

## The Quantization of Monopole fields and Symmetricity

ONOGI GROUP, HEP-TH., DEPT. OF PHYS., OSAKA UNIV.

August 26, 2023

# 目次

- ① マクスウェル場の修正
- ② Dyon のゲージ理論
- ③ Dyon-電子相互作用のゲージ理論

# The Correction of Maxwell Fields

体積電荷密度  $\varrho_e$  と体積磁荷密度  $\varrho_g$  が共存する場のマクスウェル方程式：

マクスウェル方程式 (Monopole fields)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varrho_e , \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varrho_g ,$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \left( \mathbf{J}_g(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) , \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

# Action integral of Monopole Fields

単極子場の作用積分を書くため，4 元電荷ポテンシャル  $A^\mu$  および 4 元磁荷ポテンシャル  $B^\mu$ ：

4 元ポテンシャル (Four-potentials of Monopole fields)

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \mathbf{A}_e \end{pmatrix} \quad , \quad B^\mu \equiv \begin{pmatrix} \varphi_g \\ \mathbf{A}_g \end{pmatrix} \quad (2)$$

とする．

# Action integral of Monopole fields-U(1) Gauge groups

定義した 4 元ポテンシャル (2) の上に、相対論的共変性とゲージ不変性を加えると、系の作用積分は以下のように書ける：

単極子場の作用積分 (Action of Monopole fields)

$$S = - \int \frac{1}{4(q_e^2 + q_g^2)} [D^\mu, D^\nu]^2 d^4x + \int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi d^4x$$
$$+ \int (D_\mu \Phi)^*(D^\mu \Phi) - m^2(\Phi^* \Phi) d^4x \quad (3)$$

# Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

作用積分を式 (3) のように書いた時の 4 元ポテンシャル  $A^\mu, B^\mu$  およびスピノル  $\psi(x^\mu)$  のゲージ変換：

$$\begin{cases} A_\mu & \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x^\mu) , \\ B_\mu & \mapsto B_\mu + \partial_\mu \Gamma(x^\mu) , \\ \psi(x^\mu) & \mapsto e^{-iq_e \Lambda(x^\mu) - iq_g \Gamma(x^\mu)} \psi(x^\mu) \end{cases} \quad (4)$$

を想定すると，系の共変微分  $D_\mu$  を以下のように定義できる：

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + iq_e A_\mu + iq_g B_\mu. \quad (5)$$

# Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

系の電磁気テンソル  $G_{\mu\nu}$  を以下のように定義して使う：

電磁気テンソル (Electromagnetic tensors)

$$G_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{\sqrt{q_e^2 + q_g^2}}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{\sqrt{q_e^2 + q_g^2}}(eF_{\mu\nu} + gE_{\mu\nu}). \quad (6)$$

ここでテンソル  $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$ ,  $E_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}B_{\nu]}$  とする.

# Maxwell equation of Monopole fields-U(1) Gauge groups

ここからハミルトンの最小作用の原理を用いるため，作用積分 (3) の各項の変分を以下のように計算する：

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_A(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = -\frac{4}{q_e^2 + q_g^2}(q_e^2\partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu})\delta A_\nu + \partial_\mu \mathcal{O}^\mu , \\ \delta_A\{\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi\} = \bar{\psi}(i\delta\not{D})\psi = -(q_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\delta A_\mu , \\ \delta_A\{(D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi)\} = \delta A_\mu[-iq_e\{\Phi^*D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\Phi\}]. \end{array} \right. \quad (7)$$

4 元ポテンシャル  $B^\mu$  に関する変分も同様にできて，ここからマクスウェル方程式が導かれる．



# The Maxwell equations of Dyons

それぞれの 4 元カレント  $J^\mu, K^\mu$  を以下のように定義する：

$$J^\mu \equiv iq_e \{ \Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi \} + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (8)$$

$$K^\mu \equiv iq_g \{ \Phi^* D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^* \Phi \} + g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (9)$$

以上より，以下のマクスウェル方程式が得られる：

## 4 元マクスウェル方程式 (Four-Maxwell equation)

$$q_e^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu E^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) J^\mu, \quad (10)$$

$$q_g^2 \partial_\mu E^{\mu\nu} + q_e q_g \partial_\mu F^{\mu\nu} = (q_e^2 + q_g^2) K^\mu. \quad (11)$$

# Construction of Dyon-electron system-SU(2) Gauge theory

電子  $e^-$  とダイオン  $\nu_{eg}$  が相互作用するものとして、系のスピノルをスピノル  $\psi_e$  と  $\psi_{\nu_{eg}}$  の二重項として以下のように書く：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここで 3 元パラメーター  $\alpha$  を用意してゲージ群 SU(2) のスピノル変換を：

$$\Psi \mapsto \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha(x^\mu) \cdot \sigma\right) \Psi \simeq \left(1 - \frac{i}{2}\alpha(x^\mu) \cdot \sigma\right) \Psi \quad (13)$$

として設定する.

# SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Covariant Derivative

ゲージ変換 (13) により，ゲージ場  $\mathbf{W}_\mu$  を用意すると系の共変微分  $D_\mu$  は：

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu(x^\mu) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (14)$$

として定義できる．パウリ行列が非可換で  $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$  となることに注意して，以下の Dirac 方程式：

$$\left[ i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) - m \right] \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

が不変になるようにゲージ場  $\mathbf{W}_\mu$  の変換則を決める．

# SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

Dirac 場の方程式 (15) が不変になるための変換  $\mathbf{W}_\mu \mapsto \mathbf{W}'_\mu$  は：

$$i\gamma^\mu \left[ (\partial_\mu U) - \frac{ig}{2} U (\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \frac{ig}{2} (\mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U \right] \Psi = 0 \quad (16)$$

の関係を満たすべきである． SU(2) 群の生成子  $U = 1 - \frac{ig}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  とする．

SU(2) ゲージ群の変換則 (Gauge transformations)

$$\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \mapsto \mathbf{W}'_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = U (\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^{-1} + \frac{2i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (17)$$

# SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Transformation rules

変換式 (17) にゲージ群の生成子  $U$  を代入して具体的に計算できる：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \mathbf{W}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{2i}{g} \left(-\frac{i}{2} \partial_{\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \quad (18) \\ &= \mathbf{W}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{2} \alpha^i W_{\mu}^j [\sigma^i, \sigma^j] + \frac{1}{2g} \partial_{\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

導入したゲージ場  $\mathbf{W}_{\mu}$  は式 (18) の変換式を満たす。

# SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Dirac fields

Dyon-電子相互作用を示す Dirac 場の Lagrangian 密度は：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= (\bar{\psi}_e, \bar{\psi}_{\nu_{eg}}) \left( i\not{\partial} - \frac{g}{2} \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - m \right) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi}_e \left( i\not{\partial} - \frac{g}{2} W^3 - m \right) \psi_e - \frac{g}{2} \bar{\psi}_e (W^1 - iW^2) \psi_{\nu_{eg}} \\ &\quad + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left( i\not{\partial} + \frac{g}{2} W^3 - m \right) \psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2} \bar{\psi}_{\nu_{eg}} (W^1 + iW^2) \psi_e.\end{aligned}\tag{19}$$

ここでゲージ場  $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$  としておいた.

$$\begin{aligned} e^-: \quad & \left(i\not{\partial} - \frac{g}{2}W^3 - m\right)\psi_e - \frac{g}{2}(W^1 - iW^2)\psi_{\nu_{eg}} = 0, \\ \nu_{eg}: \quad & \left(i\not{\partial} + \frac{g}{2}W^3 - m\right)\psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2}(W^1 + iW^2)\psi_e = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

この模型では電子とダイオンの異なる粒子間の相互作用を想定しているため、片方が無い極限では Dirac 方程式 (20) は自由場に収束する：

$$(i\not{D} - m) \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_{\nu_{eg}} \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

# Determination of Gauge fields

以下の要請を加えると、ゲージ場  $\mathbf{W}_\mu$  を決定できる：

## Dirac 場の要請

電荷からなるゲージ場  $A^\mu$  は**局所的相互作用**を媒介する．磁荷からなるゲージ場  $B^\mu$  は**大域的相互作用**を媒介する．

電子とダイオンを入れ替える変換 ( $e^- \leftrightarrow \nu_{eg}$ ) に対して不変である．

以上の条件から、ゲージ場  $\mathbf{W}_\mu$  は以下のみが許される：

$$W_\mu^1 = q_e B_\mu, \quad W_\mu^2 = 0, \quad W_\mu^3 = q_e q_g A_\mu. \quad (22)$$



# Determination of Gauge fields

ゲージ場の決定 (22) より, Dirac 場の Lagrangian は:

## Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = & \bar{\psi}_e \left( i\not{\partial} - \frac{g}{2} q_e q_g A - m \right) \psi_e + \frac{g}{2} \bar{\psi}_e q_e q_g A \psi_{\nu_{eg}} \\ & + \bar{\psi}_{\nu_{eg}} \left( i\not{\partial} + \frac{g}{2} q_e q_g A - m \right) \psi_{\nu_{eg}} - \frac{g}{2} \bar{\psi}_{\nu_{eg}} q_e q_g A \psi_e.\end{aligned}\tag{23}$$

ダイオンのない極限  $q_g \rightarrow 0$ ,  $\psi_{\nu_{eg}} \rightarrow 0$  の下では自由場に収束する:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \xrightarrow{q_g, \psi_{\nu_{eg}} \rightarrow 0} \bar{\psi}_e (i\not{\partial} - m) \psi_e.\tag{24}$$

# SU(2) Dyon-electron Gauge theory-Curvature Tensors

U(1) ゲージ理論と同様に, SU(2) ゲージ場の場の強さ  $G_{\mu\nu}^k$  は**曲率テンソル**の拡張として:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^k &\equiv \frac{2}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_{[\mu} W_{\nu]}^k \sigma^k + \frac{ig}{2} W_\mu^i W_\nu^j [\sigma^i, \sigma^j] \\ &= (\partial_{[\mu} W_{\nu]}^k - g\epsilon_{ijk} W_\mu^i W_\nu^j) \sigma^k. \end{aligned} \tag{25}$$