{BQ} = \frac{p^2}{\alpha^2} x_r + p, \quad \overline{CQ} = p - \frac{p^2}{\alpha^2} x_r$$

また,

$$\overline{BP_r} = \sqrt{(x_r + p)^2 + y_r^2} = \sqrt{(x_r + p)^2 + \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x_r^2} = \left| \frac{p}{\alpha} x_r + \alpha \right|$$

$$\overline{CP_r} = \sqrt{(x_r - p)^2 + y_r^2} = \sqrt{(x_r - p)^2 + \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x_r^2} = \left| \frac{p}{\alpha} x_r - \alpha \right|$$

となる．以上の結果により，$\angle BP_rQ = \angle CP_rQ$ が成り立つことを分かる．

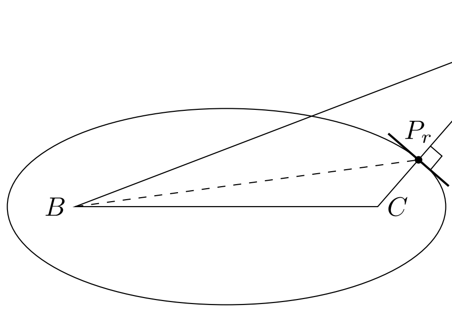
$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP_r}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP_r}} = \frac{p}{\alpha}.$$

ここから，$\angle AP_rB = \angle AP_rC$ を分かる．しかし，この点 P_r は他の頂点 B, C に対しても同様に定まる．よって，

$$\therefore \angle AP_rB = \angle AP_rC = \angle BP_rC = \frac{2\pi}{3}. \tag{3.28}$$

求める点 P_s(三角形内部) は式上式のように定まる．

IIIa.　点 P_s が三角形の境界にある場合 $(P_s = P_r)$



この場合からは，図のように楕円を考える．点 B と C を焦点とするある楕円を任意に取って，その上のある点 P_t は一定である:

$$\overline{BP_t} + \overline{CP_t} = (\text{一定})$$

ここで，点 P_s を作る適当な，長軸の長さを α，短軸の長さを β の楕円を選び，線分 $\overline{BC}$ の中点を原点 O としてとると，

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{3.29}$$

と書ける．ならば，座標 $P_r(x_r, y_r)$ は次のような条件を満たす:

$$\frac{x_r^2}{\alpha^2} + \frac{y_r^2}{\beta^2} = 1, \qquad \left(-\frac{\beta^2 x_r}{\alpha^2 y_r}\right) \times \frac{y_r}{x_r - p} = -1$$

ここで，座標系を取る時，$B(-p, 0)$ および $C(p, 0)$ とした．

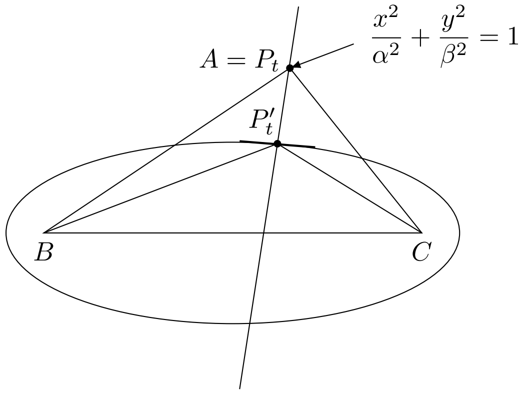
$$(\alpha^2 - \beta^2)x_r = p^2 x_r = p\alpha^2; \qquad \therefore x_r = \frac{\alpha^2}{p},$$

$$y_r^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{x_r^2}{\alpha^2}\right) = -\frac{\beta^4}{p^2} < 0.$$

よって，このような状況はできない．境界に求める点 P_s が存在する場合は，点 A, B, C のうち，いずれかのもののみである．

(次のページへ)

IIIb.　点 P_s が三角形の境界にある場合 $(P_s = P_t)$



この場合は，三角形のある頂点が求める点 P_s になる場合を考える．ならば，この場合は点 P_s を作る P_t に対して $\overline{BP_t} + \overline{CP_t} = 2\alpha$ を与える楕円上に $P_t = A$ が存在するという意味である．

$$C_1 :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a < \alpha,\ b < \beta)$$

次の命題が正しいか判別すればいい:

なす角が 120 度を超える場合，フェルマー点[*1]は三角形のある頂点になる．

背理法を使って，この命題を証明できる．

(証明)　なす角が $\angle BAC \geq \frac{2\pi}{3}$ の三角形に対して点 P_s が三角形の内部に存在するとする．つまり，図から $\angle BP_tC \geq \frac{2\pi}{3}$ とし三角形内部に $P_s = P'_t$ となる，ある点 P'_t が存在するとする．(境界は含まない)

$$\angle AP'_tB = \angle BP'_tC = \angle AP'_tC = \frac{2\pi}{3}. \tag{3.30}$$

ならば，点 A に対して，ある適当な $\overline{BP_t} + \overline{CP_t} = 2\alpha$ を満たす楕円が存在し，点 A と最も近い楕円上の点として P'_t が定まる．他の点 B, C に対しても同様に定まる．よって，式 (2) の関係が成り立つ．

以上により，四角形 $\square BACP'_t$ に対して，

$$\begin{aligned}\Theta(P'_t) &= \angle ABP'_t + \angle BP'_tC + \angle P'_tCA + \angle BAC \\ &= \frac{4\pi}{3} + \angle BAC + \angle ABP'_t + \angle P'_tCA \\ &\geq 2\pi + \angle ABP'_t + \angle P'_tCA > 2\pi.\end{aligned}$$

が成り立つ．しかし，四角形の成立条件から，

$$\Theta(P'_t) = 2\pi > 2\pi \quad (\text{矛盾})$$

以上のことから，背理法によりなす角が 120 度を超える三角形の P_s は三角形の内部には存在しない．

ならば，それぞれの頂点のうち，P_s は sin 法則により定まる．

$$l_0 = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta_A} = \frac{\overline{AC}}{\sin\theta_B} = \frac{\overline{AB}}{\sin\theta_C}$$

ここで，$\theta_C \leq \theta_B \leq \theta_A$ とおいても一般性を失わない．ならば，それぞれの点 A, B, C に対しての三角形の各頂点までの距離の和は，

$$S(A) = \overline{AB} + \overline{AC} = l - l_0 \sin\theta_A,$$

[*1] ‘Fermat point’. 問題で求める各頂点 A, B, C までの距離の和が最小になる点 P_s の総称.

$$S(B) = \overline{AB} + \overline{BC} = l - l_0 \sin\theta_B,$$

$$S(C) = \overline{AC} + \overline{BC} = l - l_0 \sin\theta_C.$$

以上により，三角形のあるなす角が 120 度を超える場合の P_s は,

$$\therefore S(A) \le S(B) \le S(C)$$

が成り立つ．つまり，このときの P_s は $P_s = A$[*2]を満たす．

Q.E.D.

[*2] 一番大きい角を持つ頂点.

3. 次の関数の極値とそれを与える点を求めよ．さらに最大値, 最小値があれば求めよ．

(1)
$$f(x,y,z)=2x^2+5y^2+2z^2-2yz+4zx-2xy$$

〔解説〕　行列を利用する:

次を満たすある点 P を考える．

$$\frac{\partial}{\partial x}f(P)=\frac{\partial}{\partial y}f(P)=\frac{\partial}{\partial z}f(P)=0; \qquad 4x+4z-2y=10y-2z-2x=4z-2y+4x=0 \tag{3.31}$$

よって，この点 P の座標は，次の計算により定まる．[*3]

$$\det\begin{bmatrix}4&-2&4\\-2&10&-2\\4&-2&4\end{bmatrix}=(-8)\times\det\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&-5&1\\2&-1&2\end{bmatrix}=(-8)\times\det\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&-5&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(-8)\times\sum_{\sigma\in S_3}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}=0. \quad (\because a_{3\sigma(3)}=0)$$

この連立方程式 (3.31) の係数行列の rank ≤ 2 となり，連立方程式の解は一意で定まらない:

$$P(x,y,z); \quad x=-z=t\ (t\in\mathbb{R}), \qquad y=0.$$

さらに，この関数 $f(x,y,z)$ の点 P においてのヘッセ行列は,

$$\mathbb{H}=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}&f_{xz}\\f_{yx}&f_{yy}&f_{yz}\\f_{zx}&f_{zy}&f_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&4\\-2&10&-2\\4&-2&4\end{bmatrix}$$

となる．関数 $f(x,y,z)$ の極点を判別するため $\det(\mathbb{H}-\lambda\mathbb{E})=0$ を計算すると,

$$\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-2&4\\-2&10-\lambda&-2\\4&-2&4-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-18\lambda^2+72\lambda=0; \qquad \lambda_1=0,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=12.$$

となる．固有値 $\lambda_1=0$ を持っているため，点 $P(t,0,-t)$ の近傍での関数値を調べる．ある任意の実数 $\epsilon\in\mathbb{R}$ を取ると,

$$f(t,\epsilon,-t)=5\epsilon^2>0=f(t,0,-t), \quad f(t+\epsilon,0,-t)=2\epsilon^2>0=f(t,0,-t)$$

となるので，関数 $f(x,y,z)$ は点 $P(t,0,-t)$ で極小であり，最小である．ここで，$f(x,y,z)=f(z,y,x)$ の対称性を利用した．また，テキスト p.161 の**定理４．１７**およびヘッセ行列の固有値により，最大値は存在しない．

Q.E.D

[*3] この行列式の計算に使われた行列は，連立方程式 (3.31) の係数行列である．もし，この係数行列の rank $=3$ ならば，この連立方程式の解は一意に定まる．

(2)
$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2} \tag{3.32}$$

〔解説〕　極座標変換を利用する:

変数 x, y を $x = r\cos\theta$ および $y = r\sin\theta$ により変数変換すると，与えられた関数 $f(x,y)$ は新たな変数 r, θ に関する関数 $g(r,\theta)$ で変換できる．

$$f(x,y) = g(r,\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta\ e^{-r^2} = \frac{r^2}{2}\sin 2\theta\ e^{-r^2} \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここで，次を満たすある点 P を考える．

$$\frac{\partial}{\partial r}g(P) = \frac{\partial}{\partial\theta}g(P) = 0; \qquad \underbrace{(r - r^3)\sin 2\theta\ e^{-r^2}}_{r\ \text{に関する式}} = \underbrace{r^2\cos 2\theta\ e^{-r^2}}_{\theta\text{に関する式}} = 0$$

可能な P は,

$$P_1(0,\theta), \quad P_2\left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_3\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$$

である．直交座標 (x,y) を極座標 (r,θ) で置換する瞬間 $r > 0$ となることに注意せよ．

続いて，これら点 P たちにおいての極点を調べるため，g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ を計算する:

$$g_{rr}(P_i) = (1 - 5r^2 + 2r^4)\sin 2\theta\ e^{-r^2} = \begin{cases} \sin 2\theta & (i=1) \\ -2e^{-1} & (i=2) \\ 2e^{-1} & (i=3) \end{cases},$$

$$g_{r\theta}(P_i) = 2(r - r^3)\cos 2\theta\ e^{-r^2} = 0 \qquad (i = 1,2,3),$$

$$g_{\theta\theta}(P_i) = -2r^2\sin 2\theta\ e^{-r^2} = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ -2e^{-1} & (i=2) \\ 2e^{-1} & (i=3) \end{cases}.$$

以上の計算の結果の下で，各点 P_1, P_2, P_3 での極点を調べる．

(点 P_1)
$$g_{rr}(P_1) = \sin\theta, \qquad D(P_1) = g_{r\theta}(P_1)^2 - g_{rr}(P)g_{\theta\theta}(P) = 0.$$

判別式 $D(P_1) = 0$ なので，$r = 0$ の原点の近傍を考えるため，ある任意の実数 ϵ をとると，

$$g(\epsilon,\theta_1) = \frac{\epsilon^2}{2}\sin\theta_1\ e^{-r^2} > 0 = g(0,\theta_1)\ \ (0 \leq \theta_1 \leq \pi), \qquad g(\epsilon,\theta_2) = \frac{\epsilon^2}{2}\sin\theta_2\ e^{-r^2} < 0 = g(0,\theta_2)\ \ (\pi \leq \theta_1 \leq 2\pi)$$

となるので，点 P_1 で関数 $g(r,\theta)$ は極点を持たない．同時に $f(x,y)$ も極点を持たない．

(点 P_2)
$$g_{rr}(P_1) = -2e^{-1} < 0, \qquad D(P_1) = g_{r\theta}(P_1)^2 - g_{rr}(P)g_{\theta\theta}(P) = -4e^{-2} < 0.$$

判別式 $D(P_2) < 0$ および $g_{rr}(P_2) < 0$ なので，この関数 $g(r,\theta)$ は点 P_2 で極大値を持つ．同時に $f(x,y)$ も極大値を持つ:

$$g(r,\theta) \leq g(P_2) = \frac{1}{2}e^{-1} \qquad \text{あるいは,} \qquad f(x,y) \leq f(P_2) = \frac{1}{2}e^{-1}$$

(点 P_3)

$$g_{rr}(P_1) = 2e^{-1} > 0, \qquad D(P_1) = g_{r\theta}(P_1)^2 - g_{rr}(P)g_{\theta\theta}(P) = -4e^{-2} < 0.$$

判別式 $D(P_2) < 0$ および $g_{rr}(P_2) > 0$ なので，この関数 $g(r,\theta)$ は点 P_2 で極大値を持つ．同時に $f(x,y)$ も極大値を持つ:

$$g(r,\theta) \le g(P_2) = -\frac{1}{2}e^{-1} \qquad \text{あるいは,} \qquad f(x,y) \le f(P_2) = -\frac{1}{2}e^{-1}$$

さらに，$r \to \pm\infty$ の極限を考える:

$$\lim_{r\to\pm\infty} g(r,\theta) = \lim_{r\to\pm\infty} \frac{r^2}{2}\sin 2\theta\ e^{-r^2} = 0. \qquad (\text{for any } \theta)$$

なので，極小値と極大値がこの関数の最小値と最大値になる．よって，最小点 P_m および最大点 P_M は次のように定まる:

$$P_m : x_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad P_M : x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$-\frac{1}{2}e^{-1} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le f(x,y) \le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

Q.E.D

(3)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

〔正解〕　$x = y = 0$ のとき，最小値 $f(0, 0) = -1$ を持つ．最大値は存在しない．

〔解説〕　直交座標 (x, y) に対して，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ への極座標変換を行う．(略)

(以　下　余　白)

4. 閉領域上 $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ 上の関数

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \tag{3.33}$$

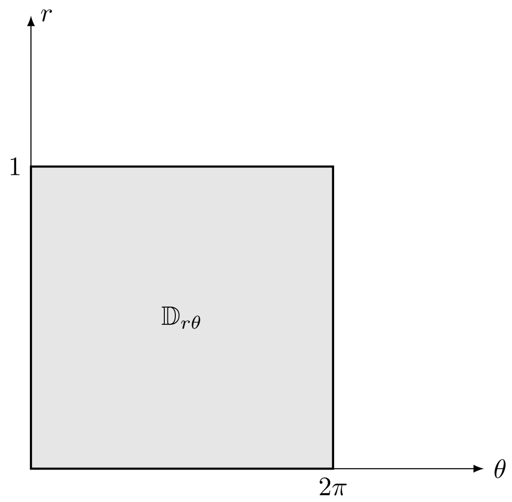
の最大値と最小値を求めよ．

〔解説〕　置換 $x = r^2\cos^2\theta,\ y = r^2\sin^2\theta$ を利用する:

2 つの独立変数 x と y の下で定義された関数 $f(x,y)$ は，r $(0 \leq r \leq 1)$ および θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を用いて，

$$x = r^2\cos^2\theta \geq 0, \quad y = r^2\sin^2\theta, \quad x + y = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \leq 1$$

と表せる．ならば，問題で与えられた xy 平面での三角形の領域 $\mathbb{D}_{xy} = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ は，下の図のように $r\theta$ 平面での長方形の領域 $\mathbb{D}_{r\theta}$ で変わる．



さらに，関数 $f(x,y)$ も，新たな変数 r,θ を用いて $f(x,y) = g(r,\theta)$[*4]に変換できる．

$$f(x,y) = g(r,\theta) = 3r^4\cos^4\theta + 2r^4\sin^4\theta + 2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta - 2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta + 1$$

より簡単に，

$$g(r,\theta) = 3r^4\cos^4\theta + 2r^4\sin^2\theta - 2r^2 + 1$$

ならば，この $g(r,\theta)$ と $f(x,y)$ はおなじである．$g(r,\theta)$ が極小値をもつとき，$f(x,y)$ も極小値を持ち，その値も同じである．次を満たす点 P を考える:

$$\frac{\partial}{\partial r}g(P) = \frac{\partial}{\partial\theta}g(P) = 0; \qquad 12r^3\cos^4\theta + 8r^3\sin^2\theta - 4r = -12r^4\cos^3\theta\sin\theta + 4r^4\sin\theta\cos\theta = 0$$

従って，点 P は次のように表せる．（境界を除く．）

$$P(r,\theta); \qquad r_p^2 = \frac{3}{5}, \quad \cos^2\theta_p = \frac{1}{3} \quad (\text{for } r \neq 0)$$

この関数 $g(r,\theta)$ が点 P で極点を持つか決定するため，点 P においての g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ を計算すると，

$$g_{rr}(P) = 36r^2\cos^4\theta + 24r^2\sin^2\theta - 4 = 8 > 0,$$

$$g_{r\theta}(P) = -48r^3\cos^3\theta\sin\theta + 16r^3\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$g_{\theta\theta}(P) = 36r^4\cos^2\theta\sin^2\theta - 12r^4\cos^4\theta + 4r^4\cos^2\theta - 4r^4\sin^2\theta = \frac{48}{25} > 0.$$

[*4] 表記上に注意が必要である．$f(x,y) = ax + by$ のとき，$f(r,\theta) = ar + b\theta$ を意味する．

となる．よって，判別式:

$$g_{rr}(P) > 0, \qquad D = (g_{r\theta})^2 - g_{rr}g_{\theta\theta} < 0$$

となるので，この関数 $g(r, \theta)$ は点 P で極小値を持つ．同時にその母関数 $f(x, y)$ も極小になる．

$$r = r_p = \sqrt{\frac{3}{5}},\ \ \cos\theta_p = \sqrt{\frac{1}{3}}\ のとき, \qquad g(r_p, \theta_p) = \frac{2}{5}$$

あるいは,

$$x = x_p = \frac{1}{5},\ \ y = y_p = \frac{2}{5}\ のとき, \qquad f(x_p, y_p) = \frac{2}{5}$$

となる．また，この領域 $\mathbb{D}_{r\theta}$ での最小・最大値を決定するため，次のように境界での値をを求めると,

$$g(0, 0) = 1, \quad g(1, 0) = 2, \quad (0, 2\pi) = 1, g(1, 2\pi) = 2$$

および,

$$g(0, \theta) = 1, \quad g(1, \theta) = 3\cos^4\theta + 2\sin^2\theta - 1 \le 2, \quad g(r, 0) = g(r, 2\pi) = 3r^4 - 2r^2 + 1 \le 2.$$

よって，$x = x_p,\ y = y_p$ のとき最小値を持ち，$x = 1,\ y = 0$ のとき最大値を持つ:

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}, \qquad f_{\max} = f\,(1, 0) = 2.$$

Q.E.D

5. 半径 1 の円に内接する三角形のうち, 面積最大のものを求めよ.

〔正解〕　半径 1 の円に内接する正三角形

〔解説〕　略

6. 半径 1 の円に内接する凸 n 角形のうち面積最大となるものを求めよ.

〔正解〕　半径 1 の円に内接する正 n 角形

〔解説〕　略

7. 表面積一定の直方体中体積最大のものを求めよ.

〔正解〕　正方体

〔解説〕　略

(以　下　余　白)

第 4 章

陰関数定理と写像

4.1　9 週目

1. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ lx+my+nz=p$ $(a>0,\ l,m,n$ は定数$)$ のとき, $ny\neq mz$ をみたす点 (x,y,z) において, $dy/dx, dz/dx$ を求めよ. $ny=mz$ をみたす点 (x,y,z) においてはどうか?

〔解説〕　ヤコビ行列および全微分を利用する:

関数 f,g を $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$, $g(x,y,z)=lx+my+nz-p=0$ で定義する.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=-\frac{\partial f}{\partial x}dx, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz=0; \qquad \frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz=-\frac{\partial g}{\partial x}dx. \tag{4.2}$$

この関数 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ を全微分すると上式のような関係式を得られる.

これを行列により表すと,

$$-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}dx\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}dx\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix}}_{\mathbb{J}_{f,g}}\begin{bmatrix}dy\\[2ex] dz\end{bmatrix} \tag{4.3}$$

となる. ならば, この関数 f,g の変数 y,z に対するヤコビ行列は次のように計算される.

$$\mathbb{J}_{f,g}=\begin{bmatrix}2y & 2z\\ m & n\end{bmatrix}$$

ここで, $ny\neq mz$ と $ny=mz$ の 2 つの場合で分けて考える:

I. $ny\neq mz$
この場合は, ヤコビ行 $\mathbb{J}_{f,g}$ の逆行列が存在する.

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P)=\det\begin{bmatrix}2y & 2z\\ m & n\end{bmatrix}=2(ny-mz)\neq 0; \qquad \mathbb{J}_{f,g}^{-1}=\frac{1}{2(ny-mz)}\begin{bmatrix}n & -2z\\ -m & 2y\end{bmatrix}$$

よって,

$$\begin{bmatrix}dy\\ dz\end{bmatrix}=-\frac{1}{2(ny-mz)}\begin{bmatrix}n & -2z\\ -m & 2y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x dx\\ g_x dx\end{bmatrix}=-\frac{dx}{2(ny-mz)}\begin{bmatrix}n & -2z\\ -m & 2y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x\\ l\end{bmatrix}.$$

ここから, **陰関数定理（一般型）**により $\partial y/\partial x$, $\partial z/\partial x$ を得られる:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{nx-lz}{ny-mz}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-mx+ly}{ny-mz}.$$

式 (4.1) および (4.2) により，y と z はある x のみに関する関数 $y=\phi_1(x)$, $z=\phi_2(x)$ で表すことができる:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx}=\frac{nx-lz}{ny-mz},\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dx}=\frac{-mx+ly}{ny-mz}.}$$

II. $ny=mz$

この場合は，ヤコビ行列 $\mathbb{J}_{f,g}$ の逆行列が存在しない:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P')=\det\begin{bmatrix}2y' & 2z'\\ m & n\end{bmatrix}=2(ny'-mz')=0.$$

なので，この場合は**陰関数定理（一般型）**が成り立たない.

そのため，直接計算してみると，式 (4.3) により，

$$\begin{bmatrix}f_x\\ g_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_y & f_z\\ g_y & g_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_x\\ z_x\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}f_x\\ g_x\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2y' & 2z'\\ m & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_x\\ z_x\end{bmatrix}$$

あるいは,

$$\begin{cases}f_x+2y'y_x+2z'z_x=0\\[2ex] g_x+my_x+nz_x=0\end{cases}$$

上式の方程式連立方程式では，$\partial y/\partial z$ および $\partial z/\partial x$ が一意に定まらない. [*1]:

$$\left(m\frac{\partial f}{\partial x}-2y'\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\underbrace{(2mz'-2ny')}_{0}\frac{\partial z}{\partial x}=0;\qquad \therefore mx'=ly'.$$

よって，この場合の点 (x',y',z') は $ny'=mz'$，$mx'=ly'$ を満たす.

以上により，$y'=\phi_1(x')$，$z'=\phi_2(x')$ で表すことができて，次のようになる:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{m}{l},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{n}{l}.}$$

Q.E.D

[*1] 行列の rank $=1$ からである.

2. $x = u^2 - v^2$, $y = uv$, $z = u^2 + v^2$(ただし，$(u,v) \neq (0,0)$) のとき，$\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ を求めよ．

〔解説〕　ヤコビ行列を利用する．

ある写像 $\mathbb{U} : (u,v) \mapsto (u^2 - v^2, uv)$ を考える．ならば，ある点 $P(u,v) \neq (0,0)$ に対してのヤコビ行列 $d\mathbb{U}$ およびそのヤコビアン $J_{\mathbb{U}}(P)$ は,

$$d\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix}, \qquad J_{\mathbb{U}}(P) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P) = 2(u^2+v^2) \neq 0$$

となるので，**逆写像定理**によって，$V = (u,v)$ および $W = (u^2 - v^2, uv)$ それぞれの部分空間 V_m, W_m が存在し，この写像 $\mathbb{U}$ に対して $\mathbb{U}(V_m) = W_m$ が 1 対 1 写像になる．よって，その逆変換

$$\mathbb{U}^{-1} : W_m \mapsto V_m$$

が存在し $\mathbb{U}^{-1}(W_m) = V_m$ となる．その逆写像により，それぞれ $u = \phi_1(x,y)$, $v = \phi_2(x,y)$ が存在する:

$$z = u^2 + v^2 = \phi_1(x,y)^2 + \phi_2(x,y)^2;$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}}_{(d\mathbb{U})^t} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}}_{(d\mathbb{U}^{-1})^t} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}. \qquad (\text{連鎖律})$$

ここの $d(\mathbb{U}^{-1})$ は,

$$d(\mathbb{U}^{-1}) = (d\mathbb{U})^{-1} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{bmatrix} u & 2v \\ -v & 2u \end{bmatrix}$$

および,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -2v$$

となる．以上により，$\partial z/\partial x$ および $\partial z/\partial y$ は次のように定まる．

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{bmatrix} u & -v \\ 2v & 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u \\ 2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \\ \dfrac{4uv}{u^2 + v^2} \end{bmatrix}.$$

あるいは,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4uv}{u^2 + v^2}}$$

Q.E.D

〔追加コメント〕 写像 $\mathbb{U} : (u, v) \mapsto (u^2 - v^2, uv)$ の逆写像

問題で定義されたある写像 $\mathbb{U}$ は，逆写像が存在する．

$$V_m = \{(u, v)|v > 0\}, \qquad W_m = \{(u, v)|v = 0;\ u < 0,\ v \neq 0; u \in \mathbb{R}\}$$

ここで，写像 $\mathbb{U}$ が 1 対 1 写像なるための部分空間 V_m および W_m は上式のように定まる．その部分空間上の逆写像 $\mathbb{U}^{-1}(W_m) = V_m$ を調べるため，実関数 u と v に対しての複素数 $\alpha = u + iv$ に対して次の操作を行う[*2]:

$$\alpha^2 = u^2 - v^2 + i(2uv), \qquad \alpha^{*2} = u^2 - v^2 - i(2uv), \qquad \alpha\alpha^* = u^2 + v^2$$

ならば,

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 = \dfrac{\alpha^2 + \alpha^{*2}}{2} \\ y = uv = \dfrac{\alpha^2 - \alpha^{*2}}{4i} \end{cases} \qquad \text{あるいは,} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = x + 2yi \\ \alpha^{*2} = x - 2yi \end{cases}$$

となる．さらに，$\alpha + \alpha^*$ が実数，$\alpha - \alpha^*$ が純虚数であることを利用し,

$$u^2 = \left(\frac{\alpha + \alpha^*}{2}\right)^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2}, \qquad v^2 = \left(\frac{\alpha - \alpha^*}{2i}\right)^2 = \frac{\sqrt{x^2 + 4y^2} - x}{2}$$

となる．よって，1 対 1 写像が定義される部分空間 V_m および W_m に対して，その逆写像 $\mathbb{U}^{-1}(W_m) = V_m$ は具体的に次のように定まる:

$$\mathbb{U}^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 4y^2} - x}{2}}\right), \qquad y = 0 \text{ のとき，} x < 0.$$

(以　下　省　略)

[*2] 記号 α^* は複素数 α の複素数共役を意味する．例えば，$\alpha = u + iv$ ならば，$\alpha^* = u - iv$ となる．

4.2　10 週目

1. 閉領域 $\mathbb{D} = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を次により与える.

$$\mathbb{F}(x, y) = (x + y, xy)$$

(i) $\mathbb{F}$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびヤコビアン $J_{\mathbb{F}}$ を求め, $J_{\mathbb{F}} = 0$ となる点を求めよ.

(ii) $J_{\mathbb{F}}(P) \neq 0$ となる点 P のまわりにおいて局所的に定義される $\mathbb{F}$ の逆写像を具体的に構成せよ.

(iii) $\mathbb{F}$ の像 $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ を図示し, $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ の面積を求めよ.

〔解説〕　ヤコビ行列を利用して，逆写像の存在性を確かめる.

(i) 問題で定義された写像 $\mathbb{F} : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびそのヤコビアン $J_{\mathbb{F}}$ は,

$$d\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}; \qquad J_{\mathbb{F}} = x - y$$

となる．また，このヤコビアン $J_{\mathbb{F}}(P) = 0$ になる点 P は,

$$J_{\mathbb{F}} = x - y = 0; \qquad P = \{(x, y)|x = y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

として定まる.

(ii) ある点 P^c を $P^c = \{(x, y)|x \neq y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ と定まると，$J_{\mathbb{F}}(P^c) \neq 0$ となる.

ならば，**逆写像定理**によって，$V = (x, y)$ および $W(x + y, xy)$ のそれぞれの部分空間 V_m, W_m が存在し，この写像 $\mathbb{F}$ に対して $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ が 1 対 1 写像になる.

特に，次のように V_{m1} かつ W_{m1} または，V_{m2} かつ W_{m2} をとると，この写像 $\mathbb{F}$ は 1 対 1 写像になって，逆写像 $\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ が存在する:[*3]

$$V_{m1} = \{(x, y)|y > x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}; \qquad W_{m1}$$

および,

$$V_{m2} = \{(x, y)|y < x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}; \qquad W_{m2}$$

よって，次のように分けて考える:

I. $\mathbb{F} : (x, y) \mapsto (X, Y), V_m = V_{m1}, W_m = W_{m1}$
この場合，次のような 2 次方程式を考える.

$$t^2 - Xx + Y = 0, \qquad X = x + y,\ \ Y = xy$$

ならば，x および y はこの 2 次方程式の解として与えられる．$(0 \leq X \leq 2,\ 0 \leq Y \leq 1)$

$$x = \frac{X - \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}, \qquad y = \frac{X + \sqrt{X^2 - 4Y}}{2} \quad (\because x < y)$$

変数 x, y は実数なので, 判別式 $D(X, Y) = X^2 - 4Y \geq 0$ を満たし, また, それぞれの定義域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ により,

$$0 \leq \underbrace{\frac{X \pm \sqrt{X^2 - 4Y}}{2}}_{x,y} \leq 1; \qquad Y \geq X - 1 \tag{4.4}$$

[*3] この V_{m1} と V_{m2} 以外の部分空間 V_m をとると，$(x_1, y_1) \in V_m, (y_1, x_1) \in V_m$ が存在し，$\mathbb{F}(x_1, y_1) = \mathbb{F}(y_1, x_1)$ となり，1 対 1 写像にはならない.

を満たす．逆写像 $\mathbb{F}^{-1}$ は次のように定まる:

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1} : W_{m1} \mapsto V_{m1}; \qquad \mathbb{F}^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2}, \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \right)}$$

ここで,

$$W_{m1} = \left\{ (x, y) \middle| x - 1 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

II. $\mathbb{F} : (x, y) \mapsto (X, Y)$, $V_m = V_{m2}, W_m = W_{m2}$

同様に,

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1} : W_{m2} \mapsto V_{m2}; \qquad \mathbb{F}^{-1}(x, y) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}, \frac{x - \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \right)}$$

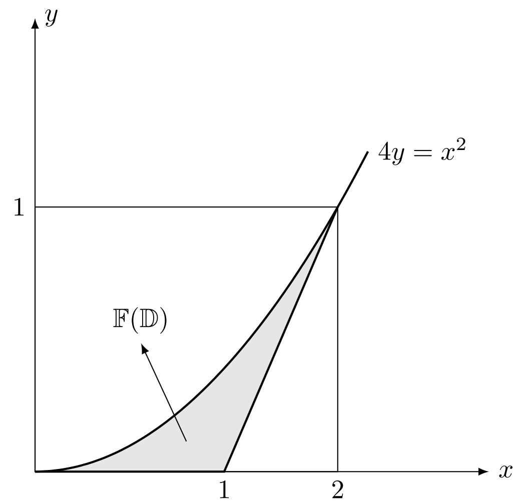
ここで,

$$W_{m2} = \left\{ (x, y) \middle| x - 1 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

(iii) 問題 (ii) の結果により，逆写像が存在する $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ に対して，領域 $\mathbb{D}$ の下で定義される $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ は,

$$\mathbb{F}(\mathbb{D}) = W_{m1} = W_{m2} = \left\{ (x, y) \middle| x - 1 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

として現れる．



よって，この領域 $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ の面積は次のように計算される:

$$\boxed{S(W_m) = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2\ dx - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$$

Q.E.D

2. 閉領域 $\mathbb{D} = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像を次により与える.

$$\mathbb{F}(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$$

(i) $\mathbb{F}$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびヤコビアン $J_{\mathbb{F}}$ を求め, $J_{\mathbb{F}} = 0$ となる点を求めよ.

(ii) $J_{\mathbb{F}}(P) \neq 0$ となる点 P のまわりにおいて局所的に定義される $\mathbb{F}$ の逆写像を具体的に構成せよ.

(iii) $\mathbb{F}$ の像 $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ を図示し, $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ の面積を求めよ.

〔解説〕　ヤコビ行列を利用して，逆写像の存在性を確かめる.

(i) 問題で定義された写像 $\mathbb{F} : (x, y) \mapsto (x + y, x^2 + y^2)$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびそのヤコビアン $J_{\mathbb{F}}$ は,

$$d\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}; \qquad J_{\mathbb{F}} = 2(y - x)$$

となる．また，このヤコビアン $J_{\mathbb{F}}(P) = 0$ になる点 P は,

$$J_{\mathbb{F}} = 2(y - x) = 0; \qquad P = \{(x, y)|x = y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

として定まる.

ある点 P^c を $P^c = \{(x, y)|x \neq y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ と定まると，$J_{\mathbb{F}}(P^c) \neq 0$ となる.

ならば，**逆写像定理**によって，$V = (x, y)$ および $W(x + y, xy)$ のそれぞれの部分空間 V_m, W_m が存在し，この写像 $\mathbb{F}$ に対して $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ が 1 対 1 写像になる.

特に，次のように V_{m1} かつ W_{m1} または，V_{m2} かつ W_{m2} をとると，この写像 $\mathbb{F}$ は 1 対 1 写像になって，逆写像 $\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ が存在する:[*4]

$$V_{m1} = \{(x, y)|y > x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}; \qquad W_{m1}$$

および,

$$V_{m2} = \{(x, y)|y < x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}; \qquad W_{m2}$$

よって，次のように分けて考える:

I. $\mathbb{F} : (x, y) \mapsto (X, Y)$, $V_m = V_{m1}, W_m = W_{m1}$

$$X = x + y, \qquad Y = x^2 + y^2, \qquad xy = \frac{X^2 - Y}{2}; \qquad 0 \leq X \leq 2,\ 0 \leq Y \leq 2$$

のように変数変換できるので，次の 2 次方程式を考える:

$$t^2 - Xt + \frac{X^2 - Y}{2} = 0$$

ならば，x および y はこの 2 次方程式の解として与えられる.

$$x = \frac{X - \sqrt{2Y - X^2}}{2} \qquad y = \frac{X + \sqrt{2Y - X^2}}{2} \qquad (\because x < y)$$

変数 x, y は実数なので, 判別式 $D(X, Y) = 2Y - X^2 \geq 0$ を満たし, また, それぞれの定義域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ により,

$$0 \leq \underbrace{\frac{X \pm \sqrt{2Y - X^2}}{2}}_{x,y} \leq 1; \qquad Y \leq X^2 - 2X + 2 \tag{4.5}$$

[*4] この V_{m1} と V_{m2} 以外の部分空間 V_m をとると，$(x_1, y_1) \in V_m, (y_1, x_1) \in V_m$ が存在し，$\mathbb{F}(x_1, y_1) = \mathbb{F}(y_1, x_1)$ となり，1 対 1 写像にはならない.

を満たす．逆写像 $\mathbb{F}^{-1}$ は次のように定まる:

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1}: W_{m1} \mapsto V_{m1}; \qquad \mathbb{F}^{-1}(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{2y-x^2}}{2}, \frac{x+\sqrt{2y-x^2}}{2}\right)}$$

ここで,

$$W_{m1} = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2-2x+2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

II. $\mathbb{F}:(x,y) \mapsto (X,Y)$, $V_m = V_{m2}, W_m = W_{m2}$
同様に,

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1}: W_{m2} \mapsto V_{m2}; \qquad \mathbb{F}^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+\sqrt{2y-x^2}}{2}, \frac{x-\sqrt{2y-x^2}}{2}\right)}$$

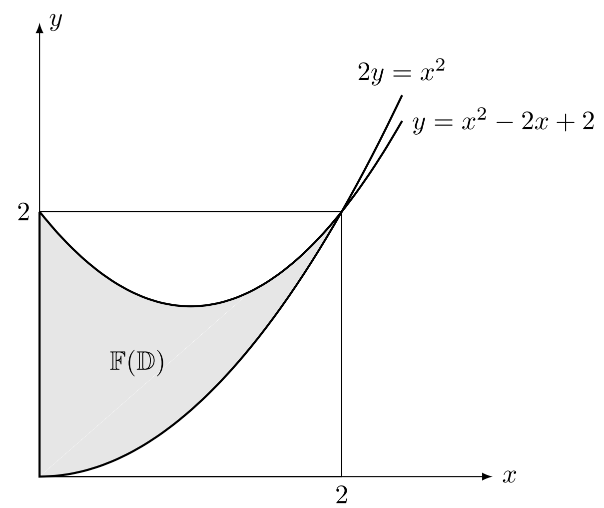
ここで,

$$W_{m2} = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2-2x+2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

(iii) 問題 (ii) の結果により，逆写像が存在する $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ に対して，領域 $\mathbb{D}$ の下で定義される $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ は,

$$\mathbb{F}(\mathbb{D}) = W_{m1} = W_{m2} = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2-2x+2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$$

として現れる．



よって，この領域 $\mathbb{F}(\mathbb{D})$ の面積は次のように計算される:

$$\boxed{S(W_m) = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ dx = \frac{4}{3}}$$

Q.E.D

3. 複素平面 $\mathbb{C}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への写像 $\mathbb{F}(z) = z^2$ は原点を除き, 局所的に 1 対 1 写像であり, C^1 関数により与えられる逆写像を持つことを示せ.

〔解説〕　逆写像定理を利用する:

この問題で定義された複素平面の下での写像 $\mathbb{F}(z) = z^2$ は，次の写像と同値である.[*5]

$$\mathbb{F} : (u, v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv); \qquad V = (u, v), \quad W = (u^2 - v^2, 2uv)$$

ここで，一般に $z = u + iv$ とする．関数 u と v は実関数になる.

ならば，この写像 $\mathbb{F}(V) = W$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびそのヤコビアン $J_{\mathbb{F}}(P)$ は次のように書ける:

$$d\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix}; \qquad J_{\mathbb{F}}(P) = 2(u^2 + v^2) \neq 0.$$

よって，**逆写像定理**により，原点除いたある点 $P(u, v)$ を含むある部分空間 V_m と W_m が存在し，この写像 $\mathbb{F}$ に対して $\mathbb{F}(V_m)$ が 1 対 1 写像になる．よって，その逆写像

$$\mathbb{F}^{-1} : W_m \mapsto V_m$$

が存在し，$\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ となる.

ここで，V_m を次のように定義すると，写像 $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ は 1 対 1 写像になり，その逆写像 $\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ も存在する:[*6]

$$V_m = \{(u, v)|v > 0\}; \qquad W_m$$

ならば，この V_m のもとで,

$$x = u^2 - v^2 = \frac{z^2 + z^{*2}}{2}, \qquad y = 2uv = \frac{z^2 - z^{*2}}{2i}$$

あるいは,

$$z^2 = x + iy, \qquad z^{*2} = x - iy$$

となる．ここから，$z + z^*$ が実数，$z - z*$ が純虚数であることから，次のような関係式を得られる:

$$\begin{cases} u^2 = \left(\dfrac{z + z^*}{2}\right)^2 = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\ v^2 = \left(\dfrac{z - z^*}{2i}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2} \end{cases}, \qquad \text{where,} \ \ (zz^*)^2 = x^2 + y^2$$

従って，この逆写像は V_m, W_m の下で次のように定義される.

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1} : W_m \mapsto V_m; \qquad \mathbb{F}^{-1}(x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}\right)}$$

ここで,

$$W_m = \{(x, y)|y = 0; x < 0, \ y \neq 0; x \in \mathbb{R}\}.$$

Q.E.D

[*5] それぞれ，複素平面の実部と虚部に対応される.

[*6] 写像 $\mathbb{F}(V) = W$ が 1 対 1 写像にならない場合は，$\mathbb{F}(0, v) = \mathbb{F}(0, -v)$ および $\mathbb{F}(u, u) = \mathbb{F}(-u, -u)$ である．なので，$v > 0$ の場合のみには 1 対 1 写像になる.

4. 複素平面 $\mathbb{C}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への写像 $\mathbb{F}(z) = e^z$ は原点を除き, 局所的に 1 対 1 写像であり, C^1 関数により与えられる逆写像を持つことを示せ. この写像は C 全体で 1 対 1 であるか？

〔解説〕　逆写像定理を利用する:

この問題で定義された複素平面の下での写像 $\mathbb{F}(z) = e^z$ は，次の写像と同値である. [*7]

$$\mathbb{F}:\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}e^x\cos\theta\\ e^x\sin\theta\end{bmatrix};\qquad V=\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}e^x\cos\theta\\ e^x\sin\theta\end{bmatrix}$$

ここで，一般に $z = x + i\theta$ とし，オイラー方程式:

$$e^{x+i\theta} = e^x(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を利用する．関数 x と θ は実関数になる.

ならば，この写像 $\mathbb{F}(V) = W$ のヤコビ行列 $d\mathbb{F}$ およびそのヤコビアン $J_{\mathbb{F}}(P)$ は次のように書ける:

$$d\mathbb{F}=\begin{bmatrix}e^x\cos\theta & -e^x\sin\theta\\ e^x\sin\theta & e^x\cos\theta\end{bmatrix}=e^x\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=e^x\mathbb{R}[\theta]\qquad J_{\mathbb{F}}(P)=e^{2x}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\neq 0.$$

ならば，この写像 $\mathbb{F}$ は角 $+\theta$ への回転行列で表せる．(線形代数テキスト参考)

$$\mathbb{R}[\theta]:\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix};\qquad \mathbb{R}[\theta]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\qquad (\text{点 } (\alpha,\beta) \text{ の原点基準回転})$$

よって，**逆写像定理**により，原点除いたある点 $P(u,v)$ を含むある部分空間 V_m と W_m が存在し，この写像 $\mathbb{F}$ に対して $\mathbb{F}(V_m)$ が 1 対 1 写像になる．よって，その逆写像

$$\mathbb{F}^{-1}: W_m\mapsto V_m$$

が存在し，$\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ となる.

ここで，V_m を次のように定義すると，写像 $\mathbb{F}(V_m) = W_m$ は 1 対 1 写像になり，その逆写像 $\mathbb{F}^{-1}(W_m) = V_m$ も存在する:[*8]

$$V_m=\{(x,\theta)|x\in\mathbb{R},\ 0\le\theta\le 2\pi,(0,0)\in V_m\};\qquad W_m$$

ならば，この V_m のもとで,

$$X = e^x\cos\theta,\qquad \Theta = e^x\sin\theta$$

あるいは,

$$x=\ln(X^2+\Theta^2),\qquad \theta=\begin{cases}\cos^{-1}\left(\dfrac{\Theta}{\sqrt{X^2+\Theta^2}}\right) & (\text{where, } 0\le\theta\le\pi),\\ \sin^{-1}\left(\dfrac{\Theta}{\sqrt{X^2+\Theta^2}}\right)+\dfrac{3}{2}\pi & (\text{where, } \pi\le\theta\le 2\pi),\end{cases}.$$

それぞれの関数 e^x および $\cos\theta, \sin\theta$ が実関数で，$X^2 + \Theta^2 > 0$ となるので $\ln(X^2 + \Theta^2)$ が定義される.

ここで,

$$-1\le\frac{\Theta}{\sqrt{X^2+\Theta^2}}<1 \tag{4.6}$$

が逆三角関数の定義域により成り立つことに注意せよ．$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ で式 (4.6) が成り立つ.

[*7] それぞれ，複素平面の実部と虚部に対応される.

[*8] 写像 $\mathbb{F}(V) = W$ が 1 対 1 写像にならない場合は，$\mathbb{F}(0, v) = \mathbb{F}(0, -v)$ および $\mathbb{F}(u, u) = \mathbb{F}(-u, -u)$ である．なので，$v > 0$ の場合のみには 1 対 1 写像になる.

従って，この逆写像は V_m，$W_m \subset \mathbb{C}$ の下で，次のように定義される．

I. $\mathbb{F}^{-1} : W_{m1} \mapsto V_{m1}$

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1}(x+i\theta) = \ln\left(x^2+\theta^2\right) + i\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+\theta^2}}}$$

II. $\mathbb{F}^{-1} : W_{m2} \mapsto V_{m2}$

$$\boxed{\mathbb{F}^{-1}(x+i\theta) = \ln\left(x^2+\theta^2\right) + i\left(\frac{3}{2}\pi + \sin^{-1}\frac{\theta}{\sqrt{x^2+\theta^2}}\right)}$$

ここで，その部分集合として V_{m1}; W_{m1} および V_{m2}; W_m を次のように定義する:

$$V_{m1} = \{x+i\theta | x \in \mathbb{R},\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \notin V_m\}, \qquad W_{m1} = \{x+i\theta | x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R},\ 1 \notin W_m\},$$

および,

$$V_{m2} = \{x+i\theta | x \in \mathbb{R},\ \pi \le \theta \le 2\pi\}, \qquad W_{m2} = \{x+i\theta | x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

一方，複素空間 $\mathbb{C}$ 全体での写像 $\mathbb{F} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ を考える:

$$z_1 = x_1 + i\theta_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = x_1 + i(\theta_1 + 2\pi) \in \mathbb{C}; \qquad \mathbb{F}(z_1) = \mathbb{F}(z_2)$$

となるので，複素数全体 $\mathbb{C}$ からの写像 $\mathbb{F}$ は，$z_1 \neq z_2$ のある複素数 z_1, z_2 が存在し，$\mathbb{F}$ は 1 対 1 写像にならない．

Q.E.D

第 5 章

ラグランジュの未定乗数法

5.1　11 週目

1. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, 次の関数の最大値と最小値を求めよ.

(1)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \tag{5.1}$$

〔解説〕　ラグランジュ乗数法を利用する:

$$G_c(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(P) = \frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$$

この関数 $f(x, y)$ の拘束関数 $G_c(x, y)$ を上式のように定義すると，条件の上での特異点は持たない．ならば，λ をパラメータとして母関数 $F(x, y)$ を,

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

とおくと，**ラグランジュ乗数法**により，この関数の最大・最小点はこの母関数 $F(x, y)$ の上で存在する．

ならば，ラグランジュ乗数法による次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 3x^2 - 2x\lambda = 0 \\ F_y(x, y) = 3y^2 - 2y\lambda = 0 \\ G_c(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

ならば，この連立方程式を行列で[*1]表すと，

$$\begin{bmatrix} 3x^2 & -2x \\ 2y^2 & -2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G_c(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

となることにより，上式の行列式はゼロにならなければいけない[*2]:

$$\det \begin{bmatrix} 3x^2 & -2x \\ 2y^2 & -2y \end{bmatrix} = 6xy(y - x) = 0; \qquad \therefore xy = 0 \ \text{ or } \ x = y. \tag{5.3}$$

[*1] 行列を使えば，場合を分けて考える必要がない．

[*2] もし，行列式がゼロにならない場合は，逆行列が存在し，

$$\begin{bmatrix} 3x^2 & -2x \\ 2y^2 & -2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & -2x \\ 2y^2 & -2y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

となるので，矛盾になる．

式 (5.3) を拘束関数 $G_c(x,y)$ に代入することにより，次の点 P たちを得られる:

$$P_1(\pm 1, 0), \quad P_2(0, \pm 1), \quad P_3\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

よって，この条件 G_c のもとでの関数 $f(x,y)$ の最小または最大は次のように定まる:

$$\boxed{f_{\max}(1,0) = f_{\max}(0,1) = 1, \qquad f_{\min}(-1,0) = f_{\min}(0,-1) = -1.}$$

Q.E.D

(2)

$$f(x,y) = x + 2y \tag{5.4}$$

〔解説〕　ラグランジュ乗数法を利用する:

$$G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(P) = \frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$$

この関数 $f(x,y)$ の拘束関数 $G_c(x,y)$ を上式のように定義すると，条件の上での特異点は持たない．ならば，λ をパラメータとして母関数 $F(x,y)$ を，

$$F(x,y) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

とおくと，**ラグランジュ乗数法**により，この関数の最大・最小点はこの母関数 $F(x,y)$ の上で存在する．

ならば，ラグランジュ乗数法による次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 1 - 2x\lambda = 0 \\ F_y(x,y) = 2 - 2y\lambda = 0 \\ G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

ならば，この連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{bmatrix} 1 & -2x \\ 2 & -2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

となることにより，上式の行列式はゼロにならなければいけない:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2x \\ 2 & -2y \end{bmatrix} = 2(2x - y) = 0; \qquad \therefore y = 2x. \tag{5.6}$$

式 (5.3) を拘束関数 $G_c(x,y)$ に代入することにより，次の点 P たちを得られる:

$$P_1\left(\pm\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm 2\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

よって，この条件 G_c のもとでの関数 $f(x,y)$ の最小または最大は次のように定まる:

$$\boxed{f_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}, \qquad f_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}.}$$

Q.E.D

(3)

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

〔解説〕　ラグランジュ乗数法を利用する:

$$G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(P) = \frac{\partial g}{\partial y}(P) \neq 0$$

この関数 $f(x,y)$ の拘束関数 $G_c(x,y)$ を上式のように定義すると，条件の上での特異点は持たない．ならば，λ をパラメータとして母関数 $F(x,y)$ を,

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

とおくと，**ラグランジュ乗数法**により，この関数の最大・最小点はこの母関数 $F(x,y)$ の上で存在する．

ならば，ラグランジュ乗数法による次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 2ax + 2by - 2x\lambda = 0 \\ F_y(x,y) = 2bx + 2cy - 2y\lambda = 0 \\ G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

ならば，この連立方程式を行列で[*3]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G_c(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

となることにより，行列 $\mathbb{A}$ の行列式はゼロにならなければいけない[*4]:

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0; \tag{5.8}$$

よって，上式の 2 次方程式判別式 $D \geq 0$ なので，次のように場合を分けて考える:

I. $D = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

この行列 $\mathbb{A}$ の段数は $\mathrm{rank}\mathbb{A} = 1$ となるので，G_c の条件 $x^2 + y^2 = 1$ と連立すると，λ_1, λ_2 のとき，式 (5.7) を満たす解 (x_1, y_1) および (x_2, y_2) が一意に定まる．[*5]

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

[*3] この問題では，以前の問題とは違うに，x, y の係数を成分として行列を作る．しかし，相変わらず G_c のもとで (0,0) は含まらないので論理は同じである．

[*4] 原点は，拘束関数 G_c の元ではない:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin G_c$$

[*5] もちろん，連立方程式:

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ bx + (c-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

では，その解が一意に定まらずにパラメータ t により，$x = u(t), y = v(t)$ の形で与えられる．しかし，この $u(t), v(t)$ で $x^2 + y^2 = u(t)^2 + v(t)^2 = 1$ の拘束条件 G_c を加えると一意に定まる．

この (x_1, y_1), (x_2, y_2) はラグランジュ乗数法により得られた連立方程式の解として与えられたものである．ならば，ラグランジュ乗数法によって，条件 G_c のもとでの関数 $f(x, y)$ の最大・最小点はこの (x_1, y_1) か (x_2, y_2) のどちらかになる:

ならば，この関数 $f(x, y)$ が次のような行列の積でも得られることに注目する:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

これを利用して，得られた関係式 (5.9) の左辺に次のような行ベクトルを書けることにより，それぞれの (x_1, y_1) および (x_2, y_2) の関数値を求められる:

$$f(x_1,y_1) = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda_1; \qquad f(x_1,y_1) = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

$$f(x_2,y_2) = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2; \qquad f(x_2,y_2) = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

これらのうち，大きいほうが最大値になり，小さいほうが最小値になる．

$$\boxed{f_{\min}(x_1,y_1) = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}, \qquad f_{\max}(x_2.y_2) = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}}$$

II. $D = (a-c)^2 + 4b^2 = 0$

この場合は，$a = c$，$b = 0$ となる．よって，与えられた関数 $f(x, y)$ は次のように書き直すこともできる．

$$f(x,y) = ax^2 + ay^2 = a(x^2 + y^2) = a. \qquad (a = c)$$

つまり，定数関数になる:

$$\boxed{f_{\min} = f_{\max} = a = c}$$

Q.E.D

2. 条件 $2x^2+3y^2=1$ の条件のもとで, $x-y$ の最大値と最小値を求めよ.

〔解説〕　ラグランジュ乗数法を利用する:

$$G_c(x,y)=2x^2+3y^2-1=0; \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(P)=\frac{\partial g}{\partial y}(P)\neq 0$$

この関数 $f(x,y)$ の拘束関数 $G_c(x,y)$ を上式のように定義すると，条件の上での特異点は持たない．ならば，λ をパラメータとして母関数 $F(x,y)$ を,

$$F(x,y)=x-y-\lambda(2x^2+3y^2-1)$$

とおくと，**ラグランジュ乗数法**により，この関数の最大・最小点はこの母関数 $F(x,y)$ の上で存在する.

ならば，ラグランジュ乗数法による次の連立方程式を考える.

$$\begin{cases} F_x(x,y)=1-4x\lambda=0 \\ F_y(x,y)=-1-6y\lambda=0 \\ G_c(x,y)=2x^2+3y^2-1=0 \end{cases} \tag{5.10}$$

ならば，この連立方程式を行列で表すと,

$$\begin{bmatrix} 1 & -4x \\ -1 & -6y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G_c(x,y)=2x^2+3y^2-1=0$$

となることにより，上式の行列式はゼロにならなければいけない:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -4x \\ -1 & -6y \end{bmatrix}=-2(2x+3y)=0; \qquad \therefore 3y=-2x. \tag{5.11}$$

式 (5.3) を拘束関数 $G_c(x,y)$ に代入することにより，次の点 P たちを得られる:

$$P_1\left(\pm\sqrt{\frac{3}{10}},\mp\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$$

よって，この条件 G_c のもとでの関数 $f(x,y)$ の最小または最大は次のように定まる:

$$\boxed{f_{\max}\left(\sqrt{\frac{3}{10}},-\sqrt{\frac{2}{15}}\right)=\sqrt{\frac{5}{6}}, \qquad f_{\min}\left(-\sqrt{\frac{3}{10}},\sqrt{\frac{2}{15}}\right)=-\sqrt{\frac{5}{6}}.}$$

Q.E.D

3. 体積が一定の直方体のうちで, 表面積が最小となるものを求めよ.

〔正解〕　正方体

〔解説〕　略

4. 楕円面

$$\mathbb{C}: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a,b,c>0) \tag{5.12}$$

に内接する直方体のうちで, 体積が最大となるものは何か?

〔解説〕　ラグランジュ乗数法および

楕円面は原点対称なので，内接する直方体も原点対称である．

ことを利用する:

ならば，この直方体の体積を $V=f(x,y,z)$ とおくと，この 3 変数関数 $f(x,y,z)$ は次のように定まる．

$$f(x,y,z)=8xyz \quad (xyz\neq 0), \qquad (x,y,z)\in\mathbb{C}$$

また，問題の条件により，この直方体が満たすべき拘束条件 $G_c(x,y,z)$ は,

$$G_c(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0; \qquad \frac{\partial G_c}{\partial x}(P)=\frac{\partial G_c}{\partial y}(P)=\frac{\partial G_c}{\partial z}(P)\neq 0.$$

のように定義され，特異点を含まない．ならば，λ をパラメータとして母関数 $F(x,y,z)$ を,

$$F(x,y,z)=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

とおくと，**ラグランジュ乗数法**により，この関数の最大・最小点はこの母関数 $F(x,y)$ の上で存在する．

ならば，ラグランジュ乗数法による次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} F_x(x,y,z)=yz-\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0 \\ F_y(x,y,z)=xz-\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0 \\ F_z(x,y,z)=xy-\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0 \\ G_c(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1 \end{cases} \tag{5.13}$$

ならば，この連立方程式を行列で表すと,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a^2yz & -2x \\ b^2xz & -2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b^2xz & -2y \\ c^2xy & -2z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a^2yz & -2x \\ c^2xy & -2z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}, \qquad G_c(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

となることにより，上式の行列式はゼロにならなければいけない:

$$\det\begin{bmatrix} a^2yz & -2x \\ b^2xz & -2y \end{bmatrix}=2z\left(\frac{x^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)=0; \qquad \therefore \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}. \tag{5.14}$$

2 番目と 3 番目の行列に対しても同じことを繰り返すと,

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

を得られる．ならば，ラグランジュ乗数法によって，この直方体の体積が最大になる各頂点 P_i は,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}; \qquad P_i\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

である．

従って，この楕円面 $\mathbb{C}$ に内接する直方体の体積 $f(x,y,z)$ は次のような最大値を持つ:

$$\boxed{f(x,y,z) \leq f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.}$$

Q.E.D

〔別解〕　**算術平均・幾何平均**の関係式を利用しても導ける:

$x^2 > 0, y^2 > 0, z^2 > 0$ なので，ここから算術平均-幾何平均の関係式[*6]も使える．

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2c^2}}$$

ただし，等号は,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

のとき成り立つ．

よって,

$$\boxed{f(x,y,z) = 8xyz \leq \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.}$$

5. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで, $3x^2 + 2xy + y^2$ の極値を求め, 極大, 極小を判定せよ．

〔正解〕　最小値: $2 - \sqrt{2}$,　最大値: $2 + \sqrt{2}$

〔解説〕　問題 1-(3) の結果に $a = 3, b = 1, c = 1$ を代入する．

（以　下　余　白）

[*6] 算術平均-幾何平均の関係式での注意点: 算術平均-幾何平均の関係式は $a > 0, b > 0$ で，その和 $a + b$ または，積 ab のうち，せめて一方が一定な場合のみ使える:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{等号は，} a = b$$

第 6 章

微分方程式　入門

6.1　12 週目

1. 一階の斉次線形微分方程式 $y' + p(x)y = 0$ の解 $y = U(x)$ は次の関数で与えられることを示せ.

$$U(x) = C\exp\left(\int -p(x)\ dx\right)$$

更に，一階の微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ の解は次の式で与えられることを示せ.

$$y = U(x)\left(\int q(x)U^{-1}(x)\ dx + C\right)$$

ここで，C は定数である.

〔証明〕　**変数分離法**を利用する.

先ずは一階の斉次線形微分方程式に対して考える:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)\ dx$$

与えられた微分方程式をライプニッツ記法 (notation) により，dy/dx で表すと変数分離可能な微分方程式であることを分かる．ならば，積分により，

$$\ln y = \int -p(x)\ dx + C_1; \qquad \boxed{\therefore U(x) = C\exp\left(\int -p(x)\ dx\right).}$$

このような関数 $U(x)$ を積分因子 (integral factor) と呼ぶ.

続いて，一階の非斉次線形微分方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ に対しても議論する.

$$\frac{d}{dx}\left(yU^{-1}(x)\right) = U^{-1}(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}U^{-1}(x) = \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right)U^{-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}U^{-1}(x) = Cp(x)\exp\left(\int p(x)\ dx\right) = p(x)U^{-1}(x).$$

ならば，与えられた非斉次微分方程式の両辺に関数 $U^{-1}(x)$ をかけることにより，斉次微分方程式に変えられる:

$$U^{-1}(x)q(x) = U^{-1}(x)\frac{dy}{dx} + p(x)U^{-1}(x)y = \frac{d}{dx}\left(yU^{-1}(x)\right); \qquad \underline{yU^{-1}(x) = \int U^{-1}(x)q(x)\ dx + C}$$

ならば，斉次微分方程式と同じように変数分離法を利用して，x に関して積分することによって解関数 y を求められる:

$$\boxed{\therefore y = U(x)\left(\int q(x)U^{-1}(x)\ dx + C\right).}$$

Q.E.D

(以　下　余　白)

2. 次の同次系の線形微分方程式の一般解を求めよ．

(1)
$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{6.1}$$

〔解説〕　作用演算子 $D = d/dx$ を利用する:

$$D = \frac{d}{dx}; \qquad D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n = \frac{d^n}{dx^n}.$$

ならば，この作用演算子の間には交換法則が成り立つ．例えば，

$$D(D+3)y = D\left(\frac{dy}{dx} + 3y\right) = \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}, \qquad (D+3)Dy = (D+3)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}.$$

この問題で与えられた微分方程式をこの作用演算子を用いて表すと，

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる．

さらに，作用演算子 D の間の演算には交換法則が成り立つので，

$$(D-2)(D-3)y = 0$$

とも書ける．ならば，この方程式を二つの方程式で分離できる[*1]:

$$(D-2)y_1 = 0 \qquad \text{または，} \qquad (D-3)y_2 = 0.$$

次のような基本解 y_1, y_2 は問題 1 のように変数分離に得られる:

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{3x}$$

この微分方程式の一般解はこれら基本解の線形結合として与えられる:

$$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}$$

(2)
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

〔正解〕　$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{x}$

〔解説〕　略

[*1] 原論的には，微分方程式の解は，

$$(D-2)y_1 = 0,\ \ (D-3)y_2 = 0,\ \ (D-2)y_3 = y_2,\ \ (D-3)y_4 = y_1$$

となる．しかし，それは結局，y_1 と y_2 に y_3, y_4 が含まれるので y_1, y_2 だけを考えてもよい:

$$(D-2)y_1 = \frac{dy_1}{dx} - 2y_1 = 0; \quad y_1 = c_1e^{2x}, \quad (D-3)y_2 = \frac{dy_2}{dx} - 3y_2 = 0; \quad y_2 = c_2e^3$$

上式により得られた y_1, y_2 から，$(D-2)y_3 = e^{3x}, (D-3)y_4 = e^{2x}$ は問題 1 によって，

$$y_3 = c_3e^{2x} + e^{3x}, \quad y_4 = c_4e^{3x} - e^{2x}$$

になる．これは，一般に成立する．

(3)
$$y''' + 3y'' + 3y +' y = 0$$

〔正解〕　$y = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x}$

〔解説〕　$(D-1)(D+1)^2(ue^{-x})$ を計算してみる．略

(4)
$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

〔正解〕　$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$

〔解説〕　略

(4)
$$(D-2)^2(D+1)y = 0$$

〔正解〕　$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{2x}$

〔解説〕　略

(4)
$$(D^2 + 2D + 2)(D+1)y = 0$$

〔正解〕　$y = e^{-x}(c_1 + c_2 e^{-ix} + c_3 e^{ix})$

〔解説〕　略

参考文献

[1] 私の頭…(?)